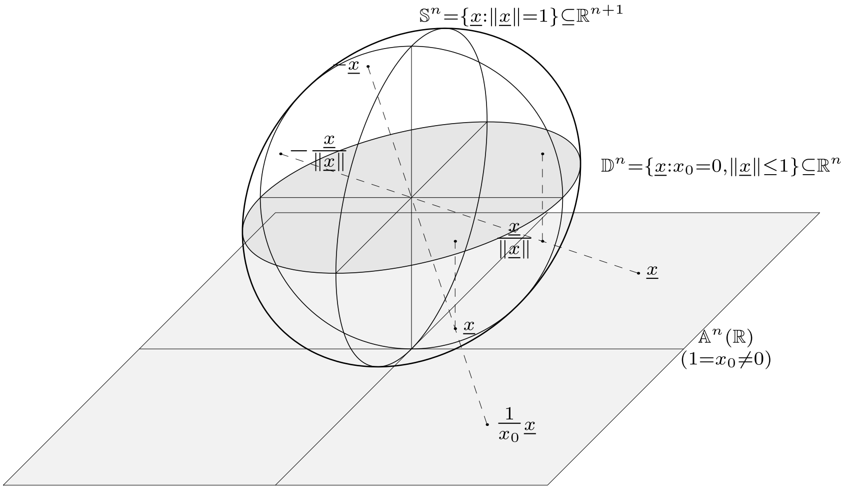
involutorie di asse l'iperpiano improprio. Le affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ sono le (restrizioni di) proiettività che mandano (globalmente) l'iperpiano improprio in sè.

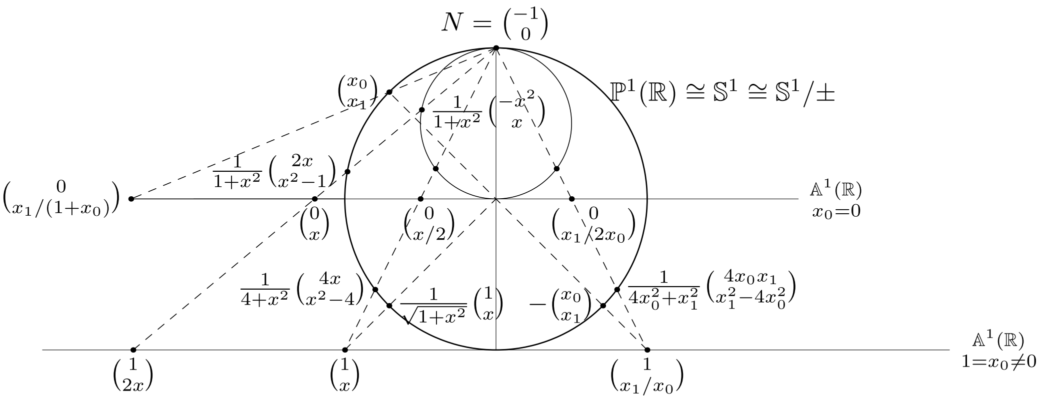
3.5.2. Due varietà affini in $\mathbb{A}^n(K)$ sono parallele se e solo se i loro completamenti proiettivi hanno intersezione lungo l'iperpiano all'infinito, i cui punti quindi sono le "direzioni" possibili nello spazio affine della varietà data.

4. Modelli topologici per spazi proiettivi reali e complessi.

4.1. Modelli topologici di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: sia $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R}) \ : \ \|x\| = 1\}$ la (buccia della) sfera di raggio 1 in $\mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R})$. Sia $\sigma : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ la mappa antipodale $x \mapsto -x$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^n/\sigma$ (sfera modulo antipodia); in particolare si tratta di uno spazio topologico compatto. Siano $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ la palla di raggio 1 in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ e $\sigma : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ la mappa antipodale $x \mapsto -x$ del bordo di $\mathbb{D}^n$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{D}^n/\sigma$ (disco modulo antipodia del bordo). Le descrizioni fatte si possono trovare in questo disegno:



4.2. Per n=1 possiamo identificare un isomorfismo $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (via la "proiezione dal polo nord" sull'asse X: $(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$) tale che $(x, y) \mapsto [1 - y, x]$. La retta proiettiva reale si può ancora identificare con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ovvero con il segmento $[0, 1]$ in cui gli estremi $\{0, 1\}$ sono stati tra loro identificati. Nel seguente disegno sono presenti più identificazioni di quelle segnalate: il lettore dovrebbe cercare di coglierle, vista la fatica che l'estensore delle note ha fatto per ottenere il disegno:



4.3. La proiezione stereografica dal polo nord di $\mathbb{S}^2$ (sul piano $Z = 0$: $(x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$) dà un isomorfismo $\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite $(x, y, z) \mapsto [1 - z, x+iy]$ (dunque la retta proiettiva complessa è una sfera reale, detta sfera di Riemann). Nel disegno seguente abbiamo dunque una rappresentazione

