Come coordinate proiettive per una ipersuperficie si possono usare i coefficienti del corrispondente polinomio (associato in qualche riferimento) con un fissato ordine (che per noi sarà sempre l'ordine lessicografico).

Invece le ipersuperficie affini di grado fissato d in uno spazio affine di dimensione n su un corpo K si possono identificare con i polinomi in n indeterminate non nulli di grado d a meno di moltiplicazione per scalari non nulli. Quindi quest'insieme è in modo naturale un sottinsieme di $I_{n,d} = \mathbb{P}(H_{n,d})$. Si tratta in effetti del complementare dell'intersezione di $d+1$ iperpiani di $I_{n,d}$ (quali?).

3.1.1. Dimensioni. Lo spazio vettoriale $H_{n,d}$ dei polinomi omogenei di grado d in $K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ ha dimensione $\binom{n+d}{d}$ e dunque la dimensione dello spazio proiettivo delle ipersuperficie proiettive di grado d di uno spazio proiettivo di dimensione n è $\binom{n+d}{d} - 1$.

L'asserzione si dimostra contando i monomi di grado d in $n+1$ indeterminate, e si può fare in vari modi. Per esempio: la scelta di un monomio corrisponde ai modi possibili di ordinare d palline uguali ed n sbarrette uguali (ogni numero di palline tra due sbarrette è l'esponente da dare nell'ordine alle variabili). Altro esempio: si tratta della scelta, senza ordine né ripetizione di n posizioni tra $n+d$ posizioni date (ogni numero di posizioni libere tra due scelte è l'esponente da dare nell'ordine alle variabili). Oppure: per induzione sapendo che la dimensione $h_{n,d}$ dello spazio vettoriale $H_{n,d}$ soddisfa alla condizione ricorsiva $h_{n,d} = h_{n-1,d} + h_{n-1,d-1} + h_{n-1,d-2} + h_{n-1,d-3} + \cdots + h_{n-1,1} + 1 = \sum_{i=0}^{d} h_{n-1,i}$, che si può leggere sul triangolo di Tartaglia.

3.1.2. L'insieme delle ipersuperficie di grado 1 di uno spazio proiettivo, gli iperpiani, formano come ben noto uno spazio proiettivo della stessa dimensione (lo spazio proiettivo duale). Invece l'insieme delle ipersuperficie di grado 1 di uno spazio affine, gli iperpiani, descrivono il sottinsieme del duale del completamento proiettivo complementare di un unico punto (l'iperpiano improprio); in particolare non è uno spazio affine, se $n > 1$.

3.1.3. Lo spazio delle quadriche in uno spazio proiettivo di dimensione n ha struttura di spazio proiettivo di dimensione $\binom{n+2}{2} - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$. Che sottinsieme formano le quadriche affini di un sottospazio affine?

3.1.4. Lo spazio delle ipersuperficie cubiche in uno spazio proiettivo di dimensione n ha struttura di spazio proiettivo di dimensione $\binom{n+3}{3} - 1$. Per esempio le cubiche di un piano proiettivo formano uno spazio proiettivo di dimensione 9.

3.1.5. Spazi di ipersuperficie di grado d della retta. Nel caso $n = 1$ (retta proiettiva), per determinare le ipersuperficie di grado d è necessario in un fissato riferimento assegnare $\binom{1+d}{1} = d+1$ coefficienti non tutti nulli a meno di proporzionalità, che sono i coefficienti dei monomi $X_0^i X_1^{d-i}$ nel polinomio determinato dall'ipersuperficie. Quindi lo spazio delle ipersuperficie di grado d della retta ha struttura di spazio proiettivo di dimensione d.

3.1.6. Spazi di Curve. Nel caso $n = 2$ (piano proiettivo), per determinare le curve di grado d è necessario in un fissato riferimento assegnare $\binom{2+d}{2} = \frac{1}{2}(d+2)(d+1)$ coefficienti che sono i coefficienti dei monomi $X_0^i X_1^j X_2^{d-i-j}$ nel polinomio determinato dall'ipersuperficie. Può essere utile rappresentare i monomi in questione in un triangolo che evidenziamo qui nei casi $d = 2, 3, 4$:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0^2 & & \\ & X_0X_1 & & X_0X_2 & \\ X_1^2 & & X_1X_2 & & X_2^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & X_0^3 & & & \\ & & X_0^2X_1 & & X_0^2X_2 & & \\ & X_0X_1^2 & & X_0X_1X_2 & & X_0X_2^2 & \\ X_1^3 & & X_1^2X_2 & & X_1X_2^2 & & X_2^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & X_0^4 & & & & \\ & & & X_0^3X_1 & & X_0^3X_2 & & & \\ & & X_0^2X_1^2 & & X_0^2X_1X_2 & & X_0^2X_2^2 & & \\ & X_0X_1^3 & & X_0X_1^2X_2 & & X_0X_1X_2^2 & & X_0X_2^3 & \\ X_1^4 & & X_1^3X_2 & & X_1^2X_2^2 & & X_1X_2^3 & & X_2^4 \end{array}$$

In particolare lo spazio delle curve di grado d ha struttura di spazio proiettivo di dimensione $\frac{1}{2}d(d+3)$.

3.2. Definizione (Sistemi Lineari di ipersuperficie). *Le famiglie di ipersuperficie proiettive di un fissato grado d che formino un sottospazio lineare nello spazio proiettivo formato da tutte quelle ipersuperficie si dicono sistemi lineari di ipersuperficie, e la dimensione di tale sottospazio si chiama anche il grado di libertà della famiglia data.*

Dunque un sistema lineare di dimensione m (o con m gradi di libertà) è descritto da $m+1$ ipersuperficie in posizione generale, nel senso dello spazio proiettivo delle ipersuperficie di quel grado.

Si dicono condizioni lineari le condizioni poste sulle ipersuperficie di un fissato grado che determinano sistemi lineari di ipersuperficie; la condizione si dice i-pla (semplice, doppia, tripla, ... per $i = 1, 2, 3, \ldots$) se determina un sottospazio lineare di codimensione i.