irriducibile, allora il polinomio f è (assolutamente) irriducibile. Il viceversa non è ovvio, ma vero, ed è una conseguenza di un risultato profondo che vedremo tra poco.

1.3.2. Si faccia attenzione alla definizione precedente: esistono superficie irriducibili ma non assolutamente irriducibili. Per esempio i polinomi $X_0^2 - X_1^2$, $X_0^2 + X_1^2$, $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$ sono polinomi in $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]_{\mathrm{h}}$ rispettivamente riducibile, irriducibile ma non assolutamente, assolutamente irriducibile, le cui ipersuperficie associate sono riducibili (coppia di rette reali), irriducibile ma non assolutamente (coppia di rette complesse coniugate non reali), assolutamente irriducibile (conica irriducibile del piano reale).

1.4. Relazioni tra affine e proiettivo. Facendo riferimento all'immersione standard $\mathbb{A}^n(\overline{K}) \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$ abbiamo che:

(h) se $f \in K[\underline{T}]$ allora $V(f) \subseteq V(f^{\mathrm{h}})$; $V(f^{\mathrm{h}}) \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$ si dice la chiusura proiettiva di $V(f)$; i punti di $V(f^{\mathrm{h}}) \smallsetminus V(f)$ si dicono i punti impropri di $V(f)$;

(a) se $g \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ allora $V(g^{\mathrm{a}}) = V(g) \cap \mathbb{A}^n(\overline{K})$; $V(g^{\mathrm{a}}) \subseteq \mathbb{A}^n(\overline{K})$ si dice lo scheletro affine di $V(g)$;

(ha) lo scheletro affine di una chiusura proiettiva coincide con l'ipersuperficie affine di partenza, cioè $V(f^{\mathrm{ha}}) = V(f)$;

(ah) la chiusura proiettiva di uno scheletro affine è contenuta nell'ipersuperficie proiettiva di partenza e vi coincide se questa non contiene $V(X_0)$; cioè $V(g^{\mathrm{ah}}) \subseteq V(g)$, e vale $V(g^{\mathrm{ah}}) = V(g)$ se $X_0 \nmid g$; altrimenti $V(g^{\mathrm{ah}})$ è l'unione di $V(g^{\mathrm{a}})$ e dei suoi punti impropri.

1.5. Teorema (Hilbert per ipersuperficie). *Data una ipersuperficie (ridotta e assolutamente) irriducibile affine $V = V(f)$ (risp. proiettiva $V = V(g)$), oppure f (risp. g) polinomio (assolutamente) irriducibile, definiamo il suo ideale $I(V)$ come l'ideale di $K[\underline{T}]$ (risp. ideale omogeneo di $K[\underline{X}]$) formato dai polinomi che si annullano in ogni punto dell'ipersuperficie. Allora risulta $I(V(f)) = (f)$ (risp. $I(V(g)) = (g)$).*

Dimostrazione. Vediamo il caso proiettivo. Sia $g(\underline{X}) \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$, irriducibile, e supponiamo che $g(e_n) \neq 0$ eventualmente cambiando le coordinate; dunque possiamo scrivere $g(\underline{X}) = \sum_{i=0}^{d} a_i(\underline{X}')X_n^i$ ove $a_i(\underline{X}') \in K[\underline{X}']_{\mathrm{h}} = K[X_0, \dots, X_{n-1}]_{\mathrm{h}}$ di grado $d-i$, e a_d è una costante non nulla. Usiamo allora il corpo $L = K(\underline{X}') = K(X_0, \dots, X_{n-1})$ e osserviamo che $L[X_n]$ è anello a ideali principali (euclideo?) contenente $K[\underline{X}]$ e in cui $g(\underline{X})$ è irriducibile (perché?).

Sia ora $h(\underline{X}) \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ non nullo appartenente a $I(V(g))$, e sia $e = \deg_{X_n} h(\underline{X})$ minimo possibile.

Mostriamo che $e > 0$, cioè che $h(\underline{X}) \notin K[\underline{X}']$ (e anche $h(\underline{X}) \notin L$); se così non fosse potremmo trovare un punto $x' \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$ con $h(x') \neq 0$ (perché $h(\underline{X})$ non è nullo e K non è finito) e un punto $x = \binom{x'}{x_n} \in \mathbb{P}^n(\overline{K})$ con $g(x) = 0$. Ma allora $x \in V(g)$ e dovrebbe essere $h(x) = 0$, mentre $h(x) = h(x') \neq 0$.

Mostriamo che $e \geqslant d$ (e allora potremmo supporre $g = h$); se così non fosse potremmo fare la divisione di $g(\underline{X})$ per $h(\underline{X})$ (in $L[X_n]$) ottenendo un resto $r(\underline{X}) \in L[X_n]$ non nullo (per irriducibilità di $g(\underline{X})$) con grado in X_n strettamente minore di e; assurdo, perché basta moltiplicare $r(\underline{X})$ per un opportuno polinomio in $K[\underline{X}']_{\mathrm{h}}$ per ottenere un polinomio in $I(V(g))$ di grado in X_n strettamente minore di e.

Usando ora $g(\underline{X})$, per ogni $p(\underline{X}) \in I(V(g))$, possiamo fare la divisione di $p(\underline{X})$ per $g(\underline{X})$ in $L[X_n]$ e dedurne (dal ragionamento precedente) che il resto è nullo, quindi $p(\underline{X}) = q(\underline{X})g(\underline{X})$ per $q(\underline{X}) \in L[X_n]$. Ma poiché $p(\underline{X}), g(\underline{X}) \in K[\underline{X}]_h$ si ha che $q(\underline{X}) \in K[\underline{X}]_h$, e quindi $p(\underline{X}) \in (g)$. Così abbiamo visto che $I(V(g)) \subseteq (g)$, e l'altra inclusione è ovvia. □

1.5.1. Questo risultato è il motivo fondamentale per cui la definizione di ipersuperficie usa i punti a coordinate nella chiusura algebrica $\overline{K}$ e non solo in K, come si vedrà negli esempi seguenti. Il teorema di Hilbert dice che la ipersuperficie associata ad un polinomio identifica l'ideale generato dal polinomio, e quindi il polinomio stesso a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

1.5.2. Lemma di Study. *Sia f un polinomio (assolutamente) irriducibile; allora $V(f) \subseteq V(g)$ se e solo se f divide g.*

Il "se" è una facile conseguenza delle definizioni già osservata. Il "solo se" viene dal teorema di Hilbert (e gli è equivalente?). Infatti, da $V(f) \subseteq V(g)$ si ottiene che $(f) = I(V(f)) \supseteq I(V(g)) \supseteq (g)$, e quindi f divide g.

1.5.3. Si osservi per esercizio che, sia nel teorema di Hilbert, sia nel lemma di Study, si può sostituire l'ipotesi "polinomio irriducibile" con l'ipotesi "polinomio privo di componenti multiple";