MATEMATICA

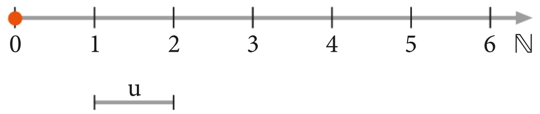
01 I numeri naturali e i numeri interi M2
02 I numeri razionali M6
03 I numeri reali e i radicali M9
04 I monomi e i polinomi M13
05 La scomposizione e le frazioni algebriche M17
06 Le equazioni M20
07 Le disequazioni M24
08 I sistemi lineari M27
09 Gli esponenziali e i logaritmi M29
10 La geometria del piano e la congruenza M32
11 L'equivalenza delle superfici e la similitudine M40
12 La circonferenza, il cerchio e i poligoni M44
13 La geometria solida M48
14 Il piano cartesiano e la retta M52
15 Le coniche M55
16 Le funzioni goniometriche M59
17 Le formule goniometriche M62
18 Le equazioni goniometriche e la trigonometria M64
19 Le funzioni M66
20 Le percentuali M69
21 La statistica M70
22 Il calcolo combinatorio M72
23 La probabilità M75

LEZIONE 01

I numeri naturali e i numeri interi

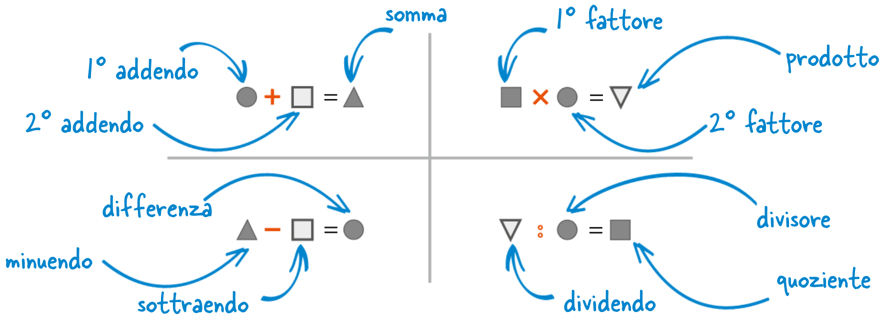
CHE COSA SONO I NUMERI NATURALI

I **numeri naturali 0, 1, 2, 3, ...** servono per contare gli elementi di un insieme; indicano cioè la **cardinalità** di un insieme.
I numeri naturali hanno un **ordine** e possono essere rappresentati su una **semiretta orientata.**
L'insieme dei numeri naturali si indica con ℕ.



LE QUATTRO OPERAZIONI

Il divisore deve essere diverso da 0.
Delle quattro operazioni, solo l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni interne in ℕ.



I MULTIPLI E I DIVISORI DI UN NUMERO

Un numero naturale è **multiplo** di un altro se la divisione del primo per il secondo dà come resto 0.

Un numero naturale (diverso da 0) è **divisore** di un altro se la divisione del secondo per il primo dà come resto 0.

LE POTENZE

Una **potenza** con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base per se stessa tante volte quante sono indicate dall'esponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ volte}}$$

Qualunque numero **elevato a 1** dà come risultato se stesso: $a^1 = a$

Qualunque numero diverso da 0 **elevato a 0** dà come risultato 1: $a^0 = 1$

L'espressione 0^0 **non ha significato**.

LE ESPRESSIONI CON I NUMERI NATURALI

In **un'espressione**, le operazioni devono essere svolte in questo ordine:

1. Elevamento a potenza.
2. Moltiplicazione e divisione, nell'ordine in cui sono scritte.
3. Addizione e sottrazione, nell'ordine in cui sono scritte.

Inoltre, le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza.

LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

Proprietà dell'addizione

proprietà	espressione
commutativa	$a+b=b+a$
associativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$

Proprietà della moltiplicazione

proprietà	espressione
commutativa	$a\cdot b=b\cdot a$
associativa	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
distributiva a destra rispetto all'addizione	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Proprietà della sottrazione

proprietà	espressione	con
invariantiva	$a-b=(a+n)-(b+n)$ $a-b=(a-n)-(b-n)$	$a\geq b$ $a\geq b\geq n$

Proprietà della divisione

proprietà	espressione	con
invariantiva	$a\div b=(a\cdot n)\div(b\cdot n)$ $a\div b=(a\div n)\div(b\div n)$	$b\neq 0, n\neq 0$ a multiplo di b $b\neq 0, n\neq 0$ a multiplo di b, a e b multipli di n
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$	$c\neq 0, a+b$, a e b multipli di c

LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Proprietà delle potenze

proprietà	espressione	con
Prodotto di potenze di uguale base	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	
Quoziente di potenze di uguale base	$a^m\div a^n=a^{m-n}$	$m\geq n$, $a\neq 0$
Potenza di una potenza	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$	
Prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	
Quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n\div b^n=(a\div b)^n$	$b\neq 0$, a multiplo di b

Le lettere della tabella indicano numeri naturali qualsiasi. La base e l'esponente di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

IL MASSIMO COMUNE DIVISORE E IL MINIMO COMUNE MULTIPLO

Un numero naturale (maggiore di 1) è **primo** quando è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.

Ogni numero naturale non primo si può scomporre nel prodotto di **fattori primi**.

Il **massimo comun divisore (M.C.D.)** di due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo.

Esempio: M.C.D. $(18,48) =$ M.C.D. $(2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** di due o più numeri naturali diversi da 0 è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta con l'esponente più grande.

Esempio: m.c.m. $(12,20) =$ m.c.m. $(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

I NUMERI PRIMI

Un **numero primo** è un numero naturale maggiore di 1 divisibile solamente per 1 e per se stesso.

Ecco l'elenco dei primi 169 numeri primi:

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009

SOMME "SPECIALI"

Di seguito alcune proprietà dei numeri naturali maggiori di 0.

La somma dei primi N numeri è $N \cdot \frac{(N+1)}{2}$.

Esempio: la somma dei primi 100 numeri è: $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

La somma dei primi N numeri dispari è uguale a N^2.

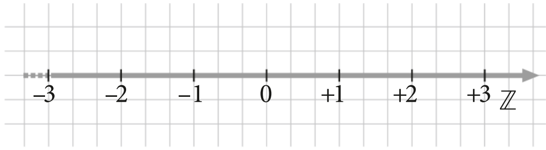
Esempio: la somma dei primi 100 numeri dispari, cioè i numeri dispari da 1 a 199, estremi inclusi, è: $100^2 = 10\,000$.

La somma dei primi N numeri pari è uguale a $(1 + N)N$.

Esempio: la somma dei primi 100 numeri pari, cioè i numeri pari da 2 a 200, estremi inclusi, è: $101 \cdot 100 = 10\,100$.

CHE COSA SONO I NUMERI INTERI

L'insieme degli interi è **ordinato** e può essere rappresentato su una retta orientata. Il **valore assoluto** di un numero intero è il numero considerato senza il segno che lo precede.
Due numeri interi sono **concordi** quando hanno lo stesso segno, sono **discordi** quando hanno segno diverso, sono **opposti** quando hanno lo stesso valore assoluto ma sono discordi.



LE OPERAZIONI NELL'INSIEME DEI NUMERI INTERI

La **somma di due interi concordi** è un intero che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno comune agli addendi.

Esempio: $(-44) + (-4) = -(44 + 4) = -48$.

La **somma di due interi discordi** è un intero che ha come valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti degli addendi e come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore.

Esempio: $(-19) + (+9) = -(19 - 9) = -10$.

La **differenza di due interi** è la somma del minuendo con l'opposto del sottraendo: $a - b = a + (-b)$.

Esempio: $(-4) - (+6) = (-4) + (-6) = -10$.

Il **prodotto di due interi** ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i fattori sono concordi, segno negativo se i fattori sono discordi.

Esempio: $(-3) \cdot (-6) = +18$;
$(-3) \cdot (+6) = -18$.

Il **quoziente di due interi**, di cui il primo multiplo del secondo, ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti, segno positivo se dividendo e divisore sono concordi, segno negativo se dividendo e divisore sono discordi.

Esempio: $(-18) : (-3) = +6$;
$(+18) : (-3) = -6$.

La **potenza di un intero**, con esponente naturale, ha per valore assoluto la potenza del valore assoluto e segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari, segno positivo altrimenti.

Esempio: $(-2)^3 = -8$;
$(-2)^4 = +16$.

L'operazione di potenza ha la precedenza rispetto al segno.
In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse **proprietà delle operazioni e delle potenze** che valgono in $\mathbb{N}$.

LEZIONE 02

I numeri razionali

DALLE FRAZIONI AI NUMERI RAZIONALI

Le frazioni

$\dfrac{n}{d}$ numeratore, linea di frazione, denominatore $\qquad n \in \mathbb{N},\, d \in \mathbb{N}$ e $d \neq 0$

$n < d$ frazione **propria**
$n > d$ frazione **impropria**
n multiplo di d frazione **apparente**

LE FRAZIONI EQUIVALENTI

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \qquad ad = bc$$

Esempio: $\dfrac{3}{4} \sim \dfrac{12}{16}$ perché $3 \cdot 16 = 4 \cdot 12$

LA PROPRIETÀ INVARIANTIVA

$$\frac{n}{d} \sim \frac{2n}{2d} \sim \frac{3n}{3d} \sim \dots$$

Esempio: $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \dfrac{12}{16}$

La frazione $\dfrac{n}{d}$ è **ridotta ai minimi termini** se n e d sono primi fra loro.

I numeri razionali

Anche per le frazioni formate da numeri interi relativi si può dare la stessa definizione di equivalenza.

Esempio: $\dfrac{-2}{7} \sim \dfrac{2}{-7}$

perché $(-2)\cdot(-7) = 7 \cdot 2$. Le frazioni precedenti si indicano anche con $-\dfrac{2}{7}$.

Ripartiamo l'insieme delle frazioni di numeri interi in classi di frazioni equivalenti: ogni classe d'equivalenza individua un **numero razionale**. Come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Esempio: $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{6}, \dots\right\}$ è il numero razionale rappresentato da $\dfrac{1}{2}$.

Possiamo perciò scrivere: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6}$

L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.

IL CONFRONTO TRA NUMERI RAZIONALI

Per **confrontare** due numeri razionali espressi da frazioni si può usare il «prodotto in croce».

Esempio: $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$

perché $5 \cdot 4 = 20 < 7 \cdot 3 = 21$.

$$\frac{5}{7} \quad \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{-6}{7} \quad \frac{-10}{11}$$

$$20 < 21 \qquad\qquad -66 > -70$$

LE OPERAZIONI IN $\mathbb{Q}$

Addizione e sottrazione: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \dfrac{a \cdot \dfrac{\text{m.c.m}\,(b,\,d)}{b} \pm c \cdot \dfrac{\text{m.c.m}\,(b,\,d)}{d}}{\text{m.c.m}\,(b,\,d)}$ con $b, d \neq 0$.

Moltiplicazione: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ con $b, d \neq 0$.

Divisione: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ con $b, c, d \neq 0$.
La divisione è interna in $\mathbb{Q}$.

Potenza: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.
Valgono tutte le proprietà viste in $\mathbb{Z}$.

Il **reciproco** di $\frac{a}{b}$ con $a, b \neq 0$, è $\frac{b}{a}$.
Il prodotto di un numero per il suo reciproco è 1, cioè l'**elemento neutro della moltiplicazione**.

LE POTENZE CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$, con $a, b \neq 0$.

Esempio: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

LE PERCENTUALI

Le **percentuali** sono un modo per rappresentare frazioni con denominatore 100.

Esempio: $3\% = \frac{3}{100}$ $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

LE FRAZIONI E LE PROPORZIONI

Una **proporzione** è un modo per scrivere l'uguaglianza di frazioni equivalenti.

Proprietà delle proporzioni

proprietà	**a : b = c : d se e solo se**
fondamentale	$a \cdot d = b \cdot c$
del comporre	$(a+b):a=(c+d):c$ $(a+b):b=(c+d):d$
dello scomporre	$(a-b):a=(c-d):c$ $(a-b):b=(c-d):d$
del permutare	$a:c=b:d$ $d:b=c:a$
dell'invertire	$b:a=d:c$

I NUMERI RAZIONALI E I NUMERI DECIMALI

La **rappresentazione decimale** di un numero si basa sulla scrittura posizionale e sull'uso della virgola.

Esempio: $28{,}104 = 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000}$

Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un numero decimale **finito** o **periodico**.

IL CALCOLO APPROSSIMATO

I numeri decimali si possono approssimare **per difetto** e **per eccesso**.

Esempio: 120,71 approssima 120,7129 per difetto e approssima 120,709 per eccesso.

LEZIONE 03

I numeri reali e i radicali

LA NECESSITÀ DI AMPLIARE L'INSIEME $\mathbb{Q}$

La **radice quadrata** di un numero è quel numero *positivo* o *nullo* che, elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.

L'estrazione di radice non è un'operazione interna in $\mathbb{Q}$.

Per esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale.

DAI NUMERI RAZIONALI AI NUMERI REALI

Ogni numero razionale può essere approssimato mediante due successioni di numeri decimali: una che lo approssima per eccesso, l'altra che lo approssima per difetto.

Per esempio:

$$0 < 0{,}2 < 0{,}22 < \ldots < \frac{2}{9} < \ldots < 0{,}23 < 0{,}3 < 1$$

a meno di 0,01

a meno di 0,1

a meno di 1

I numeri **irrazionali** sono numeri decimali illimitati non periodici. Possono essere approssimati per difetto e per eccesso da due successioni di decimali.
I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali.
L'insieme $\mathbb{R}$ è **denso**, cioè fra due numeri reali a e b esiste sempre un altro numero reale, e quindi ne esistono infiniti; inoltre $\mathbb{R}$ è **completo**, cioè a ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa.

I RADICALI

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0:
- se a è positivo o nullo la **radice *n*-esima** di a è quel numero reale b, anch'esso non negativo, la cui potenza con esponente n è uguale ad a;

naturale diverso da 0

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \longleftrightarrow \quad b^n = a$$

reali maggiori o uguali a 0

• se a è negativo e n è dispari, la **radice n-esima** di a è quel numero reale b negativo la cui potenza con esponente n è uguale ad a;

naturale dispari

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

reali minori di 0

• se a è negativo e n è pari, non esiste la **radice n-esima** di a.

naturale pari

$\sqrt[n]{a}$ non esiste

reale minore di 0

Dalla definizione di radice n-esima si deduce la seguente proprietà: dati un numero reale a positivo o nullo e un numero naturale n pari, oppure un numero reale a e un numero n dispari, la radice n-esima del numero a, elevata alla n, dà come risultato il numero a.

Al simbolo $\sqrt[n]{a}$, con $a \geq 0$, si dà il nome di **radicale con indice *n***. I radicali con indice 2 si chiamano **radicali quadratici**, quelli con indice 3 **radicali cubici**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

con a maggiore o uguale a 0 e n pari
o con a reale e n dispari

indice del radicale

$$\sqrt[4]{3^5}$$

esponente del radicando

radicando

I RADICALI IN $\mathbb{R}_0^+$

Limitando lo studio ai radicali in $\mathbb{R}_0^+$, nell'espressione $\sqrt[n]{a}$ il radicando deve essere un numero positivo o nullo indipendentemente dall'indice di radice.

Proprietà invariantiva dei radicali: dato un radicale, moltiplicando l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, si ottiene un radicale equivalente. È possibile ottenere un radicale equivalente anche dividendo indice ed esponente per un loro divisore comune.

Applicando la proprietà invariantiva è possibile **semplificare** un radicale oppure **ridurre allo stesso indice** più radicali.

Nella semplificazione, se il radicando è letterale e non se ne conosce il segno, occorre scrivere il radicando in valore assoluto.
$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$

SEMPLIFICAZIONE

:2

$$\sqrt[6]{7^{10}} = \sqrt[3]{7^5}$$

:2

RIDUZIONE ALLO STESSO INDICE

·2

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^{10}}$$

·2

·3

$$\sqrt[4]{a^3} \quad \sqrt[12]{a^9}$$

·3

LA MOLTIPLICAZIONE E LA DIVISIONE FRA RADICALI

Il **prodotto** di due radicali con lo stesso indice è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

Esempio: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$

Se i radicali hanno indice diverso, per moltiplicarli è sufficiente ridurli al loro minimo comune indice.

stesso indice

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{2000}$$

riduciamo allo stesso indice

prodotto dei radicandi

Considerazioni analoghe valgono per il **quoziente** di radicali.

Per esempio:

$$\sqrt{2^4} \div \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[10]{(2^4)^5} \div \sqrt[10]{(2^3)^2} =$$
$$= \sqrt[10]{2^{20} \div 2^6} = \sqrt[10]{2^{14}} = \sqrt[5]{2^7}$$

Un **fattore del radicando**, scritto sotto forma di **potenza con base non negativa**, può essere **portato fuori dal segno di radice**, se il suo esponente m è maggiore o uguale all'indice n della radice. Il fattore esterno ha per esponente il quoziente della divisione fra m e n, quello interno ha per esponente il resto della divisione.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

quoziente

resto

$$\sqrt[3]{5^{14}} = \sqrt[3]{5^{4\cdot 3+2}} = \sqrt[3]{5^{4\cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = 5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

LA POTENZA E LA RADICE DI UN RADICALE

La **potenza** m-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[7]{3^2}\right)^4 = \sqrt[7]{\left(3^2\right)^4} = \sqrt[7]{3^8}$$

La **radice** m-esima di un radicale di indice n è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici $m \cdot n$ e per radicando lo stesso radicando.

prodotto degli indici

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \qquad \sqrt[7]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[21]{2}$$

Un **fattore non negativo** può essere **portato dentro il segno di radice**, diventando fattore del radicando, se lo si eleva alla potenza che ha per esponente l'indice del radicale.

Esempio: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

L'ADDIZIONE E LA SOTTRAZIONE DI RADICALI

Due radicali irriducibili sono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.
La **somma di due radicali simili** è un radicale simile ai radicali dati avente per coefficiente la somma dei loro coefficienti.

radicali simili

radicale simile ai radicali dati

$$4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$$

somma algebrica dei coefficienti

LA RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.

Esempio: $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Se il denominatore è la somma o la differenza di due termini, dei quali almeno uno è il radicale quadratico, per esempio: $\dfrac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

moltiplichiamo numeratore e denominatore per la differenza $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, in modo da applicare il prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5}$$

LE POTENZE CON ESPONENTE RAZIONALE

È possibile scrivere i radicali sotto forma di **potenze con esponenti razionali**.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geq 0) \qquad 7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}$$

I RADICALI IN $\mathbb{R}$

Dati un numero reale a e un numero naturale n diverso da 0, è possibile calcolare la radice n-esima di a secondo il seguente schema:

$$\sqrt[n]{a}\begin{cases} n \text{ pari} \begin{cases} a>0 \rightarrow \text{numero reale positivo}\\ a=0 \rightarrow =0 \\ a<0 \rightarrow \nexists \text{ in } \mathbb{R}\end{cases}\\ n \text{ dispari}\begin{cases} a>0 \rightarrow \text{numero reale positivo}\\ a=0 \rightarrow =0 \\ a<0 \rightarrow \text{numero reale negativo}\end{cases}\end{cases}$$

I monomi e i polinomi

CHE COSA SONO I MONOMI

Un **monomio** è un'espressione letterale formata dal prodotto di numeri e potenze che hanno per base una lettera e per esponente un numero naturale. Perciò, fra le lettere, **non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni**.

$\frac{3a^4}{2}$ è un monomio

$\frac{4a^3}{b^2}$ non è un monomio

Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (il **coefficiente**) e una o più lettere diverse fra loro, con i relativi esponenti (la **parte letterale**).

Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

parte letterale

$5a^4b^6$ grado: $4 + 6 = 10$

coefficiente

LE OPERAZIONI CON I MONOMI

Due monomi sono **simili** quando hanno la stessa parte letterale.

La **somma** o la **differenza** di due monomi simili è un monomio che si ottiene *sommando algebricamente i coefficienti e lasciando invariata la parte letterale.*

stessa parte letterale

$2a - 5a = -3a$

somma algebrica dei coefficienti

Nel **prodotto**, per i *coefficienti* si usano le regole relative ai numeri, mentre per le lettere si utilizzano le *proprietà delle potenze*.

somma degli esponenti

$3a^3 \cdot 2a^2 = 3 \cdot 2a^{3+2} = 6a^5$

prodotti dei coefficienti

Lo stesso accade per il **quoziente** o la **potenza** di monomi.

Esempio: $12a^{12} \div 3a^3 = (12 \div 3)a^{12-3} = 4a^9$
$(2a^2)^3 = 2^3a^{2\cdot 3} = 8a^6$

M.C.D. E m.c.m. FRA MONOMI

- La parte letterale del **massimo comune divisore** (**M.C.D.**) fra monomi è il prodotto delle sole *lettere comuni* a tutti i monomi, ognuna presa una sola volta e con l'*esponente minimo*.

- La parte letterale del **minimo comune multiplo** (**m.c.m.**) fra monomi è il prodotto di *tutte le lettere* presenti nei monomi, ognuna presa una sola volta e *con l'esponente massimo*.

- Il coefficiente è rispettivamente il M.C.D. e il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi; in caso contrario, il coefficiente è 1.

ab^2	a	b^2	
a^2b	a^2	b	
abc^3	a	b	c^3

M.C.D. = ab lettere comuni con l'esponente minimo

m.c.m. = $a^2b^2c^3$ tutte le lettere con l'esponente massimo

Esempi: M.C.D. $\left(\frac{1}{2}x^3yz^4, \frac{3}{5}x^2y^3\right) = x^2y$

M.C.D. $(10x^4y^3z, 12xy^2z^2) = 2xy^2z$

m.c.m. $(10x^4y^3z, 12xy^2z^2) = 60x^4y^3z^2$

CHE COSA SONO I POLINOMI

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Anche ogni monomio viene considerato un polinomio.

Esempio: $3a - b$ e $3ab$ sono polinomi; $\frac{3a}{b}$ non è un polinomio.

Un polinomio è **ridotto** a forma normale se lo sono i suoi termini e se fra di essi non ci sono monomi simili.
I polinomi ridotti con uno, due, tre e quattro termini si chiamano rispettivamente **monomi**, **binomi**, **trinomi** e **quadrinomi**.

Un polinomio è:
- **omogeneo** quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado;
- **ordinato** rispetto a una lettera se i suoi termini sono disposti con gli esponenti di quella lettera in ordine decrescente o crescente;
- **completo** rispetto a una lettera se questa compare con tutte le potenze dal grado massimo al grado 0.

Il **grado** di un polinomio ridotto è il grado maggiore dei suoi termini. Il **grado rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a quella lettera.

Il **termine noto** è il termine formato soltanto da un numero, ossia il monomio di grado 0.

Esempio $2x^2y - \frac{1}{2}x^3 + 3xy^2$

- è un trinomio omogeneo di terzo grado;
- il grado rispetto a x è 3, quello rispetto a y è 2;
- non è ordinato e non è completo;
- il termine noto è 0.

Esempio: $3a^4 - 2a^3 + a + 2$

è un quadrinomio completo e ordinato di quarto grado; non è omogeneo; il termine noto è +2.

LE OPERAZIONI CON I POLINOMI

La **somma** di due polinomi è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi; la **differenza** è un polinomio ottenuto addizionando al primo l'opposto del secondo. In generale, parliamo di **somma algebrica** di polinomi.
Per ottenere il **prodotto** di due polinomi si moltiplica ogni termine del primo per ogni termine del secondo e si addizionano i prodotti. In particolare, il prodotto di un monomio per un polinomio si ottiene addizionando i termini ottenuti moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.

$a(a+b)=a^2+ab$ $\qquad$ $(a+b)(a+1)=a^2+a+ab+b$

Esempio: $(5x+4y)+(2x-y)-(x+8y)=5x+4y+2x-y-x-8y=6x-5y$

I PRODOTTI NOTEVOLI

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza:

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Il quadrato di un binomio:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

Il quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

Il cubo di un binomio:

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Invece dei calcoli...

$$(2a+b)^3=(2a+b)(2a+b)(2a+b)=$$
$$=(4a^2+2ab+2ab+b^2)(2a+b)=\dots$$

...i prodotti notevoli

$$(2a+b)^3$$
$$(\bigcirc+\square)^3=\bigcirc^3+3\bigcirc^2\square+3\bigcirc\square^2+\square^3$$
$$(2a+\boxed{b})^3=2a^3+3\,2a^2\boxed{b}+3\,2a\boxed{b}^2+\boxed{b}^3=$$
$$=8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$$

POTENZA *N*-ESIMA DI UN BINOMIO

Il **triangolo di Tartaglia** è una disposizione geometrica dei coefficienti dello **sviluppo del binomio (*a* + *b*) elevato a un qualsiasi esponente *n*.**

Di seguito sono riportati i coefficienti dello sviluppo del binomio $(a+b)$ fino a $n=7$.

$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$: 1 7 21 35 35 21 7 1

Gli elementi di ciascuna riga del triangolo di Tartaglia, si ottengono come somma dei due elementi adiacenti della riga precedente.
In questo modo si possono costruire i coefficienti per qualsiasi binomio $(a+b)^n$.

Utilizzando i coefficienti della riga relativa a $n = 5$, si ha:

$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.

LE FUNZIONI POLINOMIALI

Dato un polinomio $P(x)$, si chiama **funzione polinomiale** la funzione $y = P(x)$.
Il suo dominio è $\mathbb{R}$.
I valori della variabile indipendente x per i quali un polinomio si annulla sono gli **zeri** del polinomio. Per tali valori la funzione polinomiale $y = P(x)$ assume il valore $y = 0$.

Considerando

$y = -2x^2 - 5x + 3$ funzione polinomiale.

$x = -3$ e $x = \dfrac{1}{2}$ zeri della funzione

perché $P(-3) = 0$ e $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

> Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che è vera per ogni valore attribuito alle lettere che compaiono nelle espressioni.

IL TEOREMA DEL RESTO

Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x - a$ è $A(a)$.

$\overbrace{(x^3 + 7x^2 + x - 2)}^{A(x)} : \overbrace{(x+3)}^{x-a} \qquad a = -3$

$A(-3) = [-3^3 + 7(-3)^2 + (-3) - 2] = -27 + 63 - 3 - 2 = 31$

$R = 31$

IL TEOREMA DI RUFFINI

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $A(a) = 0$.

$x^2 - 3x - 10$ è divisibile per $x - 5$ se e solo se $\leftrightarrow$ $5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0$

La scomposizione e le frazioni algebriche

LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DEI POLINOMI

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come prodotto di polinomi. Se un polinomio si può scomporre, diciamo che è **riducibile**. Altrimenti è **irriducibile**.
Si hanno i seguenti **metodi di scomposizione**.

1. Il raccoglimento a fattore comune:

$$ab+ac=a(b+c)$$

2. Il raccoglimento parziale:

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

3. La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli:

- la **differenza di due quadrati**:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Esempio: $9a^2-1=(3a+1)(3a-1)$

- il **quadrato di un binomio**:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Esempio: $25x^2-30x+9=(5x-3)^2$

- il **quadrato di un trinomio**:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

Esempio: $x^2+1+4y^2+2x-4xy-4y=(x+1-2y)^2$

- il **cubo di un binomio**:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^2=(a+b)^3$$

Esempio: $a^3-6a^2+12a=(a-2)^3$

- la **somma o la differenza di due cubi**:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Esempio: $27-y^3=(3-y)(9+3y+y^2)$

4. La scomposizione di **particolari trinomi di secondo grado**:

$$x^2+sx+p=(x+x_1)(x+x_2)$$

Esempio: $a^2+7a+6=(a+1)(a+6)$

essendo $s=x_1+x_2$ $\quad p=x_1\cdot x_2$

5. La scomposizione mediante **il teorema e la regola di Ruffini**.

ESEMPIO SVOLTO

Dato il polinomio

$P(a)=3a^2+a-2$

cerchiamo i suoi zeri fra i divisori del termine noto, ossia $+1,-1,+2,-2$, e fra le frazioni $\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$

$P(1)=3(1)^2+1-2=2\neq 0$;
$\text{P}(-1)=3(-1)^2+(-1)-2=0$

-1 è uno zero di $P(a)$, quindi $P(a)$ è divisibile per $a+1$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & +1 & -2 \\ -1 & & -3 & +2 \\ \hline & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$3a-2$ è il quoziente della divisione, quindi:
$3a^2+a-2=(a+1)(3a-2)$.

M.C.D. E m.c.m. FRA POLINOMI

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello visto per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili.

polinomi	fattori
a^2-1	$(a+1)(a-1)$
a^2+2a+1	$(a+1)^2$
a^2+3a+2	$(a+1)(a+2)$

- M.C.D. $=a+1$ è il prodotto di tutti i fattori comuni, presi ciascuno con l'esponente minore.
- m.c.m. $=(a+1)^2(a-1)(a+2)$ è il prodotto di tutti i fattori irriducibili, comuni e non comuni, presi ciascuno con l'esponente maggiore.

LE FRAZIONI ALGEBRICHE

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Una frazione algebrica non esiste per quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Le **condizioni di esistenza** (C.E.) sono tutte le disuguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

ESEMPIO SVOLTO

$\dfrac{2x+3}{x-5}$ ha come condizione di esistenza

C.E.: $x \neq 5$, perché per $x=5$; $\dfrac{2(5)+3}{(5)-5}=\dfrac{13}{0}$, e $\dfrac{13}{0}$ non ha significato.

IL CALCOLO CON LE FRAZIONI ALGEBRICHE

È possibile semplificare le espressioni con frazioni algebriche facendo uso di **regole di calcolo** analoghe a quelle delle frazioni numeriche.

ESEMPIO SVOLTO

1

$$\frac{a^2+ab}{ab-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{b}{a}=$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$=\frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a-b)}}\cdot\frac{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a+b)^2}}+\frac{b}{a}=$$

C.E.: $a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a\neq b \wedge a\neq -b$

Moltiplichiamo:

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$$

Addizioniamo:

$$=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

2

$$\frac{x+y}{x^2-y^2}:\frac{x^2y-x^2}{x^3-yx^2}-\frac{1}{x}=$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$=\frac{\cancel{x+y}}{\cancel{(x+y)}(x-y)}:\frac{\cancel{x^2}(y-1)}{\cancel{x^2}(x-y)}-\frac{1}{x}=$$

C.E.: $x\neq -y \wedge x\neq y \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 1$

Moltiplichiamo la prima frazione per la reciproca della seconda e semplifichiamo:

$$=\frac{1}{\cancel{x-y}}\cdot\frac{\cancel{x-y}}{y-1}-\frac{1}{x}=$$

Moltiplichiamo:

$$=\frac{1}{y-1}-\frac{1}{x}=$$

Sottraiamo:

$$=\frac{x-y+1}{(y-1)x}=\frac{x-y+1}{xy-x}$$

LEZIONE 06

Le equazioni

LE IDENTITÀ

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che risulta verificata per qualunque valore attribuito alle lettere contenute nelle espressioni.

Esempio: $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$

è vera per qualunque valore di x.

Esempio: $\frac{ax}{a} = x \qquad C.E.: a \neq 0$

è vera per qualunque valore di a diverso da 0.

LE EQUAZIONI

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere per renderla vera. Tali valori sono le **soluzioni** o **radici** dell'equazione.

incognita

Esempio: $x - 1 = 0$

soluzione dell'equazione

è verificata solo se $x = 1$.

Un'equazione $P = 0$ è in **forma normale** se il polinomio P, nella variabile x, non contiene termini simili. Il grado dell'equazione è il **grado** del polinomio ridotto.
Un'**equazione lineare** è un'equazione di primo grado. Le equazioni possono essere **numeriche** o **letterali** a seconda che, oltre all'incognita, contengano soltanto numeri o anche altre lettere; possono essere **intere** o **fratte** a seconda che l'incognita sia presente solo nei numeratori oppure anche nei denominatori.
Un'equazione è **determinata** se ha un numero finito di soluzioni; è **indeterminata** se ha infinite soluzioni; è **impossibile** se non ha soluzioni.

TIPI DI EQUAZIONE

numerica intera	numerica fratta	letterale intera	letterale fratta
$\frac{1}{2}x - 1 = \frac{x+3}{5}$	$\frac{1}{x} = 2 - x$	$ax = \frac{1}{2}$	$\frac{a}{x} = b$

I PRINCÌPI DI EQUIVALENZA

Due equazioni contenenti la stessa incognita sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Primo principio di equivalenza delle equazioni. Data un'equazione, se si addiziona (o si sottrae) ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

Esempio: $x + 5 = 9$ e $x - 4 = 0$ sono equivalenti. Entrambe hanno come unica soluzione 4.

Dal primo principio discendono due regole.

- **Regola del trasporto.** È possibile spostare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno, ottenendo un'equazione equivalente.

$$2x - 5 = x + 6$$
$$2x = x + 6 + 5$$

- **Regola di cancellazione.** È possibile eliminare dai due membri due termini uguali, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio: $2x - 4 + \cancel{2} = x + \cancel{2}$.

Secondo principio di equivalenza delle equazioni. Data un'equazione, se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero o espressione *diversi da* 0, si ottiene un'equazione equivalente.

Esempio: $\frac{1}{2}x = 7$ è equivalente a $2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 7$, ossia $x = 14$.
$3x = 5$ è equivalente a $\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$, ossia $x = \frac{5}{3}$.

Dal secondo principio discendono due regole.

- **Regola della divisione per un fattore comune.** Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune, si possono dividere tutti i termini per tale fattore, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio: $6x - 10 = 12 \xrightarrow{:2} 3x - 5 = 6$

- **Regola del cambiamento di segno.** Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per -1 è possibile cambiare segno a tutti i termini, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio: $-3x + 2 = +5$
$+3x - 2 = -5$

LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

È sempre possibile scrivere un'equazione di primo grado nella forma $ax = b$.

- Se $a \neq 0$, allora $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$; la soluzione è $x = \frac{b}{a}$, l'equazione è determinata.
- Se $a = 0$ e $b = 0$, allora $0 \cdot x = 0$; l'equazione è indeterminata.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora $0 \cdot x = b$; l'equazione è impossibile.

