rispetta gli allineamenti e i cui punti fissi sono tutti e soli i punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (quest'ultimo punto non è banale: si provi a verificarlo).

Allora una ipersuperficie $\mathscr{D}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è razionale su $\mathbb{R}$ se e solo se essa è stabile per coniugio: $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D}$.

1.8. Problemi di classificazione. Nel prossimo capitolo parleremo di classificazione di certe classi di curve; cerchiamo di dare una idea generale del problema. Consideriamo $A \in \mathrm{GL}_n(K)$; essa induce un isomorfismo di anelli

$$K[\underline{T}] \longrightarrow K[\underline{T}] \text{ dato da } f(\underline{T}) \mapsto f_A(\underline{T}) := f(A^{-1}\underline{T})$$

che è stabile sui polinomi omogenei di ogni fissato grado.

Se φ è proiettività di $\mathbb{P}$ e $\mathscr{D}$ è ipersuperficie, scelte delle coordinate proiettive abbiamo una matrice A per φ e una equazione g per $\mathscr{D}$, e l'immagine $\varphi(\mathscr{D})$ di $\mathscr{D}$ tramite φ avrà equazione f_A (in quel riferimento). *Diremo che due ipersuperficie $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}'$ sono equivalenti (proiettivamente, risp. affinemente, eventualmente per qualche struttura razionale) se esiste φ (proiettività, risp. affinità, eventualmente per qualche struttura razionale) tale che $\varphi\mathscr{D} = \mathscr{D}'$, ovvero se e solo se in un fissato (e dunque ogni) riferimento (proiettivo, risp. affine, eventualmente per qualche struttura razionale) esiste una matrice A (matrice di proiettività, risp. di affinità, eventualmente per qualche struttura razionale) tale che $g' = g_A$. Si tratta chiaramente di relazioni di equivalenza.*

Un problema di classificazione consiste nel fissare una certa classe $\mathscr{I}$ di ipersuperficie (per esempio: coniche, cubiche, di grado n,...), un certo gruppo $\mathscr{G}$ di trasformazioni (per esempio proiettività, affinità, eventualmente per qualche struttura razionale, trasformazioni metriche nel caso reale o complesso...) e descrivere le classi di equivalenza $\mathscr{I}/\mathscr{G}$ delle ipersuperficie in $\mathscr{I}$ a meno della equivalenza definita dalle trasformazioni $\mathscr{G}$, possibilmente dando per ogni classe un rappresentante canonico (per esempio equazioni particolarmente semplici).

Il lettore dovrebbe aver già presenti le classificazioni proiettive (reale e complessa), affine (reale e complessa) ed euclidea reale delle coniche del piano e in generale delle quadriche in dimensione finita.

2. Divisori.

2.1. Definizione (Divisori). *Il gruppo dei divisori di uno spazio affine $\mathbb{A}$ (risp. di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$) su un corpo K si indica con $\mathrm{Div}(\mathbb{A})$ (risp. $\mathrm{Div}(\mathbb{P})$) ed è il gruppo libero generato dall'insieme delle ipersuperficie K-razionali irriducibili di $\mathbb{A}$ (risp. di $\mathbb{P}$). Cioè si tratta delle somme formali $D = \sum_V e_V V$ indiciate dalle ipersuperficie K-razionali irriducibili V di $\overline{\mathbb{A}}$ (risp. di $\overline{\mathbb{P}}$), con i coefficienti $e_V \in \mathbb{Z}$ quasi tutti nulli, la somma di divisori essendo quella formale ($\sum_V e_V V + \sum_V e'_V V = \sum_V (e_V + e'_V)V$). Il divisore si dice effettivo se i coefficienti e_V sono tutti non negativi.*

Il coefficiente e_V del divisore D si dice ordine o molteplicità di D in V e si indica con $\mathrm{ord}_V(D)$; dunque $D = \sum_V \mathrm{ord}_V(D)V$. La somma (finita) $\sum_V \mathrm{ord}_V(D)\deg(V)$ di dice ordine o grado del divisore e si indica con $\mathrm{ord}(D)$ o $\deg(D)$. La funzione ord *dal gruppo dei divisori in $\mathbb{Z}$ è mappa di gruppi, il cui nucleo è costituito dal sottogruppo dei divisori d'ordine nullo, indicato con Div_0.*

2.1.1. Divisore di un polinomio. La definizione di divisore è introdotta allo scopo di tener conto delle molteplicità con cui ogni fissata ipersuperficie compare in un dato problema. Per esempio, dato un polinomio non nullo (omogeneo o no) $f = \prod_i p_i^{e_i}$ (fattorizzazione in fattori irriducibili), l'ipersuperficie $V(f)$ è l'unione insiemistica $\bigcup_i V(p_i)$ e non ricorda nulla degli esponenti e_i; invece definiamo il divisore associato a f come $\mathrm{div}\,(f) = \sum_i e_i V(p_i)$, in modo che il divisore ricordi la molteplicità con cui un fattore irriducibile compariva nel polinomio.

Si noti che div è mappa da $K[\underline{T}]$ a $\mathrm{Div}(\mathbb{A}(K))$ (risp. da $K[\underline{X}]_h$ a $\mathrm{Div}(\mathbb{P}(K))$) che manda il prodotto di polinomi nella somma di divisori e tale che $\deg(\mathrm{div}\, f) = \deg f$.

2.1.2. In questo modo, il dizionario algebra-geometria (tra polinomi e divisori, ora) fa corrispondere la divisibilità (e la fattorizzazione) di polinomi alla relazione di ordine dei divisori, senza condizioni di riduzione o irriducibilità. Per esempio: f divide g sse $\mathrm{div}\,(f) \leqslant \mathrm{div}\,(g)$; f coniugato di g sse $\mathrm{div}\,(f) = \mathrm{div}\,(g)$.

2.1.3. Supporto di un divisore. Se D è un divisore effettivo, definiamo il supporto di D come l'unione delle ipersuperficie irriducibili V con $\mathrm{ord}_V(D) \neq 0$. Si indica con $\mathrm{Supp}\,(D)$.

Per un polinomio f vale che $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{div}\,(f)) = V(f)$.