infatti ci si riconduce subito al caso irriducibile.

1.5.4. L'ipersuperficie $V(f)$ è (assolutamente) irriducibile se e solo se f è (assolutamente) irriducibile. Si noti che il "se" è ovvio dalla definizione, mentre il "solo se" dipende dal teorema di Hilbert. Usando il lemma di Study si può ragionare così: supponiamo $V(f)$ riducibile, uguale a $V(f_1) \cup V(f_2) = V(f_1 f_2)$; allora $f_1 f_2$ divide f, contro l'irriducibilità.

1.5.5. Ogni ipersuperficie è unione finita di ipersuperficie irriducibili. Se $f = \prod_i p_i^{n_i}$ con i p_i irriducibili distinti, allora $V(f) = V(\prod_i p_i) = \bigcup_i V(p_i)$. Viene facilmente dal punto precedente.

1.5.6. Se $f = \prod_i p_i^{n_i}$ con i p_i irriducibili distinti, allora $I(V(f)) = \bigcap_i (p_i) = (\prod_i p_i)$. Viene direttamente dal teorema, usando il punto precedente:

$$I(V(f)) = I\big(\bigcup_i V(p_i)\big) = \bigcap_i I(V(p_i)) = \bigcap_i (p_i) = (\textstyle\prod_i p_i)$$

(I scambia unioni finite con intersezioni finite; gli elementi p_i sono primi tra loro, e dunque prodotto e intersezioni degli ideali generati coincidono).

1.5.7. Se f, g sono polinomi irriducibili, oppure senza componenti comuni, allora sono associati sse le ipersuperficie sono uguali (quale implicazione è vera comunque, e quale richiede Hilbert o Study?).

1.5.8. In conclusione, su un corpo algebricamente chiuso, il dizionario *algebra-geometria* fa corrispondere: ai polinomi le ipersuperficie, ai polinomi privi di componenti multiple le ipersuperficie ridotte, ai polinomi irriducibili le ipersuperficie (ridotte e) irriducibili, alla divisibilità l'inclusione (sotto ipotesi di riduzione), alla fattorizzazione la decomposizione (idem).

1.6. NOTA SUI CORPI. Se il corpo di base non è algebricamente chiuso, allora considerare solo i punti a coefficienti in quel corpo non dà delle buone definizioni, nel senso che quasi tutto quello che è esposto sopra diviene falso. Vediamo alcuni esempi, nei quali useremo la terminologia seguente: se K è il corpo indichiamo con $V_K(f)$ l'insieme $V(f) \cap \mathbb{A}^n(K)$ (e si dice lo scheletro su K di $V(f)$).

1.6.1. Sia $f = T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$; allora $V_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing = V_{\mathbb{R}}(1)$, ma f non è multiplo scalare di 1. Invece $V(f) = \{\pm i\} \neq \varnothing$.

1.6.2. Sia $f = T_2^2 + T_1^4 - T_1^2 + 1/4 \in \mathbb{R}[T_1, T_2]$; allora $V_{\mathbb{R}}(f)$ è una coppia di punti del piano affine reale, e non meriterebbe nemmeno il nome di curva.

♠ **1.7.** NOZIONE DI STRUTTURA RAZIONALE. Ci si trova comunque spesso nella situazione di studiare ipersuperficie la cui equazione ha coefficienti in un corpo non algebricamente chiuso, quali $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ o corpi finiti, e quindi di dover considerare spazi geometrici (affini o proiettivi) su una chiusura algebrica del corpo. D'altra parte vorremmo anche tener conto che il dato iniziale era definito su un certo corpo, e usare solo trasformazioni di coordinate "definite su quel corpo". Diamo perciò la seguente definizione.

Una struttura razionale su K in uno spazio affine $\mathbb{A}$ (risp. proiettivo $\mathbb{P}$) su una chiusura algebrica $\overline{K}$ è il dato di una famiglia massimale di riferimenti affini (risp. proiettivi), famiglia detta atlante K-razionale, tali che ogni due riferimenti delle famiglia siano legati da qualche matrice di cambiamento di riferimento a coefficienti in K. È chiaro che per dare l'atlante K-razionale basta dare uno dei riferimenti della famiglia.

Se abbiamo uno spazio affine $\mathbb{A}$ (risp. proiettivo $\mathbb{P}$) sul corpo K, allora ogni sua estensione $\overline{\mathbb{A}}$ (risp. $\overline{\mathbb{P}}$) a $\overline{K}$ è dotato in modo naturale di una struttura K-razionale; nel caso $\mathbb{P}^n(K)$ scriveremo talvolta $\mathbb{P}^n_K(\overline{K})$ per intendere lo spazio $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ dotato della struttura K-razionale naturale.

1.7.1. DEFINIZIONE (IPERSUPERFICIE AFFINI E PROIETTIVE). *In uno spazio affine $\mathbb{A}$ (risp. proiettivo $\mathbb{P}$) su un $\overline{K}$, dotato di una struttura K-razionale, un sottinsieme V è detto una ipersuperficie affine (risp. proiettiva) K-razionale se in un qualche (e dunque in ogni) riferimento affine (risp. proiettivo) K-razionale V è della forma $V(f)$ per un polinomio $f \in K[\underline{T}]$ (risp. $V(g)$ per un polinomio omogeneo $g \in K[\underline{X}]_h$).*

1.7.2. È chiaro che si possono ripetere in questo contesto generale le stesse definizioni date nella situazione standard: grado, (assoluta) irriducibilità, ecc.

1.7.3. Consideriamo per esempio il caso $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Allora in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ definiamo una applicazione (che non è una proiettività, non essendo lineare) mandando ogni punto P nel suo coniugato $\overline{P}$ (coniugando ogni coordinata). Si tratta di una applicazione (detta coniugio) ben definita, di quadrato identico, che