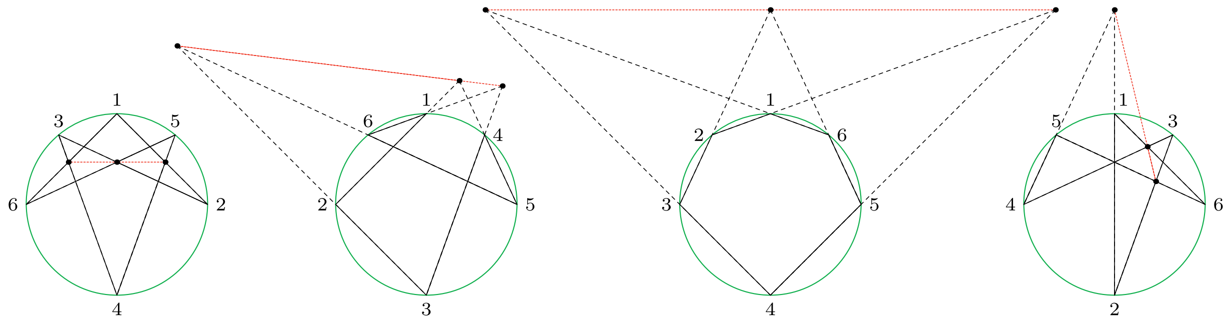
3.3.6. TEOREMA (MISTICO DI PASCAL). *Un esagono è inscrivibile in una conica se e solo se i lati opposti si incontrano in tre punti allineati* (si noti che per i vertici di un esagono potrebbe non passare alcuna conica).

Per dimostrare il risultato, basta considerare i lati dell'esagono, diciamo $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ numerati in ordine, e il fascio di cubiche generato dalle due cubiche spezzate in ℓ_1, ℓ_3, ℓ_5, e in ℓ_2, ℓ_4, ℓ_6. I nove punti di intersezione sono dati dai vertici dell'esagono e dalle intersezioni dei lati opposti. Dunque una implicazione segue subito dal risultato precedente; per l'altra bisogna ragionare considerando una conica contenuta in una cubica (si fa analogamente la caso di rette, poiché una conica irriducibile è parametrizzabile).

In generale, dati sei punti su una conica, quanti esagoni restano determinati (al variare dell'ordine), e quante rette mistiche di Pascal? Le 60 rette possono essere raggruppate in 20 terne di rette concorrenti; i 20 punti così identificati si chiamano punti di Steiner dell'esagono.

Che relazione c'è tra il teorema mistico di Pascal e il teorema dell'asse di collineazione (una coppia di rette è una conica degenere...)?

Qui sono rappresentate alcune rette mistiche di Pascal (in rosso punteggiato), relative a diversi esagoni che insistono sugli stessi punti d'una conica:



3.3.7. PROBLEMA: CASI LIMITE DEL TEOREMA DI PASCAL. Quando un lato degenera identificando i due punti estremi, ed usando in tal caso la tangente alla conica, possiamo "usare" il risultato di Pascal nei casi limite:

(1) per un pentagono inscritto in una conica, ogni lato interseca la tangente al vertice opposto in un punto della retta determinata dalle intersezioni dei lati rimanenti (in che modo?);

(2) per un quadrilatero inscritto in una conica (vi sono due casi da esplicitare)?

(3) per un triangolo inscritto in una conica, sono allineati i tre punti di intersezione di lati con tangenti al vertice opposto (nota: si tratta del problema di trovare una conica tra due triangoli uno inscritto nell'altro, ovvero del passaggio per tre punti con fissate tangenti, sei condizioni lineari...).