0.3.2. Il polinomio $T_1^2+T_2^2$ in $\mathbb{R}[T_1,T_2]$ è un esempio di polinomio irriducibile (in $\mathbb{R}[T_1,T_2]$), ma non assolutamente irriducibile (si fattorizza in $(T_1+iT_2)(T_1-iT_2)$ in $\mathbb{C}[T_1,T_2]$).

Invece il polinomio $T_1^2+T_2^2+1$ in $\mathbb{R}[T_1,T_2]$ è assolutamente irriducibile.

0.4. Teorema (Fattorizzazione unica). *Gli anelli dei polinomi sono domini a fattorizzazione unica: ogni polinomio si scrive come prodotto di polinomi irriducibili, e le fattorizzazioni sono essenzialmente uniche, cioè se $f=p_1\cdots p_r$ e $f=q_1\cdots q_s$ sono due fattorizzazioni in fattori irriducibili, allora $r=s$ ed esiste una permutazione σ degli indici tali che p_i sia associato di $q_{\sigma i}$ per ogni $i=1,\dots,r$ (p associato di q significa che q è prodotto di p con un invertibile).*

La dimostrazione si fa per induzione sul numero di indeterminate, sapendo che l'anello dei polinomi in una indeterminata è euclideo (dunque a ideali principali e a fattorizzazione unica), e per il passo induttivo si dimostra che un anello di polinomi in una indeterminata a coefficienti in un dominio a fattorizzazione unica conserva la proprietà.

0.5. Teorema (Gauss). *Se $g\in K[\underline{T}][T_{n+1}]$ si fattorizza come g_1g_2 in $K(\underline{T})[T_{n+1}]$ con $g_1\in K[\underline{T}][T_{n+1}]$ monico (o primitivo) allora anche $g_2\in K[\underline{T}][T_{n+1}]$.*

Se $g\in K[\underline{T}][T_{n+1}]$ è irriducibile allora è irriducibile anche in $K(\underline{T})[T_{n+1}]$

Se $g\in K(\underline{T})$ è zero di un polinomio monico $f\in K[\underline{T}][T_{n+1}]$ (polinomio monico in T_{n+1}) allora $g\in K[\underline{T}]$.

Come per $\mathbb{Z}$ contenuto nel corpo delle frazioni $\mathbb{Q}$ (o per ogni dominio fattoriale nel suo corpo quoziente).

0.6. Teorema (Base di Hilbert). *Gli anelli di polinomi sono noetheriani, cioè ogni loro ideale è finitamente generato.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero di variabili, usando nel passo induttivo che l'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello neotheriano risulta esso stesso noetheriano. Consideriamo infatti un tale ideale I di $R[X]$ (R anello neotheriano). Sia $\mathfrak{a}$ l'ideale (di R) generato dai coefficienti dominanti dei polinomi in I, scegliamone un insieme finito $a_1,\dots,a_m$ di generatori e sia $A=\{f_1,\dots,f_m\}$ un insieme di polinomi in I con quei termini dominanti. Ora per ogni intero non negativo $k\leqslant\max_i\deg f_i$, sia $\mathfrak{a}_k$ l'ideale (di R) generato dai coefficienti dominanti dei polinomi in I di grado minore o uguale a k, scegliamone un insieme finito $a_{k,1},\dots,a_{k,m_k}$ di generatori e sia $A_k=\{f_{k,1},\dots,f_{k,m_k}\}$ un insieme di polinomi in I di grado minore o uguale a k con quei termini dominanti.

Allora $A\cup\bigcup_k A_k$ è un insieme finito di generatori per I, come si può facilmente vedere per induzione sul grado dei polinomi in I, usando combinazioni dei polinomi in A (se ha grado maggiore di $\max\deg f_i$) o nei vari A_k (altrimenti) per abbassarne il grado (restando in I). $\square$

0.6.1. Si osservi quindi che mentre $K[T]$ (una sola variabile) è anello euclideo, quindi a ideali principali, quindi a fattorizzazione unica, si ha che $K[\underline{T}]$ (più variabili) non è a ideali principali (ma è noetheriano, proprietà più debole, ma molto utile), quindi nemmeno euclideo, però è dominio a fattorizzazione unica.

0.7. Definizione (Polinomi omogenei). *Un polinomio è omogeneo se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado, cioè se $a_{\underline{\alpha}}=0$ se $|\underline{\alpha}|\neq\deg f$. I polinomi omogenei formano un sottinsieme moltiplicativamente chiuso dell'anello dei polinomi.*

Useremo la notazione $K[\underline{X}]_{\rm h}=K[X_0,X_1,\dots,X_n]_{\rm h}$ per indicare l'insieme dei polinomi omogenei in $n+1$ indeterminate, che è sottinsieme moltiplicativamente chiuso di $K[X_0,X_1,\dots,X_n]$ (anello di polinomi in $n+1$ indeterminate).

0.7.1. Definizione ((Dis)Omogeneizzazione). *Vi sono due applicazioni, dette omogeneizzazione* h *e disomogeneizzazione* a, *che legano polinomi in n indeterminate e polinomi omogenei in $n+1$ indeterminate:*

$$\mathrm{h}:K[\underline{T}]\longrightarrow K[\underline{X}]_{\rm h}\qquad \mathrm{a}:K[\underline{X}]_{\rm h}\longrightarrow K[\underline{T}]$$

definite da: $f(T_1,\dots,T_n)^{\rm h}=X_0^{\deg f}f\left(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0}\right)$ e $g(X_0,X_1,\dots,X_n)^{\rm a}=g(1,T_1,\dots,T_n)$.

0.7.2. Proprietà di a ed h. Abbiamo che a è mappa moltiplicativa suriettiva ma non iniettiva, mentre h è mappa moltiplicativa iniettiva ma non suriettiva. Inoltre le composizioni danno:

$$f^{\rm ha}=f \text{ per ogni } f\in K[\underline{T}]\qquad g^{\rm ah}=X_0^{-c}g \text{ per ogni } g\in K[\underline{X}]_{\rm h}$$