LE EQUAZIONI FRATTE

Prima di risolvere un'**equazione numerica fratta,** dobbiamo determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti.
Al termine della risoluzione dobbiamo **controllare se le soluzioni sono accettabili**.

ESEMPIO SVOLTO

$\dfrac{3x-1}{x}=2$;

controllo della soluzione

C.E.: $x \neq 0$

$3x - 1 = 2x \qquad 3x - 2x = 1 \qquad x = 1$

LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale:
$ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$.
Sono presenti un termine di secondo grado (ax^2), uno di primo grado (bx) e un termine noto (c).
Se entrambi i coefficienti b e c sono diversi da 0, l'equazione è **completa**, altrimenti è **spuria** se $b \neq 0$ e $c = 0$, **pura** se $b = 0$ e $c \neq 0$, **monomia** se $b = 0$ e $c = 0$.

ESEMPIO SVOLTO

$4x^2+3x-5=0$ è un'equazione di secondo grado completa;

$2x^2=0$ è monomia; $\qquad 5x^2-3=0$ è pura; $\qquad 7x^2+x=0$ è spuria.

Il **discriminante** dell'equazione completa $ax^2+bx+c=0$ è $\Delta=b^2-4ac$.

Soluzioni delle equazioni di secondo grado complete

segno del discriminante	soluzioni	esempio
$\Delta>0$	due radici reali e distinte: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2-2x-3=0$ $\Delta=4+3\cdot4=16$ $x_1=\dfrac{2+\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3$ $x_2=\dfrac{2-\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2-4}{2}=-1$
$\Delta=0$	due radici reali e coincidenti: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$4x^2-4x+1=0$ $\Delta=16-4\cdot4=0$ $x_1=x_2=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$
$\Delta<0$	non esistono soluzioni reali	$2x^2+3x+3=0$ $\Delta=9-4\cdot2\cdot3=-15$

Se il coefficiente di x, cioè b, è divisibile per 2, per risolvere l'equazione si può applicare la cosiddetta **formula ridotta**.

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac \qquad x_1=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad x_2=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

Soluzioni delle equazioni di secondo grado incomplete

tipo di equazione	equazione	soluzioni	esempio
pura $(b=0, c\neq 0)$	$ax^2+c=0$	$x_1=\sqrt{\frac{-c}{a}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ le radici sono reali solo se a e c sono discordi.	$6x^2-5=0$ $x_1=\sqrt{\frac{5}{6}}$ $x_2=-\sqrt{\frac{5}{6}}$
spuria $(c=0, b\neq 0)$	$ax^2+bx=0$	$x_1=0$; $x_2=-\frac{b}{a}$	$4x^2+3x=0$ $x_1=0$ $x_2=-\frac{3}{4}$
monomia $(b=c=0)$	$ax^2=0$	$x_1=x_2=0$	$25x^2=0$ $x_1=x_2=0$

Se l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha come radici reali x_1 e x_2, posti $s=x_1+x_2$ e $p=x_1\cdot x_2$, si ha: $s=-\frac{b}{a}$; $p=\frac{c}{a}$. Pertanto l'equazione è equivalente a: $x^2-sx+p=0$.

LA SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Dato il trinomio ax^2+bx+c, se l'equazione associata $ax^2+bx+c=0$ ha soluzioni reali, tali soluzioni (x_1 e x_2) sono anche **zeri** del trinomio.
Il trinomio è:

- **scomponibile in fattori** se
  $\Delta>0: ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
  $\Delta=0: ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$
- **irriducibile** in $\mathbb{R}$ se $\Delta<0$.

ESEMPIO SVOLTO

Il trinomio $4x^2+11x-3$ ha l'equazione associata $4x^2+11x-3=0$ con $\Delta=169>0$.
Le radici dell'equazione sono $x_1=\frac{1}{4}$ e $x_2=-3$.
Questi valori sono anche gli zeri del trinomio che è scomponibile:
$4x^2+11x-3=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+3)=(4x-1)(x+3)$.

LE EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione è **irrazionale** se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.

Data un'equazione $A(x)=B(x)$, consideriamo l'equazione $[A(x)]^n=[B(x)]^n$:

- se n è **dispari**, essa è equivalente a quella data;
- se n è **pari**, essa ha come soluzioni, oltre a quelle di $A(x)=B(x)$, anche quelle di $A(x)=-B(x)$.

Per risolvere un'equazione irrazionale $\sqrt[n]{A(x)}=B(x)$ dobbiamo:

- elevare a n entrambi i membri dell'equazione;
- controllare se n è pari o dispari: se n è dispari, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono le stesse dell'equazione irrazionale; se n è pari, dobbiamo eseguire il controllo delle soluzioni mediante verifica o mediante condizioni.

LEZIONE 07 Le disequazioni

LE DISEQUAZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si cercano i valori di una o più lettere (le **incognite**) che la rendono vera.
Tali valori sono le **soluzioni** della disequazione.

Le soluzioni di una disequazione possono ricadere entro diversi **intervalli** di valori.

INTERVALLI LIMITATI

$a < x < b$

a. Intervallo aperto $]a; b[$.

$a \leq x \leq b$

b. Intervallo chiuso $[a; b]$.

$a \leq x < b$

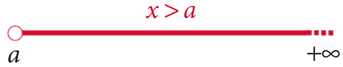
c. Intervallo aperto a destra $[a; b[$.

$a < x \leq b$

d. Intervallo aperto a sinistra $]a; b]$.

INTERVALLI ILLIMITATI

$x > a$



a. Intervallo aperto illimitato superiormente $]a; +\infty[$.

$x < a$

b. Intervallo aperto illimitato inferiormente $]-\infty; a[$.

$x \geq a$

c. Intervallo chiuso illimitato superiormente $[a; +\infty[$.

$x \leq a$

d. Intervallo chiuso illimitato inferiormente $]-\infty; a]$.

Princìpi di equivalenza
Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente:

- aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero (o espressione);
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *positivo*;
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Risoluzione della **disequazione di primo grado intera** $ax > b$:

- se $a > 0$, $\quad x > \frac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b \geq 0, & \nexists x \in \mathbb{R}; \\ \text{se } b < 0, & \forall x \in \mathbb{R}; \end{cases}$
- se $a < 0$, $\quad x < \frac{b}{a}$;

ESEMPIO SVOLTO

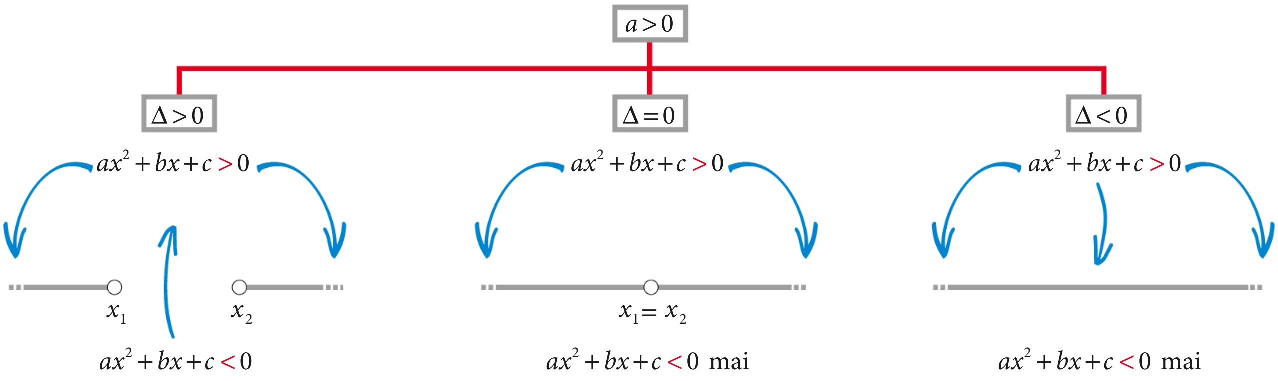
$3x > 5 \qquad x > \frac{5}{3}$;

$5x > 5x - 3 \qquad 0x > -3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$;

$-5x > 12 \qquad x < -\frac{12}{5}$.

LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Una **disequazione intera di secondo grado** può essere ricondotta alla forma:
$ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$
o alle analoghe che si ottengono con i segni $<, \leq$ o $\geq$.
Per risolverla consideriamo l'**equazione associata** $ax^2 + bx + c = 0$, di cui chiamiamo x_1 e x_2 le soluzioni (quando esistono).



Esempio: la disequazione $2x^2 - 5x - 3 > 0$ ha per soluzione $x < -\frac{1}{2} \vee x > 3$.

LE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE E LE DISEQUAZIONI FRATTE

Una disequazione del tipo $P(x) > 0$, con $P(x)$ polinomio di grado maggiore di 2, può essere risolta scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio $P(x)$ e **studiando il segno** del prodotto.
Analogamente, per risolvere una **disequazione fratta** del tipo:

$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, posto $B(x) \neq 0$,

dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Esempio: $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

Compiliamo il quadro della figura.

		-1		2	
$x-2$	−		−	0	+
$x+1$	−	0	+		+
$\frac{x-2}{x+1}$	+	$\nexists$	−	0	+

$x < -1 \vee x > 2$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

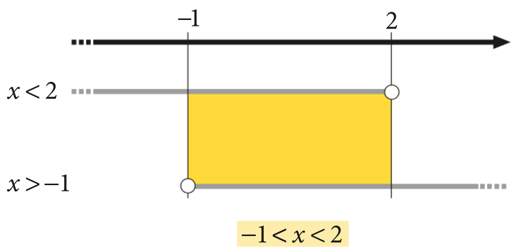
Un **sistema di disequazioni** è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

ESEMPIO SVOLTO

Il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \end{cases}$$

avrà le soluzioni che si individuano compilando il quadro della figura.



LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

Per risolvere **equazioni** o **disequazioni con il valore assoluto** di espressioni contenenti l'incognita, si esamina il segno di ogni espressione che sia all'interno di un valore assoluto.

L'equazione $|A(x)|=a$ non ha soluzione se $a<0$, altrimenti si risolve ponendo $A(x)=\pm a$.

La disequazione $|A(x)|<k$, con $k>0$, è equivalente a $-k<A(x)<k$, ossia al sistema:

$$\begin{cases} A(x)>-k \\ A(x)<k \end{cases}$$

Esempio: $|x-2|<5$ è equivalente a $-5<x-2<5$, ossia

$$\begin{cases} x-2>-5 \\ x-2<5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-3 \\ x<7 \end{cases} \qquad -3<x<7$$

Le soluzioni della disequazione $|A(x)|>k$, con $k>0$, sono date dall'unione delle soluzioni di $A(x)<-k$ e di $A(x)>k$.

Esempio: $|x-6|>1$ è equivalente all'unione delle disequazioni

$x-6<-1 \vee x-6>1$,

ossia $x<5 \vee x>7$.

I sistemi lineari

I SISTEMI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite. Il sistema è detto **lineare** se formato da equazioni di primo grado.

Il **grado** di un sistema di equazioni algebriche intere è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

La soluzione di un sistema è una soluzione comune a tutte le equazioni che lo compongono.

ESEMPIO SVOLTO

Il sistema

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 6x-y=8 \end{cases}$$

ha come soluzione la coppia (1; –2), mentre la coppia (0; 0) non è soluzione del sistema perché soddisfa solo la prima equazione.

Prima di applicare qualsiasi metodo risolutivo a un sistema lineare è bene ridurlo a forma normale, cioè:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

IL METODO DI SOSTITUZIONE

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo di **sostituzione** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x+y=5 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \rightarrow \quad y=5-4x$$

$$\begin{cases} y=5-4x \\ 3x-2(5-4x)=12 \end{cases} \rightarrow \quad x=2$$

$$\begin{cases} y=5-4\cdot 2 \\ x=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

I SISTEMI DETERMINATI, IMPOSSIBILI, INDETERMINATI

Un sistema è **determinato**, **impossibile** o **indeterminato** a seconda che abbia una, nessuna o infinite soluzioni.

Il sistema lineare $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ è

- **determinato** se $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$
- **indeterminato** se $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$
- **impossibile** se $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$

Se studiamo il problema in termini geometrici, le equazioni di un sistema lineare di due equazioni in due incognite sono le equazioni di due rette.

Se il sistema è:

- **determinato**, le due rette si intersecano in un punto;
- **indeterminato**, le due rette sono coincidenti;
- **impossibile**, le due rette sono parallele.

Gli esponenziali e i logaritmi

LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Una potenza con esponente reale è:
a^x, con $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

Esempio: $(\sqrt{2})^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}}$ sono potenze con esponente reale.

La base di a^x è dunque sempre positiva, mentre l'esponente può essere anche negativo o nullo; il risultato è sempre un numero positivo.

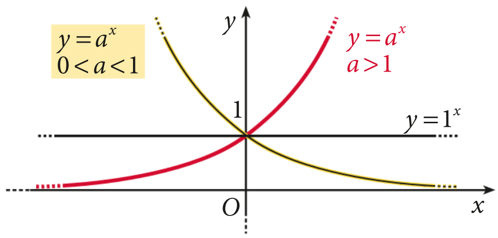
Valgono le cinque proprietà delle potenze e il seguente teorema:
- $a > 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
- $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

Casi particolari:
- $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $0^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Si dice **funzione esponenziale** ogni funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ del tipo $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

Se $a \neq 1$, la funzione esponenziale è o **sempre crescente** o **sempre decrescente**.



LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'**equazione esponenziale** contiene almeno una potenza in cui compare l'incognita nell'esponente.

L'equazione esponenziale più semplice è del tipo:
$a^x = b$ con $a > 0$.

Quando l'equazione è determinata $(a \neq 1, b > 0)$, può essere **risolta in modo immediato** se si riescono a scrivere a e b come potenze con la stessa base.

Esempio: $27^x = 81 \rightarrow 3^{3x} = 3^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$.

LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Una **disequazione esponenziale** contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Per risolvere le disequazioni esponenziali si tiene conto che:

- se $a>1$ e $a^x>a^y$, allora $x>y$;
- se $0<a<1$ e $a^x>a^y$, allora $x<y$

Esempio 1: $2^{2x}>2^3 \longrightarrow 2x>3 \longrightarrow x>\frac{3}{2}$.

Esempio 2: $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^5 \longrightarrow x<5$.

IL LOGARITMO

Il **logaritmo** in base a di b, dati due numeri reali positivi a e b, con $a\neq 1$, è l'esponente da assegnare ad a per ottenere b.

$$x=\log_a b \longleftrightarrow a^x=b$$

base

$$a>0\wedge a\neq 1, b>0$$

Casi particolari:
- $\log_a 1=0$, perché $a^0=1$
- $\log_a a=1$, perché $a^1=a$.

Proprietà

- $a^{\log_a b}=b$.
- $x=y \Leftrightarrow \log_a x=\log_a y$.

Se $a>0\wedge a\neq 1$, valgono le seguenti proprietà:

1. **Logaritmo di un prodotto:**

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c \qquad (b>0, c>0).$$

2. **Logaritmo di un quoziente:**

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c \qquad (b>0, c>0).$$

3. **Logaritmo di una potenza:**

$$\log_a b^n=n\cdot\log_a b \qquad (b>0, n\in\mathbb{R}).$$

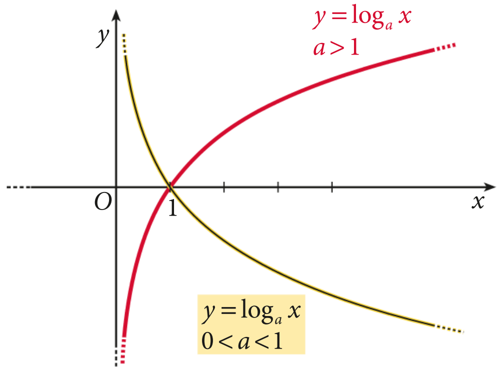
I logaritmi in base 10 si indicano con il simbolo log, quelli in base e con ln.

Logaritmi di **diversa base**:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, a\neq 1, c\neq 1, a>0, b>0, c>0.$$

LA FUNZIONE LOGARITMICA

La **funzione logaritmica** è una funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ del tipo $y=\log_a x$, con $a\in\mathbb{R}^+$ e $a\neq 1$.



LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

Si dice **equazione logaritmica** un'equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

ESEMPIO SVOLTO

$\log(x-7)=1$

C.E.: $x-7>0 \rightarrow x>7$; $\log(x-7)=\log 10$; $x-7=10 \rightarrow x=17$

$17>7 \Rightarrow 17$ è soluzione accettabile.

LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Fra le **disequazioni logaritmiche** consideriamo quelle del tipo: $\log_a A(x)<\log_a B(x)$.
Teniamo conto che:

- per $a>1$, se $\log_a b<\log_a c$, allora $b<c$;
- per $0<a<1$, se $\log_a b<\log_a c$, allora $b>c$;

e risolviamo il sistema formato da:

- le condizioni di esistenza della disequazione;
- la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO SVOLTO

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<\log_{\frac{1}{3}}3$ $\begin{cases} x-2>0 & \text{C.E.} \\ x-2>3 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, con verso opposto} \end{cases}$

rispetto a quella fra i logaritmi $\left(0<\frac{1}{3}<1\right)$.

$\begin{cases} x>2 \\ x>5 \end{cases} \rightarrow x>5$

I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Alcune equazioni e disequazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

Esempio: $2\cdot 6^x=5$ $\quad \log 2+x\log 6=\log 5 \quad x=\dfrac{\log 5-\log 2}{\log 6}$

LEZIONE 10

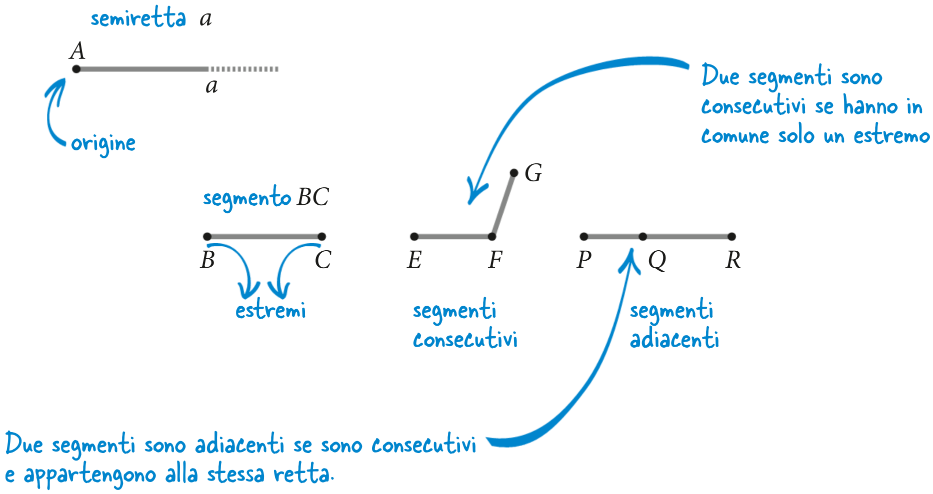
La geometria del piano e la congruenza

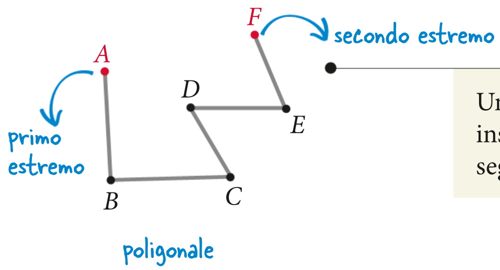
OGGETTI GEOMETRICI E PROPRIETÀ

La geometria si basa su *enti primitivi* (come il punto, la retta, il piano), che vengono accettati come noti. Tutti gli altri *enti geometrici* (semirette, segmenti, angoli, ecc.) vengono descritti mediante **definizioni**.

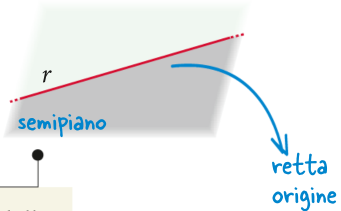
Una **figura geometrica** è un qualsiasi insieme di punti.

Lo **spazio** è l'insieme di tutti i punti. Fra le proprietà geometriche alcune sono espresse mediante **postulati**, proprietà che accettiamo come vere. Le altre sono descritte da **teoremi**, ossia proposizioni che devono essere dimostrate. Di seguito sono rappresentati graficamente i principali enti geometrici.

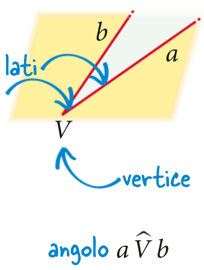


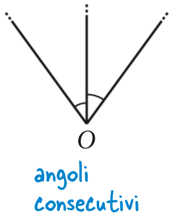


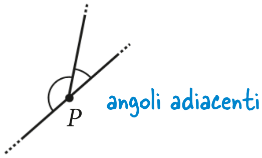
Una **poligonale** è una figura costituita da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo sono consecutivi.



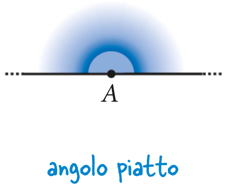
Data una retta di un piano, un **semipiano** è formato dalla retta e da una delle due regioni in cui la retta divide il piano.

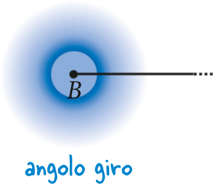




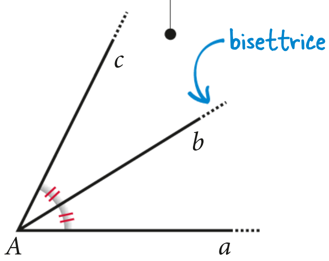


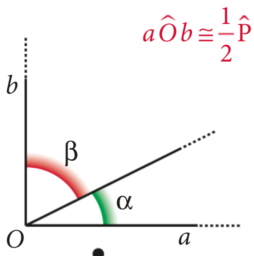
Due angoli sono:
- **consecutivi** se hanno in comune il vertice e un lato e giacciono da parti opposte rispetto al lato in comune;
- **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

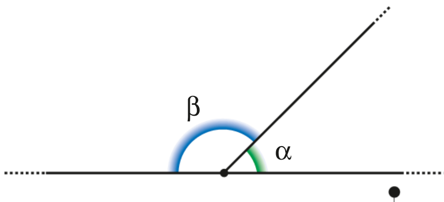




La **bisettrice** di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.



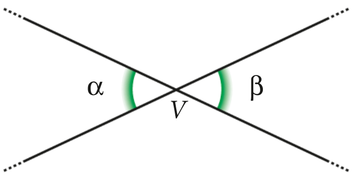




$\alpha + \beta \cong \hat{P}$

α e β sono supplementari

Due angoli sono:
- **complementari** se la loro somma è un angolo retto;
- **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto;
- **esplementari** se la loro somma è un angolo giro.



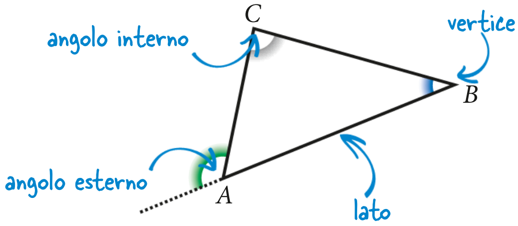
α e β sono opposti al vertice: $\alpha \cong \beta$

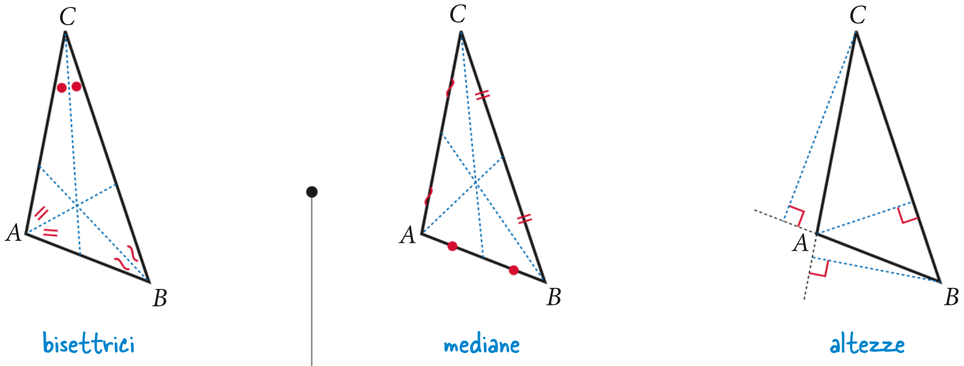
Due **angoli** sono **opposti al vertice** se hanno in comune il vertice e i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

I TRIANGOLI

Un **triangolo** è un sottoinsieme del piano costituito da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni.

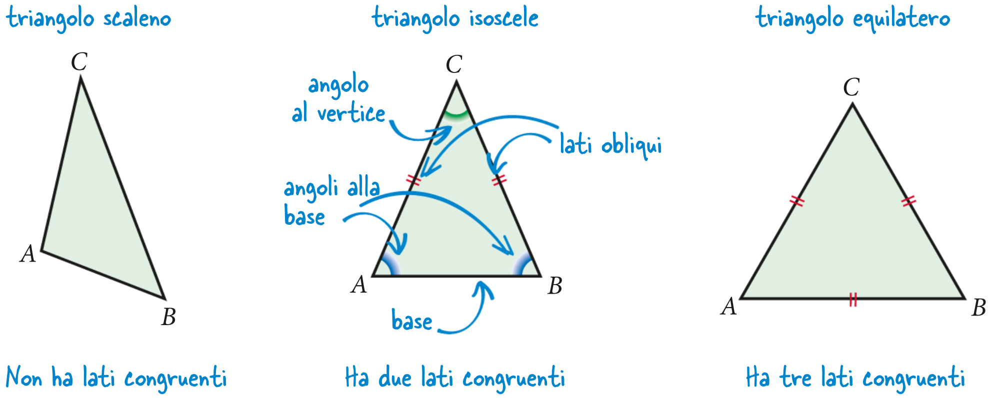
In un triangolo sono segmenti particolari: le bisettrici, le mediane, le altezze. Questi segmenti hanno per estremi un vertice e un punto del lato opposto a tale vertice (o del suo prolungamento).





Ogni **bisettrice** è un segmento che divide uno degli angoli del triangolo in parti congruenti; ogni **mediana** è un segmento che ha per estremi un vertice e il punto medio del lato opposto; ogni **altezza** ha un estremo sul lato opposto al vertice dal quale essa parte (o sul suo prolungamento) e forma con esso due angoli retti.

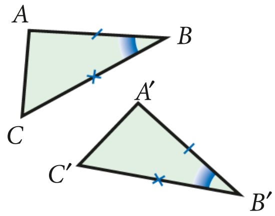
I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati.



LA CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

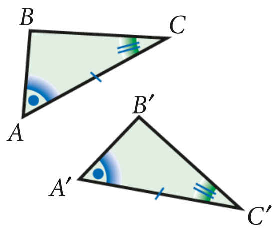
Due triangoli sono **congruenti** se sono sovrapponibili punto a punto.

Primo criterio di congruenza dei triangoli
Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso.



$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{array}\right. \longrightarrow ABC \cong A'B'C'$$

Secondo criterio di congruenza dei triangoli
Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli a esso adiacenti.



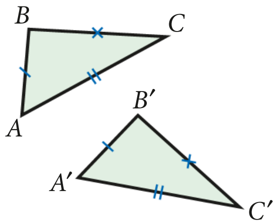
$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{array}\right. \longrightarrow ABC \cong A'B'C'$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia **isoscele** è che abbia due angoli congruenti.

Teorema. La bisettrice, l'altezza e la mediana relative alla base di un triangolo isoscele coincidono.

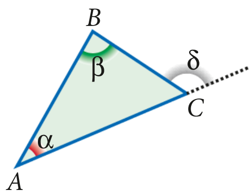
Corollario. Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia **equilatero** è che abbia i tre angoli congruenti.

Terzo criterio di congruenza dei triangoli
Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i tre lati.



$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ AC \cong A'C' \end{array}\right. \longrightarrow ABC \cong A'B'C'$$

LE DISUGUAGLIANZE NEI TRIANGOLI

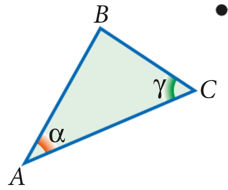


$\delta > \alpha$

$\delta > \beta$

Teorema dell'angolo esterno (maggiore). Ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno dei due angoli non adiacenti.
Corollario 1. La somma di due angoli interni è minore di un angolo piatto.
Corollario 2. In un triangolo ci sono sempre due angoli acuti.
Corollario 3. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.

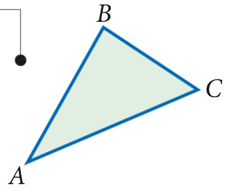
I triangoli possono essere classificati anche rispetto agli angoli: un triangolo è **rettangolo** se ha un angolo retto, è **ottusangolo** se ha un angolo ottuso, è **acutangolo** se tutti gli angoli sono acuti.



$AB > BC \Leftrightarrow \gamma > \alpha$

Teorema. In ogni triangolo, non equilatero, a lato maggiore si oppone angolo maggiore e viceversa.

Teorema. In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.



$AC < AB + BC$

$AC > AB - BC$

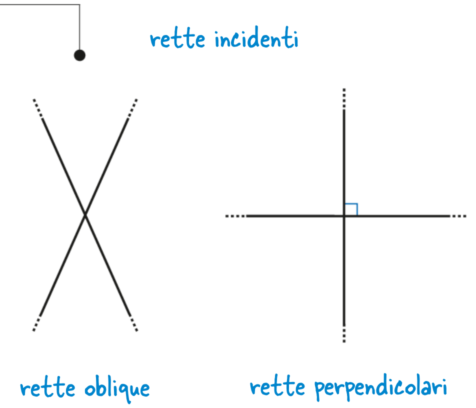
I POLIGONI

I triangoli sono particolari poligoni.

Un **poligono** è un sottoinsieme del piano costituito da una poligonale chiusa non intrecciata e dai suoi punti interni.

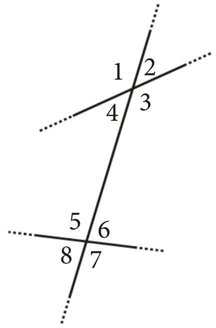
LE RETTE PERPENDICOLARI E PARALLELE

Due rette del piano sono **incidenti** quando hanno un solo punto in comune.



Rette incidenti che, intersecandosi, formano quattro angoli retti sono **perpendicolari**, altrimenti sono **oblique**.

Due rette tagliate da una trasversale formano coppie di angoli che, a seconda della posizione, hanno nomi diversi.



alterni
- interni: (4; 6), (3; 5)
- esterni: (1; 7), (2; 8)

corrispondenti: (1; 5), (2; 6), (4; 8), (3; 7)

coniugati
- interni: (4; 5), (3; 6)
- esterni: (1; 8), (2; 7)

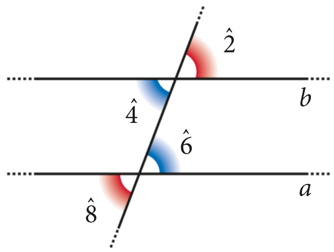
Due rette sono **parallele** quando sono coincidenti o quando non hanno punti in comune.
Se due rette formano con una trasversale:

- angoli **alterni congruenti**, *oppure*
- angoli **coniugati supplementari**, *oppure*
- angoli **corrispondenti congruenti**,

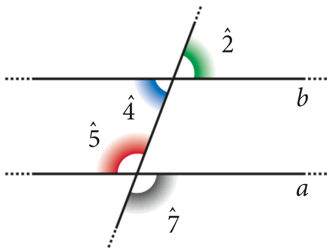
allora sono **parallele** (teorema delle rette parallele e sue conseguenze).

Se due rette sono **parallele**, formano con una trasversale:

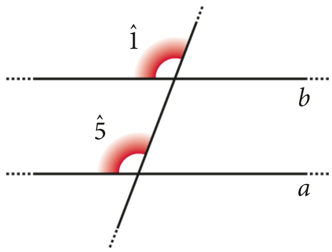
- angoli **alterni congruenti**;
- angoli **coniugati supplementari**;
- angoli **corrispondenti congruenti** (inverso del teorema delle rette parallele e sue conseguenze).



$\hat{4} \cong \hat{6}$
$\hat{8} \cong \hat{2}$ $a /\!/ b$

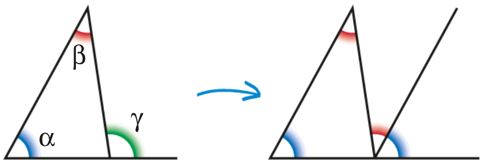


$\hat{5} + \hat{4} \cong \hat{P}$
$\hat{7} + \hat{2} \cong \hat{P}$ $a /\!/ b$



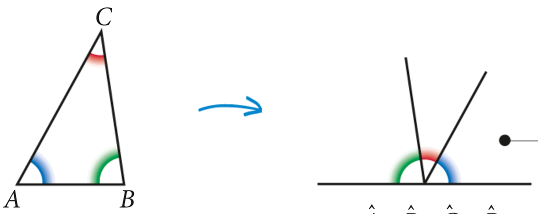
$\hat{1} \cong \hat{5}$ $a /\!/ b$

LE PROPRIETÀ DEGLI ANGOLI DEI POLIGONI



$\gamma \cong \alpha + \beta$

Ogni **angolo esterno di un triangolo** è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti a esso (teorema dell'angolo esterno).



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$

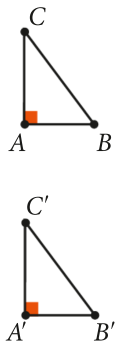
La **somma degli angoli interni** di un poligono di n lati è congruente a $(n - 2)$ angoli piatti.
In particolare, **in un triangolo la somma degli angoli interni è congruente a un angolo piatto**.

La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono è congruente a un angolo giro.

I CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI

Due **triangoli rettangoli** sono **congruenti** se hanno rispettivamente congruenti:

- **due cateti**, *oppure*
- **un cateto e un angolo acuto corrispondenti**, *oppure*
- **l'ipotenusa e un angolo acuto**, *oppure*
- **l'ipotenusa e un cateto**.



