3.2.1. Se $m = 1$ parliamo di fasci di ipersuperficie, e il lettore ha già incontrato fasci di rette, di piani, di coniche e di altri oggetti.

3.2.2. Se $m = 2$ parliamo di reti (talvolta stelle) di ipersuperficie. Il lettore ha già incontrato stelle di piani (di centro un punto) nello spazio proiettivo tridimensionale.

3.3. Condizioni di passaggio per fissati punti. Nei prossimi due capitoli troveremo vari esempi di condizioni lineari legate ai punti multipli e ai relativi complessi tangenti, o alla polarità; un esempio invece immediato è il passaggio per un punto: imporre il passaggio per un punto è una condizione lineare semplice. Il passaggio per due punti distinti è una condizione lineare doppia. Se $i \leqslant d$ allora il passaggio per i punti distinti dà una condizione lineare i-pla.

3.3.1. È ragionevole aspettarsi, poiché lo spazio proiettivo delle curve (piane) di grado d ha dimensione $d(d+3)/2$, che il passaggio per $d(d+3)/2$ punti "in posizione sufficientemente generale" determini una unica curva di grado d. Essere "in posizione sufficientemente generale" deve significare che le condizioni imposte ad un generico polinomio omogeneo di grado d di annullarsi in quei punti, diano condizioni lineari indipendenti sui coefficienti del polinomio. Ma caratterizzare questa nozione in termini geometrici non è facile.

3.3.2. Il passaggio per 5 punti del piano proiettivo determina una conica, a meno che non ve ne siano quattro allineati; in tal caso imporre il passaggio per tre dei punti impone che la conica contenga la retta per i tre punti, e quindi ogni altro punto della retta.

3.3.3. Se consideriamo due cubiche nel piano che si intersechino in 9 punti distinti (per esempio possiamo usare due cubiche spezzate in tre rette ciascuna, con i 9 punti d'intersezione tutti distinti), allora per quei 9 punti passano infinite cubiche (tutte quelle del fascio generato dalle due date), e quindi i nove punti non sono "in posizione sufficientemente generale" per determinare una sola cubica (lo spazio proiettivo delle cubiche piane ha dimensione 9).

Dall'esempio è facile capire che in generale due cubiche passanti per 8 punti "in posizione sufficientemente generale" si incontrano anche in un ulteriore punto, e per quel punto passeranno tutte le cubiche che contengono gli 8 punti dati.

In generale, due curve di grado d passanti per $d(d+3)/2-1$ punti "in posizione sufficientemente generale" si incontrano anche in un ulteriore punto, e per quel punto passeranno tutte le curve di grado d passanti per i punti dati inizialmente.

3.3.4. Metodo di Berzolari. Una costruzione geometrica che permette di ottenere punti in posizione generale su una curva è quello di Berzolari, che ora andiamo ad illustrare. Esso si basa sul fatto elementare che una curva di grado d interseca ogni retta in un divisore di ordine d (su un corpo algebricamente chiuso), e che se il ciclo intersezione contiene più di d punti (contati con molteplicità), allora la retta è contenuta nella curva come una componente.

Data una curva $\mathscr{C}$ di grado d, si scelga un punto P del supporto, e si scelgano d rette $l_1, l_2, \ldots, l_d$ tali che nessuna contenga P, ciascuna intersechi $\mathscr{C}$ in d punti distinti, i punti di intersezione delle rette non cadano in $\mathscr{C}$ né concorrano tra di loro. Ora scegliamo dei punti (tutti distinti) sulla curva: due su l_1, tre su l_2, quattro su l_3, $i+1$ su l_i (dunque d su l_{d-1}), infine d punti su l_d. Abbiamo allora scelto $1+2+3+\cdots+d+d = d(d+1)/2+d = d(d+3)/2$ punti sulla curva che sono in posizione generale. Infatti, se così non fosse vi sarebbe (almeno) un fascio di curve di grado d per quei punti, e imponendo il passaggio per un ulteriore punto di l_d troveremmo una curva $\mathscr{D}$ di grado d che conterrebbe l_d come componente (intersezione in $d+1$ punti); l'altra componente avrebbe grado $d-1$ e conterrebbe l_{d-1} come componente (intersezione in d punti); l'ulteriore componente di grado $d-2$ e contiene l_{d-2} come componente (intersezione in $d-1$ punti); e così via si vede che $\mathscr{D}$ dev'essere l'unione delle d rette scelte, e allora non può contenere P.

3.3.5. Riducibilità per curve di un fascio. Supponiamo di avere un fascio di curve di grado d che si intersecano in d^2 punti distinti, di cui d allineati. Allora i restanti $d(d-1)$ punti cadono su una curva di grado $d-1$, e costituiscono l'intersezione di questa con tutte le curve del fascio.

Infatti, basta cercare la curva del fascio che contiene come componente la retta per i d punti allineati (esiste, ed è unica, perché basta imporre la condizione lineare di passaggio per un ulteriore punto di quella retta). Questa curva si decompone quindi nella retta e in una curva di grado $d-1$ che deve quindi passare per i punti rimanenti del ciclo base del fascio (si usa il lemma di Study?).

Questo è un caso del teorema di Noether, che ha già delle applicazioni importanti e classiche; per esempio: