**2.1.4.** È chiaro dalle definizioni che possiamo identificare le ipersuperficie irriducibili $V$ con il divisore $V$ (sic, cioè con il divisore $D$ tale che $\mathrm{ord}_W(D) = \delta_{V,W}$, nullo se $W \neq V$ e uno se $W = V$). Quindi identificheremo le ipersuperfici irriducibili con i divisori effettivi d'ordine uno, e le ipersuperficie con i divisori effettivi con ordini minori o uguali a uno su ogni ipersuperficie irriducibile.

**2.1.5.** Divisori della retta su un corpo algebricamente chiuso. Si tratta delle somme formali di punti.

**2.1.6.** Divisori della retta reale. Si tratta delle somme formali di punti razionali su $\mathbb{R}$ e di coppie di punti coniugati non razionali su $\mathbb{R}$ (cioè coppie di punti a coefficienti complessi coniugati in un, e dunque ogni, riferimento razionale su $\mathbb{R}$).

**2.1.7.** Divisori della retta razionale. Si tratta delle somme formali di punti razionali su $\mathbb{Q}$ e di collezioni di punti a coefficienti non razionali (su $\mathbb{Q}$) e tali che siano tutti e soli gli zeri di un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[T]$ (questo in ogni, basta in un, riferimento $\mathbb{Q}$-razionale).

**2.1.8.** Divisori del piano su un corpo algebricamente chiuso. Si tratta delle somme formali di curve irriducibili.

**2.1.9.** Divisori del piano su un corpo non algebricamente chiuso. Si tratta delle somme formali di curve irriducibili su $K$.

**2.2.** Divisori d'intersezione. Per far capire l'utilità della definizione di divisore, definiamo il ciclo intersezione di un divisore con un sottospazio lineare. Se $\mathscr{D} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P})$ è effettivo e $L$ è un sottospazio lineare il cui supporto non è contenuto nel supporto di $\mathscr{D}$, vogliamo definire l'intersezione $L \cdot \mathscr{D}$ di $\mathscr{D}$ e $L$ in quanto divisore di $L$. In una scelta di un riferimento, sia $\mathscr{D} = \mathrm{div}\,(g(\underline{X}))$ e siano $\underline{X} = A\underline{Y}$ delle equazioni parametriche per $L$ ($A$ è matrice $n{+}1$ per $m{+}1$ di rango massimo se $\dim L = m$, e dunque $\underline{Y}$ sono coordinate proiettive in $L$). Consideriamo allora $g_L(\underline{Y}) = g(A\underline{Y})$, polinomio omogeneo nelle $\underline{Y}$ e dello stesso grado di $g$ (nelle $\underline{X}$). Allora definiamo $L \cdot \mathscr{D} := \mathrm{div}\,(g_L(\underline{Y})) \in \mathrm{Div}(L)$. Si osservi che la definizione non dipende dalla scelta delle coordinate, né dalla scelta delle equazioni parametriche per $L$.

Ovviamente $\mathrm{Supp}\,(L \cdot \mathscr{D}) = \overline{L} \cap \mathrm{Supp}\,(\mathscr{D})$ (punti a valori in $\overline{K}$) e $\mathrm{ord}(L \cdot \mathscr{D}) = \mathrm{ord}(\mathscr{D})$. In particolare $L \cdot \mathscr{D}$ tiene conto delle molteplicità con cui una ipersuperficie irriducibile di $L$ si presenta nella intersezione con il divisore $\mathscr{D}$.

Per esempio se $\mathscr{C}$ è una conica del piano proiettivo complesso, e $r$ è una retta non contenuta in $\mathscr{C}$, allora $r \cdot \mathscr{C}$ può essere del tipo $P + Q$ con $P$ e $Q$ punti distinti di $r$, oppure $2P$ con $P \in r$ (se $r$ è tangente a $\mathscr{C}$ in $P$).

**2.2.1.** Caso delle rette. Consideriamo il caso in cui $L$ sia una retta, di equazioni parametriche $\underline{X} = \lambda P + \mu Q$. Allora il calcolo del divisore di intersezione con una ipersuperficie $\mathscr{D}$ di equazione $f(\underline{X}) = 0$ si ottiene facilmente sostituendo la parametrizzazione della retta, e risolvendo l'equazione omogenea in due incognite $f(\lambda P + \mu Q) = 0$. Se $d$ è il grado di $\mathscr{D}$, allora il polinomio $f(\lambda P + \mu Q)$ ha grado $d$, oppure è identicamente nullo. Nel primo caso otteniamo esattamente $d$ punti di intersezione se contati con le giuste molteplicità (caso particolare del teorema di Bézout), nel secondo caso significa che la retta è completamente contenuta nella ipersuperficie.

Viceversa, possiamo affermare che se $L$ è una retta, e il ciclo intersezione $L \cdot \mathscr{D}$ contiene più di $d$ punti (contati con le molteplicità), allora $L \subseteq \mathrm{Supp}\,\mathscr{D}$. In particolare, se $\mathscr{D}$ è una curva (piana), allora $L$ è una componente di $\mathscr{D}$.

**2.2.2.** Caso delle coniche irriducibili. Tenendo conto che ogni conica irriducibile può essere parametrizzata (dalla retta proiettiva costituita dal fascio di rette per un qualunque suo, della conica, punto), possiamo estendere l'argomento precedente: sostituendo la parametrizzazione della conica nella curva di equazione $f$, si trova un polinomio omogeneo nei parametri, di grado doppio rispetto ad $f$. Quindi si trovano $2d$ punti, a meno che la conica non sia contenuta nella curva.

## 3. Famiglie di Ipersuperficie.

**3.1.** Spazi proiettivi di ipersuperficie. L'insieme delle ipersuperficie proiettive di grado fissato $d$ in uno spazio proiettivo di dimensione $n$ su un corpo $K$ si indica con $I_{n,d}$ e si può identificare con i polinomi omogenei in $n+1$ indeterminate non nulli di grado $d$ a meno di moltiplicazione per scalari non nulli. Quindi quest'insieme è in modo naturale uno spazio proiettivo su $K$: se $H_{n,d}$ indica lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado $d$ in $n+1$ indeterminate, allora $I_{n,d} = \mathbb{P}(H_{n,d})$.