1° $AC \cong A'C'$; $AB \cong A'B'$

2° $AC \cong A'C'$; $A\hat{C}B \cong A'\hat{C}'B'$

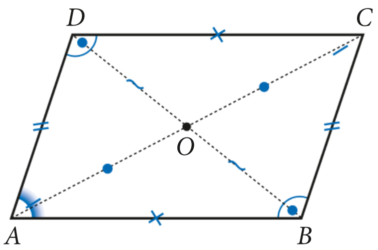
3° $CB \cong C'B'$; $A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$

4° $CB \cong C'B'$; $AB \cong A'B'$

$\rightarrow$ $ABC \cong A'B'C'$

QUADRILATERI

Un **parallelogramma** è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.



1° $AB \cong DC$; $BC \cong AD$

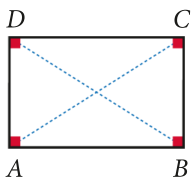
2° $\hat{A} \cong \hat{C}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$

3° $AO \cong OC$; $BO \cong OD$

4° $AB \cong DC$; $AB \parallel DC$

$\rightarrow$ $ABCD$ è un parallelogramma

Un **rettangolo** è un parallelogramma che ha i quattro angoli congruenti.



$ABCD$ è un parallelogramma
$AC \cong BD$ $\rightarrow$ $ABCD$ è un rettangolo

Un **rombo** è un parallelogramma che ha i quattro lati congruenti.

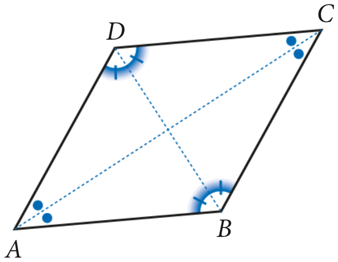
In un rombo le diagonali sono:

- perpendicolari;
- bisettrici degli angoli.

Se in un parallelogramma le diagonali sono:

- perpendicolari, *oppure*
- bisettrici degli angoli

→ il parallelogramma è un rombo.



$ABCD$ è un parallelogramma

$AC \perp DB$ → $ABCD$ è un rombo

AC bisettrice di $\hat{A}$ o di $\hat{C}$
DB bisettrice di $\hat{B}$ o di $\hat{D}$ → $ABCD$ è un rombo

Un **quadrato** è un parallelogramma avente i quattro angoli e i quattro lati congruenti.

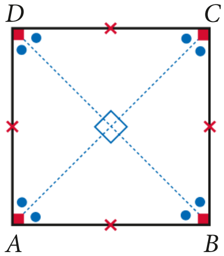
In un quadrato le diagonali sono:

- congruenti
- perpendicolari
- bisettrici degli angoli.

Se in un parallelogramma le diagonali sono:

- congruenti e perpendicolari, *oppure*
- congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo

→ il parallelogramma è un quadrato.

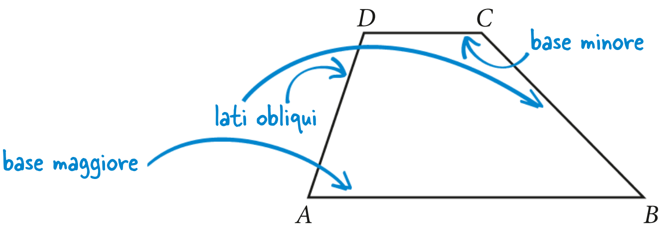


$ABCD$ è un parallelogramma

$AC \cong DB$
$AC \perp DB$ → $ABCD$ è un quadrato

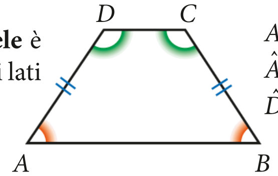
$AC \cong DB$
AC bisettrice di $\hat{A}$ o di $\hat{C}$ → $ABCD$ è un quadrato

Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due soli lati paralleli.



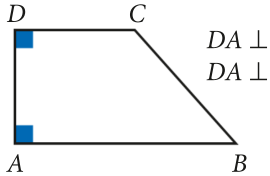
$DC \mathbin{//} AB$

Un **trapezio isoscele** è un trapezio avente i lati obliqui congruenti.



$AD \cong BC$
$\hat{A} \cong \hat{B}$
$\hat{D} \cong \hat{C}$

Un **trapezio rettangolo** è un trapezio in cui uno dei lati è perpendicolare alle basi.



$DA \perp AB$
$DA \perp DC$

LEZIONE 11

L'equivalenza delle superfici e la similitudine

L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA

Due superfici si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa estensione.

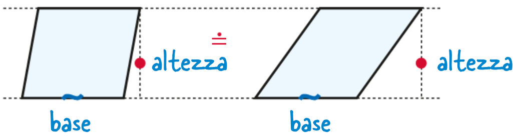
L'equivalenza fra solidi è una relazione di equivalenza. La caratteristica comune ai solidi che appartengono alla stessa classe di equivalenza è il **volume**.

Due solidi aventi la stessa estensione sono **equivalenti**.

L'EQUIVALENZA DI DUE PARALLELOGRAMMI

Se **due parallelogrammi** hanno congruenti le basi e le altezze, relative a tali basi, allora sono equivalenti.

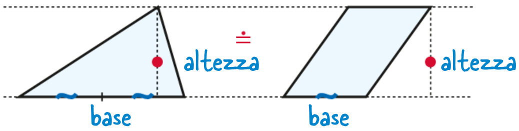
L'equivalenza di due parallelogrammi



Se un parallelogramma e un rettangolo hanno congruenti le basi e le relative altezze, sono equivalenti.

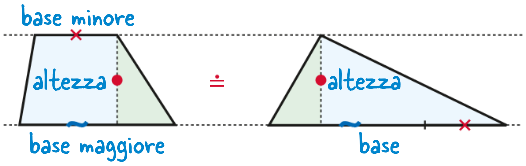
I TRIANGOLI E L'EQUIVALENZA

L'equivalenza fra parallelogramma e triangolo



Un **triangolo** è equivalente a un **parallelogramma** che ha altezza congruente a quella del triangolo e base congruente a metà base del triangolo.

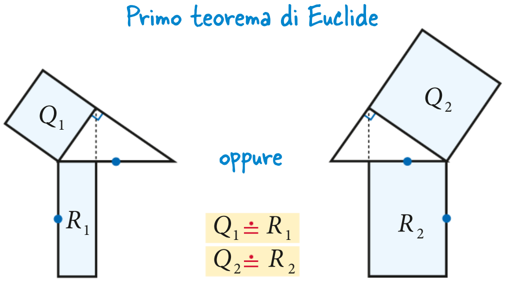
L'equivalenza tra triangolo e trapezio



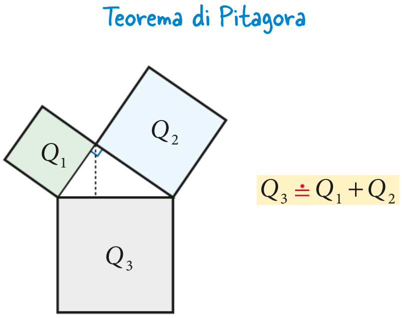
Un **trapezio** è equivalente a un **triangolo** che ha altezza congruente all'altezza del trapezio e base congruente alla somma delle basi del trapezio.

I TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

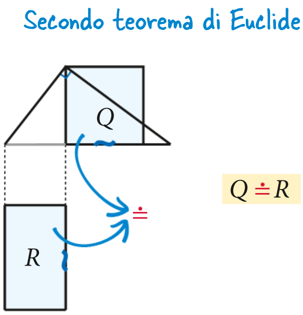
Il primo teorema di Euclide
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.



Il teorema di Pitagora
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



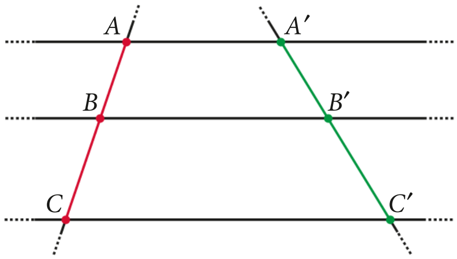
Il secondo teorema di Euclide
In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



IL TEOREMA DI TALETE

Teorema di Talete
Dato un fascio di rette parallele intersecato da due trasversali, i segmenti che si formano su una trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti corrispondenti che si formano sull’altra trasversale.

Teorema di Talete



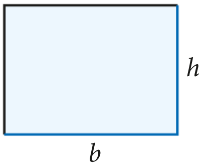
$AB : BC = A'B' : B'C'$

LE AREE DEI POLIGONI

Riportiamo le formule per calcolare la **misura delle aree** di alcune figure.

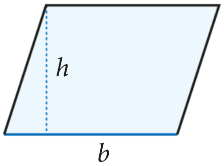
Le lettere b, h, ℓ, ecc. indicano le misure dei segmenti corrispondenti. A indica la misura dell’area e p indica il semiperimetro.

Rettangolo



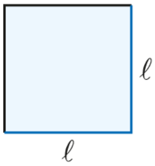
$A = b \cdot h$

Parallelogramma



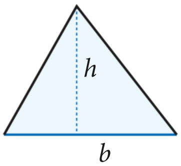
$A = b \cdot h$

Quadrato



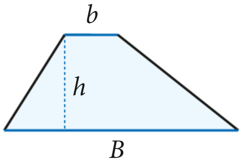
$A = \ell^2$

Triangolo



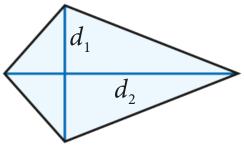
$A = \frac{1}{2} b \cdot h$

Trapezio



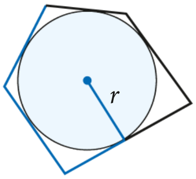
$A = \frac{1}{2}(B + b) \cdot h$

Quadrilatero con diagonali perpendicolari



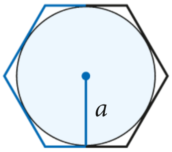
$A = \frac{1}{2}(d_1 \cdot d_2)$

Poligono circoscritto a una circonferenza

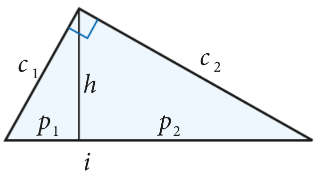


$A = p \cdot r$

Poligono regolare



$A = p \cdot a$



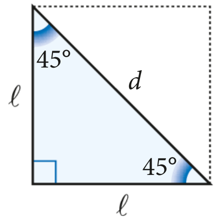
Teorema di Pitagora
$c_1^2 + c_2^2 = i^2$

Primo teorema di Euclide
$c_1^2 = p_1 \cdot i \qquad c_2^2 = p_2 \cdot i$

Secondo teorema di Euclide
$h^2 = p_1 \cdot p_2$

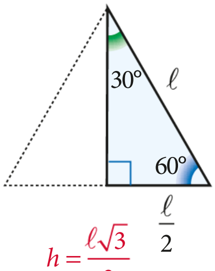
Area del triangolo
$2A = c_1 \cdot c_2 = i \cdot h$

Mediante la misura delle aree di rettangoli e quadrati scriviamo le relazioni che esprimono, in un triangolo rettangolo, il **teorema di Pitagora**, i due **teoremi di Euclide** e l'**area del triangolo**.
Possiamo inoltre esprimere alcune relazioni che valgono nei **triangoli rettangoli con angoli di 45° e con angoli di 30° e 60°**.



$d = \ell\sqrt{2}$

$\ell = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$



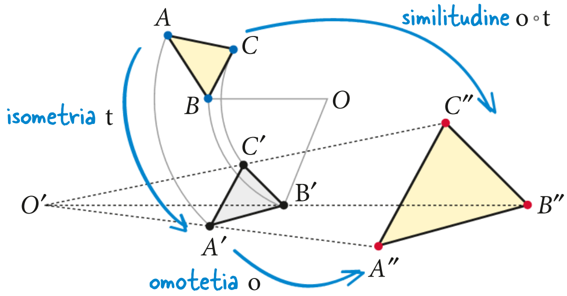
$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\ell = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$

LA SIMILITUDINE E LE FIGURE SIMILI

Due figure si dicono **simili** se l'una si può ottenere dall'altra mediante una **similitudine**, ossia la composizione di una omotetia e una isometria.

Gli elementi (lati, angoli, …) di una figura che si corrispondono in una similitudine si dicono **omologhi**.



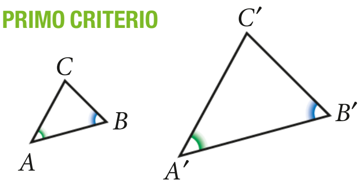
Se due poligoni sono simili, gli angoli omologhi sono **congruenti**, i **lati** omologhi sono in **proporzione**.

I CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

Due triangoli sono simili se si verifica una delle seguenti condizioni:
- i triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti; primo criterio di similitudine
- i triangoli hanno due lati ordinatamente in proporzione e l'angolo compreso congruente; secondo criterio di similitudine
- i triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione. terzo criterio di similitudine

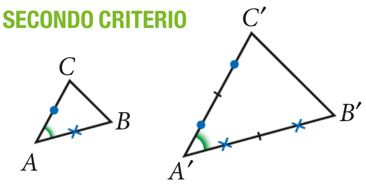
I CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

PRIMO CRITERIO



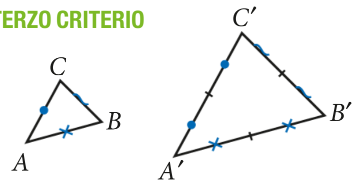
$\hat{A} \cong \hat{A}' \quad \hat{B} \cong \hat{B}'$
$\downarrow$
$ABC \approx A'B'C'$

SECONDO CRITERIO



$\hat{A} \cong \hat{A}' \quad AB : A'B' = AC : A'C'$
$\downarrow$
$ABC \approx A'B'C'$

TERZO CRITERIO



$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$
$\downarrow$
$ABC \approx A'B'C'$

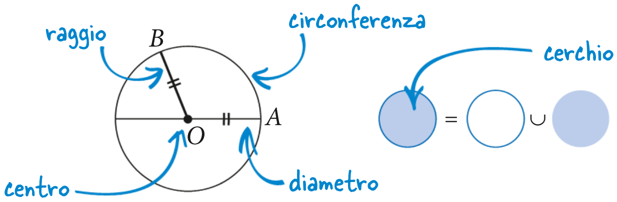
LEZIONE 12

La circonferenza, il cerchio e i poligoni

LA CIRCONFERENZA E IL CERCHIO

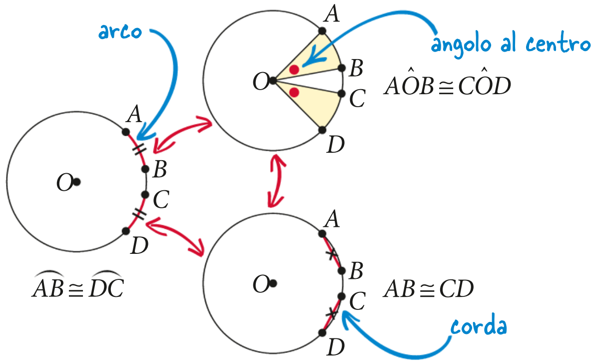
Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti e soli i punti di un piano che godono di una determinata proprietà caratteristica.

L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.
La **circonferenza** è il luogo dei punti di un piano che hanno una distanza assegnata da un punto fisso detto **centro**.
Il **cerchio** è la figura formata dai punti della circonferenza e dai suoi punti interni.



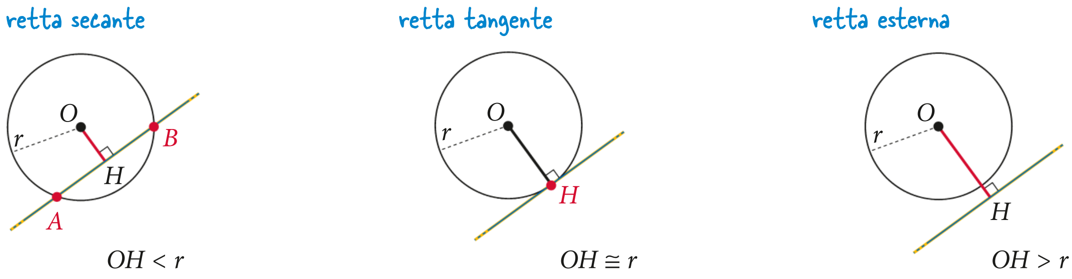
Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Se in una circonferenza sono congruenti due figure dello stesso tipo, per esempio due archi, allora sono congruenti anche le figure corrispondenti, ossia le due corde e i due angoli al centro.

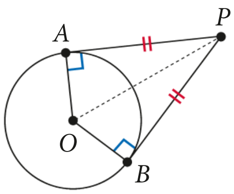


LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UNA CIRCONFERENZA

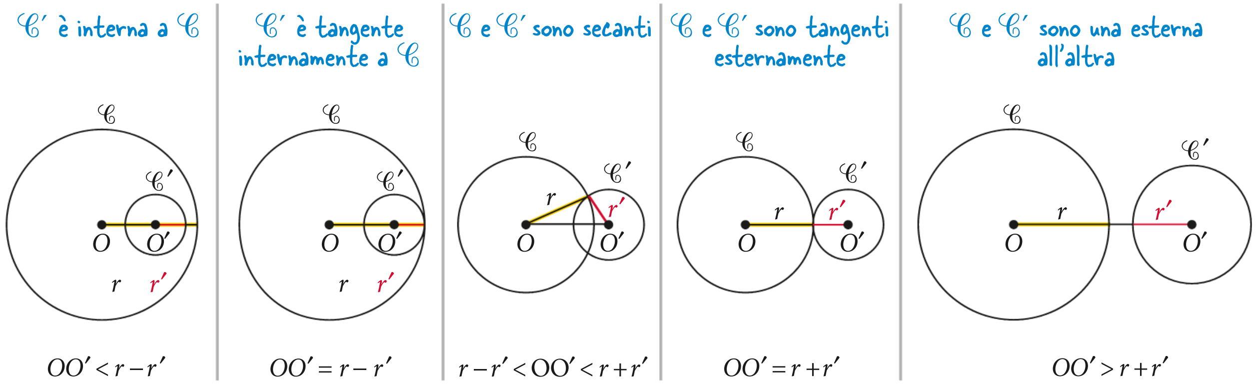
Una retta e una circonferenza che si intersecano non possono avere più di due punti in comune.
Una retta è **secante** una circonferenza se ha due punti in comune con essa, è **tangente** se ha un solo punto in comune, è **esterna** se non ha punti in comune.



Le tangenti a una circonferenza da un punto esterno
Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le due rette tangenti, risultano congruenti i due segmenti di tangente.



LE POSIZIONI RECIPROCHE FRA DUE CIRCONFERENZE

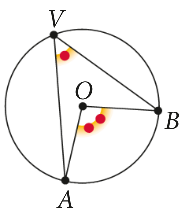


GLI ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E I CORRISPONDENTI ANGOLI AL CENTRO

Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza si dicono **corrispondenti** quando insistono sullo stesso arco. Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell’angolo al centro corrispondente.

Nella stessa circonferenza, due o più angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono **congruenti**.

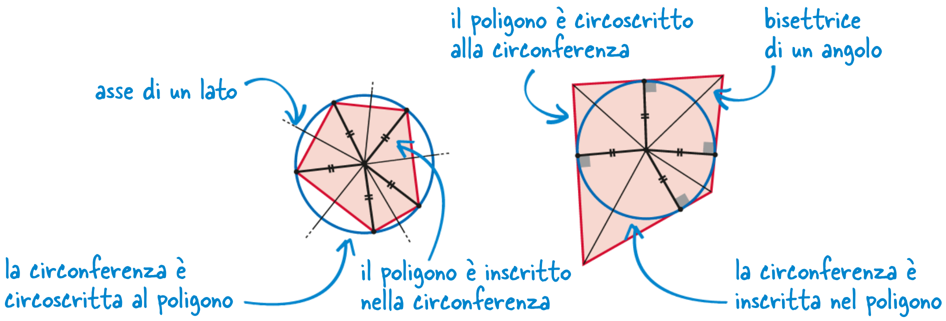
Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, è **retto**.



I POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

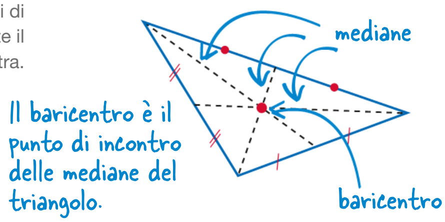
Un poligono è **inscritto** in una circonferenza quando ha tutti i vertici sulla circonferenza. Un poligono può essere inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei suoi lati si incontrano tutti in uno stesso punto. Il punto di intersezione degli assi dei lati del poligono coincide con il centro della circonferenza.

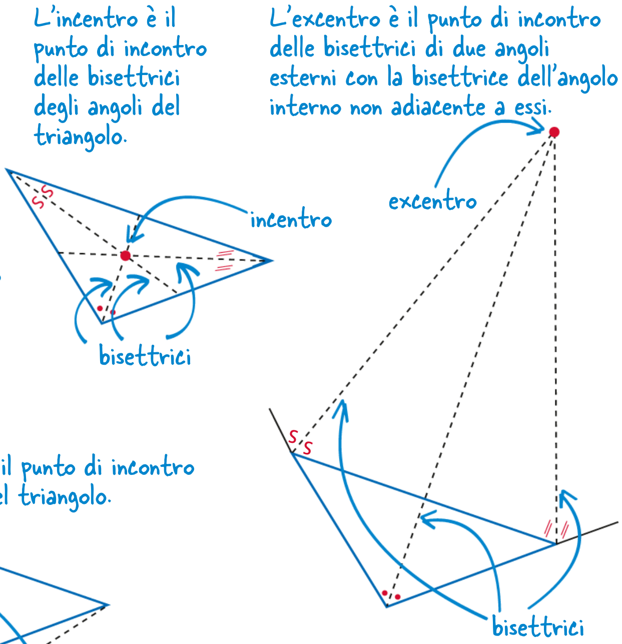
Un poligono è **circoscritto** a una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Un poligono può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se le bisettrici dei suoi angoli si incontrano tutte in uno stesso punto. Il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono coincide con il centro della circonferenza.

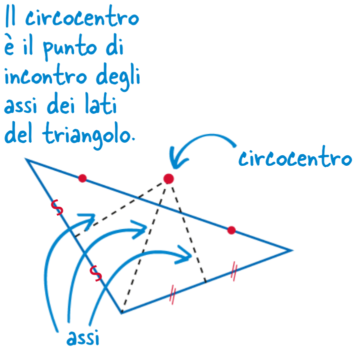


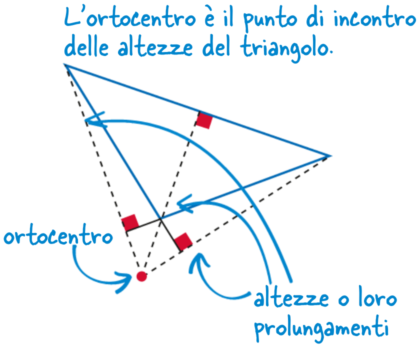
I PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

Proprietà del baricentro. Il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.



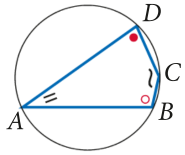






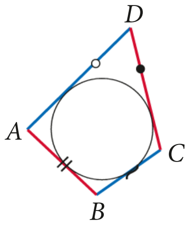
I QUADRILATERI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **inscrivibile** in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.



$$\hat{B}+\hat{D}\cong\hat{P}$$
$$\hat{A}+\hat{C}\cong\hat{P}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un **quadrilatero** sia **circoscrivibile** a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.

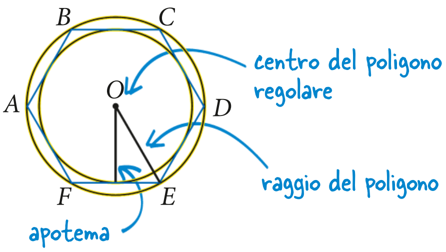


$$AB+CD\cong AD+BC$$

I POLIGONI REGOLARI

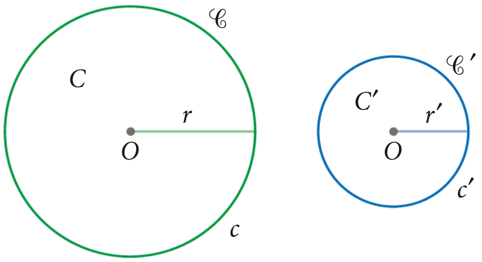
Un poligono **regolare** è un poligono avente tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.

Se un poligono è regolare, allora esso è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra. Le due circonferenze hanno lo stesso centro, detto **centro del poligono**.



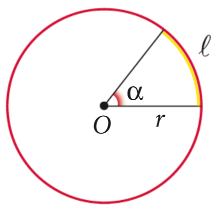
LA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E L'AREA DEL CERCHIO

Il rapporto fra le lunghezze di due circonferenze è uguale al rapporto fra i rispettivi raggi, mentre il rapporto fra le aree dei cerchi è uguale al quadrato del rapporto fra i raggi.



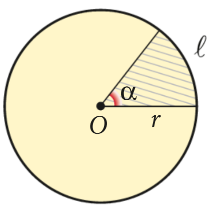
$$c:c'=r:r'$$
$$C:C'=r^2:r'^2$$

CALCOLO DELLE MISURE



$$c=2\pi r$$
$$\ell=\frac{\alpha°}{180°}\pi r$$

Misure della lunghezza della circonferenza (c) e dell'arco di angolo al centro α (ℓ).



$$C=\pi r^2$$
$$S=\frac{\alpha°}{360°}\pi r^2=\frac{1}{2}\ell r$$

Misure dell'area del cerchio (C) e dell'area del settore circolare di angolo al centro α (S).

LEZIONE 13

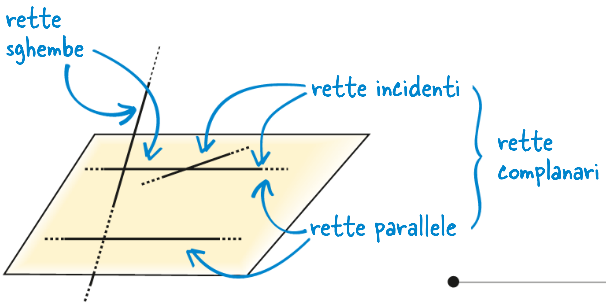
La geometria solida

RETTE NELLO SPAZIO

Le **figure solide** (o **solidi**) sono figure i cui punti non appartengono tutti allo stesso piano.

Enunciamo alcuni **postulati dello spazio**:

1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano.
3. Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni tali che:
   - due punti qualsiasi della stessa regione sono estremi di un segmento che non interseca il piano;
   - due punti qualsiasi di regioni diverse sono estremi di un segmento che interseca il piano.

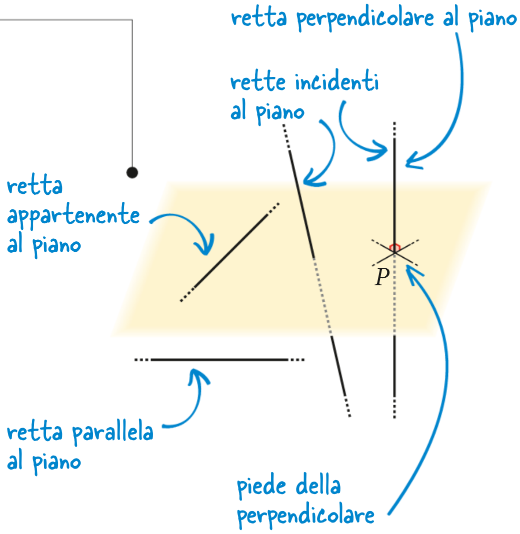


Due rette nello spazio sono **complanari** (incidenti o parallele) se appartengono allo stesso piano, altrimenti sono **sghembe**.

Una retta nello spazio può essere:

- **appartenente** a un piano se tutti i suoi punti appartengono al piano;
- **incidente** al piano se ha un solo punto in comune con il piano;
- **parallela** al piano se non ha alcun punto in comune con il piano.

Una retta incidente a un piano in un punto P è **perpendicolare al piano** quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P. In tal caso P è detto **piede della perpendicolare**.



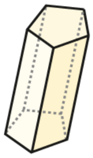
I POLIEDRI

Un **poliedro** è una figura solida limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni faccia non attraversi il solido.

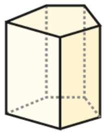
Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma; le **diagonali** sono segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, è **regolare** quando è retto e le sue basi sono poligoni regolari.

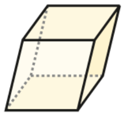
Un prisma è un **parallelepipedo** se anche le basi sono parallelogrammi.



prisma



prisma retto



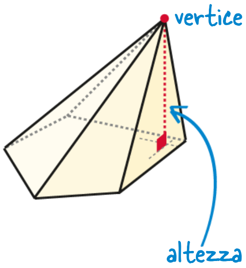
parallelepipedo

Una **piramide** è un poliedro delimitato da un poligono, detto **base**, e da **facce laterali** triangolari le quali:

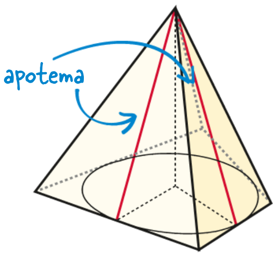
- hanno in comune un vertice, detto vertice della **piramide;**
- hanno il lato opposto a tale vertice coincidente con un lato del poligono di base.

La distanza fra il vertice e il piano della base è detta **altezza** della piramide.

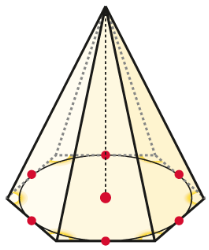
piramide



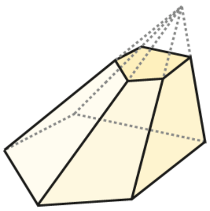
piramide retta



piramide regolare



tronco di piramide

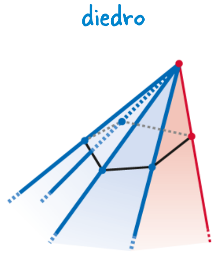


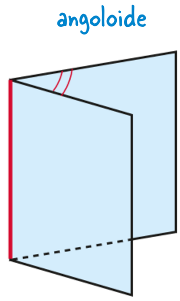
Una piramide è **retta** quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base. L'altezza delle facce laterali di una piramide retta è detta **apotema**.

Una piramide è **regolare** quando è retta e la sua base è un poligono regolare.

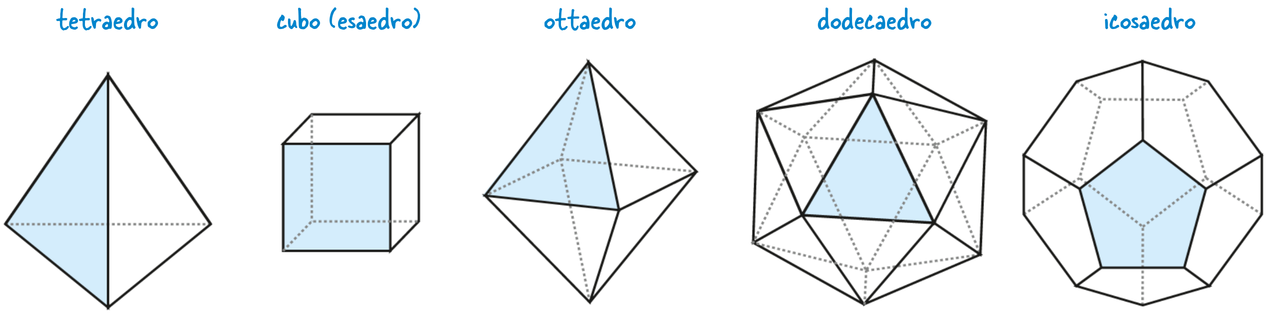
Un **tronco di piramide** è limitato da due poligoni simili fra loro e posti su piani paralleli (le **basi** del tronco) e da **facce laterali** che sono trapezi.

Un poliedro è **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi diedri e i suoi angoloidi sono congruenti.





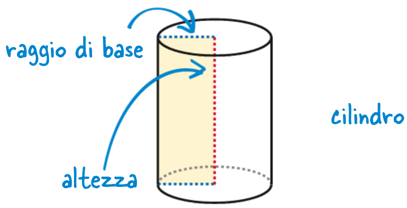
Ci sono solo cinque tipi di poliedri regolari.



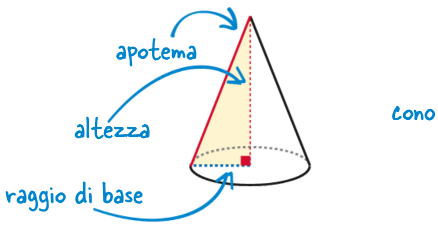
I SOLIDI DI ROTAZIONE

I solidi di rotazione sono generati dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta. In particolare:

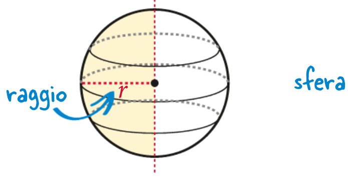
- un **cilindro** è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati;



- un **cono** è generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti;



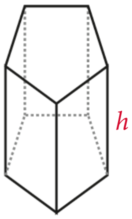
- una **sfera** è generata dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.



LE AREE E I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

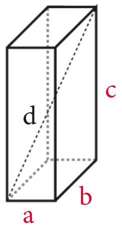
Ricorda le formule per il calcolo della **misura delle aree delle superfici e dei volumi** dei principali solidi.

prisma retto



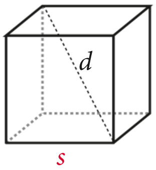
$$A_\ell = 2p \cdot h$$
$$A_t = A_\ell + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot h$$

parallelepipedo rettangolo



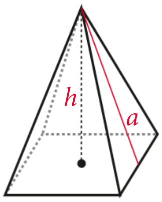
$$A_b = ab$$
$$A_\ell = 2(ac + bc)$$
$$A_t = 2(ac + ab + bc)$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

cubo



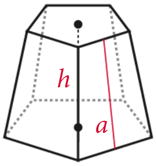
$$A_b = s^2$$
$$A_t = 6s^2$$
$$V = s^3$$
$$d = s\sqrt{3}$$

piramide retta



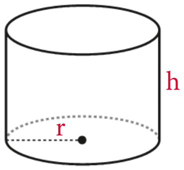
$$A_\ell = p \cdot a$$
$$A_t = A_\ell + A_b$$
$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

tronco di piramide retta



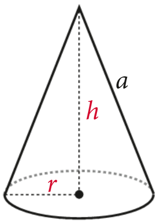
$$A_\ell = (p + p') \cdot a$$
$$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$$
$$V = \frac{1}{3} h\left(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b}\right)$$

cilindro



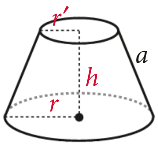
$$A_b = \pi r^2$$
$$A_\ell = 2\pi r \cdot h$$
$$A_t = 2\pi r(h + r)$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

cono



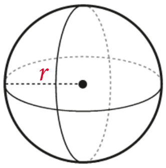
$$A_b = \pi r^2$$
$$A_\ell = \pi r a$$
$$A_t = \pi r(a + r)$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

tronco di cono



$$A_b = \pi r^2$$
$$A'_b = \pi r'^2$$
$$A_\ell = \pi a(r + r')$$
$$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$$
$$V = \frac{1}{3} \pi h\left(r^2 + r'^2 + r \cdot r'\right)$$

sfera

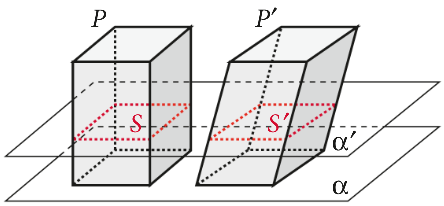


$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

L'ESTENSIONE E L'EQUIVALENZA DEI SOLIDI

Due solidi aventi la stessa estensione sono **equivalenti**.

$$\forall \alpha' // \alpha,\ S \doteq S' \Rightarrow P \doteq P'$$



Principio di Cavalieri

Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti (**principio di Cavalieri**).

LEZIONE 14

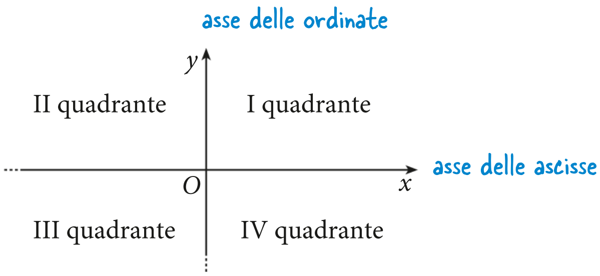
Il piano cartesiano e la retta

LE COORDINATE DI UN PUNTO SU UN PIANO

Il **piano cartesiano** è suddiviso dai due assi in quattro angoli retti chiamati **quadranti**.

Ogni punto del piano è individuato da una coppia di numeri reali, detti **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**.

L'**origine *O*** degli assi ha coordinate (0; 0).



LA LUNGHEZZA E IL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO. IL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

Distanza fra due punti $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Punto medio del segmento *AB*

$$M(x_M;y_M) \qquad \text{con } x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Baricentro di un triangolo di vertici $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B), C(x_C;y_C)$

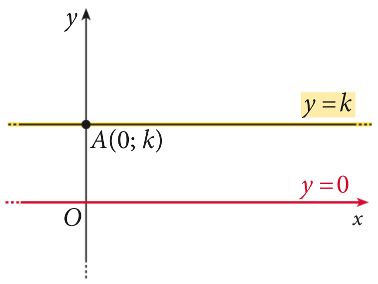
$$C(x_C;y_C) \qquad \text{con } x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \qquad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

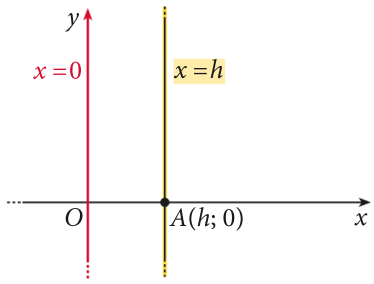
A ogni retta del piano cartesiano corrisponde un'**equazione lineare** in due variabili del tipo $ax+by+c=0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b non entrambi nulli, e viceversa.
Le coordinate di tre punti $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $P(x;y)$ di una retta non parallela agli assi soddisfano la relazione

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

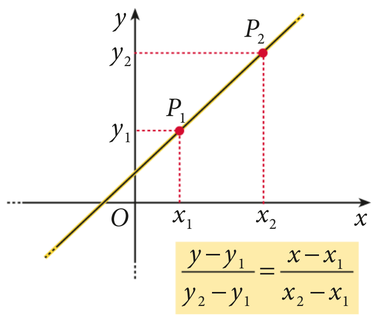
detta **condizione di allineamento** o **equazione di una retta passante per due punti noti**.



Retta parallela all'asse x.



Retta parallela all'asse y.



Retta non parallela agli assi passante per i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$.

LA FORMA ESPLICITA E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Equazione di una retta:

- in **forma implicita**: $ax+by+c=0$;
- in **forma esplicita**: $y=mx+q$.

q è l'**ordinata all'origine** o **termine noto**.
m è il **coefficiente angolare della retta**:

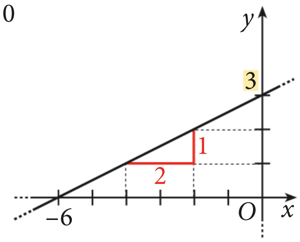
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Forma implicita: $x-2y+6=0$

Forma esplicita: $y=\frac{1}{2}x+3$

coefficiente angolare

ordinata all'origine



Angolo fra una retta e l'asse x: è **acuto se** $m>0$, **ottuso se** $m<0$. Se $m=0$, la retta è parallela all'asse x. Il coefficiente angolare non esiste se la retta è parallela all'asse y.

Equazione di una retta di coefficiente angolare m e passante per $P(x_1;y_1)$

$$y-y_1=m\cdot(x-x_1).$$

Equazione di una retta passante per l'origine $O(0;0)$

$$y=mx.$$

LE RETTE PARALLELE E LE RETTE PERPENDICOLARI

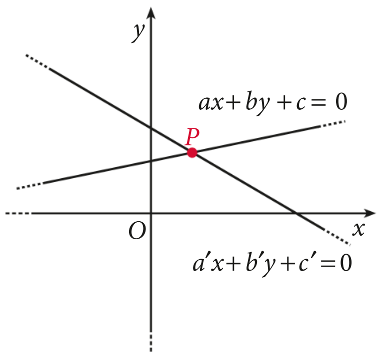
Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono fra loro:
- **parallele** quando hanno lo stesso coefficiente angolare: $m = m'$;
- **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1: $mm' = -1$.

Se le rette hanno equazioni in forma implicita $r: ax + by + c = 0$ e $s: a'x + b'y + c' = 0$, allora:
$r \,//\, a \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$; $r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

LA POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

Date le rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, considerato il sistema

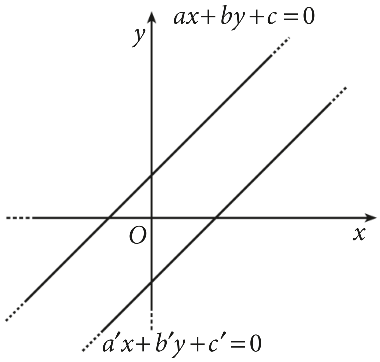
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$ sono possibili i tre casi della figura.



Rette incidenti

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow m \neq m'$

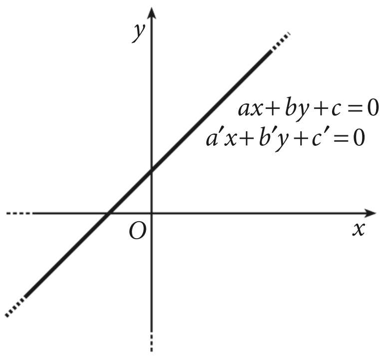
Il sistema è determinato e ammette per soluzioni le coordinate di P.



Rette parallele e distinte

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q \neq q')$

Il sistema è impossibile.

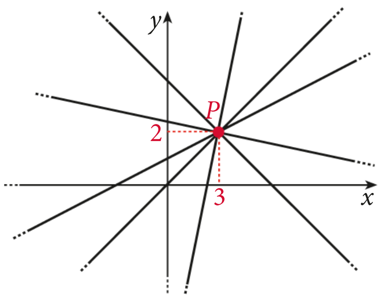


Rette coincidenti

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (m = m') \wedge (q = q')$

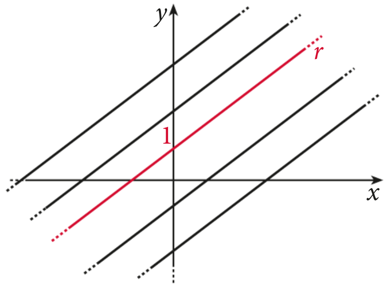
Il sistema è indeterminato.

I FASCI DI RETTE



Fascio proprio di rette per un punto *P*: insieme di tutte le rette del piano passanti per *P*. *P* è detto **centro del fascio**.

Esempio: $P(3;\ 2): y - 2 = m(x - 3) \vee x = 3$



Fascio improprio di rette parallele a una retta *r*.

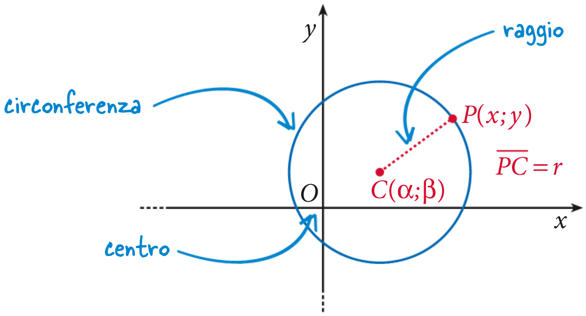
Esempio: $r: y = 2x + 1$, fascio improprio: $y = 2x + q$

Le coniche

LA CIRCONFERENZA

La **circonferenza** è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto **centro**.

Il **raggio della circonferenza** è la distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro.



Note le coordinate del centro $(\alpha;\beta)$ e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

L'equazione può anche essere scritta nella forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\ ,$$

dove a, b e c soddisfano le seguenti relazioni:

$\alpha=-\frac{a}{2}\,,\beta=-\frac{b}{2}\ ,$

$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}\ ,$

con $\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c\geq 0\,.$

Se: $a=0$, **il centro appartiene all'asse y**;
$b=0$, **il centro appartiene all'asse x**;
$c=0$, **la circonferenza passa per l'origine degli assi**.

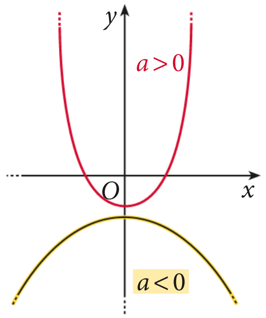
LA PARABOLA

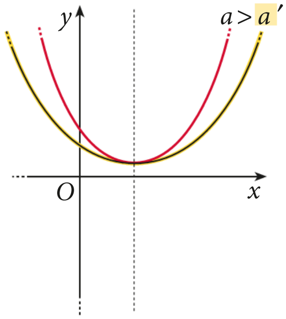
La **parabola** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (**direttrice**) e da un punto (**fuoco**).

Si dice **asse della parabola** la retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice.
Si dice **vertice** il punto di intersezione fra asse e parabola.

ASSE PARALLELO ALL'ASSE *Y*

- Equazione di una parabola
  - con **asse parallelo all'asse *y***: $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$);
  - con **asse coincidente con l'asse *y* e con vertice nell'origine**: $y = ax^2$ (con $a \neq 0$).
  - **concavità** e **apertura** della parabola dipendono solo da ***a***.

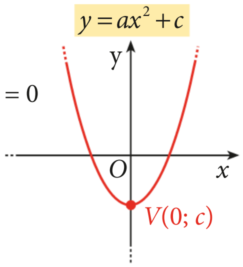




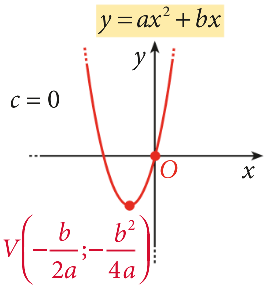
Concavità e apertura di $y = ax^2 + bx + c$

Casi particolari:

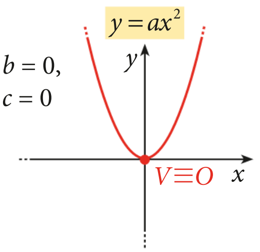
$b = 0$



$c = 0$

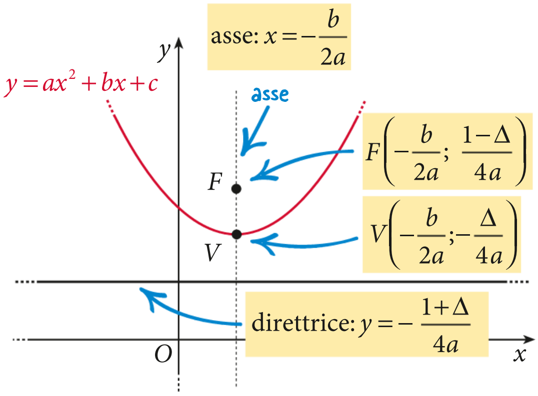


$b = 0$, $c = 0$



Caratteristiche della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

asse	$x = -\dfrac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
fuoco	$F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$
direttrice	$y = -\dfrac{1+\Delta}{-4a}$

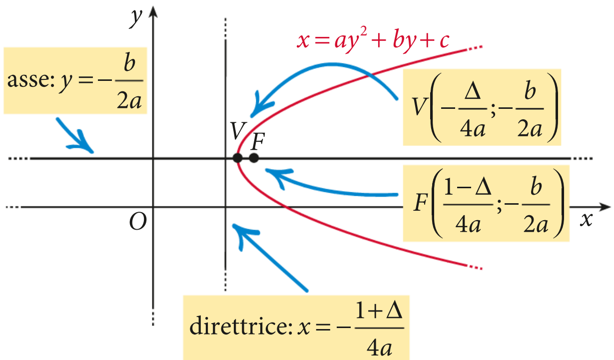


ASSE PARALLELO ALL'ASSE *X*

- Equazione di una parabola con **asse parallelo all'asse *x***: $x = ay^2 + by + c$ (con $a \neq 0$).
- La **concavità** della parabola è rivolta verso la direzione positiva dell'asse *x* se $a > 0$, verso la direzione negativa dell'asse *x* se $a < 0$.

Caratteristiche della parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$

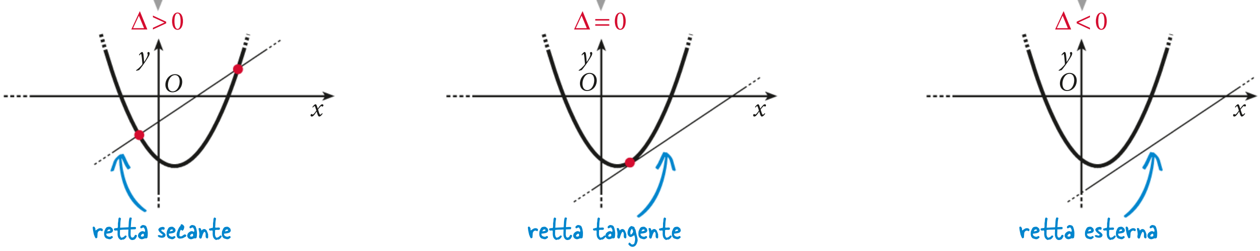
asse	$y = -\dfrac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
fuoco	$F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
direttrice	$x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$



LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

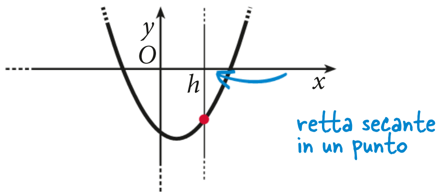
Posizione della parabola $y=ax^2+bx+c$ rispetto alla retta $y=mx+q$ (non parallela all'asse y)

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+q \end{cases} \longrightarrow$$ si ottiene come risolvente un'equazione di secondo grado in x il cui discriminante Δ può essere:



Intersezione della parabola $y=ax^2+bx+c$ con la retta $x=h$ (parallela all'asse y)

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x=h \end{cases} \longrightarrow$$ si ottengono le coordinate di un punto



L'ELLISSE

L'**ellisse** è il luogo geometrico dei punti P per cui è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.

ELLISSE CON CENTRO NELL'ORIGINE E FUOCHI SULL'ASSE X

- **fuochi:** $F_1(-c;0)$, $F_2(+c;0)$, con $a>c$ e $a^2-c^2=b^2$.
- **vertici:** $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- **assi:** i segmenti A_1A_2 (asse maggiore) e B_1B_2 (asse minore).
- **eccentricità:**

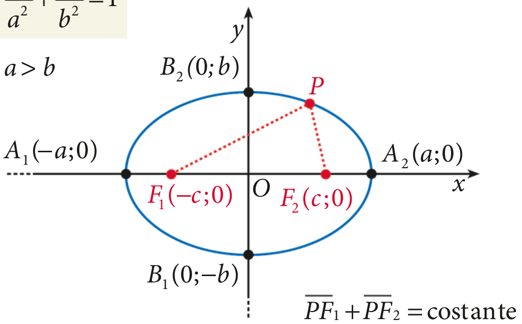
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

$0\leq e<1$.
e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.

Per $e=0$ l'ellisse diventa una circonferenza

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a>b$



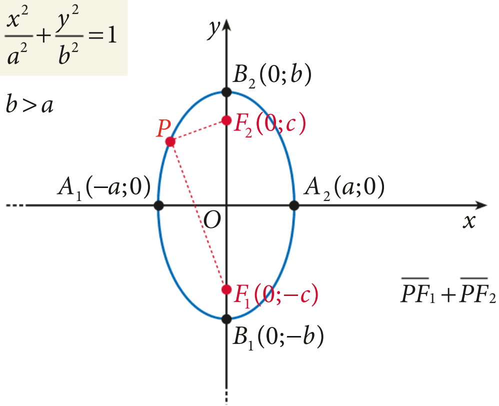
ELLISSE CON CENTRO NELL'ORIGINE E FUOCHI SULL'ASSE Y

- **fuochi**: $F_1(0;-c)$, $F_2(0;+c)$, con $b>c$ e $b^2-c^2=a^2$.
- **vertici**: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- **assi**: i segmenti B_1B_2 (asse maggiore), A_1A_2 (asse minore).
- **eccentricità**:

$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$b>a$

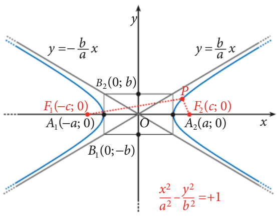


$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\text{costante}$

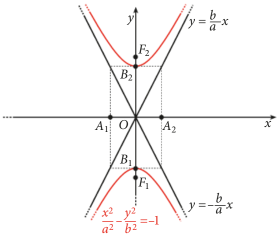
L'IPERBOLE

L'**iperbole** è il luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.

L'iperbole con i fuochi sull'asse x



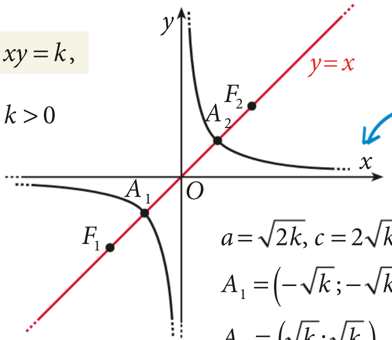
L'iperbole con i fuochi sull'asse y



L'equazione dell'iperbole equilatera **riferita agli asintoti** è:
$xy=k$, con k costante positiva o negativa.

$xy=k,$

$k>0$



Se $k>0$, i rami dell'iperbole sono nel I e III quadrante.

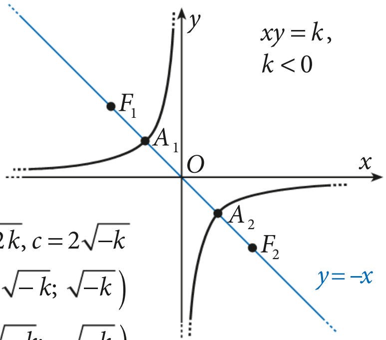
$a=\sqrt{2k},\ c=2\sqrt{k}$

$A_1=\left(-\sqrt{k};-\sqrt{k}\right)$

$A_2=\left(\sqrt{k};\sqrt{k}\right)$

$F_1=\left(-\sqrt{2k};-\sqrt{2k}\right)$

$F_2=\left(\sqrt{2k};\sqrt{2k}\right)$



$xy=k,$
$k<0$

Se $k<0$, i rami dell'iperbole sono nel II e IV quadrante.

$a=\sqrt{-2k},\ c=2\sqrt{-k}$

$A_1=\left(-\sqrt{-k};\ \sqrt{-k}\right)$

$A_2=\left(\sqrt{-k};-\sqrt{-k}\right)$

$F_1=\left(-\sqrt{-2k};\ \sqrt{-2k}\right)$

$F_2=\left(\sqrt{-2k};-\sqrt{-2k}\right)$

Le funzioni goniometriche

LA MISURA DEGLI ANGOLI

Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radianti**.

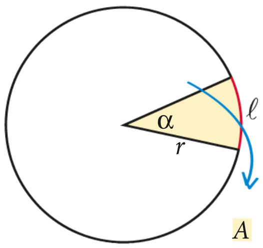
Un grado è la 360ª parte dell'angolo giro.
Un radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Vale la proporzione $\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$, che permette di passare da gradi a radianti e viceversa.

ESEMPIO SVOLTO

30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

$$30^\circ : \alpha = 360^\circ : 2\pi \rightarrow \alpha = \frac{30^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}.$$



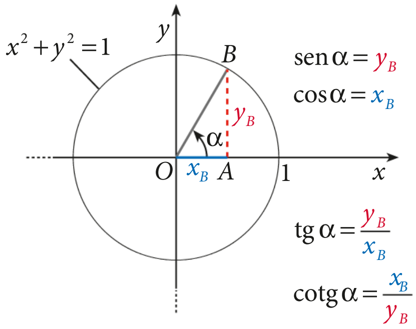
Se, in una circonferenza, α è la misura in radianti di un angolo al centro e r la misura del raggio:

- la **lunghezza dell'arco** è $l = \alpha r$;
- l'**area del settore circolare** è $A = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} l r$.

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:

- **seno di** α (sen α) il valore dell'ordinata di B;
- **coseno di** α (cos α) il valore dell'ascissa di B;
- **tangente di** α (tg α) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$;
- **cotangente di** α (cotg α) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B; è definita per $\alpha \neq k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.



Seno, coseno, tangente e cotangente di angoli notevoli

radianti	gradi	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	non esiste	0

RELAZIONI FONDAMENTALI DELLA GONIOMETRIA

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\,\alpha=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Secante di α

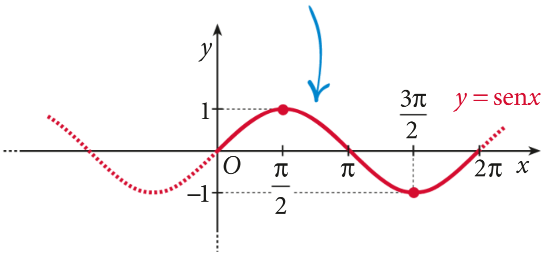
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\text{, con }\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Cosecante di α

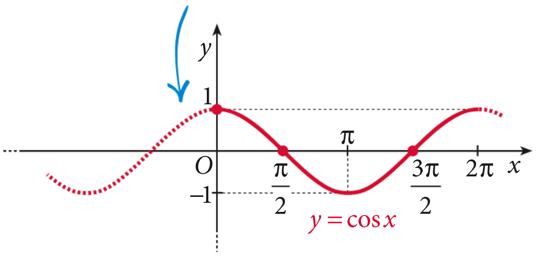
$$\text{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\text{, con }\alpha\neq 0+k\pi$$

Come si vede dai rispettivi grafici, le funzioni seno e coseno sono **periodiche** di **periodo 2π**.

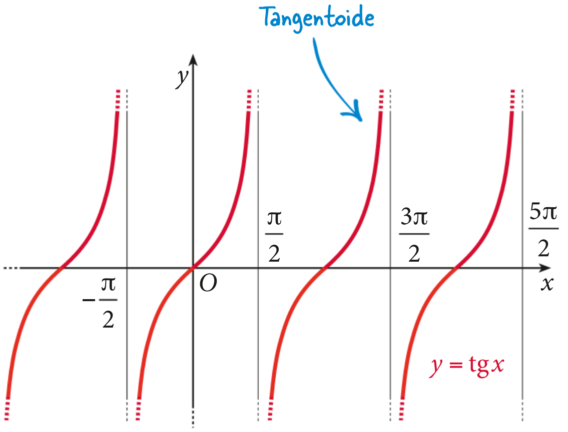
Sinusoide

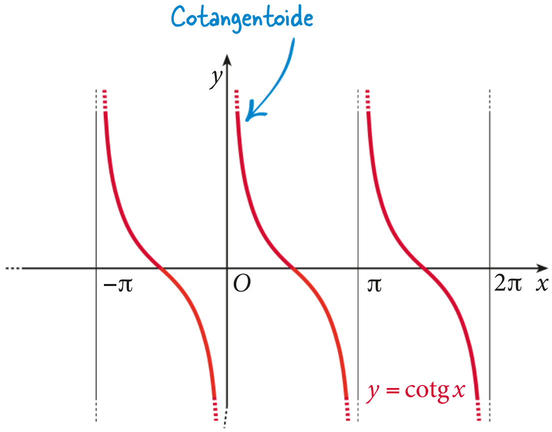


Cosinusoide



Come si vede dai rispettivi grafici, le funzioni tangente e cotangente sono **periodiche** di **periodo** π.





LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Le **funzioni inverse** delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono, rispettivamente, le seguenti (con D indichiamo il dominio, con C il codominio):

Arcoseno

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad D: [-1;1]; \quad C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Arcocoseno

$$y = \arccos x \qquad D: [-1;1]; \quad C: [0;\pi]$$

Arcotangente

$$y = \operatorname{arctg} x \qquad D: \mathbb{R}; \quad C: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Arcocotangente

$$y = \operatorname{arccotg} x \qquad D: \mathbb{R}; \quad C: \left]0;\pi\right[$$

I loro grafici si ottengono da quelli delle funzioni di cui sono le inverse, tracciando i simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

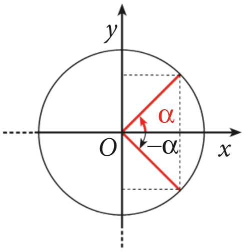
LEZIONE 17

Le formule goniometriche

GLI ANGOLI ASSOCIATI

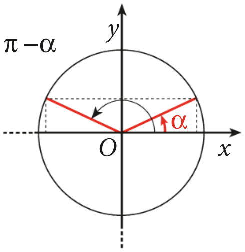
Funzioni goniometriche di angoli associati

α e $-\alpha$



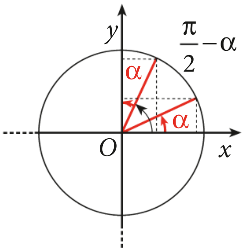
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\pi-\alpha$



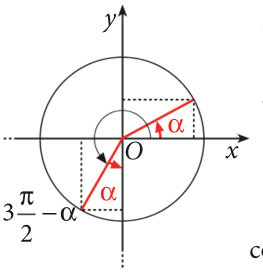
$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\frac{\pi}{2}-\alpha$



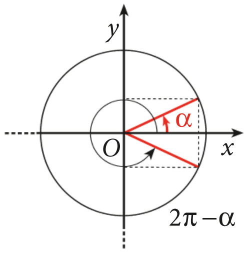
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

α e $3\frac{\pi}{2}-\alpha$



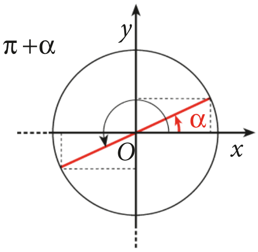
$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

α e $2\pi-\alpha$



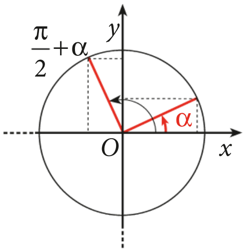
$\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

α e $\pi+\alpha$



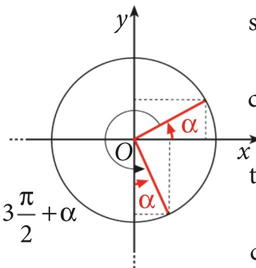
$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(\pi+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

α e $\frac{\pi}{2}+\alpha$



$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

α e $3\frac{\pi}{2}+\alpha$



$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Funzione	Formula di addizione	Formula di sottrazione
seno	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
coseno	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
tangente	$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi, \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

Una funzione del tipo $y = a \operatorname{sen}x + b \cos x$ può essere ricondotta alla forma sinusoidale $y = r \operatorname{sen}(x + a)$, con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. L'angolo α è detto **angolo aggiunto**.

LE FORMULE DI DUPLICAZIONE E DI BISEZIONE

Funzione	Formula di duplicazione	Formula di bisezione
seno	$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
coseno	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \begin{cases}1-2\operatorname{sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1\end{cases}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
tangente	$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ solo se: $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+k\pi$
		il segno del radicale dipende dal quadrante in cui si trova il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$

Sono utili anche le formule: $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

LE FORMULE DI PROSTAFERESI E DI WERNER

Formule di prostaferesi

- $\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$;
- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$.

Formule di Werner

- $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$;
- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$.

LEZIONE 18

Equazioni goniometriche e trigonometria

LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE

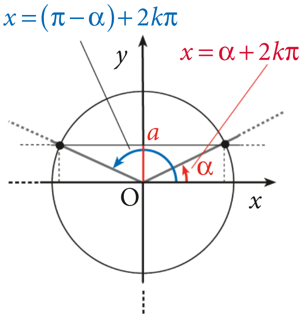
Un'**equazione goniometrica** contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

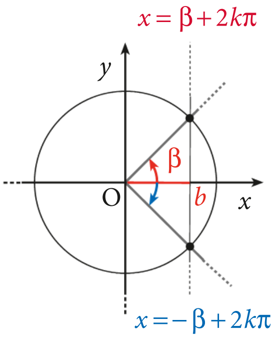
Un'**equazione goniometrica elementare** può essere classificata come segue:

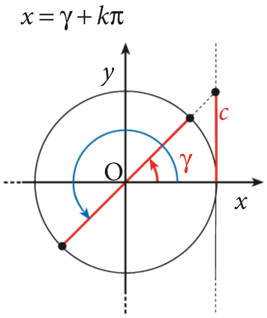
$\operatorname{sen} x = a$
- determinata se $-1 \leq a \leq 1$
- impossibile se $a < -1 \wedge a > 1$

$\cos x = b$
- determinata se $-1 \leq b \leq 1$
- impossibile se $b < -1 \wedge b > 1$

$\operatorname{tg} x = c$
- determinata $\forall c \in \mathbb{R}$







Particolari equazioni goniometriche elementari

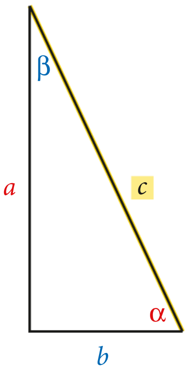
Equazione	Proprietà di risoluzione
$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha'$	$\alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$
$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha'$	$-\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}(-\alpha')$
$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha'$	$\cos\alpha' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$
$\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$
$\cos\alpha = \cos\alpha'$	$\alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$
$\cos\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha')$
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$	$\alpha = \alpha' + k\pi$
$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha'$	$-\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(-\alpha')$
$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha'$	$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\alpha' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$

LA TRIGONOMETRIA

La **trigonometria** è lo studio delle relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo.

I TRIANGOLI RETTANGOLI

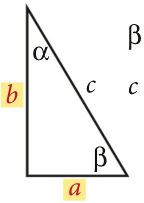
Primo teorema dei triangoli rettangoli
In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale:
- alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso;
- alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.



$$a = c \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad a = c \cdot \cos \beta \qquad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha \qquad a = b \cdot \operatorname{cotg} \beta$$

Secondo teorema dei triangoli rettangoli
In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale:
- alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto;
- alla misura dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto.

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli conoscendo **almeno un lato** e **un altro dei suoi elementi**.

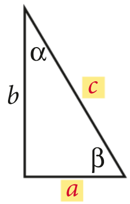


$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b}$

$\beta = 90° - \alpha$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

a. Sono noti i due cateti.

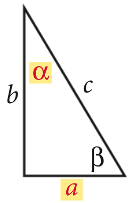


$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{a}{c}$

$\beta = 90° - \alpha$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

b. Sono noti l'ipotenusa e un cateto.

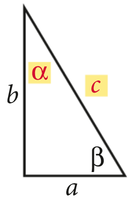


$\beta = 90° - \alpha$

$b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

c. Sono noti un cateto e l'angolo opposto.



$\beta = 90° - \alpha$

$a = c \cdot \operatorname{sen} \alpha$

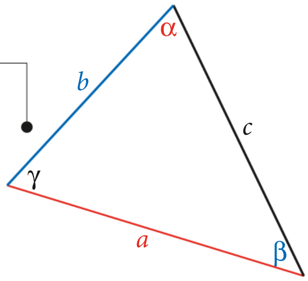
$b = c \cdot \operatorname{sen} \beta$

d. Sono noti l'ipotenusa e un angolo adiacente.

I TRIANGOLI QUALUNQUE

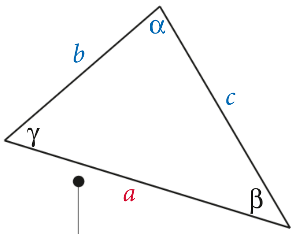
Teorema dei seni
In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$



Teorema del coseno
In un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso fra essi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



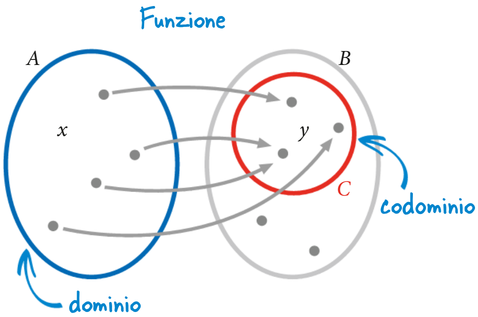
LEZIONE

19 Le funzioni

LE FUNZIONI REALI E LE LORO CARATTERISTICHE

Una funzione dall'insieme A all'insieme B è una relazione che a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.

La **funzioni numeriche** hanno come dominio e codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Sono anche dette **funzioni reali di variabile reale**.

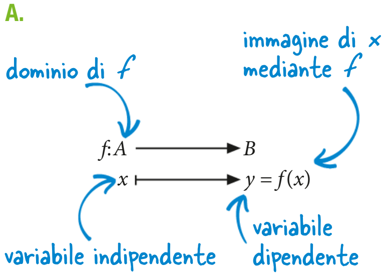


Alcune funzioni numeriche esprimono proporzionalità fra le variabili x e y.

Dato $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

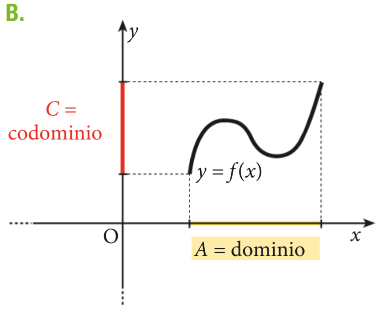
- $y = kx$ esprime la **proporzionalità diretta**;
- $y = \dfrac{k}{x}$ esprime la **proporzionalità inversa**;
- $y = kx^2$ esprime la **proporzionalità quadratica**;
- $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ esprime la **funzione lineare**.

A.



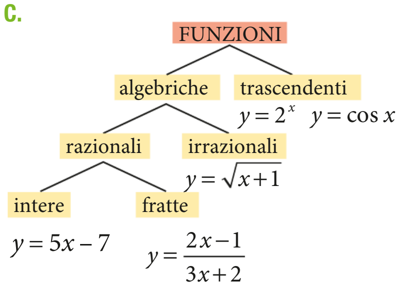
Terminologia delle funzioni numeriche.

B.



Rappresentazione grafica di $f(x)$ del dominio $D = A$ e del codominio $C = \{f(x) \mid x \in A\}$

C.



Classificazione delle funzioni reali di variabile reale.

Dominio naturale di una funzione: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. È costituito da tutti i valori per i quali non perde significato l'espressione analitica che definisce la funzione. È anche detto **campo di esistenza**.

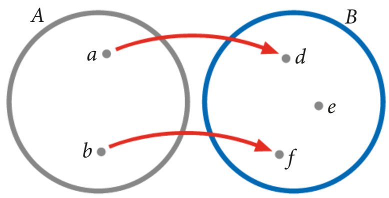
Valore assoluto: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. È un esempio di **funzione definita per casi**.

a è **zero** di una funzione $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

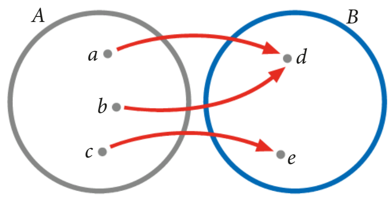
Una funzione da A a B può essere iniettiva, suriettiva, biiettiva.

A.



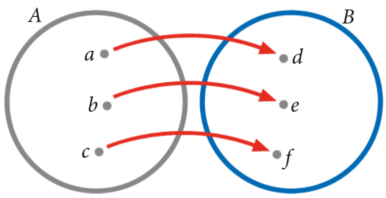
Funzione **iniettiva**: *a ogni* elemento di B arriva *al più una* freccia.

B.



Funzione **suriettiva**: *a ogni* elemento di B arriva *almeno una* freccia.

C.



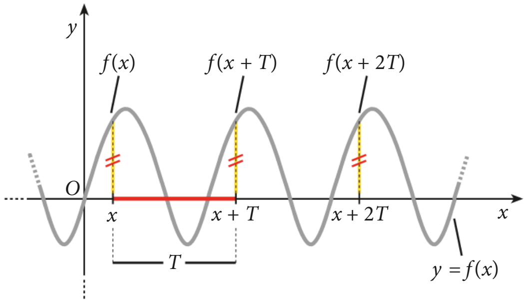
Funzione **biiettiva**: *a ogni* elemento di B arriva *una e una sola* freccia.

Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:

- **crescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

Se la funzione è crescente o decrescente **in senso lato**, le considerazioni sono analoghe, ma valgono rispettivamente le relazioni $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Una funzione si dice **monotòna** in un intervallo del suo dominio se in esso è sempre crescente o sempre decrescente.



Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** di periodo $T\,(T > 0)$ se: $f(x) = f(x + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$.

Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:

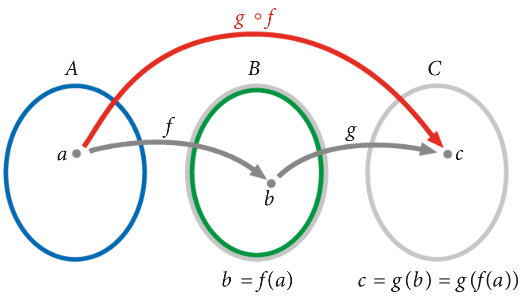
- **pari** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$;
- **dispari** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

$y = x^2$ è una funzione pari, $y = x^3$ è una funzione dispari.

Funzione inversa: se indichiamo con f una funzione e con f^{-1} la sua inversa, si ha: $b = f^{-1}(a) \Leftrightarrow a = f(b)$.

Una funzione ammette la funzione inversa se e solo se è biiettiva.

La funzione inversa di $f(x) = 5x - 7$ è: $f^{-1}(x) = \frac{(x+7)}{5}$.



Funzione composta

Funzione composta: date le funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to C$, la funzione composta $g \circ f: A \to C$ associa a ogni elemento $a \in A$ un elemento $c \in C$ così ottenuto:

- ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
- a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

Se $C = A$, possiamo definire sia $g \circ f$ che $f \circ g$.
In generale, $g \circ f \neq f \circ g$.

LE SUCCESSIONI NUMERICHE

Una **successione numerica** è una funzione a che associa a ogni numero naturale un numero reale:

$$a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, \quad n\to a_n.$$

Esempio: $a_n = 2n+1$; 1, 3, 5, 7, ... indice della successione termine della successione.

Una successione è detta:

- **crescente** se $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** se $a_n > a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **costante** se $a_n = a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **crescente in senso lato** se $a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente in senso lato** se $a_n \geq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

Una successione a_n si dice **progressione aritmetica di ragione *d*** se $a_{n+1} - a_n = d, \forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio: 9, 12, 15, 18, 21, ...; d = 3.

Se consideriamo *n* numeri consecutivi di una progressione aritmetica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.
Una progressione aritmetica di ragione *d* è:

- **crescente** se $d > 0$;
- **decrescente** se $d < 0$;
- **costante** se $d = 0$.

Teorema. La somma S_n dei primi *n* termini di una progressione aritmetica è:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Una successione a_n si dice **progressione geometrica di ragione *q*** se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio: 1, 2, 4, 8, 16, ...; q = 2.

Se consideriamo *n* numeri consecutivi della progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi**.
In una progressione geometrica di ragione *q*:

- $a_n = a_{n-1} \cdot q$ e $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$;
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $n \geq 1$;
- $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

Se la ragione di una progressione geometrica è positiva, la progressione è:

- **crescente** se $q > 1$ e $a_n > 0$, $0 < q < 1$ e $a_n < 0$;
- **decrescente** se $0 < q < 1$ e $a_n > 0$, $q > 1$ e $a_n < 0$;
- **costante** se $q = 1$.

Teorema. La somma S_n dei primi *n* termini di una progressione geometrica, di ragione $q \neq 1$, è:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Le percentuali

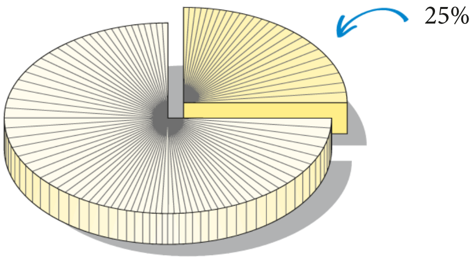
LE PERCENTUALI E LE FRAZIONI

Le percentuali sono un modo diverso per scrivere le frazioni con denominatore 100. Per esempio, consideriamo la percentuale 25% (si legge: «venticinque per cento»).

Essa equivale alla frazione $\frac{25}{100}$, ossia possiamo scrivere: $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

RAPPRESENTARE LE PERCENTUALI

A volte per visualizzare le percentuali si usa un diagramma detto «a torta», perché utilizza un cerchio suddiviso in settori simili alle fette di una torta.

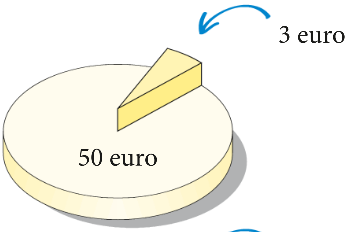


L'intera «torta» rappresenta cento «fette» su cento, cioè $\frac{100}{100} = 100\%$.

Il 25% è rappresentato da $\frac{1}{4}$ della torta.
Diagrammi di questo tipo vengono anche detti **areogrammi**.
Per risolvere problemi con percentuali basta ragionare in termini di frazioni.

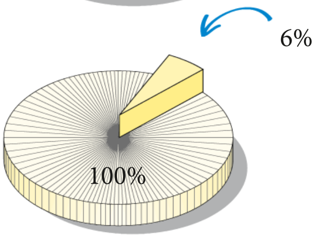
ESEMPIO SVOLTO

Il prezzo di un prodotto è stato portato da € 50 a € 53. Determinare il suo aumento in percentuale.
Nella figura rappresentiamo con un diagramma a torta il vecchio prezzo del prodotto (la torta intera corrisponde a € 50).
L'aumento assoluto è: € 53 – € 50 = € 3.
Nel diagramma a torta, a quale frazione corrisponde una fetta da € 3?



La frazione corrispondente alla fetta è $\frac{3}{50}$.

Poiché la torta rappresenta la percentuale del 100%, per avere la percentuale corrispondente alla frazione dobbiamo trasformare $\frac{3}{50}$ in una frazione con denominatore 100, usando la proprietà invariantiva.



$$\frac{3}{50} = \frac{3 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{6}{100}.$$

$$\frac{3}{50} = \frac{30 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{6}{100}$$

L'aumento in percentuale è del 6%.

Per trasformare una frazione in percentuale, basta scrivere la frazione a essa equivalente con denominatore 100.

A volte la percentuale è espressa in **millesimi**.
2‰ (si legge «due per mille») significa:
$2‰ = \frac{2}{1000}$

LEZIONE 21

La statistica

I DATI STATISTICI

Un **carattere** di una **popolazione** statistica è descritto mediante **modalità** che possono essere di tipo **qualitativo** o **quantitativo**.

In una **distribuzione di dati**, la **frequenza** di una modalità è il numero di volte in cui si è presentata tale modalità.

La **frequenza relativa** è il quoziente tra la frequenza e il numero totale delle **unità statistiche**. Essa può anche essere espressa in **percentuale**.

popolazione

carattere

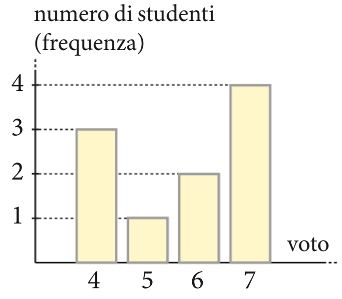
Numero dei componenti del nucleo familiare degli studenti di una classe	Frequenza	Frequenza relativa percentuale
2	3	11%
3	11	41%
4	10	32%
5	2	7%
6	1	4%
totale	*27*	*100%*

modalità

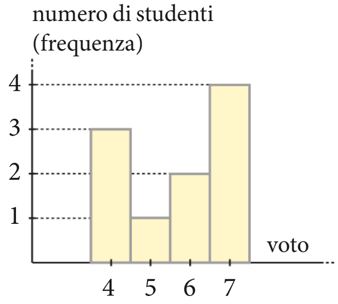
LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI DATI

Esistono vari tipi di grafici per rappresentare i dati statistici e le loro frequenze.
I più usati sono l'**ortogramma**, l'**istogramma**, l'**areogramma**, il **diagramma cartesiano**.

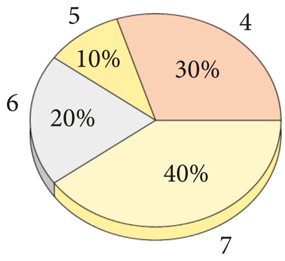
Voti	Frequenza	Frequenza relativa percentuale
4	3	30%
5	1	10%
6	2	20%
7	4	40%



Ortogramma



Istogramma



Areogramma

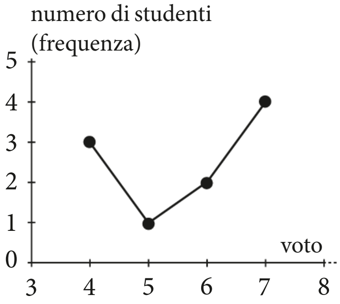


Diagramma cartesiano

GLI INDICI DI POSIZIONE CENTRALE

Gli **indici di posizione centrale** sono la media, la mediana e la moda.

La **media aritmetica** di n numeri è il quoziente fra la loro somma e il numero n.

La **media ponderata** di n numeri è il quoziente fra la somma dei prodotti di ciascun numero per il proprio peso e la somma dei pesi.

Se i numeri sono disposti in una sequenza ordinata, la **mediana** è il valore centrale quando n è dispari, o la media aritmetica dei due valori centrali quando n è pari.

La **moda** è il valore a cui corrisponde la frequenza massima.

GLI INDICI DI VARIABILITÀ

Il campo di variazione, lo scarto semplice medio, la deviazione standard sono detti **indici di variabilità**.

Il **campo di variazione** di una sequenza di numeri è la differenza fra il maggiore e il minore.

Lo **scarto semplice medio** è la media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dei numeri dalla loro media aritmetica.

La **deviazione standard** è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli scarti dei numeri dalla loro media aritmetica.

Per la stima della media di una caratteristica della popolazione per mezzo della media di un campione, si valuta l'incertezza mediante l'**errore standard** e l'**intervallo di confidenza**, che è l'intervallo in cui la media della popolazione è contenuta con una certa probabilità.
Se n è la numerosità di un campione, $\bar{x}$ la sua media e s la deviazione standard, l'errore standard è

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

e l'intervallo $]\bar{x} - 3 \cdot s_{\bar{x}} ; \bar{x} + 3 \cdot s_{\bar{x}}[$ contiene il valore della media della popolazione con la probabilità del 99,74%.
Per stimare la percentuale di una caratteristica della popolazione, se f è la percentuale relativa al campione, l'errore standard è

$$s_f = \sqrt{\frac{f \cdot (1-f)}{n}}$$

LEZIONE 22

Il calcolo combinatorio

I RAGGRUPPAMENTI

Dati gli insiemi A con n elementi, B con m elementi, C con k elementi, …, il numero dei **raggruppamenti** che si possono formare prendendo il primo elemento in A, il secondo in B, il terzo in C, … è:

$$n \cdot m \cdot k \cdot ...$$

LE DISPOSIZIONI

Le **disposizioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per gli elementi contenuti o per il loro ordine.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Esempio: in quanti modi si possono accostare 7 palline di colore diverso in gruppi da 4?
$D_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Le **disposizioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con $k \lesseqgtr n$): sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, anche ripetuti, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per gli elementi contenuti o per il loro ordine.

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio: quante colonne del totocalcio possiamo compilare con i simboli 1, 2, X?
$D'_{3,14} = 4\,782\,969$

LE PERMUTAZIONI SEMPLICI

Le **permutazioni semplici** di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per il loro ordine.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Esempio: in quanti modi si possono disporre 6 persone in fila?
$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

LE PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Le **permutazioni con ripetizione** di n elementi di cui $h, k, \ldots$ ripetuti sono i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'ordine degli elementi distinti e il posto occupato dagli elementi ripetuti.

$$P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \ldots}$$

Esempio: in quanti modi, lanciando consecutivamente una moneta per 6 volte, possono uscire 2 teste e 4 croci?

$$P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{720}{2 \cdot 24} = 15$$

LA FUNZIONE *n*!

La **funzione *n*!** (si legge «***n* fattoriale**») è così definita:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 2 \\ 1 & \text{se } n=0 \text{ o } n=1 \end{cases}$$

Proprietà della funzione *n*!

$n! = n \cdot (n-1)!$,

$(n+1)! - n! = n \cdot n!$

Definizione ricorsiva di $n!$ $\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$

$D_{n,k}$ può essere espresso mediante fattoriali: $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

LE COMBINAZIONI

Le **combinazioni semplici** di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, e tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per almeno un elemento contenuto.

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$C_{n,k}$ è chiamato numero combinatorio e si può indicare con il simbolo $\binom{n}{k}$, che si legge «enne su kappa».

Esempio: in quanti modi possiamo scegliere 3 aperitivi, da offrire a una festa, fra 7 a disposizione?

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

Vale la legge dei tre fattoriali

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Esempio: $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}$

Legge delle classi complementari

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Esempio: $\binom{9}{7}=\binom{9}{2}$

Le **combinazioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con $k \lesseqgtr n$) sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n; ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a k volte, non interessa l'ordine in cui gli elementi si presentano e in ciascun gruppo è diverso il numero delle volte in cui un elemento compare.

$$C'_{n,k}=C_{n+k-1,k}=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k!}$$

Esempio: in quanti modi diversi possiamo distribuire 3 oggetti identici in 4 scatole?

$$C'_{4,3}=C_{4+3-1,3}=C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=20$$

I COEFFICIENTI BINOMIALI

$\binom{n}{k}$ è chiamato **coefficiente binomiale**.

Si hanno alcuni casi particolari: $\binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{0}=1 \qquad \binom{0}{0}=1$

Formula di ricorrenza

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$$

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\binom{12}{6}$.

Sapendo che $\binom{12}{5}=792$

si ha $\binom{12}{6}=792\cdot\frac{12-5}{5+1}=924$

LEZIONE 23

La probabilità

GLI EVENTI E LA PROBABILITÀ

Un **evento** è un fatto che può accadere o non accadere.
Se avviene con certezza è detto **evento certo**, se non può mai accadere è detto **evento impossibile**, negli altri casi è detto **evento aleatorio**.

La **probabilità** di un evento E è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, quando essi siano tutti ugualmente possibili:

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

La probabilità di un qualunque evento è un **numero compreso fra 0 e 1**:

- la probabilità di un evento **certo** è 1,
- la probabilità di un evento **impossibile** è 0,
- la probabilità di un evento **aleatorio** è maggiore di 0 e minore di 1.

ESEMPIO SVOLTO

Estraiamo una carta da un mazzo di carte da poker; consideriamo i 4 eventi possibili:
E_c = «esce cuori», E_q = «esce quadri»; E_f = «esce fiori», E_p = «esce picche».
La probabilità dell'evento «esce cuori» è $p(E_c) = \frac{1}{4}$.

L'**evento contrario** $\overline{E}$ di un evento E è l'evento che si verifica nei casi in cui non si verifica E e soltanto in essi. Si ha: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Nel mazzo di carte da poker, l'evento contrario a «esce un seme rosso» è «esce un seme nero».

LA PROBABILITÀ DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

Due eventi sono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro; in caso contrario sono **compatibili**.

ESEMPIO SVOLTO

L'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce fiori» sono incompatibili; l'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce una figura» sono compatibili.

Dati due eventi, E_1 ed E_2:

- l'**evento unione** $E_1 \cup E_2$ è quello che si verifica se si verifica almeno uno degli eventi dati;
- l'**evento intersezione** $E_1 \cap E_2$ è quello che si verifica se si verificano entrambi gli eventi dati.

ESEMPIO SVOLTO

L'evento intersezione di E_c = «esce cuori» e di E_p = «esce una carta pari» è E = «esce una carta pari di cuori», ossia E = «esce il 2, o il 4 o il 6, o l'8 o il 10 di cuori».

La **probabilità dell'evento unione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- alla somma delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono incompatibili;
- alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione, se E_1 ed E_2 sono compatibili.

ESEMPIO SVOLTO

L'evento unione di E_c = «esce cuori» e di E_f = «esce fiori» è E = «esce cuori o fiori».
Poiché i due eventi E_c ed E_f sono incompatibili, la probabilità dell'evento unione è: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

LA PROBABILITÀ DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

La probabilità dell'evento E_1 **condizionata all'evento** E_2, $p(E_1 \mid E_2)$, è la probabilità di E_1 calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato.
E_1 ed E_2 sono eventi **indipendenti** se $p(E_1) = p(E_1 \mid E_2)$; in caso contrario sono eventi **dipendenti**.

ESEMPIO SVOLTO

Nel lancio di un dado consideriamo l'evento E_1 = «esce il 2», che ha probabilità $\frac{1}{6}$.

Supponiamo che l'evento si verifichi al primo lancio. Lanciando di nuovo il dado, ogni numero ha ancora probabilità $\frac{1}{6}$ perché l'esito del nuovo lancio non dipende dal precedente.

ESEMPIO SVOLTO

In un mazzo di 40 carte da poker (una volta tolti gli 8, i 9, i 10 e i jolly), la probabilità che si verifichi l'evento E_1 = «esce l'asso di cuori» è $\frac{1}{40}$.

Alla prima estrazione si verifica l'evento E_2: «esce il 2 di picche». Senza reinserire nel mazzo il 2 di picche, facciamo una seconda estrazione: ora la probabilità che esca l'asso di cuori è $\frac{1}{39}$: pertanto $p(E_1) \neq p(E_1 \mid E_2)$, dunque E_1 ed E_2 sono dipendenti.
Se, prima della seconda estrazione, reimmettiamo il 2 di picche nel mazzo, gli eventi risultano indipendenti.

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- al prodotto delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono indipendenti;
- al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, se E_1 ed E_2 sono dipendenti.

FRA PROBABILITÀ E STATISTICA

Una **variabile aleatoria discreta** X è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ corrispondenti a eventi non impossibili $E_1, E_2, \dots, E_n$, che sono incompatibili e tali che uno di essi sicuramente si verifichi.

Data una variabile aleatoria discreta X, con valori $x_1, x_2, \dots, x_n$, la **distribuzione di probabilità** di X è la successione delle probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$, associate ai valori di X.

La **legge empirica del caso** afferma che, considerato un evento aleatorio, in un grande numero di prove la sua frequenza relativa è in generale molto vicina alla probabilità e la differenza fra le due tende a diminuire all'aumentare del numero di prove effettuate.
Per questo si definisce come **probabilità statistica** di un evento la frequenza relativa che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni.

Esempio: Su 24 000 lanci di una moneta è uscita testa 12 012 volte; $f = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005$ è la probabilità statistica che esca testa.

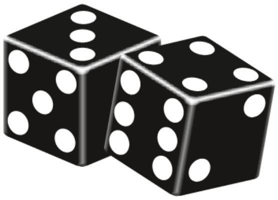
Un **gioco è equo** se, chiamata $S(A)$ la somma puntata dal giocatore A, $p(A)$ la probabilità che vinca A, $S(B)$ la somma puntata dal giocatore B e $p(B)$ la probabilità che vinca B, vale la proporzione:
$S(A) : p(A) = S(B) : p(B)$.

LANCIO DI DADI

IL LANCIO DI UN DADO

Lanciando un dado, puoi ottenere un numero da 1 a 6. I casi sono **equiprobabili**. Quindi la probabilità che in un lancio di un dado esca uno dei 6 numeri è sempre pari a $\frac{1}{6}$.

Ricorda che la somma delle facce opposta è 7.



IL LANCIO DI DUE DADI

Lanciando due dadi, puoi ottenere come somma un numero da 2 a 12. Però i casi non sono equiprobabili. Infatti, indicando tra parentesi i valori ottenuti nei due dadi, si possono avere i seguenti casi:

$2 = (1 + 1)$

$3 = (1 + 2)(2 + 1)$

$4 = (1 + 3)(2 + 2)(3 + 1)$

$5 = (1 + 4)(2 + 3)(3 + 2)(4 + 1)$

$6 = (1 + 5)(2 + 4)(3 + 3)(4 + 2)(5 + 1)$

$7 = (1 + 6)(2 + 5)(3 + 4)(4 + 3)(5 + 2)(6 + 1)$

$8 = (2 + 6)(3 + 5)(4 + 4)(5 + 3)(6 + 2)$

$9 = (3 + 6)(4 + 5)(5 + 4)(6 + 3)$

$10 = (4 + 6)(5 + 5)(6 + 4)$

$11 = (5 + 6)(6 + 5)$

$12 = (6 + 6)$

L'evento più probabile è il 7! Ci sono 6 casi favorevoli su 36 casi possibili.

In totale ci sono 36 casi possibili.

Per esempio, la probabilità che esca il numero 5 è pari a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Infatti, ci sono 4 casi favorevoli e 36 casi possibili.

FISICA

01 Grandezze fisiche e unità di misura F2
02 Grandezze scalari e vettoriali F5
03 Velocità e moto rettilineo uniforme F8
04 Moto rettilineo uniformemente accelerato F11
05 Caduta libera e moto dei proiettili F13
06 Il moto circolare uniforme F16
07 Il moto armonico F18
08 I principi della dinamica F19
09 Applicazioni dei principi della dinamica F22
10 La legge di gravitazione e la forza peso F24
11 L'equilibrio dei corpi F27
12 Il lavoro e la potenza F31
13 L'energia e la sua conservazione F33
14 La pressione nei liquidi e nell'atmosfera F36
15 La legge di Archimede e il galleggiamento F39
16 La temperatura F41
17 Il calore F43
18 I passaggi di stato F46
19 Le leggi dei gas F48
20 Il primo principio della termodinamica F51
21 Il secondo principio della termodinamica F54
22 La carica elettrica F57
23 Il campo elettrico F61
24 La corrente elettrica F65
25 Resistenze e condensatori F70
26 Il magnetismo F72

LEZIONE 01

Grandezze fisiche e unità di misura

LE GRANDEZZE FISICHE E LE UNITÀ DI MISURA

La bellezza non è una grandezza perché non si può misurare.

Una **grandezza** è una quantità che può essere misurata con strumenti di misura.

Misurare una grandezza significa dire quante volte l'unità di misura è contenuta nella grandezza. Per comunicare è necessario creare delle convenzioni e adottare le stesse unità di misura: per questo è nato il **Sistema Internazionale di Unità (SI)**.

Il sistema SI è chiamato anche MKS, da metro, kilogrammo, secondo: le unità di lunghezza, massa e tempo utilizzate.

Grandezze fondamentali e loro unità di misura

Nel SI ci sono sette grandezze fondamentali: da esse si possono ottenere per moltiplicazione o divisione tutte le altre, dette invece grandezze derivate.

Grandezza	Unità di misura nel SI (simbolo)	Dimensioni fisiche
lunghezza (l)	metro (m)	[L]
massa (m)	kilogrammo (kg)	[M]
tempo (t)	secondo (s)	[T]
intensità di corrente elettrica (i)	ampere (A)	[i]
temperatura (T)	kelvin (K)	[K]
intensità luminosa (I)	candela (cd)	[I]
quantità di sostanza	mole (mol)	[m]

Le unità di misura possono essere precedute da prefissi per ottenere multipli e sottomultipli.

Per esempio, aggiungendo il prefisso k (kilo-) prima del simbolo m (metro) otteniamo il kilometro, multiplo del metro:

1 km = 1000 m = 10^3 m

Il prefisso c (centi-) divide per 100 e cm (centimetro) è un sottomultiplo del metro:

1 cm = 1/100 m = 10^{-2} m

Prefissi di multipli e sottomultipli delle unità di misura

Se si escludono i prefissi dal kilo- al milli-, tutti gli altri hanno un nome quando l'esponente della potenza di base 10 è un multiplo di 3.

Attenzione all'utilizzo delle lettere maiuscole e minuscole nei prefissi: il significato cambia.

Prefisso	Simbolo	Moltiplicatore	Potenza del 10
exa-	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta-	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera-	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga-	G	1 000 000 000	10^{9}
mega-	M	1 000 000	10^{6}
kilo-	k	1 000	10^{3}
etto-	h	100	10^{2}
deca-	da	10	10^{1}
deci-	d	0,1	10^{-1}
centi-	c	0,01	10^{-2}
milli-	m	0,001	10^{-3}
micro-	µ	0,000 001	10^{-6}
nano-	n	0,000 000 001	10^{-9}
pico-	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
femto-	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
atto-	a	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Principali grandezze derivate e loro unità di misura

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo	Definizione
area	metro quadrato		m^2
volume	metro cubo		m^3
velocità	metro al secondo		m/s
accelerazione	metro al secondo quadrato		m/s^2
frequenza	hertz	Hz	1/s
angolo piano	radiante	rad	(numero puro)
angolo solido	steradiante	sr	(numero puro)
velocità angolare	radiante al secondo	rad/s	
forza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
quantità di moto	kilogrammo per metro al secondo		$kg \cdot m/s$
momento angolare	kilogrammo per metro quadrato al secondo		$kg \cdot m^2/s$
momento torcente	kilogrammo per metro quadrato al secondo quadrato		$kg \cdot m^2/s^2$
energia, lavoro, calore	joule	J	$N \cdot m$
potenza	watt	W	J/s
densità (massa volumica)	kilogrammo al metro cubo		kg/m^3
pressione	pascal	Pa	N/m^2
capacità termica	joule al kelvin		J/K
calore specifico	joule al kelvin per ogni kilogrammo		$J/(K \cdot kg)$
calore latente	joule al kilogrammo		J/kg
carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$
intensità del campo elettrico	newton al coulomb		N/C
intensità del campo gravitazionale	newton al kilogrammo		N/kg
differenza di potenziale elettrico, forza elettromotrice	volt	V	J/C
capacità elettrica	farad	F	C/V
resistenza	ohm	Ω	V/A
resistività	ohm per metro		$\Omega \cdot m$
intensità del campo magnetico	tesla	T	$N/(A \cdot m)$
flusso magnetico	weber	Wb	$T \cdot m^2$
induttanza elettrica	henry	H	$V \cdot s/A$

I simboli delle unità di misura vanno scritti con l'iniziale minuscola, tranne nel caso di unità che derivano da nomi propri, come per esempio tesla (T) da Nikola Tesla e volt (V) da Alessandro Volta.

IL SISTEMA CGS

Un vecchio sistema di unità di misura ancora utilizzato è il **sistema cgs** (centimetro-grammo-secondo). Il sistema cgs è un sistema di unità di misura in cui la lunghezza si misura in centimetri, la massa in grammi e il tempo in secondi.
Nel sistema cgs, da lunghezza, massa e tempo si ricavano le altre grandezze.

Le principali grandezze nel sistema cgs

Dimensione	**Nome dell'unità di misura**	**Definizione**	**Rapporto con le unità SI**
lunghezza	centimetro	1 cm	$= 10^{-2}$ m
massa	grammo	1 g	$= 10^{-3}$ kg
tempo	secondo	1 s	
forza	dyne	$1 \text{ dyne} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$	$= 10^{-5}$ N
energia	erg	$1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2$	$= 10^{-7}$ J
potenza	erg al secondo	$1 \text{ erg/s} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^3$	$= 10^{-7}$ W
pressione	baria	$1 \text{ Ba} = 1 \text{ dyne/cm}^2 = 1 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s}^2)$	$= 10^{-1}$ Pa
intensità di campo magnetico	gauss	$1 \text{ G} = 1 \text{ cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$=10^{-4}$ T

Grandezze scalari e vettoriali

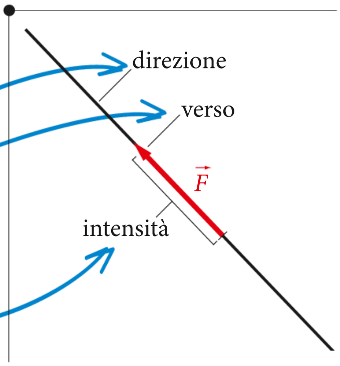
CARATTERISTICHE DI UN VETTORE: MODULO, DIREZIONE E VERSO

Uno **scalare** è una grandezza che ha solo un valore numerico (lunghezza, massa, …).
Un **vettore** è una grandezza che ha una direzione, un verso e un'intensità: la **forza** è un *vettore*.

La **direzione** è la retta lungo la quale la forza agisce.

Il **verso** è l'orientamento della forza lungo la retta.

L'**intensità** si misura con uno strumento chiamato dinamometro.



Per indicare che una grandezza è un vettore, aggiungiamo una freccina sul simbolo che la rappresenta: $\vec{F}$ rappresenta una forza.

Se scriviamo un vettore (per esempio F) senza la freccina sopra, rappresentiamo l'intensità, cioè il valore numerico, della forza: con F = 5 N indichiamo che l'intensità della forza è di 5 N.

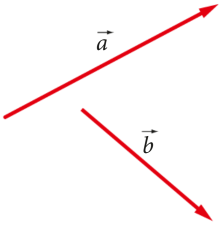
SOMMA DI VETTORI

Esistono due metodi per sommare tra loro i vettori: il **metodo punta-coda** e il **metodo del parallelogramma**.

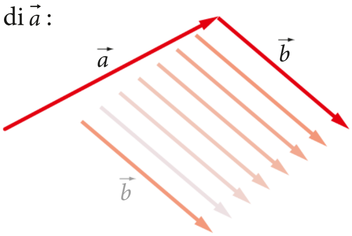
Come i numeri, i vettori sono oggetti matematici sui quali è possibile definire delle operazioni.

