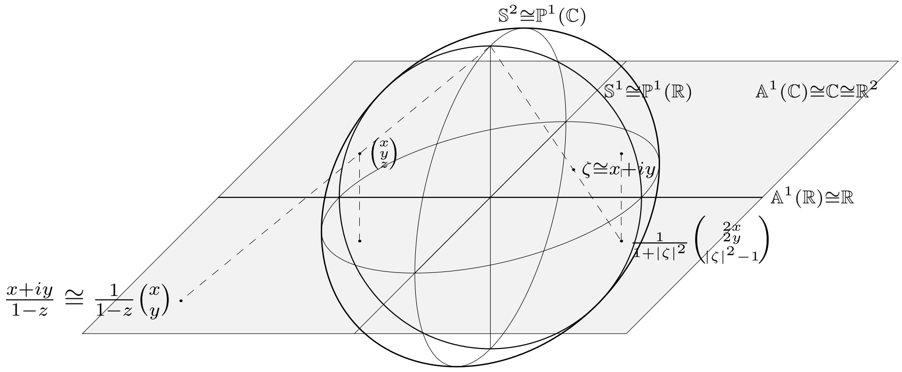
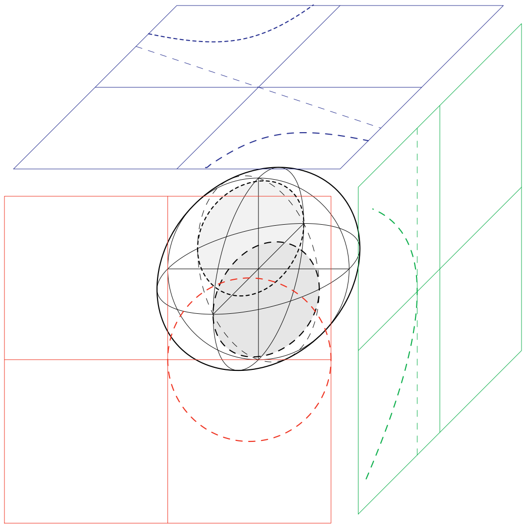
delle rette affini e proiettive, reali e complesse, e delle naturali relazioni di inclusione:



4.3.1. Per $n{=}2$ possiamo identificare il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con la sfera 3-dimensionale modulo antipodia, oppure con il disco 2-dimensionale modulo antipodia del bordo; ma non è isomorfo al prodotto di due rette proiettive, che invece risulta una superficie torica. Non abbiamo invece una rappresentazione disegnabile del piano proiettivo complesso. Nel seguito del corso tenderemo comunque a fare, quando sia utile, dei disegni che rappresentano solo lo scheletro reale, e spesso affine, degli oggetti studiati. Per rendersi conto della situazione, il lettore è invitato a riflettere sulle seguenti rappresentazioni grafiche di una ben nota curva (tre scheletri affini della stessa curva proiettiva):



4.3.2. Si osservi che dato un quadrato $[0,1]\times[0,1]$ possiamo costruire:
un cilindro (identificando $(x,0)\sim(x,1)$ per ogni $x\in[0,1]$)
un nastro di Mœbius (identificando $(x,0)\sim(1{-}x,1)$ per ogni $x\in[0,1]$);
la prima figura è orientabile, mentre la seconda no, come si vede seguento il cammino $[1/2,y]$ per $y\in[0,1]$ (che rovescia l'orientamento).

Partendo dal cilindro possiamo costruire tre figure senza bordo:
la sfera (colassando a un punto ciascuno dei due cerchi $[0,y]$ e $[1,y]$),
il toro (identificando $(0,y)\sim(1,y)$ per ogni $y\in[0,1]$)
e l'otre o bottiglia di Klein (identificando $(0,y)\sim(1,1{-}y)$ per ogni $y\in[0,1]$);
si osservi che quest'ultima superficie non è orientabile, poiché contiene nastri di Mœbius, mentre sfera e toro sono orientabili.

Partendo dal nastro di Mœbius e identificando ulteriormente i bordi rimanenti in ordine inverso (identificando $(0,y)\sim(1,1{-}y)$ per ogni $y\in[0,1]$), oppure colassando ad un punto il bordo rimasto (che è un circolo), si ottiene il piano proiettivo reale; anch'esso è superficie non orientabile, poiché contiene nastri di Mœbius.

Sfere e piani proiettivi reali si ottengono anche per identificazione dei due lati di un diagono (o bigono, poligono con due lati) nei due modi possibili (se il diagono è un disco unitario, e i due lati sono le semicirconferenze tra polo nord e polo sud, si tratta di $(x,y)\sim(-x,y)$ oppure di $(x,y)\sim(-x,-y)$).

5. Birapporti e armonia.

5.1. Trasformazioni di Mœbius. La retta proiettiva standard $\mathbb{P}^1(K)$ si può identificare con la retta affine $\mathbb{A}^1(K)$ a cui s'è aggiunto un punto all'infinito: $K\cup\{\infty\}$ ove ∞ è un simbolo fuori di K. Una proiettività φ della retta è data da una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{PGL}(2,K)$, e in coordinate affini si può