Lo spazio proiettivo punteggiato associato $\mathbb{P}$ è il sottinsieme di $\mathbb{S}$ dato da $\{s \in \mathbb{S} \,:\, \alpha(s) \in \mathbb{P}(V)\}$; lo spazio proiettivo degli iperpiani associato $\mathbb{I}$ è il sottinsieme di $\mathbb{S}$ dato da $\{s \in \mathbb{S} \,:\, \alpha(s) \in \mathbb{I}(V)\}$.

1.3. Spazio Proiettivo Duale. Lo spazio proiettivo duale $\mathbb{S}^*$ è costituito dallo stesso insieme $\mathbb{S}$ dotato della biiezione $\alpha^* = \alpha_{\mathbb{S}^*} = \alpha_S \circ \tau_V^{-1} : \mathbb{S}(V^*) \longrightarrow \mathbb{S}$. Lo spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}^*$ di $\mathbb{S}^*$ si identifica con lo spazio proiettivo degli iperpiani $\mathbb{I}$ associato a $\mathbb{S}$.

1.4. Dimensioni. Per $t = \alpha(W) \in \mathbb{S}$, con $W \in \mathbb{S}(V)$, poniamo $\dim(t) := \dim_K(W)-1$. In particolare: $\dim \alpha(0)=-1$ e $\alpha(0) \in \mathbb{S}$ di dice il vuoto proiettivo; $t \in S$ si dice punto, retta, piano, iperpiano se $\dim(t) = 0, 1, 2, n-1$ rispettivamente. Se $\dim(t) = m$ per $t \in \mathbb{S}$, allora la sua dimensione considerato come $t \in \mathbb{S}^*$ (elemento dello spazio proiettivo duale) risulta $\dim(t) = n - m - 1$.

1.4.1. Formule di Grassmann. Se $s, t \in \mathbb{S}$ allora $\dim(s)+\dim(t)=\dim(s\vee t)+\dim(s\wedge t)$.

1.5. Principio di Dualità Proiettiva. Ogni asserzione scritta in termini di elementi generici di uno spazio proiettivo coinvolgendo solo la struttura di reticolo è vera se e solo se risulta vera l'asserzione duale che si ottiene sostituendo $\vee$ con $\wedge$, $\wedge$ con $\vee$, $\leqslant$ con $\geqslant$ (relazione duale) e dim con $n - 1 - \dim$.

1.6. Applicazioni Proiettive, Proiettività. Una applicazione proiettiva $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}'$ è una funzione indotta da una applicazione lineare $f : V \longrightarrow V'$ tra gli spazi vettoriali sovrastanti, i.e. tale che $\varphi(\alpha(W)) = \alpha'(f(W))$ per ogni $W \in \mathbb{S}(V)$.

Due applicazioni lineari f, g sono sovrastanti la stessa applicazione proiettiva se e solo se $g = \lambda f$ per $\lambda \in K^\times$.

1.6.1. Definiamo $\mathrm{im}\,(\varphi) = \alpha'(\mathrm{im}\,(f))$, e $\ker(\varphi) = \alpha(\ker(f))$ che si chiama il luogo di degenerazione dell'applicazione φ. Risulta $\dim(\mathrm{im}\,(\varphi))+\dim(\ker(\varphi))=\dim(\mathbb{S}) - 1$.

1.6.2. L'applicazione proiettiva $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}'$ non induce direttamente una applicazione tra gli spazi punteggiati, a causa del luogo di degenerazione, ma induce $\varphi : \mathbb{P} \smallsetminus \ker(\varphi) \longrightarrow \mathbb{P}'$.

1.6.3. Una proiettività è una applicazione proiettiva di $\mathbb{S}$ in sè il cui nucleo sia il vuoto proiettivo di $\mathbb{S}$, ovvero che abbia immagine tutto $\mathbb{S}$, o ancora tale che l'applicazione lineare sovrastante sia un isomorfismo. Il gruppo delle proiettività di $\mathbb{S}$, sotto l'operazione di composizione, si indica con $\mathrm{PGL}(\mathbb{S})$ ed è isomorfo a $\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/K^\times$.

1.6.4. Inclusioni, Proiezioni, Sezioni. Siano $t = \alpha(W)$ e $t' = \alpha(W')$ elementi di $\mathbb{S}$. Si dicono sghembi se $t \wedge t' = \alpha(0)$ (il vuoto di $\mathbb{S}$, ovvero $W \cap W' = 0$), incidenti altrimenti; si dicono complementari se sono sghembi e $t \vee t' = \alpha(V)$ (corrisponde a $W \oplus W' = V$). Indichiamo con T il sottospazio di $\mathbb{S}$ di sostegno t, e con T^* la stella di $\mathbb{S}$ di asse t.

L'inclusione $T \subseteq \mathbb{S}$ è applicazione proiettiva con applicazione lineare sovrastante l'inclusione $W \leqslant V$.

La proiezione $\mathbb{S} \longrightarrow T^*$ data da $s \mapsto s \vee t$ è applicazione proiettiva di sovrastante la proiezione $V \longrightarrow V/W$. Più generalmente la proiezione di t' dal centro t è $T' \longrightarrow T^*$ data da $s \mapsto s \vee t$ di applicazione sovrastante la proiezione $W' \longrightarrow (W'+W)/W$.

Se t e t'' sono complementari, allora la sezione della stella di asse t con t'' è $T^* \longrightarrow T''$ data da $u \mapsto u \wedge t''$ di applicazione sovrastante l'isomorfismo canonico $V/W \longrightarrow W''$.

Se t e t'' sono complementari, allora la proiezione di t' su t'' di centro t è $T' \longrightarrow T''$ data da $u \mapsto (u \vee t) \wedge t''$ composta di una proiezione e di una sezione.

1.6.5. Omologie. Le omologie sono proiettività con un iperpiano di punti uniti (detto asse dell'omologia), e dunque (ed equivalentemente) per dualità una stella di sottospazi uniti di centro un punto (detto centro dell'omolgia). L'omologia si dice speciale o non speciale (generale) a seconda che il centro appartenga o meno all'asse.

2. Riferimenti e coordinate proiettive.

2.1. Lo spazio proiettivo standard. Lo spazio proiettivo standard di dimensione n su K è $\mathbb{P}^n(K) := V_{n+1}(K)/K^\times$; se $v \in V$ ha coordinate $\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, il punto $P = \langle v \rangle$ ha coordinate omogenee $\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$, ma che si indica ancora con $\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ se non c'è pericolo di confusione (cioè sempre).