METODO PUNTA-CODA

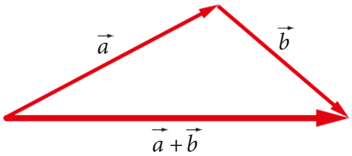
Vettori da sommare:



Si sposta la coda di $\vec{b}$ sulla punta di $\vec{a}$:

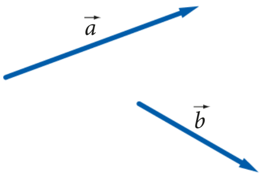


Vettore risultante, dalla coda di $\vec{a}$ alla punta di $\vec{b}$:

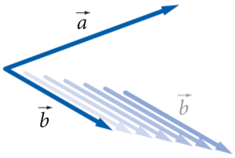


METODO DEL PARALLELOGRAMMA

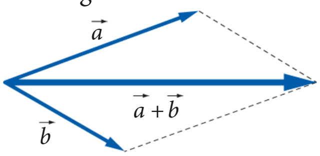
Vettori da sommare:



Si sposta la coda di $\vec{b}$ sulla coda di $\vec{a}$:



Vettore risultante, dalle code al vertice opposto del parallelogramma:



MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO

La moltiplicazione di un vettore per un numero moltiplica la lunghezza del vettore (lo può allungare o accorciare) ed eventualmente ne cambia il verso.

DIFFERENZA TRA VETTORI

Per effettuare la differenza tra vettori è prima necessario imparare a moltiplicare un numero per un vettore:

Se il numero è negativo, il vettore prodotto ha verso opposto al vettore di partenza.

La differenza tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ottiene sommando il primo vettore con l'opposto del secondo (che è il secondo moltiplicato per –1, cioè con il verso cambiato).

PRODOTTO SCALARE

Si chiama **prodotto scalare** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo per l'intensità del vettore componente del secondo lungo il primo.
Se si conosce l'angolo α formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare è uguale al prodotto dei loro moduli moltiplicato per cos α:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha$$

In formula:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab_a$$

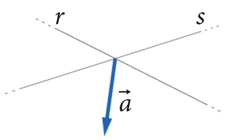
modulo di $\vec{a}$

componente di $\vec{b}$ lungo $\vec{a}$

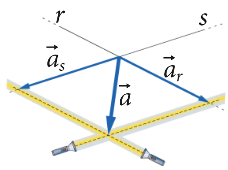
Il simbolo del prodotto scalare è un puntino

Per calcolare il prodotto scalare, è quindi necessario sapere scomporre un vettore nelle sue componenti:

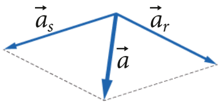
A Vettore da scomporre



B Si proietta la punta del vettore su due rette assegnate



C Componenti

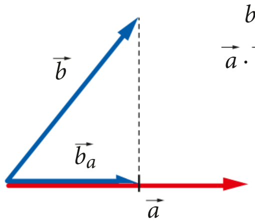


Nel caso del prodotto scalare, quindi:

A Se l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è acuto, b_a è positivo e anche il prodotto scalare è positivo.

$b_a > 0$

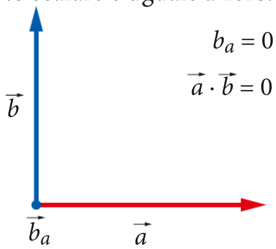
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$



B Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari tra loro, b_a è nullo e anche il prodotto scalare è uguale a zero.

$b_a = 0$

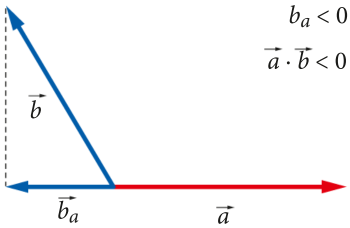
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



C Se l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è ottuso, b_a è negativo e anche il prodotto scalare è minore di zero.

$b_a < 0$

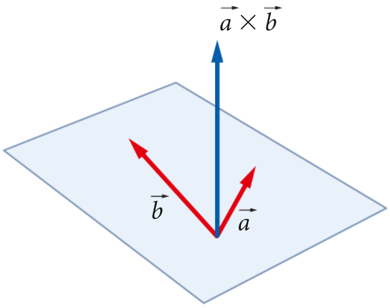
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



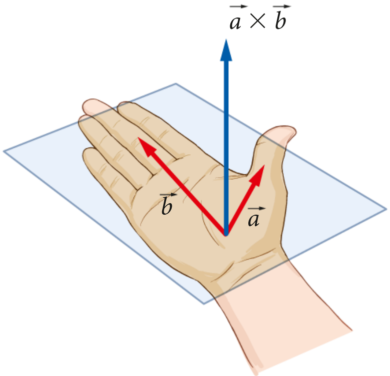
PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il loro **prodotto vettoriale** $\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che ha:

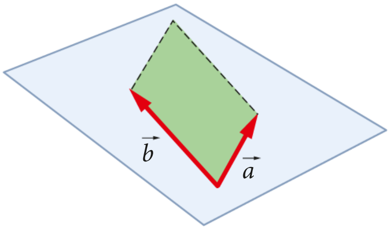
- **direzione** perpendicolare al piano che contiene i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$;



- **verso** dato dalla regola della mano destra (illustrata nella figura);



- **modulo** uguale all'area del parallelogramma generato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Sia il prodotto scalare che il prodotto vettoriale sono prodotti tra due vettori, però il prodotto scalare dà come risultato uno scalare, il prodotto vettoriale dà come risultato un vettore.

Secondo la **regola della mano destra**, se si pone il pollice della mano destra nel verso del vettore $\vec{a}$ e le altre dita nel verso di $\vec{b}$, il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ è uscente dal palmo della mano.

Se, invece di $\vec{a} \times \vec{b}$, calcoliamo $\vec{b} \times \vec{a}$ otteniamo come risultato un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso modulo, ma verso opposto.
Quindi, per il prodotto vettoriale vale la **proprietà anticommutativa:**

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Il simbolo del prodotto vettoriale è il segno X (quello del prodotto scalare era ·)

IL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE

Se si conosce l'angolo α formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il modulo del prodotto vettoriale è dato dalla formula $ab \cdot \operatorname{sen}\alpha$.
In definitiva, dato il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, si ha

$$c = ab \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

LEZIONE 03

Velocità e moto rettilineo uniforme

LA VELOCITÀ E IL MOTO

Un oggetto può essere studiato mediante il modello del punto materiale quando è molto piccolo rispetto alla distanza che percorre.

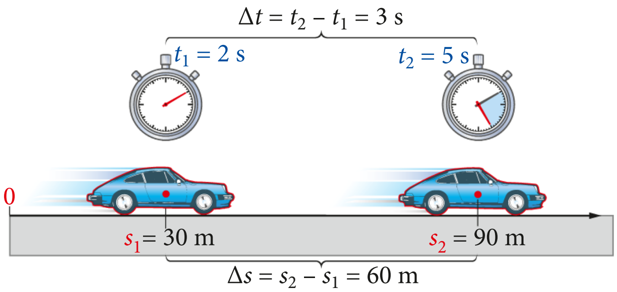
Solitamente si utilizza un sistema di riferimento cartesiano nel piano, costituito da due assi cartesiani, perpendicolari tra loro; un metro per misurare le distanze; un cronometro per misurare il tempo.

La descrizione del moto di un punto materiale è sempre relativa, cioè dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

Il **moto rettilineo** è il moto di un punto materiale la cui traiettoria è un segmento di retta. Il sistema di riferimento è costituito da un solo asse cartesiano che coincide con la traiettoria.

GRANDEZZE DEL MOTO

- **POSIZIONE s:** ascissa del punto materiale
- **DISTANZA PERCORSA Δs:** differenza tra due posizioni: $\Delta s = s_2 - s_1$
- **ISTANTE t:** valore letto sul cronometro
- **INTERVALLO DI TEMPO Δt:** differenza tra due istanti: $\Delta t = t_2 - t_1$



La **velocità media** è il rapporto tra la distanza percorsa da un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La velocità media fornisce informazioni non solo sulla **rapidità del moto**, ma anche sul **verso** lungo una traiettoria rettilinea.
La velocità si misura in m/s nel SI. Spesso, però, è utile esprimere la velocità in km/h:

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Per passare da m/s a km/h bisogna **moltiplicare** per 3,6.
- Per passare da km/h a m/s bisogna **dividere** per 3,6.

IL MOTO RETTILINEO UNIFORME

Il **moto rettilineo uniforme** è il movimento di un punto materiale che si sposta lungo una retta con velocità costante.

Il moto è **rettilineo** perché la traiettoria è una retta, è **uniforme** perché la velocità resta sempre la stessa. Le distanze percorse sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo impiegati a percorrerle.

Nel moto rettilineo uniforme possiamo calcolare:

- la **posizione**, conoscendo la velocità e l'istante di tempo
- l'**istante di tempo**, conoscendo la velocità e la posizione.

POSIZIONE

velocità

$s = vt$ ← istante di tempo

posizione

POSIZIONE CON PARTENZA DIVERSA ZERO

velocità

$s = s_0 + vt$ ← istante di tempo

posizione — posizione iniziale

$\Delta s = v_m \Delta t$

ISTANTE DI TEMPO (CON PARTENZA DALLA POSIZIONE ZERO)

posizione

$t = \frac{s}{v}$ ← velocità

istante di tempo

Calcolo del tempo

$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m}$

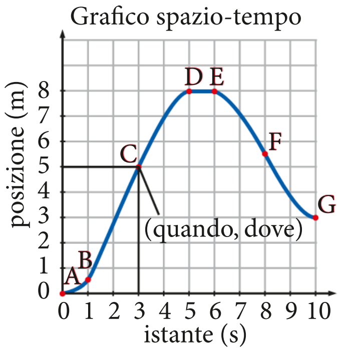
IL GRAFICO SPAZIO-TEMPO

Possiamo rappresentare le informazioni sul moto in un grafico *spazio-tempo* formato da un asse orizzontale degli istanti di tempo e un asse verticale delle posizioni. Il grafico spazio-tempo di un moto rettilineo uniforme è una retta inclinata.

Un punto del grafico spazio-tempo dà informazione sulla posizione di un corpo che si muove su una retta a un determinato istante.

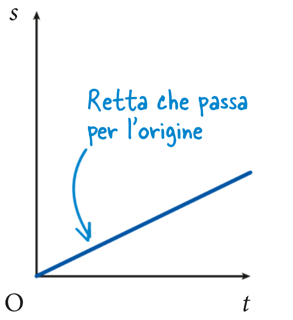
Il grafico non fornisce indicazioni sulla traiettoria, che nel caso del moto rettilineo è un segmento:

- grafico **ripido**: valore v_m maggiore.
- grafico **orizzontale**: l'oggetto è fermo.
- grafico **inclinato** verso il basso: la velocità è negativa, cioè l'oggetto torna indietro.

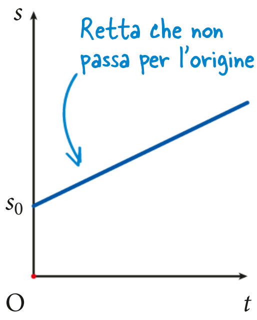


ESEMPI DI GRAFICI SPAZIO-TEMPO NEL MOTO RETTILINEO UNIFORME

Moto rettilineo uniforme con partenza dalla posizione zero:



Moto rettilineo uniforme con partenza da una posizione iniziale diversa da zero:



GRAFICI DI DUE OGGETTI CON VELOCITÀ DIVERSE NELLO STESSO VERSO

Grafico spazio-tempo

La retta A (oggetto più veloce) è più inclinata verso l'alto.

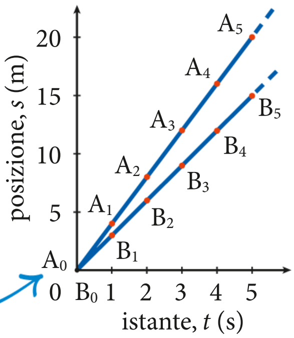
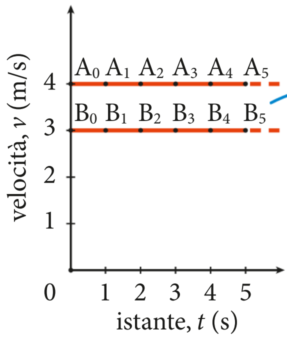


Grafico velocità-tempo



Per entrambi i moti, il grafico è una retta orizzontale e le velocità costanti sono positive.

GRAFICI DI DUE OGGETTI CON POSIZIONI INIZIALI DIVERSE E STESSA VELOCITÀ

Grafico spazio-tempo

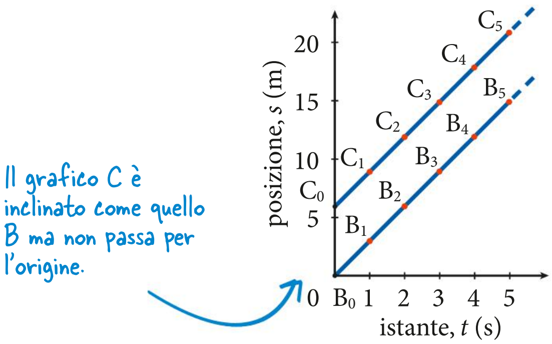
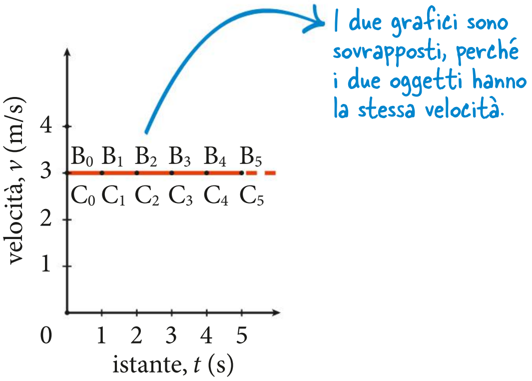


Grafico velocità-tempo

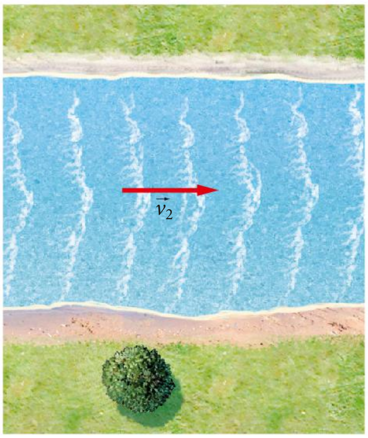


LA COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

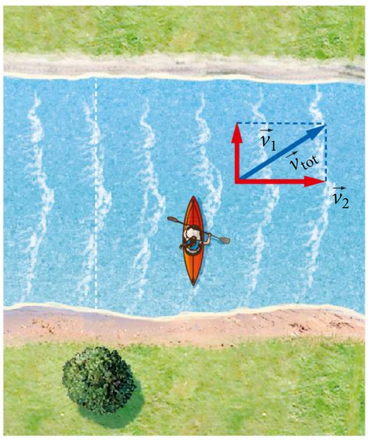
Un corpo soggetto a due movimenti simultanei, il primo con velocità $\vec{v}_1$ e il secondo con velocità $\vec{v}_2$, ha una velocità complessiva $\vec{v}_{tot}$ data dalla somma vettoriale di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{v}_{tot} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

A Una ragazza in canoa rema in direzione perpendicolare alle rive di un fiume con velocità $\vec{v}_1$. Se il fiume è fermo, come tra gli argini di una diga, la canoa si trova sempre in linea con l'albero.

B Se non è tenuta dagli argini di una diga, l'acqua del fiume scorre parallelamente alle rive, con un movimento descritto dal vettore velocità $\vec{v}_2$.



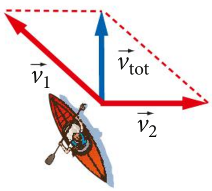
C La velocità reale della canoa è allora $\vec{v}_{tot} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$: dopo pochi colpi di remo si trova di fronte a un nuovo tratto di riva e non è più come prima in linea con l'albero.



Per ripassare come si scompone un vettore nelle sue componenti, torna alla lezione 2.

In presenza della corrente, se la ragazza volesse muoversi perpendicolarmente alla riva, dovrebbe dirigere la canoa in una direzione obliqua, in modo che la somma vettoriale della sua velocità $\vec{v}_1$ e della velocità della corrente $\vec{v}_2$ sia nella direzione voluta.

La legge di composizione delle velocità ha però un ambito di validità limitato e non vale per velocità vicine a quella della luce nel vuoto.



LEZIONE 04

Moto rettilineo uniformemente accelerato

L'ACCELERAZIONE

In un moto vario su una retta, il valore della velocità può variare in qualunque maniera.

L'**accelerazione media** di un punto materiale è il rapporto tra la variazione di velocità Δv di un punto materiale e l'intervallo di tempo Δt in cui essa avviene.

In formula:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

L'accelerazione misura la rapidità con cui varia la velocità.
Le sue dimensioni fisiche sono $[l \cdot t^{-2}]$ e si misura in metri al secondo quadrato (m/s^2) nel SI.
Si dice che si ha *accelerazione negativa* quando la velocità di un oggetto passa da un valore maggiore a uno minore.

Nel SI la velocità si misura in m/s, pertanto:
$(m/s)/s =$
$= m/(s \cdot s) =$
$= m/s^2$

IL MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Il movimento di un punto materiale che si sposta lungo una retta con accelerazione costante è detto **moto rettilineo uniformemente accelerato**.

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato, le variazioni di velocità sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo in cui hanno luogo.
Consideriamo due possibili casi di moto uniformemente accelerato: il primo caso con partenza da fermo e il secondo con posizione iniziale e velocità iniziale diverse da zero.

Velocità con partenza da fermo

$$v = at$$

Velocità con velocità iniziale diversa da zero

$$v = v_0 + at$$

Posizione con partenza da fermo

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Posizione con posizione iniziale e velocità iniziale diverse da zero

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

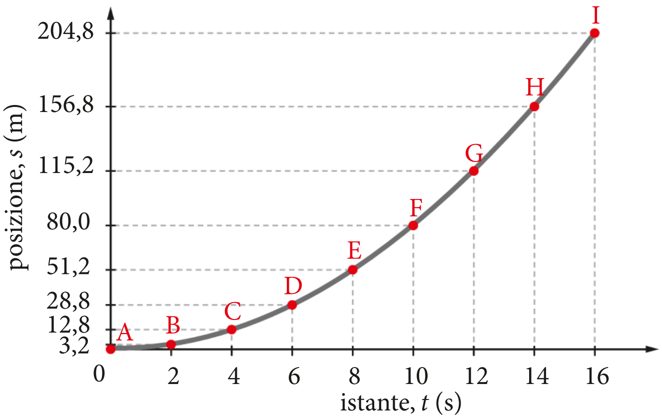
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Calcolo del tempo con partenza da fermo

Ricavare per ogni istante velocità e posizione significa ricavare la *legge del moto*.

I GRAFICI RELATIVI AL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

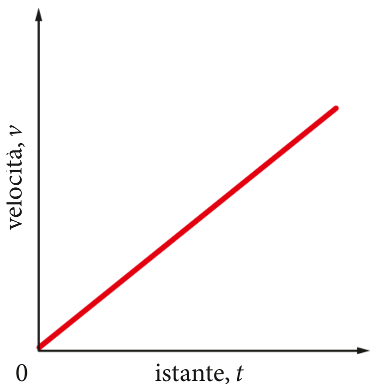
Grafico spazio-tempo



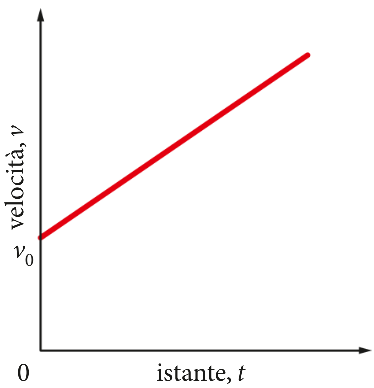
Il grafico **spazio-tempo** di un moto accelerato *non* è una retta, ma una *parabola*.

Il grafico **velocità-tempo** del moto uniformemente accelerato è una **retta**, che passa per l'origine degli assi nel caso la partenza del moto sia da fermi, che non passa per l'origine nel caso la velocità iniziale sia diversa da zero.

CON PARTENZA DA FERMO



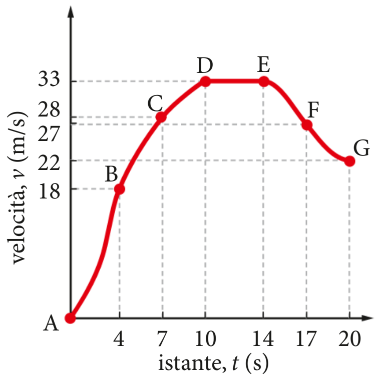
CON VELOCITÀ INIZIALE



Dai grafici velocità-tempo possiamo ottenere diverse informazioni: è quindi importante imparare a leggerli.

- Grafico **ripido**: valore di a_m maggiore.
- Grafico **orizzontale**: velocità costante.
- Grafico **inclinato** verso il basso: accelerazione negativa.
- Nei tratti più ripidi, la velocità varia più rapidamente: aumenta se l'accelerazione è positiva, diminuisce se l'accelerazione è negativa.
- L'area compresa fra l'origine e l'istante *t* è la distanza Δs percorsa dal corpo all'istante *t*.

Grafico velocità-tempo



LEZIONE 05

Caduta libera e moto dei proiettili

LA CADUTA DEI GRAVI

Un oggetto in caduta libera si muove con un'accelerazione costante e uguale per tutti i corpi pari all'**accelerazione di gravità** $\vec{g}$, che dipende dal luogo.

L'accelerazione vettoriale $\vec{g}$ è diretta verso il basso e ha modulo uguale a 9,8 m/s^2.

Durante il test di ammissione non potrai usare la calcolatrice: negli esercizi puoi approssimare g al valore di 10 m/s^2

La caduta libera con partenza da fermo corrisponde a un moto uniformemente accelerato con posizione iniziale nulla e pertanto si applicano le stesse relazioni.

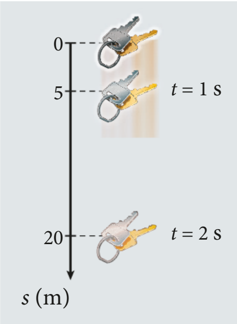
posizione

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{posizione} = \frac{1}{2} \cdot \text{accelerazione di gravità} \cdot (\text{tempo})^2$$

velocità istantanea

$$v = gt$$

velocità = accelerazione di gravità · tempo



Se un corpo non viene lasciato cadere, ma possiede una velocità iniziale si ha $\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

Il valore dell'accelerazione di gravità varia da pianeta a pianeta:

g(Terra) = 9,8 m/s^2, g(Luna) = 1,6 m/s^2, g(Marte) = 3,7 m/s^2.

L'attrito

Il moto di un corpo che cade nell'aria è influenzato anche dall'attrito. Quando consideriamo la caduta libera di un grave, è importante sapere se si deve trascurare o no l'attrito.

Nella maggior parte dei test di ammissione ti sarà chiesto di trascurare l'attrito dell'aria, cioè di considerare la caduta nel vuoto.

Se si trascura l'attrito dell'aria, due corpi di massa differente, lasciati cadere dalla stessa altezza, raggiungono terra nello stesso istante e con la stessa velocità.

In generale, quando si trascura l'attrito, se corpi di massa differente hanno la stessa velocità iniziale, questi cadranno sempre contemporaneamente, e con la stessa velocità finale.

In presenza di attrito, se si lasciano cadere due corpi di massa differente dalla stessa altezza, arriva a terra per primo e con maggiore velocità il corpo di massa maggiore.

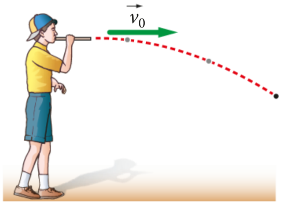
IL MOTO DEI PROIETTILI

Un oggetto che viene lanciato (per esempio una pallina, un sasso, o un tappo di una bottiglia) ha una velocità iniziale, che può essere verso l'alto, oppure solo in direzione orizzontale, oppure in direzione obliqua.

L'accelerazione (o decelerazione nel caso del moto ascendente) è sempre g.

Velocità iniziale verso l'alto

Un oggetto lanciato verso l'alto raggiunge un'altezza massima nel punto in cui la velocità si annulla e poi comincia a scendere, sempre su traiettoria verticale e rettilinea.
Nel tratto ascendente il moto è uniformemente decelerato, in quello discendente è uniformemente accelerato.



Velocità iniziale orizzontale

Il moto di un oggetto lanciato in orizzontale è la **sovrapposizione** di due moti:
- un moto rettilineo uniforme orizzontale,
- un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

Il segno meno deriva dal fatto che la pallina si muove verso valori decrescenti dell'asse y.

L'accelerazione verticale è $\vec{g}$. Scegliendo il punto di partenza come origine degli assi coordinati, le coordinate x e y delle posizioni occupate dall'oggetto sono allora date dalle formule:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

moto uniforme in orizzontale

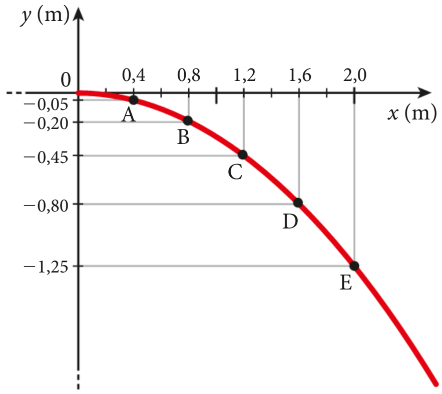
moto uniformemente accelerato in verticale

Supponiamo che si abbia $v_0 = 4{,}0$ m/s e poniamo $g = 10$ m/s^2.

Se seguiamo il moto della pallina ogni 0,1 s per 0,5 s otteniamo la tabella:

***t*(s)**	***x*(m)**	***y*(m)**	**Posizione**
0	0	0	O
0,1	0,4	–0,05	A
0,2	0,8	–0,20	B
0,3	1,2	–0,45	C
0,4	1,6	–0,80	D
0,5	2,0	–1,25	E

Dalla tabella disegniamo la traiettoria, che è una parabola:



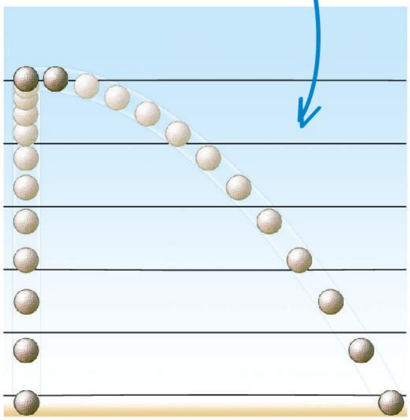
La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola*.

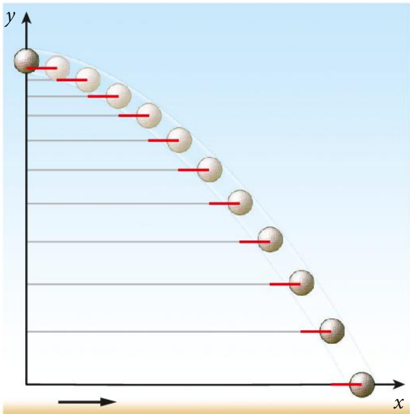
Un esperimento ci permette di controllare se questa previsione è corretta. Facciamo partire due palline da golf nello stesso istante: la prima cade da ferma, la seconda è lanciata in orizzontale.

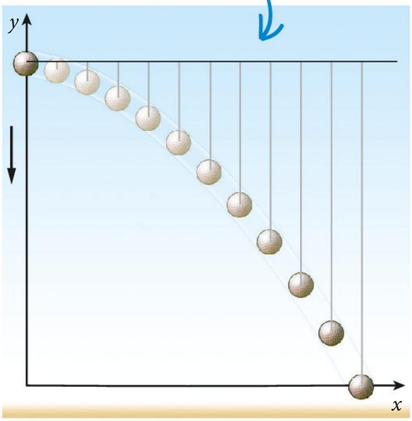
A Istante dopo istante, le due palline si trovano alla stessa quota verticale e arrivano a terra nello stesso istante.

B Il moto della coordinata y della seconda pallina è uguale al moto della pallina lasciata cadere, moto uniformemente accelerato con accelerazione g.

C In intervalli di tempo uguali la coordinata x della seconda pallina aumenta di quantità uguali, cioè compie un moto rettilineo uniforme.



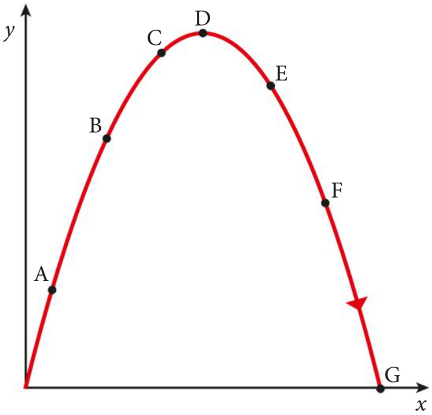


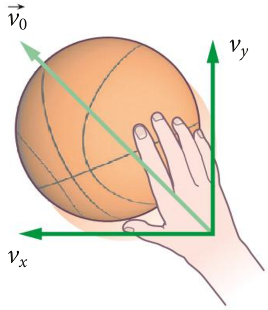


Velocità iniziale obliqua

Consideriamo una palla da basket che viene lanciata verso il canestro. Scomponiamo la sua velocità iniziale $\vec{v}_0$ nei vettori componenti orizzontale e verticale, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.

Il suo moto è la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale e del moto in verticale di un oggetto lanciato verso l'alto con velocità iniziale diversa da zero.
La traiettoria è una parabola.





LEZIONE 06

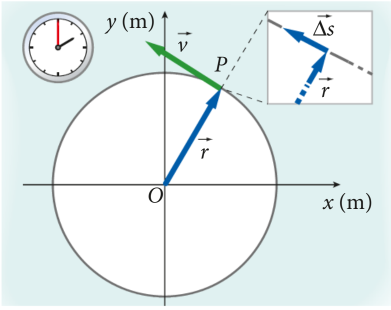
Il moto circolare uniforme

IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Un **moto circolare uniforme** ha per traiettoria una circonferenza (moto circolare) e il modulo del vettore velocità rimane costante (moto uniforme).

Per descrivere il moto circolare uniforme è comodo scegliere un sistema di riferimento con l'origine O nel centro della traiettoria circolare.

Dalla formula della velocità istantanea, si vede che in un moto circolare uniforme, il vettore velocità istantanea in un punto P è sempre **perpendicolare** al raggio della circonferenza condotto per P (quindi tangente alla circonferenza).



Un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme impiega sempre lo stesso tempo a percorrere un giro completo. Le grandezze utilizzate sono il periodo e la frequenza.

Nell'orologio, il periodo della lancetta dei minuti è di un'ora e quello della lancetta delle ore è 12 ore.

Il **periodo** T è il tempo necessario per compiere un giro completo della circonferenza.

Si chiama **frequenza** f il numero di giri della circonferenza compiuti in un secondo.

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{frequenza} = \frac{1}{\text{periodo}}$$

Per esempio, a un periodo di 1 s corrisponde una frequenza di 1 giro al secondo; a un periodo di 10 s una frequenza di 1/10 di giro al secondo.

Nel Sistema Internazionale, la frequenza si misura in giri al secondo o hertz (Hz): $1\ \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$.

LA VELOCITÀ ISTANTANEA E LA VELOCITÀ ANGOLARE

La velocità istantanea, detta anche **tangenziale**, è un vettore.

Nel moto circolare uniforme possiamo distinguere tra la velocità istantanea e la velocità angolare.

Per calcolare la **velocità istantanea**, si deve ricordare che la velocità è data dal rapporto tra lo spazio percorso in un giro e l'intervallo di tempo impiegato: per il moto circolare uniforme lo spazio percorso in un giro corrisponde alla misura della circonferenza e il tempo corrisponde al periodo. Pertanto:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\text{velocità} = \frac{\text{lunghezza della circonferenza}}{\text{periodo}}$$

Nel moto circolare uniforme si percorrono archi di circonferenza *direttamente proporzionali* agli intervalli di tempo impiegati.

La velocità angolare è un vettore

Si definisce **velocità angolare** ω di un moto circolare uniforme il rapporto tra l'angolo al centro $\Delta\alpha$ e il tempo Δt, dove $\Delta\alpha$ è l'angolo descritto dal raggio R nell'intervallo di tempo Δt.

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

Le unità di misura di ω nel Sistema Internazionale sono $\frac{\text{radianti}}{\text{secondo}}$.

Considerando un intervallo di tempo pari al periodo T, si ha che $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Velocità tangenziale v e velocità angolare ω sono legate dalla relazione: $v = \omega r$.

Un **radiante** è l'angolo che insiste su un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.

L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA

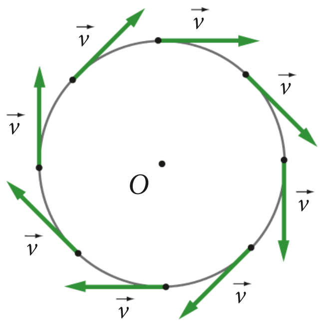
Nel moto circolare uniforme, il vettore velocità istantanea varia continuamente in direzione e in verso, anche se il suo modulo è costante.

C'è una accelerazione tutte le volte che il *vettore* velocità cambia: possono cambiare il valore della velocità, la sua direzione o il suo verso.

Poiché $v = \omega r$, la relazione tra accelerazione e velocità angolare diventa: $a = v^2/r = \omega^2 r^2/r = \omega^2 r$

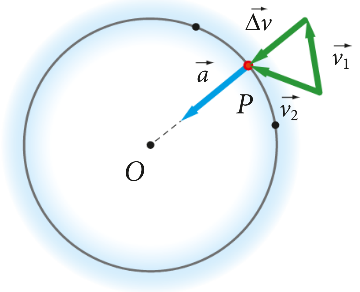
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\text{vettore accelerazione} = \frac{(\text{velocità})^2}{\text{raggio della circonferenza}}$$



Nel moto circolare uniforme, il vettore accelerazione è sempre rivolto verso il centro della traiettoria circolare ed è detta **accelerazione centripeta**.

Centripeta significa «che punta verso il centro».

