2.2. Riferimenti proiettivi. Un sistema di riferimento in uno spazio proiettivo punteggiato di spazio vettoriale sovrastante V è il dato di un isomorfismo proiettivo $\varrho : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$. Equivalentemente si tratta del dato di $n{+}2$ punti $P_0, \ldots, P_n, U$ di $\mathbb{P}$ tali che $n{+}1$ tra loro non stiano su un iperpiano (i $P_0, \ldots, P_n$ formano l'edro fondamentale, U è il punto unità); o dualmente di $n{+}2$ iperpiani $p_0, \cdots, p_n, u$ tali che $n{+}1$ tra loro abbiano sempre intersezione vuota. Dare un riferimento è equivalente a dare una base ordinata di V a meno di proporzionalità (cioè a meno di moltiplicare tutti i vettori della base per un unico scalare non nullo).

2.3. Riferimenti e proiettività. Dato un riferimento su $\mathbb{P}(V)$, esiste unica la proiettività $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ che sia assegnata su quel riferimento.

2.4. In particolare per ogni permutazione σ del gruppo simmetrico S_{n+2} esiste una proiettività φ_σ tale che $\varphi_\sigma(P_i) = P_{\sigma i}$. Nel caso del piano proiettivo ($n = 2$), ogni permutazione dei quattro punti fondamentali induce una permutazione dei tre punti diagonali (del quadrilatero, vedi dopo); abbiamo un morfismo suriettivo di gruppi $S_4 \to S_3$ il cui nucleo è il sottogruppo V di Klein di S_4.

2.5. Scelti dei riferimenti su $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, allora ogni applicazione proiettiva $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ si rappresenta (a meno di proporzionalità) tramite una matrice $A \in M_{n+1,n'+1}(K)$. Il gruppo $\mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ delle proiettività di $\mathbb{P}$ in sè è isomorfo al gruppo quoziente $\mathrm{PGL}(n, K) := \mathrm{GL}(n{+}1, K)/K^\times$.

2.6. Riferimenti e dualità. Dato un riferimento su uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$, il riferimento duale sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^*$ si dice il riferimento di Plücker, e le coordinate in quel riferimento si scrivono in riga. Identificando un punto di coordinate a in $\mathbb{P}^*$ con l'iperpiano di $\mathbb{P}$ la cui equazione è data da quelle coordinate abbiamo che un punto di coordinate x appartiene all'iperpiano se e solo se $ax = 0$.

Se $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ ha matrice A in un riferimento scelto, i.e. $\varphi(X) = AX$ ove le X sono coordinate omogenee, allora $\varphi : \mathbb{P}^* \longrightarrow \mathbb{P}^*$ ha matrice A^{-1} nel riferimento duale, i.e. $\varphi(a) = aA^{-1}$.

3. Spazi Affini e Affinità.

3.1. Iperpiani proiettivi e spazi affini complementari. Dati uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$ e un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}$, l'insieme $\mathbb{P} \smallsetminus H$ resta munito in modo canonico di una struttura di spazio affine (della stessa dimensione di $\mathbb{P}$) con spazio delle traslazioni associato T dato dalle omologie speciali di asse H, e gruppo delle affinità descritto da $G := \{\psi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) \ : \ \psi(H) \subseteq H\}$ (proiettività che fissano H). Scegliendo un riferimento in modo che $H = V(X_0)$, i quozienti $\begin{pmatrix} X_1/X_0 \\ \vdots \\ X_n/X_0 \end{pmatrix}$ si dicono le coordinate affini associate su $\mathbb{P} \smallsetminus H$.

3.2. Ogni proiettività di $\mathbb{P}$ stabile su H induce una affinità di $\mathbb{P} \smallsetminus H$, e viceversa ogni tale affinità si estende unicamente a una proiettività di $\mathbb{P}$ che fissa H.

3.3. Descrizione ricorsiva degli spazi proiettivi a partire da spazi affini: $\mathbb{P}^n(K) \cong \mathbb{A}^n(K) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(K)$.

3.4. Descrizione standard. L'immersione standard

$$\mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K) \text{ data da } \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

determina un isomorfismo di $\mathbb{A}^n(K)$ sull'aperto U di $\mathbb{P}^n(K)$ dato da $X_0 \neq 0$. L'applicazione inversa $U \longrightarrow \mathbb{A}^n(K)$ si scrive come $\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X_1/X_0 \\ \vdots \\ X_n/X_0 \end{pmatrix}$.

3.5. Una matrice $A \in \mathrm{PGL}(n, K)$ di una proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$ si restringe ad una affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ se e solo se è (proporzionale a una) della forma $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & B' \end{smallmatrix}\right)$ con $B' \in \mathrm{GL}(n, K)$, ovvero se e solo se lascia (globalmente) stabile l'iperpiano "all'infinito" di equazione $X_0 = 0$. Viceversa ogni affinità di $\mathbb{A}^n(K)$ si estende unicamente ad una proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$ della forma suddetta.

3.5.1. Le traslazioni di $\mathbb{A}^n(K)$ sono le (restrizioni di) omologie speciali di asse l'iperpiano all'infinito. Le simmetrie di $\mathbb{A}^n(K)$ sono le (restrizioni di) proiettività involutorie con uno dei sottospazi complementari di punti uniti contenuto nell'iperpiano improprio; le simmetrie centrali sono le omologie