Capitolo O

Preliminari sugli Spazi Affini e Proiettivi

In questo capitolo preliminare richiameremo alcune nozioni di geometria già note agli studenti, mettendo in rilievo quelle che avranno un ruolo fondamentale nello studio delle Curve. Il lettore dovrebbe semplicemente riconoscere, leggendo questo capitolo, nozioni già apprese.

1. Spazi Proiettivi e Proiettività.

1.1. Reticoli di Sottospazi. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un corpo K. Definiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(V) &:= \{W \ :\ W \leqslant V\}, \\ \mathbb{P}(V) &:= \{W \ :\ W \leqslant V,\ \dim_K W{=}1\}, \\ \mathbb{I}(V) &:= \{W \ :\ W \leqslant V,\ \dim_K W{=}\dim_K V{-}1\} \end{aligned}$$

rispettivamente gli insiemi dei sottospazi, delle rette e degli iperpiani di V, che si dicono rispettivamente spazi proiettivi completo, punteggiato, iperigato associati a V. Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ (risp. $\mathbb{I}(V)$) si dicono i punti (risp. gli iperpiani) di $\mathbb{S}(V)$.

1.1.1. Lo spazio proiettivo completo $\mathbb{S}(V)$ associato a V ha struttura di reticolo con le operazioni di intersezione e somma di sottospazi e l'ordine dell'inclusione, con infimo (sottospazio nullo, detto il vuoto proiettivo) e supremo (il sottospazio V stesso). Osservazioni:
(1) $W_1 \subseteq W_2 \iff W_1{+}W_2 = W_2 \iff W_1{\cap}W_2 = W_1$,
(2) $(W_1{+}W_2){\cap}W_3 \supseteq (W_1{\cap}W_3){+}(W_2{\cap}W_3)$,
(3) $(W_1{\cap}W_2){+}W_3 \subseteq (W_1{+}W_3){\cap}(W_2{+}W_3)$
(le inclusioni possono essere strette, in particolare il reticolo non è distributivo).

1.1.2. Se $W \leqslant V$ è un sottospazio, allora:
$\mathbb{S}(W) \subseteq \mathbb{S}(V)$ si dice il sottoreticolo completo (o sottospazio proiettivo completo) di sostegno W;
$\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ si dice il sottospazio proiettivo punteggiato di sostegno W;
$\mathbb{S}(V/W) \cong \{W' \in \mathbb{S}(V) \ :\ W \leqslant W'\} \subseteq \mathbb{S}(V)$ si dice la stella (proiettiva) completa di sostegno W.

È usuale confondere un elemento $W \in \mathbb{S}(V)$ con lo spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}(W)$, cioè identificare un elemento con la collezione dei punti in esso contenuti.

1.1.3. La dualità canonica tra V e V^* induce un antiisomorfismo (dualità) di reticoli $\tau_V : \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{S}(V^*)$ dato da $W \mapsto W^\perp$ ed induce un antiisomorfismo $\mathbb{S}(V/W) \longrightarrow \mathbb{S}(W^\perp) \cong \mathbb{S}((V/W)^*)$. La dualità scambia sottospazi con stelle.

1.1.4. Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow V'$ induce una applicazione (insiemistica) $\mathbb{S}(f) : \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{S}(V')$ data da $W \mapsto f(W)$, soddisfacente alle seguenti proprietà:
(1) $\mathbb{S}(f)(0) = 0$;
(2) $\dim_K \mathbb{S}(f)(W) \leqslant \dim_K(W)$;
(3) $\mathbb{S}(f)(W \cap W') \subseteq \mathbb{S}(f)(W) \cap \mathbb{S}(f)(W')$;
(4) $\mathbb{S}(f)(W{+}W') = \mathbb{S}(f)(W){+}\mathbb{S}(f)(W')$.
(5) $\mathbb{S}(f)(W) = \mathbb{S}(f)(W')$ se e solo se $W + \ker f = W' + \ker f$.

È vero che una funzione $F : \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{S}(V')$ avente le proprietà di diminuire le dimensioni, di rispettare la somma (di sottospazi) e che l'immagine di due elementi è uguale se solo se coincidono quando sommati con il massimo elemento di immagine nulla, è del tipo $F = \mathbb{S}(f)$ per qualche $f : V \longrightarrow V'$ (lineare)?

1.2. Spazio Proiettivo. Uno spazio proiettivo completo di spazio vettoriale sovrastante V ($\dim_K(V) = n{+}1$) è un insieme $\mathbb{S}$ dotato di una biiezione $\alpha = \alpha_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}(V) \longrightarrow \mathbb{S}$. Per trasporto di struttura risulta data una struttura di reticolo su $\mathbb{S}$ (le operazioni si indicano con $\vee$, $\wedge$ e la relazione con $\leqslant$); dunque se $s = \alpha(W)$ e $s' = \alpha(W')$ è $s{\vee}s' = \alpha(W{\cap}W')$, $s{\wedge}s' = \alpha(W{+}W')$ e $s \leqslant s' \iff W \leqslant W'$.