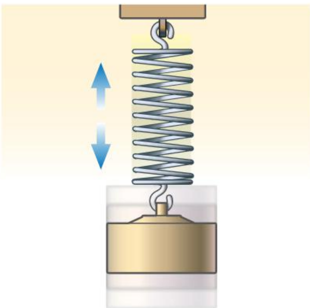


LEZIONE 07

Il moto armonico

IL MOTO ARMONICO

Osserviamo il moto di un'altalena o di una molla appesa al soffitto: si ha un esempio di *moto oscillatorio*, in cui l'oggetto in movimento ripercorre sempre, avanti e indietro, lo stesso tragitto.



Si dice **moto armonico** il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.

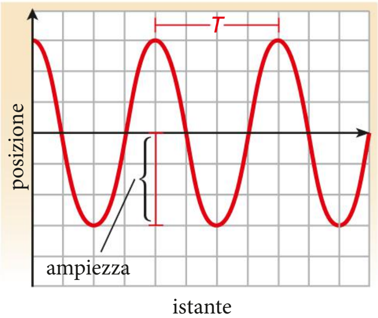
Un moto è periodico quando le variabili del moto (posizione, velocità, accelerazione) assumono gli stessi valori a intervalli di tempo uguali.

Il moto di oscillazione di una molla è armonico.

La traiettoria di un punto materiale che si muove di moto armonico è un segmento di retta. Nel moto armonico, la velocità è maggiore al centro e nulla agli estremi della traiettoria. L'accelerazione è nulla al centro e maggiore agli estremi della traiettoria.

IL GRAFICO SPAZIO-TEMPO DEL MOTO ARMONICO

Il grafico spazio-tempo del moto armonico è **periodico**, cioè ottenuto dalla ripetizione di una stessa figura di base.



L'**ampiezza** è la distanza che separa il valore massimo dell'oscillazione da quello centrale.

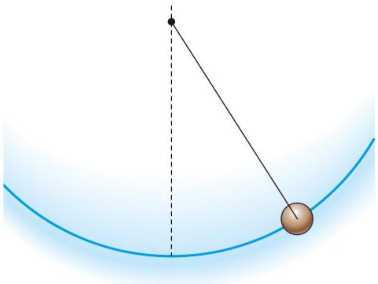
Il **periodo** T è la durata di un'oscillazione completa (avanti e indietro).

Nel moto armonico le grandezze cinematiche posizione, velocità e accelerazione presentano variazione periodiche e assumono sempre lo stesso valore dopo un numero di intero di periodi.

La **frequenza** è il numero di oscillazioni complete effettuate in un secondo; è uguale all'inverso del periodo, $\frac{1}{T}$.

IL PENDOLO

Il pendolo è costituito da una pallina appesa a un filo che oscilla quando si sposta dalla verticale: per oscillazioni di piccola ampiezza il pendolo si muove di moto armonico di periodo T. Il periodo dipende solo dalla lunghezza del filo ed è indipendente dalla massa oscillante e dall'ampiezza delle oscillazioni.

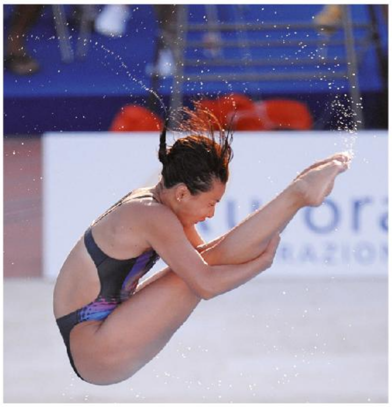


Il periodo T è dato dalla relazione: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

lunghezza del filo

I principi della dinamica

L'EFFETTO DELLE FORZE



L'idea di forza è legata allo sforzo muscolare. Infatti quando spingiamo, tiriamo o solleviamo un oggetto, esercitiamo una forza.

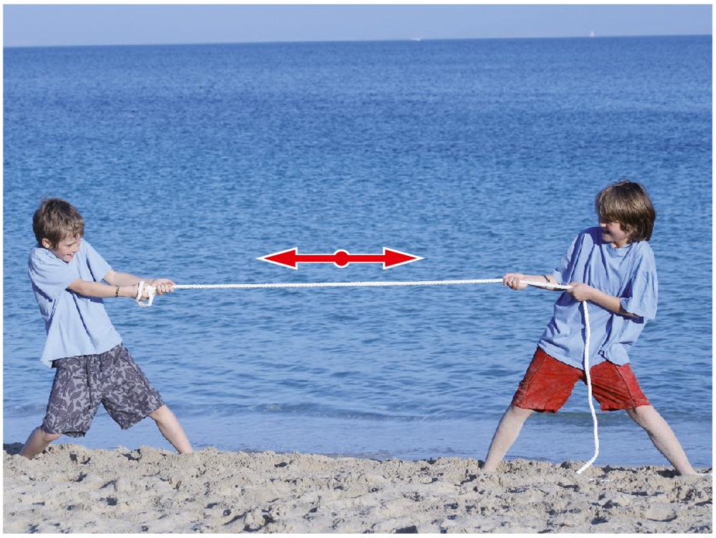
Tuttavia, ci sono anche forze che non dipendono dai muscoli:
- la forza del vento spinge le vele dei windsurf;
- la forza magnetica della calamita attrae oggetti di ferro;
- la forza di gravità della Terra attrae la tuffatrice.

Alcune sono **forze di contatto**, come quella del vento sulla vela o la nostra forza che spinge un carrello del supermercato.
Altre sono **forze a distanza**, come la forza magnetica della calamita e la forza di gravità della Terra che attira verso il basso un tuffatore. Infatti tra la Terra e il tuffatore che cade non c'è alcun contatto. La forza di gravità che la Terra esercita su tutti gli oggetti è percepita come *forza-peso*.

Una forza applicata a un oggetto **fermo** può fare **aumentare** la sua velocità, come accade a un pallone quando si tira un calcio di rigore.
Una forza applicata a un oggetto **in moto** può far **diminuire** la sua velocità, come accade al pallone quando è parato dal portiere.

Una **forza** può cambiare la velocità di un corpo.

Nel tiro alla fune il centro della corda rimane fermo, perché su di esso agiscono due forze che si annullano.

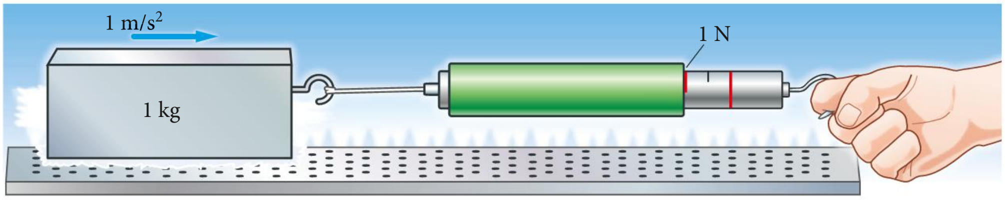


Si può stabilire un criterio per capire se su un corpo è applicata una forza totale:
- se il corpo non varia la sua velocità, allora la forza totale applicata su di esso è uguale a zero;
- se il corpo varia la sua velocità, allora su di esso è applicata una forza totale diversa da zero.

Per descrivere una forza dobbiamo fornire tre informazioni:
- la sua **direzione**, cioè la retta lungo cui la forza agisce;
- il **verso** in cui è orientata (lungo una direzione ci sono due versi possibili);
- la sua **intensità** o **modulo**, misurato con uno strumento chiamato *dinamometro*.

La forza è una grandezza vettoriale: il vettore che la rappresenta parte dal punto in cui è applicata la forza.

L'unità di misura della forza è il newton (N).



$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1 N (newton) è la forza che, applicata alla massa di 1 kg, le imprime un'accelerazione pari a 1 m/s^2.

IL PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

La **dinamica** è la parte della fisica che studia il movimento dei corpi per effetto delle forze che agiscono su di essi.

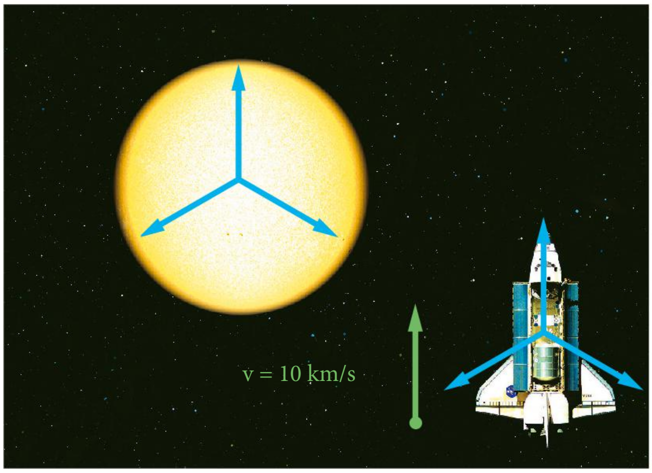
La meccanica di Newton, che permette di prevedere i moti della Terra e dei pianeti, è fondata sui tre principi della dinamica.

Il primo **principio della dinamica** o **principio di inerzia** afferma che:

- se la forza totale applicata a un punto materiale è uguale a zero, allora esso si muove a velocità costante.
- se un punto materiale si muove a velocità costante, allora la forza totale che subisce è uguale a zero.

Per esempio, quando un ciclista si muove con velocità costante, la forza che esercita sui pedali serve per controbilanciare le forze di attrito esercitate dall'asfalto e dall'aria, che causano un rallentamento.
Quindi tutti i corpi, per inerzia, tendono a muoversi a velocità costante.

Un sistema di riferimento in cui vale il primo principio della dinamica si chiama **sistema di riferimento inerziale**.

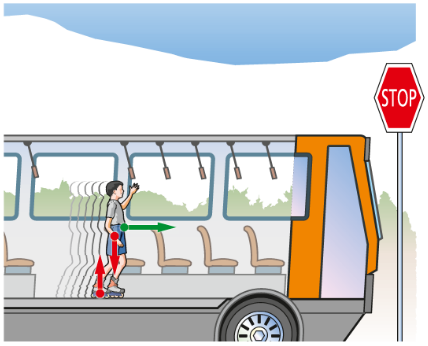


Per esempio, è inerziale un sistema di riferimento con l'origine nel centro del Sole e gli assi che puntano verso tre stelle fisse molto lontane.
Sono inerziali tutti i sistemi di riferimento che si muovono rispetto al sistema del Sole con **velocità costante**.
Per i moti degli oggetti quotidiani, come la caduta di un oggetto o l'oscillazione di una molla, la superficie terrestre può essere considerata un sistema di riferimento inerziale.

Si dice **sistema di riferimento accelerato** un sistema di riferimento in cui non vale il principio di inerzia.

Per esempio, il sistema di riferimento di un autobus che, in un moto a velocità costante inizia a frenare, non è inerziale perché durante una frenata la ragazza della figura, inizialmente ferma, si sente spinta in avanti anche se la forza totale che agisce su di lei è zero.

In linea di principio il sistema della Terra non è inerziale perché la Terra compie due moti accelerati: il moto di rotazione attorno al proprio asse e di rivoluzione intorno al Sole, ma queste due accelerazioni sono così piccole da non essere avvertite nei fenomeni quotidiani.



Vista da Terra, la ragazza continua a muoversi, prima e dopo la frenata. Quindi il principio di inerzia, rispetto al sistema inerziale Terra, è valido e la forza che la ragazza sente sull'autobus è una **forza apparente** (detta anche forza di inerzia) dovuta al fatto che l'autobus in frenata non è un sistema di riferimento inerziale.

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Una forza provoca una variazione di velocità e quindi un'accelerazione. Quando su un corpo agisce una forza costante, il corpo si muove con accelerazione costante.

Secondo principio della dinamica, o **legge fondamentale della dinamica**: la forza totale che agisce su un corpo è uguale al **prodotto** della sua massa per l'accelerazione a cui è sottoposto.

forza (N) massa (kg)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

accelerazione (m/s^2)

L'accelerazione di un corpo è **direttamente proporzionale** alla forza che agisce su di esso. La costante di proporzionalità tra la forza e l'accelerazione è uguale alla **massa** del corpo.

MASSA

La massa di un oggetto misura la resistenza che esso oppone al tentativo di accelerarlo.

La massa di un oggetto misura quanto è grande la sua **inerzia**, cioè la tendenza del corpo a muoversi sempre con la stessa velocità.

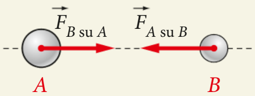
A parità di forza, più è piccola l'accelerazione subita da un oggetto, tanto più la massa è grande.

IL TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Il **terzo principio della dinamica** o **principio di azione-reazione** afferma che quando un oggetto *A* esercita una forza su un oggetto *B*, anche *B* esercita una forza su *A*: la forza esercitata da *A* su *B* è uguale in direzione e valore, ma opposta in verso, a quella esercitata da *B* su *A*.

$$\vec{F}_{A\text{ su }B} = -\vec{F}_{B\text{ su }A}$$

forza di *A* su *B* = – forza di *B* su *A*



Tutti i sistemi di locomozione si basano sul terzo principio della dinamica: quando camminiamo, spingiamo indietro il terreno, e il suolo ci spinge in avanti con una forza, uguale e opposta.

LEZIONE 09

Applicazioni dei principi della dinamica

Ricorda sempre che sia le forze che le accelerazioni sono grandezze vettoriali.

Per le operazioni con i vettori, puoi ripassare la lezione 2. Può essere utile ricordare anche alcune proprietà di parallelogrammi, quadrati, triangoli e rettangoli.

LE FORZE DI ATTRITO

Tra le varie forze, esiste anche quella di attrito.

A differenza di quanto fatto nella lezione 5 sulla caduta libera, ora dobbiamo tenere conto dell'attrito. L'attrito è una forza, cioè una grandezza vettoriale.

L'attrito può essere di tre tipi:
- radente
- volvente
- viscoso

Le forze di attrito hanno **senso contrario** al moto.

L'**attrito radente** può essere *statico*, quando rappresenta un ostacolo a mettere in moto un oggetto fermo; *dinamico* quando rappresenta la resistenza al movimento di un oggetto già in moto. Esempio: tra scarpa e terreno.

L'**attrito volvente** compare quando un corpo rotola su una superficie. Esempio: una ruota rotola sulla strada.

L'**attrito viscoso** si ha quando un corpo si muove in un fluido. Esempio: un'auto e l'aria.

In particolare, si chiama **forza al distacco** la *minima forza necessaria* per mettere in moto un oggetto fermo, in modo da farlo scivolare su un piano.

forza al distacco

$$F_s = \mu_s F_\perp$$

coefficiente di attrito statico

forza premente

La forza di attrito statico è **direttamente proporzionale** al modulo della forza premente, non dipende dall'area di contatto fra le superfici, è parallela alla superficie di contatto.
Il coefficiente μ_s è un **numero puro**.

La forza di attrito radente dinamico agisce su un corpo che **si muove scivolando** su un piano. Entra in gioco quando l'attrito statico non riesce più a trattenere il corpo fermo.

forza di attrito radente dinamico

$$F_d = \mu_d F_\perp$$

coefficiente di attrito dinamico

forza premente

La costante di proporzionalità μ_d è un numero puro che dipende dai **materiali** di cui sono fatti l'oggetto che scivola e la superficie.
μ_d è minore di μ_s che corrisponde alla stessa situazione.

LA QUANTITÀ DI MOTO

La quantità di moto è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore velocità.
Si ottiene dal prodotto della massa di un corpo per la sua velocità:

quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

massa

velocità

L'intensità della quantità di moto è direttamente proporzionale sia alla massa che al valore della velocità; l'unità di misura, kg · m/s.

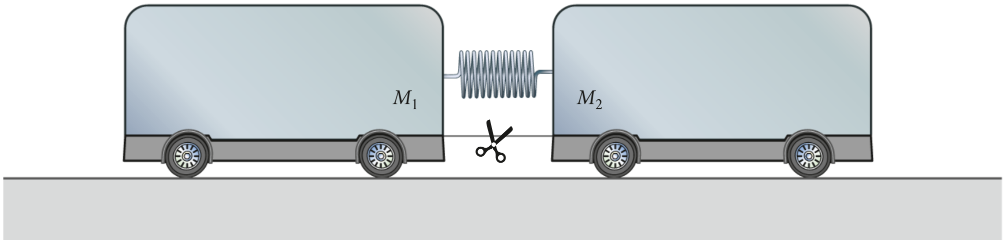
Se su un sistema fisico non agiscono forze esterne la quantità di moto totale del sistema si conserva: anche se le quantità di moto dei singoli corpi che fanno parte del sistema cambiano, la quantità di moto totale non cambia.

Un sistema in cui non agiscono forze esterne si dice isolato.

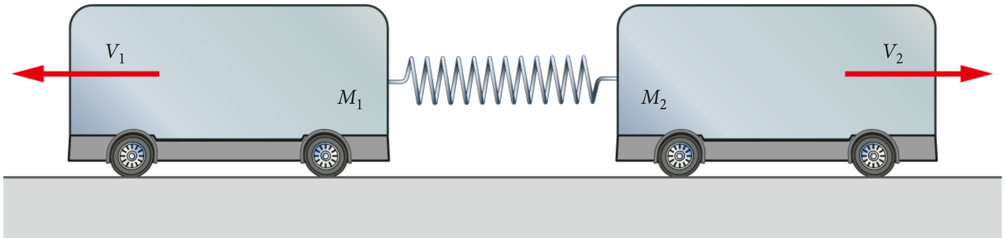
LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Esaminiamo, dal punto di vista della quantità di moto, il seguente esperimento.

Due carrelli di massa uguale, collegati da una molla, sono tenuti fermi da un filo.



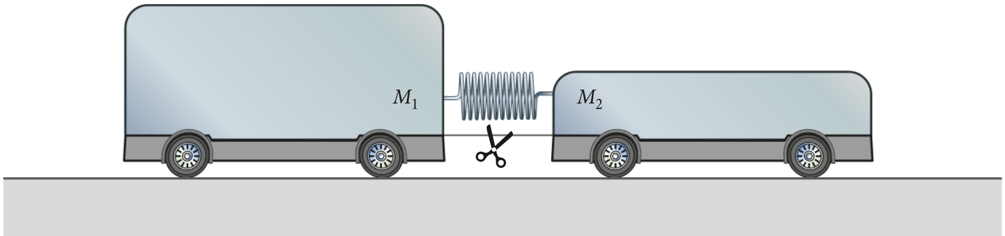
Dopo aver tagliato il filo, i due carrelli si allontanano con velocità uguali in modulo.



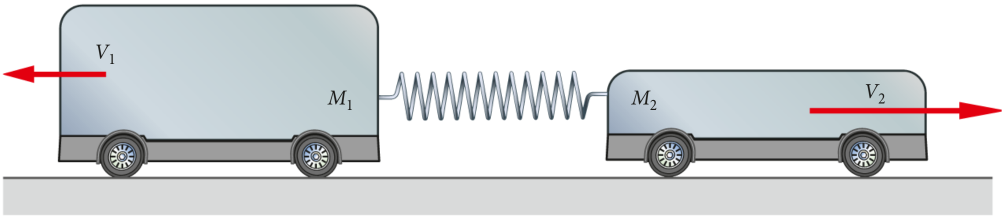
Nella situazione iniziale ciascun carrello ha quantità di moto pari a zero, perché è fermo.
Dopo aver tagliato il filo, i due carrelli hanno quantità di moto dello stesso valore ma di verso opposto.

La quantità di moto totale dei due carrelli era zero prima di tagliare il filo, e rimane zero anche dopo aver tagliato il filo.

Ripetiamo l'esperimento con un carrello di massa doppia rispetto all'altro.



Dopo aver tagliato il filo, il carrello di massa doppia sia allontana con velocità pari alla metà di quella dell'altro carrello.



Nella situazione iniziale ciascun carrello ha quantità di moto pari a zero, perché è fermo.
Anche in questo caso, dopo aver tagliato il filo, i due carrelli hanno quantità di moto dello stesso valore ma di verso opposto.
La quantità di moto totale dei due carrelli era zero prima di tagliare il filo, e rimane zero anche dopo aver tagliato il filo. Si può notare che:

> la quantità di moto di ciascun corpo cambia; invece **non cambia la quantità di moto totale del sistema.**

Esperimenti di questo tipo sono in accordo con la legge di conservazione della quantità di moto:

> se su un sistema non agiscono forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Su questo principio è basato, per esempio, il funzionamento dei motori a reazione.
Quando un aereo è fermo sulla pista, la sua quantità di moto totale, compresa quella del carburante e dell'aria contenuta nei motori, è pari a zero.
Quando i motori vengono accesi, essi aspirano aria dal davanti ed espellono i gas combusti all'indietro a grande velocità. Per la conservazione della quantità di moto, l'aereo si muove in avanti.

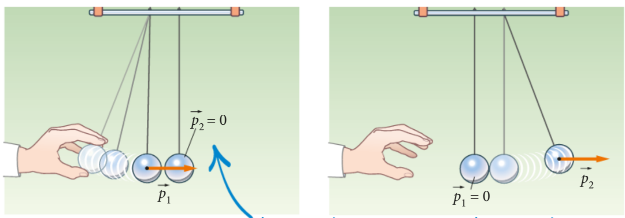
GLI URTI

Se sul sistema dei corpi che si urtano non agiscono forze esterne, la quantità di moto totale rimane uguale prima e dopo la collisione.

Impareremo che l'energia cinetica è data dall'espressione $K = \frac{1}{2} mv^2$.

> Un urto è **elastico** quando in esso si conserva, oltre alla quantità di moto totale, anche l'energia cinetica totale dei corpi che interagiscono.

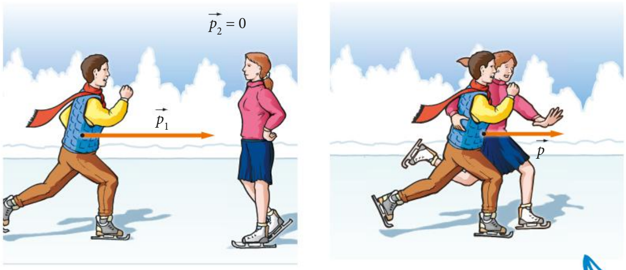
I corpi che si urtano elasticamente rimbalzano perfettamente, tornando alla forma iniziale dopo la collisione.
Per esempio, può considerarsi elastico l'urto tra due palle da biliardo.



$(p_1 + 0)_{\text{prima dell'urto}} = (0 + p_2)_{\text{dopo l'urto}}$

> Un urto è **anelastico** quando i due corpi che si urtano rimangono uniti e si conserva la quantità di moto totale, ma non l'energia cinetica.

Per esempio, può considerarsi anelastico l'urto fra due pattinatori che dopo l'impatto si allontanano insieme.



$(P_1 + 0)_{\text{prima dell'urto}} = P_{\text{dopo l'urto}}$

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$

L'IMPULSO

Il secondo principio della dinamica può essere riscritto dal punto di vista della quantità di moto, utilizzando una nuova grandezza, l'**impulso** di una forza:

$$\underbrace{\vec{I}}_{\text{impulso}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{forza}} \underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo}}$$

impulso = (forza) · (intervallo di tempo)

L'impulso è il prodotto della forza per l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce ed è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore forza.

Il **teorema dell'impulso** afferma che la variazione della quantità di moto totale è uguale all'impulso della forza che agisce su un corpo (o su un sistema di corpi).

$$\underbrace{\Delta\vec{p}}_{\text{variazione della quantità di moto totale}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{forza}} \Delta t \quad \text{cioè} \quad \Delta\vec{p} = \underbrace{\vec{I}}_{\text{impulso}}$$

Per esempio, il teorema dell'impulso spiega perché per ridurre la forza d'urto negli incidenti automobilistici si aumenta il tempo dell'impatto utilizzando gli airbag.

LEZIONE 10

La legge di gravitazione e la forza peso

LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

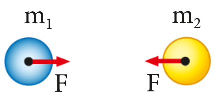
La forza di gravità con la quale la Terra attrae una mela, un aereo, oppure viene attratta dal Sole sono manifestazioni della **legge di gravitazione universale**.

La forza di attrazione gravitazionale che si esercita tra due corpi è **direttamente proporzionale** al prodotto delle masse dei due corpi e **inversamente proporzionale** al quadrato della loro distanza.

Se la distanza raddoppia, la forza diventa 4 volte (2^2 volte) più piccola; se triplica, diventa 9 (3^2) volte più piccola: la forza diminuisce quindi molto rapidamente al crescere della distanza, e questo spiega perché, stando sulla Terra, sentiamo molto l'attrazione della Terra e poco quella delle stelle.

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{forza} = \text{costante } G \cdot \frac{\text{massa}_1 \cdot \text{massa}_2}{(\text{distanza})^2}$$



La costante G è detta **costante di gravitazione universale** e vale $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

LA FORZA PESO

Calcoliamo la forza con cui la Terra attrae un corpo di massa m che sta sulla sua superficie. Considerando che la distanza è uguale al raggio terrestre R_T, si ha: $F = G\frac{m \cdot M_T}{R_T^2} = m\left(\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}\right)$.

La forza-peso è un caso particolare della forza di gravitazione universale.

La massa della Terra genera intorno a sé un campo gravitazionale $(\vec{g})$, definito come il rapporto tra la forza gravitazionale che si scambiano la massa della Terra (M) e una massa esploratrice (m) i cui centri sono posti a distanza R, e la massa esploratrice stessa: $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$. Il modulo del campo gravitazionale è quindi $g = G\,\frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \frac{1}{m} = G\,\frac{M}{R^2}$. Il vettore campo gravitazionale generato dalla massa della Terra coincide con il vettore accelerazione di gravità.

Troviamo che $g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Quindi la forza con cui la Terra attrae un corpo di massa m sulla sua superficie è la forza peso del corpo:

$$\vec{F}_p = m\vec{g}$$

La **forza peso** è la forza di gravità con cui la Terra attrae un corpo che si trova sulla sua superficie.

- È direttamente proporzionale alla massa e all'accelerazione di gravità.
- La forza-peso di un corpo dipende da *dove* il corpo si trova, poiché l'accelerazione di gravità cambia a seconda del luogo; invece la massa non varia spostando il corpo.

In ogni punto dell'Universo, la massa rimane costante, mentre il peso dipende dall'accelerazione di gravità (o campo gravitazionale) in quel punto dell'Universo.

Il peso specifico (P_s) assoluto di un corpo è il rapporto tra il suo peso (P) e il suo volume (V): $P_s = \frac{P}{V}$. È legato alla densità (d) dalla relazione $P_s = dg$.

Come puoi vedere nella lezione 1 di fisica, la densità d è il rapporto tra la massa m di un corpo e il suo volume V ($d = m/V$) e nel SI si misura in kg/m^3.

L'introduzione della forza peso ti consente di trattare in modo più completo la caduta libera, già affrontata nella lezione 5.

Su un oggetto di massa m, che si trova in prossimità della superficie terrestre, agisce la forza-peso $\vec{F_p} = m\vec{g}$ dove $\vec{g}$ è un vettore diretto verso il basso, che vale 9,8 N/kg.

Quando la ragazza è in piedi, la forza-peso è controbilanciata dalla forza di reazione vincolare del suolo.

Quando la ragazza si tuffa da un trampolino, è soggetta soltanto alla sua forza-peso.

Si dice che un corpo è in *caduta libera* quando su di esso agisce soltanto la sua forza-peso. Quindi, se trascuriamo la forza di attrito dell'aria, la ragazza, durante il tuffo, è in caduta libera.

LA FORZA CENTRIPETA

Perché un oggetto si muova di moto circolare, è necessario che subisca una forza verso il centro, chiamata **forza centripeta**.

massa velocità

forza centripeta $$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

raggio

La forza centripeta è *direttamente* proporzionale alla massa e al quadrato della velocità dell'oggetto e *inversamente* proporzionale al raggio della traiettoria circolare.
È una forza *diretta verso il centro* della traiettoria circolare, che cambia la direzione del vettore velocità, ma non il suo valore.
Per un satellite in orbita intorno alla Terra, la forza centripeta è la forza di gravità della Terra.

LE LEGGI DI KEPLERO

Le leggi di Keplero valgono anche per i satelliti in orbita intorno alla Terra.

Le leggi che regolano il movimento dei pianeti del Sistema Solare sono quelle enunciate da Keplero.

La forma dell'orbita è l'argomento della **prima legge di Keplero**.

> Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono **ellissi** di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

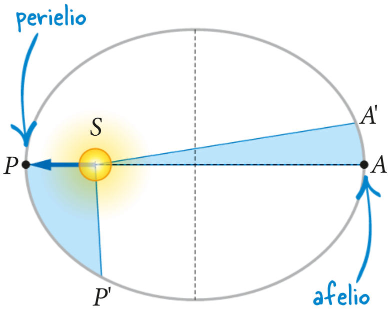
La posizione in cui un pianeta è più vicino al Sole si chiama **perielio**; quella di massimo allontanamento si chiama **afelio**.
Se si disegnano le orbite dei pianeti si vede che esse sono quasi circolari; per questo motivo nello studio del moto dei corpi celesti spesso si approssimano le ellissi con delle circonferenze.

La **seconda legge di Keplero** stabilisce come varia la velocità di un pianeta mentre si sposta lungo la sua orbita.

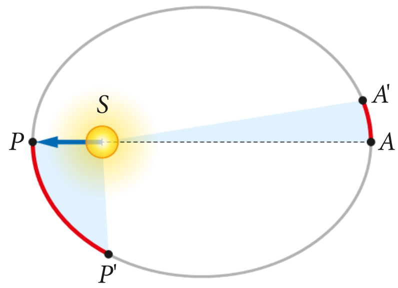
> Il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.

Come conseguenza di questa legge, nel nostro emisfero la primavera e l'estate (quando il Sole è più lontano) sono più lunghe dell'autunno e dell'inverno. Se la Terra percorresse un'orbita circolare con una velocità di valore costante, le quattro stagioni avrebbero la stessa durata.

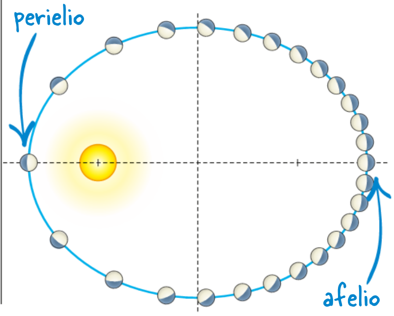
Nella figura sotto (dove l'ellisse è deformata per chiarezza) i due triangoli SPP' e SAA' hanno la stessa area a, quindi, sono spazzati nello stesso tempo.



Ciò significa che gli archi PP' e AA' sono percorsi nello stesso tempo. Quindi il pianeta è più veloce nel tratto PP' e più lento in AA'.



Così, il pianeta è più veloce al perielio e più lento all'afelio. La figura mostra la variazione di velocità indicando le distanze percorse in tempi uguali.



Il moto orbitale dei satelliti di Giove fornisce una costante K uguale per tutti; essa, però, ha un valore diverso da quella che si ottiene per i pianeti che orbitano attorno al Sole.

La **terza legge di Keplero** mette in relazione le distanze dei pianeti dal Sole con le rispettive durate di un'orbita completa.

> Il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti.

Se indichiamo con a il semiasse maggiore e con T il periodo, questa legge è espressa dalla formula

semiasse maggiore (m)

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

periodo (s)

costante (m^3/s^2)

Da questa si ottiene la relazione $T^2 = \frac{a^3}{K}$, che mostra che il periodo di rivoluzione T aumenta al crescere di a: più un pianeta è lontano dal Sole, più tempo impiega a circumnavigarlo. Il valore della costante K dipende dal corpo celeste attorno a cui avviene l'orbita.

L’equilibrio dei corpi

IL PUNTO MATERIALE E IL CORPO RIGIDO

Per studiare il moto di un oggetto, possiamo scegliere fra due modelli, cioè descrizioni semplificate di un fenomeno reale: il punto materiale e il corpo rigido.

Il **punto materiale** è un oggetto considerato come un punto, perché è piccolo rispetto all’ambiente in cui si trova.

Esempio: quando lanciamo una palla di neve contro un nostro amico la consideriamo come un oggetto puntiforme se siamo solo interessati a colpire il bersaglio.

Il **corpo materiale** è un oggetto esteso che non subisce alcuna deformazione qualunque siano le forze che gli vengono applicate.

Esempio: quando lanciamo una palla da bowling consideriamo che è estesa e non cambia forma e che può colpire più birilli alla volta.

L’EFFETTO DI PIÙ FORZE SU UN CORPO RIGIDO

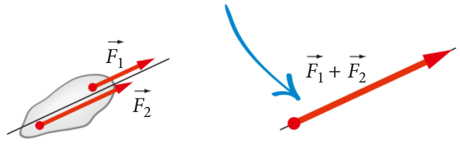
Una forza su un corpo rigido può essere spostata lungo la sua retta d’azione in un altro punto dello stesso corpo, senza che l’effetto della forza cambi.

Consideriamo due forze applicate a un corpo rigido. Possono verificarsi tre casi diversi:

- le forze applicate sono *sulla stessa retta d’azione*;
- le forze agiscono lungo rette d’azione che si intersecano e in questo caso sono dette *concorrenti*;
- le forze sono *parallele* (e possono essere concordi o discordi).

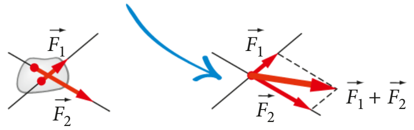
FORZE SULLA STESSA RETTA

Si sommano vettorialmente.



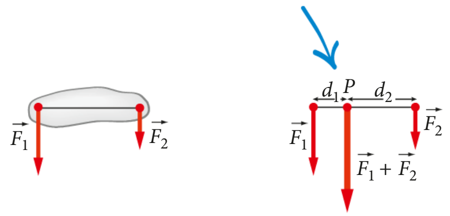
FORZE CONCORRENTI

Si portano le code nello stesso punto e si sommano vettorialmente.



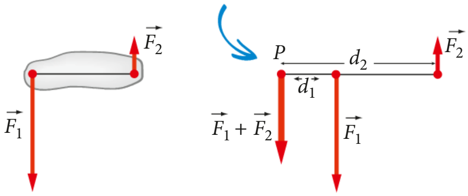
FORZE PARALLELE CONCORDI

La forza risultante è intermedia tra le due forze di partenza.



