scrivere come $\varphi(X)=\frac{c+dX}{a+bX}$ (trasformazioni lineari fratte, o trasformazioni di Mœbius, o omografie), e si tratta di affinità se si scrivono $\varphi(X)=c+dX$.

5.2. Birapporto tra scalari. Dati tre elementi distinti $a,b,c\in K\cup\{\infty\}$, la proiettività che agisce con $\varphi(a)=\infty$, $\varphi(b)=0$ e $\varphi(c)=1$ si scrive come $\varphi(X)=\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$. Definiamo come birapporto dei quattro elementi $a,b,c,X\in K\cup\{\infty\}$ il valore $\varphi(X)$: $(a\ b\ c\ X):=\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$. Si tratta di un invariante per trasformazioni di Mœbius. Si noti che $(\infty\ 0\ 1\ X)=X$ e $(\infty\ 0\ Y\ X)=X/Y$.

5.3. Birapporto tra punti. Dati quattro punti A,B,C,X di $\mathbb{P}^1(K)$ (di cui i primi tre distinti) il birapporto (cross ratio) si calcola tramite: $(A\ B\ C\ X)=\frac{x_0}{x_1}$ ove $\left[\begin{smallmatrix}x_0\\x_1\end{smallmatrix}\right]$ sono le coordinate omogenee di X nel riferimento di $\mathbb{P}^1(K)$ costituito dai punti A,B,C. Dunque il birapporto di quattro punti è l'ascissa del quarto punto nel riferimento dato dai primi tre.

In coordinate qualsiasi, se $A=\left[\begin{smallmatrix}a_0\\a_1\end{smallmatrix}\right]$, $B=\left[\begin{smallmatrix}b_0\\b_1\end{smallmatrix}\right]$, $C=\left[\begin{smallmatrix}c_0\\c_1\end{smallmatrix}\right]$, allora $(A\ B\ C\ X)=\frac{\left|\begin{smallmatrix}a_0&a_1\\c_0&c_1\end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix}b_0&b_1\\c_0&c_1\end{smallmatrix}\right|}\Big/\frac{\left|\begin{smallmatrix}a_0&a_1\\x_0&x_1\end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix}b_0&b_1\\x_0&x_1\end{smallmatrix}\right|}$.

In generale le proiettività conservano gli allineamenti e il birapporto di quattro punti allineati.

5.4. Azione delle permutazioni: se $(A\ B\ C\ D)=\lambda$, allora le permutazioni sui quattro punti danno luogo a sei possibili valori del birapporto:

$$\begin{aligned}
(A\ B\ C\ D)&=(B\ A\ D\ C)=(D\ C\ B\ A)=(C\ D\ A\ B)=\lambda\\
(B\ A\ C\ D)&=(A\ B\ D\ C)=(C\ D\ B\ A)=(D\ C\ A\ B)=\frac{1}{\lambda}\\
(A\ C\ B\ D)&=(B\ D\ A\ C)=(D\ B\ C\ A)=(C\ A\ D\ B)=1-\lambda\\
(A\ D\ C\ B)&=(B\ C\ D\ A)=(D\ A\ B\ C)=(C\ B\ A\ D)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\\
(C\ A\ B\ D)&=(D\ B\ A\ C)=(B\ D\ C\ A)=(A\ C\ D\ B)=\frac{1}{1-\lambda}\\
(D\ A\ C\ B)&=(C\ B\ D\ A)=(A\ D\ B\ C)=(B\ C\ A\ D)=\frac{\lambda-1}{\lambda}\ .
\end{aligned}$$

Si osservi che le prime due trasformazioni non identiche generano tutte le altre per composizioni successive.

5.4.1. Valori speciali. Il birapporto $(A\ B\ C\ X)$ è nullo se $X=B$, 1 se $X=C$ e ∞ se $X=A$. Nel caso $K=\mathbb{R}$ il valore di $(A\ B\ C\ X)$ risulta negativo se i primi due punti separano gli ultimi due, positivo altrimenti.

I sei valori per permutazioni del birapporto tra quattro fissati punti non sono tutti distinti se $\lambda=1$ (allora i valori sono $1,0,\infty$ e vi sono solo tre punti distinti), oppure $\lambda=-1$ (allora i valori sono $-1,2,1/2$, i quattro punti sono distinti e si dicono una quaterna armonica) oppure se $\lambda^2-\lambda+1=0$ (e allora i valori possibili sono le due radici seste primitive dell'unità, i quattro punti sono distinti e si dicono una quaterna equianarmonica; su $\mathbb{R}$ non esistono quaterne equianarmoniche, su $\mathbb{C}$ sì).

5.4.2. Invarianti delle quaterne non ordinate. Sarà utile in futuro avere a disposizione un invariante legato ai birapporti di quaterne non ordinate, ovvero una quantità che non cambi (solo) per le trasformazioni del birapporto dei quattro punti tramite permutazioni. Il più ovvio, naturalmente, è il seguente:

$$\begin{aligned}
J_0(\lambda)&=\lambda^2+\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2+(1-\lambda)^2+\Big(\frac{\lambda}{\lambda-1}\Big)^2+\Big(\frac{1}{1-\lambda}\Big)^2+\Big(\frac{\lambda-1}{\lambda}\Big)^2\\
&=\frac{1}{\lambda^2(1-\lambda)^2}(2\lambda^6-6\lambda^5+9\lambda^4-8\lambda^3+9\lambda^2-6\lambda+2)
\end{aligned}$$

(perché non semplicemente la somma dei valori, invece che dei quadrati?) e ovviamente tutti quelli che si ottengono da questo per trasformazioni affini.

Osserviamo che $\lambda^2(1-\lambda)^2=\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2$ e dunque possiamo modificare solo i termini centrali del numeratore. Tenendo conto che

$$(\lambda^2-\lambda+1)^3=\lambda^6-3\lambda^5+6\lambda^4-7\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1$$

possiamo usare anche il più classico "invariante J"

$$J(\lambda)=\frac{J_0(\lambda)+3}{2}=\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}\ .$$