ove c è il massimo naturale tale che X_0^c divide g. In particolare $g^{\mathrm{ah}} = g$ se g non è divisibile per X_0 e $(X_0^r)^{\mathrm{ah}} = 1$ per ogni $r \in \mathbb{N}$.

0.7.3. RIDUCIBILITÀ. È facile (esercizio) dimostrare che se un polinomio omogeneo si fattorizza, allora tutti i suoi fattori sono polinomi omogenei. Dunque: $f \in K[\underline{T}]$ è (assolutamente) irriducibile se e solo se $f^{\mathrm{h}} \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ è (assolutamente) irriducibile.

1. Ipersuperficie Affini e Proiettive.

1.1. SITUAZIONE STANDARD. Dato un corpo K e considerata una sua chiusura algebrica $\overline{K}$, consideriamo le seguenti inclusioni naturali di spazi affini e proiettivi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n(K) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(K) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{A}^n(\overline{K}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\overline{K}) \end{array}$$

1.2. DEFINIZIONE (IPERSUPERFICIE ASSOCIATE A POLINOMI). *Dato un polinomio non nullo $f \in K[\underline{T}]$ (risp. un polinomio omogeneo $g \in K[\underline{X}]_h$) definiamo la ipersuperficie affine (risp. proiettiva) associata a f (risp. a g) come*

$$V(f) = \{P \in \mathbb{A}^n(\overline{K}) : f(P) = 0\} \qquad (\text{risp. } V(g) = \{P \in \mathbb{P}^n(\overline{K}) : g(P) = 0\}\ )$$

che è il sottinsieme dello spazio affine (risp. proiettivo) esteso a $\overline{K}$ costituito dai punti che "soddisfano all'equazione $f = 0$ (risp. $g = 0$)". Il grado del polinomio si dice anche grado della ipersuperficie corrispondente.

1.2.1. Si osservi che l'ipersuperficie prende punti a coordinate in $\overline{K}$ e non solo in K; tra poco sarà chiaro che dobbiamo fare questa scelta affinché l'insieme $V(f)$ determini in qualche modo il polinomio f.

1.2.2. Si osservi che la definizione di ipersuperficie proiettiva è ben posta in virtù del fatto che il polinomio g è omogeneo; in particolare, prese le coordinate $\underline{x}$ di un punto $P \in \mathbb{P}^n(\overline{K})$ il termine $g(\underline{x})$ non è ben definito (cambiando $\underline{x}$ con $\lambda\underline{x}$ con λ scalare non nullo, si ha generalmente che $g(\lambda\underline{x}) = \lambda^{\deg g} g(\underline{x}) \neq g(\underline{x})$), ma è ben definito il fatto che sia nullo oppure no. Quindi ha senso scrivere $g(P) = 0$ oppure $g(P) \neq 0$ (che sono condizioni indipendenti dalle coordinate).

1.2.3. Ipersuperficie di grado 1 sono gli iperpiani. Ipersuperficie di grado 2 sono le quadriche.

1.2.4. Ipersuperficie del piano si dicono curve; ipersuperficie dello spazio si dicono superfici. Si osservi che la proprietà d'essere una curva o una superficie fa riferimento in questa definizione allo spazio in cui l'insieme è immerso, cioè non ha un senso intrinseco e in questo corso non tenteremo di dare una teoria della dimensione, nozione decisamente più difficile. "Curva" significa "ipersuperficie del piano", e non "oggetto di dimensione 1", cosa che avrebbe senso anche in ambienti diversi dal piano, ma che richiede nozioni molto più sofisticate.

Per esempio sarebbe del tutto fuorviante dire che l'intersezione di r ipersuperficie in uno spazio di dimensione n abbia dimensione $n - r$. Sarebbe più ragionevole, ma non facile da giustificare, dire che la sua dimensione è s se $n-s$ è la massima dimensione di una generica sottovarietà lineare che la interseca in un numero finito di punti. Ma qui non seguiremo queste idee.

1.2.5. Si ha che $V(1) = \varnothing$; dunque il vuoto è una ipersuperficie, mentre l'intero spazio affine o proiettivo non lo è, ed è talvolta detto ipersupeficie illusoria. L'ipersuperficie di un prodotto di polinomi è l'unione delle ipersuperficie dei due polinomi: $V(f_1 f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$.

1.3. IRRIDUCIBILITÀ Una ipersuperficie (associata a un polinomio f a coefficienti in K) si dice irriducibile se non può essere scritta come unione di due sottinsiemi propri che siano entrambi ipersuperficie (associate a polinomi a coefficienti in K).

Si dice assolutamente irriducibile se è irriducibile in quanto ipersuperficie associata al polinomio f pensato a coefficienti in $\overline{K}$; cioè se non si può scrivere come unione di due sottinsiemi propri che siano entrambi ipersuperficie associate a polinomi a coefficienti in $\overline{K}$.

1.3.1. RIDUZIONE. *Supponiamo ora che il polinomio che definisce l'ipersuperficie non abbia componenti multiple; in tal caso l'ipersuperficie associata si dice ridotta.* Naturalmente, se un polinomio è riducibile allora l'ipersuperficie $V(f)$ è riducibile. Quindi se l'ipersuperficie $V(f)$ è (assolutamente)