4. Problemi.

4.1. (Dis)omogeneizzazione di polinomi. Mostrare che l'operatore h (tra polinomi, risp. tra ipersuperficie) è iniettivo e rispetta l'ordine (di divisibilità, risp. di inclusione). Mostrare che l'operatore a (tra polinomi, risp. tra ipersuperficie) è suriettivo e rispetta l'ordine (di divisibilità, risp. di inclusione).

Mostrare che l'operatore ah (affinizzazione seguita da omogeneizzazione tra polinomi, risp. tra ipersuperficie) è un operatore (d'un insieme in sè) che rispetta l'ordine (di divisibilità, risp. di inclusione), è minore dell'identità, è di quadrato identico.

4.2. Divisori. Descrivere i possibili divisori $\mathrm{div}_L(\mathscr{D})$, per ogni caso dando degli esempi, per i casi seguenti:

4.2.1. L una retta e $\mathscr{D}$ curva di secondo grado (nel piano);

4.2.2. L una retta e $\mathscr{D}$ curva di terzo grado (nel piano);

4.2.3. L una retta e $\mathscr{D}$ curva di quarto grado (nel piano);

4.2.4. L un piano e $\mathscr{D}$ superfcie di secondo grado (nello spazio tridimensionale);

4.2.5. L un piano e $\mathscr{D}$ superfcie di terzo grado (nello spazio tridimensionale);

4.2.6. L uno spazio tridimensionale e $\mathscr{D}$ ipersuperfcie di secondo grado (nello spazio quadridimensionale);

4.3. Famiglie di coniche. Mostrare che le coniche tangenti ad una fissata retta (senza prefissare il punto di tangenza) formano una ipersuperficie quadratica irriducibile dello spazio delle coniche, e classificare tale quadrica.

Generalizzare alle quadriche dello spazio proiettivo.

4.3.1. Nella varietà lineare delle coniche passanti per un fissato punto, classificare le ipersuperficie descritte dalle coniche tangenti ad una fissata retta (senza prefissare il punto di tangenza).

4.3.2. Descrivere i sottospazi lineari di coniche di dimensione 1 (fasci) e 2 (reti).

4.4. Famiglie di cubiche. Mostrare che le cubiche tangenti ad una fissata retta (senza prefissare il punto di tangenza) formano una ipersuperficie irriducibile dello spazio delle cubiche. Di che grado?

4.4.1. Descrivere l'insieme delle cubiche passanti per due fissati punti distinti e aventi in entrambi come tangente la retta congiungente i due punti.

4.4.2. I tre vertici di un triangolo e tre punti su ogni lato (distinti dai vertici) formano un sistema di punti in posizione generale per le cubiche?

4.5. Fissiamo $P_1, \dots, P_m$ punti distinti del piano proiettivo, e sia $S_d(P_1, \dots, P_m)$ il sistema lineare dei divisori di grado d contenenti quei punti. Quale può essere la dimensione di tale sistema di divisori (dare una stima superiore)?

Supponiamo ora che esista una retta r tale che $P_1, \dots, P_n \in r$ con $m > d$, e $P_{n+1}, \dots, P_m \notin r$. Si possono confrontare allora $S_d(P_1, \dots, P_m)$ e $S_{d-1}(P_{n+1}, \dots, P_m)$?

4.6. Coniche. Ricordare come le coniche si ottengano:

4.6.1. per proprietà metriche focali;

4.6.2. per proprietà metriche polari;

4.6.3. per sezioni coniche.

4.7. Problema di Delio (Apollo): duplicazione del cubo. Si tratta di costruire un altare di forma cubica il cui volume sia esattamente il doppio di quello di un altare dato della stessa forma (gli dèi fanno sempre richieste bizzarre).

È noto dalla teoria di Galois che non è possibile duplicare il cubo con riga e compasso, cioè usando costruzioni geometriche che si facciano con rette e circonferenze a partire da punti a coordinate intere o razionali (il problema consiste nel determinare $\sqrt[3]{2}$, che appartiene ad estensioni di grado 3 di $\mathbb{Q}$, essendo zero del polinomio $T^3 - 2$, irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$; con rette e cerchi si ottengono solo estensioni di grado due e sue potenze).

Mostrare che il problema si risolve usando due parabole del piano (usando le parabole a coefficienti interi $Y = X^2$ e $X = 2Y^2$, mostrare che si può determinare $\sqrt[3]{2}$).