Si noti che è possibile riconoscere subito questo invariante ragionando così: è invariante per le trasformazioni del birapporto, poiché lo è evidentemente per le prime due, e se $J(\lambda) = J(\lambda')$ allora λ' è radice di un polinomio di grado 6 (a coefficienti in $K[\lambda]$) di cui conosciamo già sei radici...

Un'altra espressione classica si ottiene tenendo conto che

$$(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-1/2)^2 = \lambda^6 - 3\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{5}{4}\lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

e quindi usare

$$I(\lambda) = J(\lambda) - \frac{27}{4} = \frac{(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-1/2)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2} = \left(\frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1/2)}{\lambda(1-\lambda)}\right)^2 .$$

Anche questo secondo invariante si può riconoscere con un argomento simile al precedente.

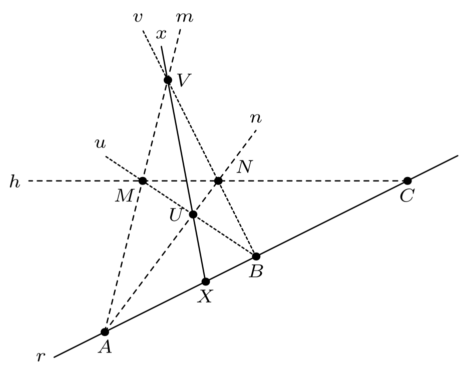
5.5. Armonia. Una quaterna A, B, C, X si dice armonica se $(A\ B\ C\ X) = -1$. Il quarto armonico dopo tre punti distinti è unico, e di tratta del punto medio tra i primi due se il terzo punto è ∞. Se φ è una involuzione di $\mathbb{P}^1(K)$ (cioè una proiettività non identica tale che $\varphi^2 = \mathrm{id}$) con due punti uniti A e B, allora per ogni punto P distinto dai punti uniti vale $(A\ B\ P\ \varphi(P)) = -1$. Viceversa dati due punti A e B di $\mathbb{P}^1(K)$ e $c \in K \setminus \{0, \infty\}$, esiste una unica proiettività con punti fissi A e B e definita su $P \neq A, B$ da $(A\ B\ P\ \varphi(P)) = c$; si tratta di una involuzione sse $c = -1$.

5.5.1. Il quarto armonico dopo a, b, ∞ è la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ tra a e b. Il quarto armonico dopo $a, b, 0$ è la media armonica (inverso della media aritmetica degli inversi) di a e b. Il quarto armonico dopo $a, b, 1$?

Il quarto armonico dopo i punti $0, \infty, x$ è il punto opposto $-x$. Il quarto armonico dopo i punti $1, -1, x$ è il punto inverso $1/x$.

5.5.2. Date due coppie di punti distinti della retta proiettiva, esiste una unica coppia di punti che separa armonicamente entrambe le coppie date.

5.5.3. Costruzione grafica del quarto armonico dopo tre punti: siano A, B, C punti di una retta proiettiva r immersa nel piano $\mathbb{P}^2(K)$; si traccino due rette distinte $m, n (\neq r)$ per A e una retta $h (\neq r)$ per C; $M := m \cap h$ e $N := n \cap h$; $u := M \vee B$ e $v := N \vee B$; $U := u \cap n$ e $V := v \cap m$; $x := U \vee V$; il quart'armonico è $X := x \cap r$:



La costruzione consiste nella realizzazione di un quadrangolo piano completo di diagonale la retta data, e sfrutta le proprietà di questa figura.

5.5.4. Dualmente: costruzione grafica del quarto armonico dopo tre rette d'un fascio. Partendo da tre rette a, b, c immerse nel piano e concorrenti in R, si scelgano due punti distinti $M, N (\neq R)$ in a e un punto $H (\neq R)$ in c; $m := M \vee H$ e $n := N \vee H$; $U := m \cap b$ e $V := n \cap b$;