Capitolo I

Ipersuperficie e Divisori

In questo capitolo introduciamo gli oggetti fondamentali del corso, vale a dire la nozione di ipersuperficie, come "corrispondente geometrico" della nozione algebrica di polinomio. Vedremo solo alcune prorietà elementari, ma fondamentali, ed estenderemo la terminologia per tener conto che gli oggetti geometrici possono presentarsi "con molteplicità", esattamente come succede ai fattori di un polinomio.

Mostreremo subito anche come le famiglie di ipersuperficie formino insiemi dotati di struttura geometrica, e anche in questo caso cominceremo l'analisi di alcune proprietà più elementari.

0. Polinomi.

0.1. Definizione (Anello dei polinomi). *Dato un anello commutativo con unità K, l'anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in K è l'insieme delle applicazioni quasi ovunque nulle di $\mathbb{N}^n$ in K, con le operazioni di somma puntuale e di prodotto alla Cauchy. Useremo la notazione multiindiciale $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, e allora un polinomio f è dato dai coefficienti $a_{\underline{\alpha}} \in K$ quasi tutti nulli al variare di $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n$.*

Dati due polinomi $f = (a_{\underline{\alpha}})$ e $g = (b_{\underline{\alpha}})$, la somma è data da $f + g = (a_{\underline{\alpha}} + b_{\underline{\beta}})$ e il prodotto è dato da $f \cdot g = (c_{\underline{\gamma}})$ ove $c_{\underline{\gamma}} = \sum_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}} a_{\underline{\alpha}} b_{\underline{\beta}}$. Con queste operazioni risulta un anello commutativo con unità. Se K è un corpo, sono invertibili tutti e soli i polinomi con $a_{\underline{\alpha}} = 0$ per $\underline{\alpha} \neq 0$ e $a_{\underline{\alpha}} \neq 0$ per $\underline{\alpha} = 0$ (polinomi costanti non nulli). D'ora in poi K sarà un corpo.

0.1.1. Notazione standard. Come al solito scriveremo i polinomi facendo intervenire n indeterminate $T_1, \ldots, T_n$ nel modo seguente: se $f = (a_{\underline{\alpha}})$ scriveremo $f = f(\underline{X}) = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{T}^{\underline{\alpha}}$ ove $\underline{T}^{\underline{\alpha}} = T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}$. Somme e prodotti sono allora dati dalle usuali proprietà algebriche.

Useremo quindi la notazione $K[\underline{T}] = K[T_1, \ldots, T_n]$ per indicare l'anello dei polinomi; è chiaro che il nome delle indeterminate non gioca alcun ruolo.

Chiaramente $K[T_1, \ldots, T_n] = K[T_1, \ldots, T_{n-1}][T_n]$ (anello di polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello di polinomi in $n-1$ indeterminate; esplicitare per bene l'isomorfismo canonico).

0.2. Definizione (Grado). *Un monomio è un polinomio tale che per un solo multiindice $\underline{\alpha}$ si ha $a_{\underline{\alpha}} \neq 0$, e il numero $|\underline{\alpha}| = \sum_i \alpha_i$ si dice grado del monomio. Ogni polinomio è somma finita di monomi e il suo grado si definisce come il massimo dei gradi di questi monomi, cioè il massimo $|\underline{\alpha}|$ tale che $a_{\underline{\alpha}} \neq 0$. Si indica con $\deg f$. Il grado del polinomio nullo non è definito, oppure si definisce essere di qualsiasi grado.*

L'applicazione $\deg : K[\underline{T}] \to \mathbb{N}$ è una mappa di monoidi dalla struttura moltiplicativa di $K[\underline{T}]$ alla struttura additiva di $\mathbb{N}$; inoltre è sub-additiva nel senso che $\deg(f_1 + f_2) \leqslant \max\{\deg f_1, \deg f_2\}$ (e vale l'uguaglianza se $\deg f_1 \neq \deg f_2$).

0.2.1. Integrità. Da queste proprietà segue che gli anelli di polinomi sono integri; indicheremo con $K(\underline{T}) = K(T_1, \ldots, T_n)$ il corpo dei quozienti. Che relazioni vi sono tra $K(T_1, \ldots, T_n)$ e $K(T_1, \ldots, T_{n-1})(T_n)$?

0.3. Definizione (Irriducibilità). *Un polinomio in $K[\underline{T}]$ si dice irriducibile se non può essere scritto come prodotto di due polinomi in $K[\underline{T}]$ di grado strettamente minore. Sia $\overline{K}$ una chiusura algebrica di K; un polinomio in $K[\underline{T}]$ si dice assolutamente irriducibile se non può essere scritto come prodotto di due polinomi in $\overline{K}[\underline{T}]$ di grado strettamente minore.*

0.3.1. Il polinomio $T^2 + 1$ in $\mathbb{R}[T]$ è un esempio di polinomio irriducibile (in $\mathbb{R}[T]$), ma non assolutamente irriducibile (si fattorizza in $(T + i)(T - i)$ in $\mathbb{C}[T]$). Nel caso di polinomi in una sola variabile, essi sono assolutamente irriducibili se e solo se sono di primo grado.