FORZE PARALLELE DISCORDI

La forza risultante è esterna alle due forze di partenza e posizionata dalla parte della maggiore.



La somma delle forze è applicata in un punto P individuato dalla proporzione:

$$d_1 : d_2 = F_2 : F_1$$

Le distanze del punto di applicazione della forza risultante dalle due forze sono inversamente proporzionali alle intensità delle due forze.

IL MOMENTO DI UNA FORZA

Il corpo rigido può anche ruotare. La rotazione non dipende solo dalla forza, ma anche dal braccio.

Il **braccio** di una forza $\vec{F}$ rispetto a un punto O è dato dalla distanza tra il punto O e la retta che contiene $\vec{F}$.

L'effetto di rotazione di una forza è espressa dal momento.

Da un punto di vista vettoriale, il momento di una forza è espresso dalla relazione $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{b}$
Come per ogni prodotto vettoriale, il momento è un vettore perpendicolare sia alla forza che al braccio.

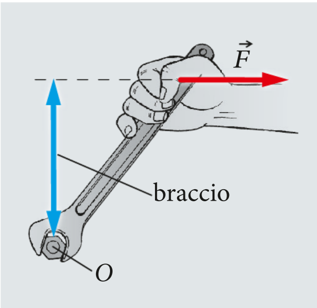
Il **momento** di una forza $\vec{F}$ rispetto a un punto O è uguale al prodotto dell'intensità $\vec{F}$ della forza per il braccio b.

momento di una forza

$$M = F \cdot b$$

braccio

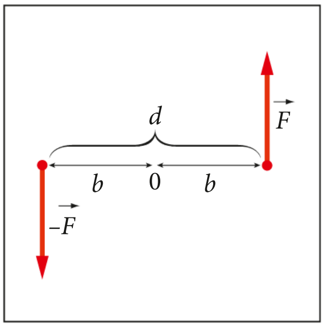
intensità della forza



Il momento di una forza esprime l'effetto di rotazione di una forza che agisce su un corpo rigido.
Ha segno positivo quando la forza tende a produrre una rotazione in senso antiorario; in caso contrario, il suo segno è negativo.

Il momento della forza nel SI si misura in N · m.

Una **coppia di forze** è formata da due forze uguali e opposte, applicate in punti diversi di un corpo rigido.



Il **momento di una coppia** è dato dalla somma dei momenti delle forze rispetto al punto medio O. Esso è uguale al prodotto dell'intensità di una forza $\vec{F}$ per la distanza d tra le rette d'azione delle due forze.

momento di una coppia

$$M = F \cdot d$$

distanza

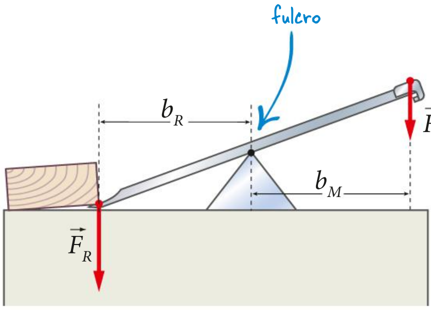
forza

LE LEVE

Applichiamo le condizioni di equilibrio di un corpo rigido alle leve, che sono dispositivi per amplificare o ridurre le forze.

Le **leve** sono costituite da un'asta rigida che può ruotare attorno a un punto fisso chiamato **fulcro**. Indichiamo con

- $\vec{F}_R$ la forza resistente,
- b_R il suo braccio rispetto al fulcro,
- $\vec{F}_M$ la forza motrice,
- b_M il suo braccio rispetto al fulcro.



La leva è in equilibrio quando il momento della forza resistente è uguale al momento della forza motrice.

momento della forza resistente

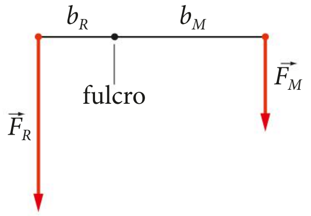
$$F_R b_R = F_M b_M$$

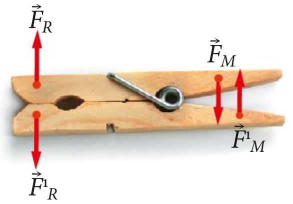
momento della forza motrice

Così la somma dei due momenti delle forze F_R e F_M, che agiscono in versi opposti, è uguale a zero.
In base alla posizione del fulcro, distinguiamo tre diversi tipi di leve.

LEVE DI PRIMO GENERE

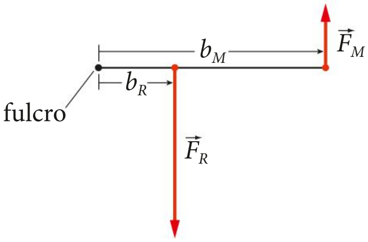
Il fulcro è posto tra le due forze.

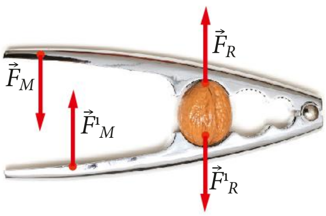




LEVE DI SECONDO GENERE

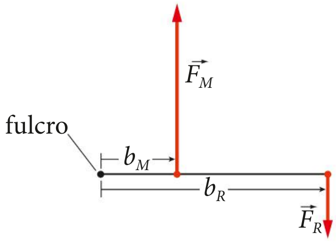
La forza resistente è tra il fulcro e la forza motrice.

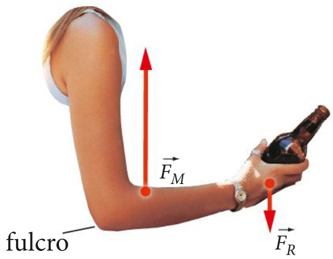


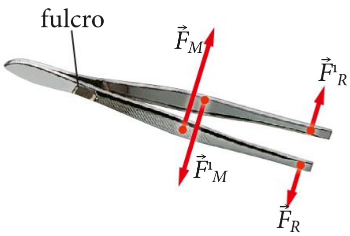


LEVE DI TERZO GENERE

La forza motrice è tra fulcro e la forza resistente.







IL MOMENTO ANGOLARE

Per descrivere il moto di rotazione di un punto materiale si può introdurre una nuova grandezza: il **momento angolare** L. Se consideriamo un sistema fisico di massa m e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a un punto fisso O, la formula che lo caratterizza è:

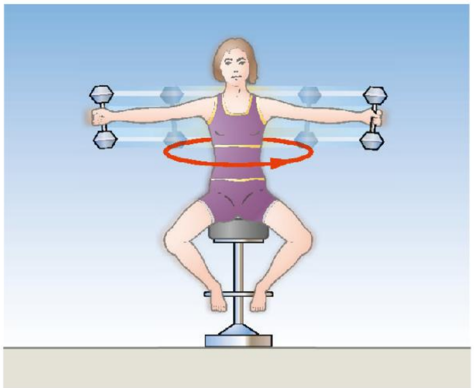
$$L = rmv$$

Consideriamo un sistema fisico e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a un punto O fissato. Si dimostra che:

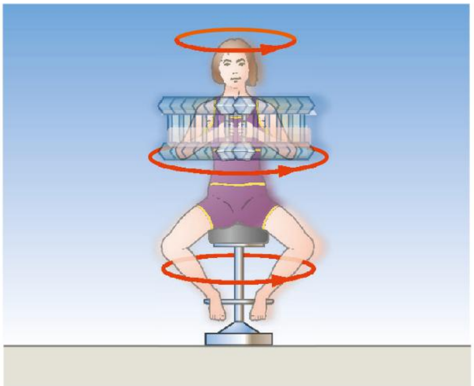
> il **momento angolare** di un sistema di corpi si conserva nel tempo se è nullo il momento totale delle forze *esterne* che agiscono su di esso.

Alcune conseguenze della conservazione del momento angolare si possono osservare facilmente.

Una ragazza che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello, girevole attorno a un asse, e ruota con una certa velocità angolare.



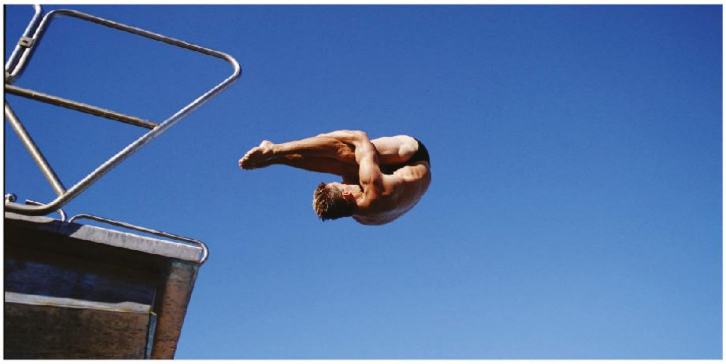
Se stringe le braccia, il suo momento angolare rmv si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che r diminuisce, la velocità v delle varie parti aumenta.



In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello, le uniche forze esterne che agiscono sulla ragazza sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.
Questo fenomeno è molto sfruttato negli sport.

I pattinatori aumentano la propria velocità di rotazione attorno a un asse verticale avvicinando le braccia al corpo.

I tuffatori riescono a ruotare velocemente attorno a un asse orizzontale raggruppando il corpo il più possibile.



LEZIONE **12**

Il lavoro e la potenza

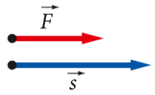
IL LAVORO

Nel corso della storia gli uomini hanno inventato diversi tipi di macchine per sollevare, spostare e mettere in movimento gli oggetti. In tutte le macchine vi sono forze che producono spostamenti. Una nuova grandezza, il *lavoro* di una forza, misura l'effetto utile della combinazione di una forza con uno spostamento.

Il **lavoro** si ottiene dal **prodotto scalare** tra il vettore forza e il vettore spostamento:
$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Il lavoro si rappresenta con il simbolo *L* o *W* (dall'inglese *work*).

Il caso più semplice è quello in cui il vettore forza è parallelo al vettore spostamento: i due vettori hanno stessa direzione e stesso verso.
Se la forza e lo spostamento sono paralleli, si definisce il lavoro come:



lavoro (J)

$$W = Fs$$

forza (N)

spostamento (m)

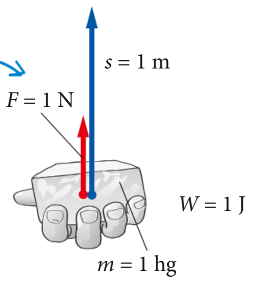
Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del lavoro è il newton per metro (N · m). Questa unità di misura è detta anche **joule** (J): 1 J = (1 N) · (1 m)

Un **joule** è il lavoro compiuto da una forza di un newton quando il suo punto di applicazione si sposta di un metro (nella direzione e nel verso della forza).

Quando i vettori forza e spostamento sono paralleli, la forza mette o mantiene in movimento il corpo su cui è applicata. In questo caso il lavoro della forza è positivo ed è detto **lavoro motore**.

Puoi eseguire un lavoro pari a 1 J sollevando di un metro un corpo che pesa 1 N.

Così, se afferri un panetto di burro da 1 hg e lo sollevi di 1 m, compi il lavoro di circa 1 J.



Un altro caso molto comune è quello in cui i vettori forza e spostamento hanno la stessa direzione ma versi opposti: si dice che la forza compie un **lavoro resistente**.
Se la forza e lo spostamento sono *antiparalleli*, il lavoro è dato dalla formula

Il segno meno è introdotto per descrivere il fatto che, quando forza e spostamento hanno versi opposti, la forza agisce in modo da opporsi al moto del corpo.

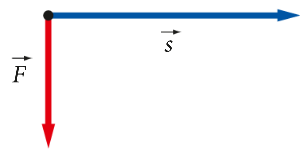
lavoro (J)

$$W = -Fs$$

forza (N)

spostamento (m)

Nel caso di forza e spostamento *perpendicolari* il **lavoro è nullo**:



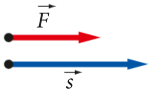
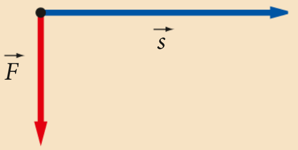
lavoro (J) $W = 0$

Se la forza e lo spostamento non sono paralleli, si rimanda alla **lezione 2** sul prodotto scalare.

Il lavoro compiuto dalla F è il prodotto scalare di F per lo spostamento s:

$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs$

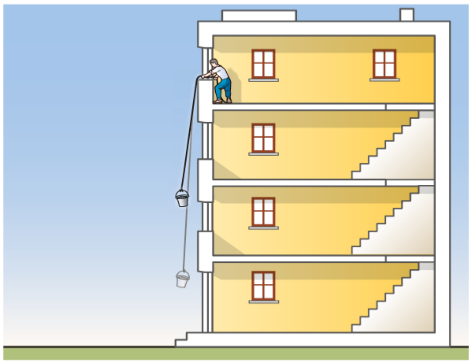
Casi semplici di lavoro

Angolo		Formula	Valore	Tipo di lavoro
0°		$W = Fs$	+	Motore
90°		$W = 0$	0	Nullo
180°		$W = -Fs$	–	Resistente

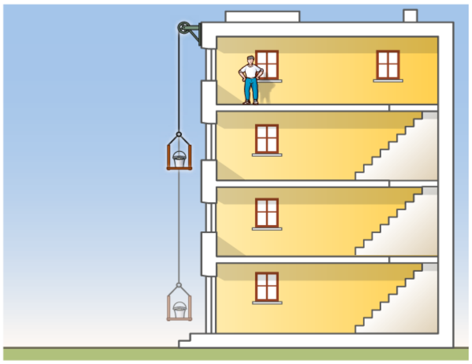
LA POTENZA

Uno stesso lavoro può essere compiuto più o meno rapidamente.

Un muratore solleva un secchio di cemento fino al terzo piano.



Il montacarichi solleva lo stesso secchio più rapidamente.



Per misurare la rapidità con cui una forza compie un lavoro, introduciamo una nuova grandezza, la *potenza*.

La **potenza** di un sistema fisico è uguale al rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e l'intervallo di tempo necessario per eseguire tale lavoro:

potenza (W)

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

lavoro compiuto (J)

tempo impiegato (s)

Puoi sviluppare la potenza di circa 1 W sollevando di 1 m, in 1 s, un panetto di burro da 10^2 grammi.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della potenza è il joule al secondo (J/s). Questa unità di misura è detta **watt** e si indica con il simbolo W:

$$1\,\mathrm{W} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}}$$

Un watt è la potenza di un sistema fisico che compie il lavoro di un joule in un secondo. Il wattora è l'energia necessaria a fornire una potenza di un watt per un'ora.

L'energia e la sua conservazione

L'ENERGIA

L'**energia** è la capacità di un sistema fisico di compiere lavoro.

In natura esistono diverse forme di energia e ognuna di esse si trasforma continuamente passando da una forma all'altra.

Il **lavoro** misura quanta energia passa da una forma a un'altra.

Il lavoro è energia in transito. L'unità di misura di queste trasformazioni di energia è il joule.

L'ENERGIA CINETICA

Definiamo **energia cinetica** K di un corpo di massa m, che si muove a velocità v, il prodotto

energia cinetica (J)

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

massa (kg)

velocità (m/s)

L'energia cinetica si misura in joule ed è direttamente proporzionale alla massa del corpo e al quadrato della sua velocità.

L'energia cinetica di un corpo aumenta quando
- aumenta la sua massa;
- aumenta la sua velocità.

$$\text{energia cinetica} = \frac{1}{2} \cdot (\text{massa}) \cdot (\text{velocità})^2$$

È l'energia di movimento di un corpo.

L'**energia cinetica** è uguale al lavoro che una forza deve compiere per portare un corpo di massa m, inizialmente fermo, fino alla velocità v.

IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Possiamo ricavare il teorema dell'energia cinetica.

Se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale K_i e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro W, l'energia cinetica finale K_f del corpo è uguale alla somma di K_i e di W.

Quando K_i è uguale a zero otteniamo $K_f = W$.

energia cinetica iniziale (J)

energia cinetica finale (J)

$$K_f = K_i + W$$

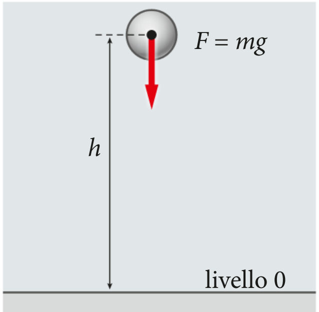
lavoro (J)

energia cinetica finale = (energia cinetica iniziale) + (lavoro compiuto)

Dal teorema dell'energia cinetica, vediamo che la variazione dell'energia cinetica di un corpo è uguale al lavoro compiuto dalla forza su di esso.

L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

L'energia potenziale gravitazionale misura la capacità di compiere lavoro di un oggetto che si trova sollevato rispetto alla quota presa come riferimento.



L'**energia potenziale gravitazionale** è uguale al lavoro compiuto dalla forza-peso quando il corpo si sposta dalla posizione iniziale a quella di riferimento, chiamata livello di zero, che può essere scelto in modo arbitrario.

energia potenziale della forza peso (J)

$$U = mgh$$

altezza (m)

massa (kg)

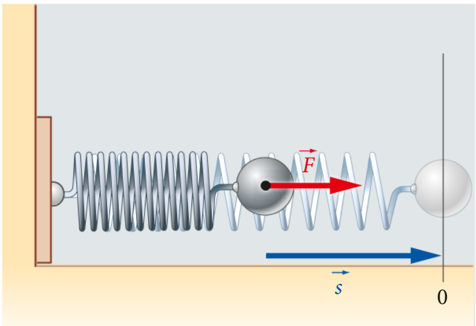
accelerazione di gravità (m/s²)

L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

L'energia potenziale elastica misura la capacità di compiere lavoro di una molla deformata.

L'**energia potenziale elastica** di una molla deformata è uguale al lavoro compiuto dalla forza elastica quando la molla si riporta nella sua posizione di riposo, chiamata livello di zero.

L'energia potenziale elastica è sempre positiva, perché (sia per la molla compressa, sia per quella allungata) i vettori forza elastica e spostamento della molla sono paralleli tra loro, per cui il lavoro è sempre positivo.



energia potenziale elastica (J)

$$U_e = \frac{1}{2}ks^2$$

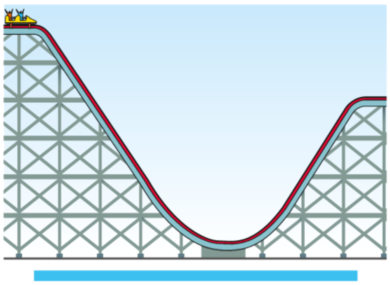
costante elastica (N/m)

spostamento (m)

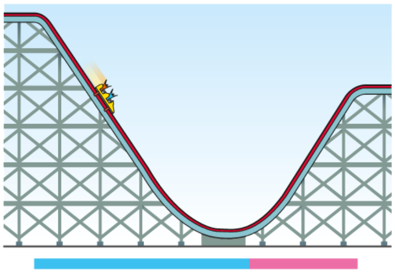
LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Consideriamo un carrello delle montagne russe.

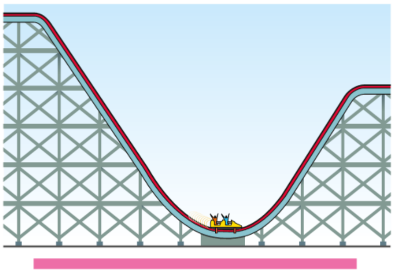
A Quando il carrello è fermo in alto, l'energia meccanica è tutta sotto forma di energia potenziale.



B Durante la discesa l'energia potenziale diminuisce e quella cinetica aumenta.



C Quando il carrello arriva veloce in basso, l'energia meccanica è solo cinetica.



La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è detta energia meccanica.

Possiamo generalizzare: l'energia meccanica si conserva.

energia potenziale finale

energia potenziale iniziale

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

energia cinetica finale

energia cinetica iniziale

energia potenziale iniziale + energia cinetica iniziale =
= energia potenziale finale + energia cinetica finale

Una forza è **conservativa** se il lavoro compiuto dalla stessa su un punto materiale quando il punto si sposta dalla posizione *A* alla posizione *B* non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale *A* e dalla posizione finale *B*.

Una forza che non gode di tali caratteristiche è **non conservativa** (come per esempio la forza di attrito).

In presenza di sole forze conservative, l'**energia meccanica totale** (energia potenziale + energia cinetica) **di un sistema si conserva**, cioè rimane sempre uguale.

Se nel bilancio dell'energia in gioco in un processo fisico si tiene conto di tutte le forme di energia (meccanica, interna, elettrica, nucleare, …), si può affermare che *l'energia totale si conserva*.

La pressione nei liquidi e nell'atmosfera

GLI STATI DI AGGREGAZIONE DELLA MATERIA

Gli stati di aggregazione della materia sono tre: solido, liquido e aeriforme.

- Un **solido** ha forma e volume *propri*.

  Esempio: un bullone di ferro.

- Un **liquido** ha volume *proprio*, ma ha la forma del *recipiente* che lo contiene.

  Esempio: acqua nel bicchiere.

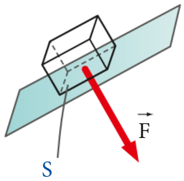
- Un **gas** (o aeriforme) occupa il volume del *recipiente* che lo contiene e può essere facilmente *compresso*.

  Esempio: gas in una bombola.

LA PRESSIONE

Una stessa forza può avere effetti diversi a seconda di come agisce su una superficie: la pressione dà informazioni su come una forza agisce su una superficie.

La **pressione** è una grandezza scalare definita come il rapporto tra il modulo della forza (perpendicolare alla superficie) e l'area di questa superficie.



pressione (Pa)

$$P = \frac{F}{S}$$

forza perpendicolare alla superficie (N)

area della superficie (m^2)

Nel Sistema Internazionale l'**unità di misura della pressione** è il pascal (Pa)

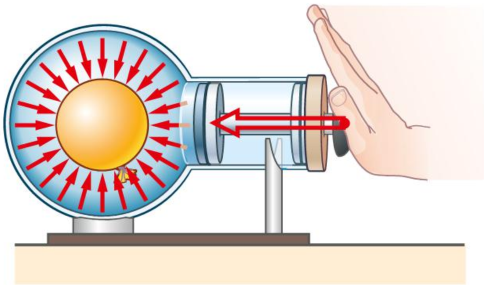
$$1\ \text{Pa} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{m}^2}$$

Al di fuori del Sistema Internazionale la pressione si può misurare in:

- **bar**: 1 bar = 10^5 Pa
- **atmosfera**: 1 atm = $1{,}01 \times 10^5$ Pa
- **baria**: 1 baria = 10^{-1} Pa
- **torr**: 1 torr = 1 mmHg = 133,3 Pa

LA PRESSIONE NEI LIQUIDI

Consideriamo un palloncino gonfiato con aria all'interno di un recipiente pieno d'acqua e provvisto di un pistone scorrevole. Premiamo sul pistone e osserviamo quello che accade, che può essere generalizzato con la legge di Pascal.



Legge di Pascal. La pressione esercitata su una superficie qualsiasi di un liquido si trasmette inalterata su ogni altra superficie a contatto con il liquido.

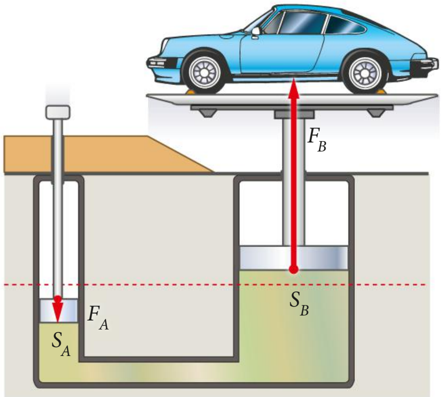
Le proprietà della legge di Pascal vengono sfruttate in diverse tecnologie per amplificare le forze e trasmetterle da un punto all'altro.

Per esempio, il torchio idraulico consente di sollevare un peso grande mediante una forza piccola. È formato da due cilindri, pieni di liquido e collegati tra loro, e da due pistoni.
Forza equilibrante:

Forza equilibrante

$$F_A = F_B \frac{S_A}{S_B}$$

Se la superficie S_A è più piccola di S_B, anche la forza F_A è più piccola di F_B.



Anche i freni a disco delle automobili e delle motociclette sfruttano le proprietà dei liquidi espresse dalla legge di Pascal.

LA PRESSIONE DELLA FORZA-PESO NEI LIQUIDI

Ogni liquido che si trova sulla superficie della Terra è soggetto (come ogni altro corpo) alla forza-peso.
La pressione che un liquido con densità d esercita su una superficie piana posta a una profondità h è data dalla legge di Stevino.

Legge di Stevino. La pressione dovuta al peso di un liquido è direttamente proporzionale sia alla densità del liquido sia alla profondità del liquido e non dipende dalla forma del recipiente che lo contiene.

La legge di Stevino vale anche per i gas.

costante g (N/kg)

pressione esercitata da un liquido (Pa)

$$p = g\,d\,h$$

profondità del liquido (m)

densità di liquido (kg/m^3)

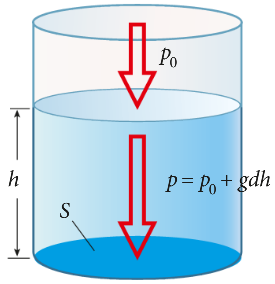
La presenza di g implica che la legge è valida in presenza di un campo gravitazionale.

dove g è la costante di proporzionalità che vale circa 9,8 N/kg.

In acqua, possiamo assumere che la pressione aumenti di 1 atm per ogni 10 m di profondità.

Sulla superficie del mare agisce la pressione atmosferica p_0. Dato che, per la legge di Pascal, essa si trasmette inalterata nel liquido, alla pressione totale p a profondità h contribuiscono sia la pressione esterna p_0 sia quella dovuta al peso del liquido. Quindi:

$$p = p_0 + gdh$$



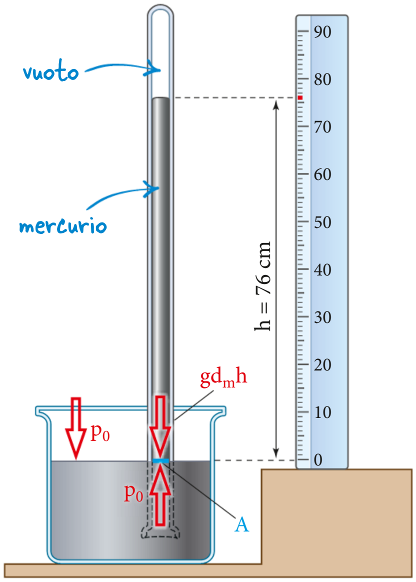
LA PRESSIONE ATMOSFERICA

La pressione atmosferica è la somma delle pressioni parziali dei gas presenti nell'atmosfera.

La **pressione atmosferica** è dovuta al peso della colonna d'aria che ci sovrasta.
Nessuno si rende conto della pressione atmosferica perché si esercita con lo stesso valore su tutte le superfici, comunque orientate.

La pressione atmosferica si misura con il **barometro**. Barometri opportunamente tarati funzionano da *altimetri*, cioè misurano la variazione di quota sfruttando la conseguente variazione di pressione atmosferica.
Le **isobare** sono linee ideali, disegnate su una cartina, che uniscono i punti in cui la pressione atmosferica ha lo stesso valore.

In montagna la pressione atmosferica è inferiore che a livello del mare.



Il valore della pressione atmosferica può essere misurato con un'esperienza ideata da Evangelista Torricelli.
Dopo avere riempito di mercurio una sottile provetta di vetro fino all'orlo, se ne tappa l'estremità e la si capovolge, immergendola in una bacinella piena di mercurio. Una volta rimosso il tappo, si osserva che la provetta non si svuota completamente.

A livello del mare, la pressione atmosferica è uguale a quella generata da una colonna di mercurio alta 76,0 cm.

Il valore della pressione atmosferica a livello del mare è pari a $1{,}01 \times 10^5$ Pa.
Il valore della pressione atmosferica diminuisce all'aumentare dell'altitudine, perché diminuisce il peso della colonna d'aria che ci sovrasta.

LEZIONE 15

La legge di Archimede e il galleggiamento

LA LEGGE DI ARCHIMEDE

La legge di Archimede spiega come mai alcuni corpi galleggiano e altri affondano quando sono immersi in un liquido o in un gas.

Legge di Archimede. Un corpo immerso in un liquido subisce una forza diretta verso l'alto di intensità uguale al peso del liquido spostato.

costante g (N/kg)

spinta di Archimede (N)

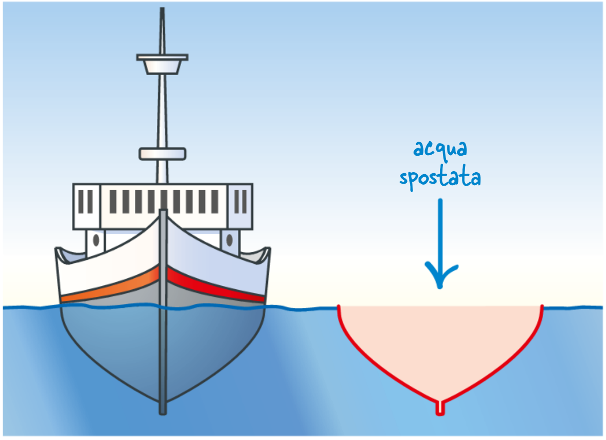
$$F_A = gdV$$

volume del liquido spostato (m^3)

densità di liquido (kg/m^3)

Il prodotto dV è la massa del liquido spostato che, moltiplicata per la costante g, dà il suo peso. La legge di Archimede vale anche per i **gas**, oltre che per i liquidi.

Quanto più è grande il volume del corpo immerso, tanto maggiore è la spinta verso l'alto, perché è grande il volume di acqua che è stato spostato.
Questo volume di acqua è rimpiazzato da ciò che è contenuto nella parte immersa della nave, come si vede nella figura a destra.
La nave galleggia perché la forza-peso che agisce sullo scafo di ferro (che è cavo) è compensata dalla spinta di Archimede che è rivolta verso l'alto.



IL GALLEGGIAMENTO DEI CORPI

Un corpo affonda, galleggia o sale quando la sua densità è rispettivamente maggiore, uguale o minore di quella del liquido.

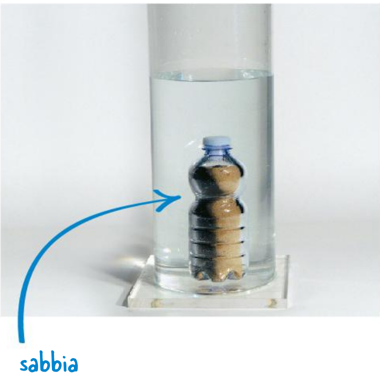
Una **persona** riesce a galleggiare in mare facendo la «posizione del morto» perché la densità media del corpo umano è di poco minore della densità dell'acqua salata.
Una **nave** galleggia perché la forza-peso che agisce sullo scafo di ferro (cavo) è compensata dalla spinta di Archimede che è rivolta verso l'alto.

Quando si parla di corpo "immerso" si intende "completamente immerso. Esso quindi sposta la stessa quantità di liquido sia che si trovi a 10 cm dalla superficie, sia che si trovi a 10 m.

Una **mongolfiera** sale scaldando l'aria all'interno del pallone per renderla meno densa rispetto all'aria esterna.

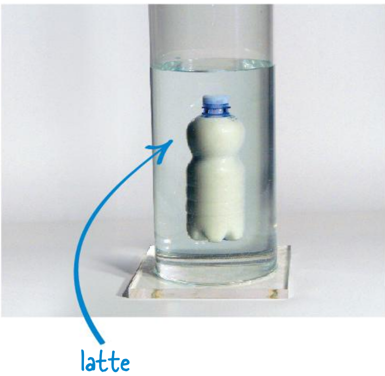
AFFONDAMENTO

Un corpo immerso in un liquido affonda se la sua densità media è **maggiore** di quella del liquido.



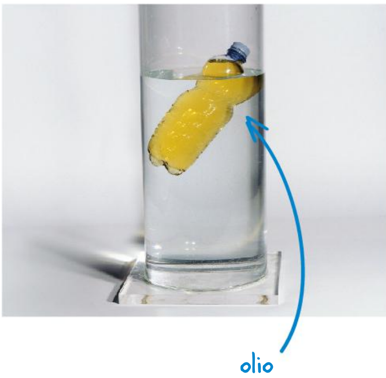
EQUILIBRIO

Un corpo immerso in un liquido non va né su né giù se la sua densità media è **uguale** a quella del liquido.



RISALITA

Un corpo immerso in un liquido sale verso la superficie se la sua densità media è **minore** di quella del liquido.



LA PORTATA

La portata negli ultimi anni non è più in programma per i test di ammissione.

Si dice **portata** il rapporto tra la quantità di liquido che passa attraverso una sezione del condotto e l'intervallo di tempo in cui tale passaggio avviene.

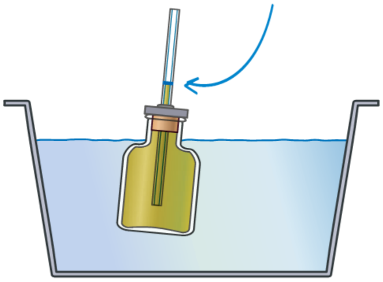
$$q = s \cdot \Delta t$$

La temperatura

LA MISURA DELLA TEMPERATURA

La sensazione di caldo e freddo è soggettiva: per misurarla usiamo uno strumento chiamato termoscopio.

Il **termoscopio** è un recipiente chiuso da un tappo forato in cui è infilato un tubicino trasparente: il recipiente e parte del tubo sono riempiti di liquido (per esempio olio)



Un **termometro** è un termoscopio tarato, cioè dotato di una scala graduata: per tararlo si segna il livello del liquido in corrispondenza di due temperature di riferimento, che di solito sono quelle del ghiaccio che fonde e dell'acqua che bolle.

La **temperatura** è la grandezza fisica che si misura con il termometro.

Il funzionamento del termometro si basa sui fenomeni della dilatazione termica e dell'equilibrio termico.

Le scale termometriche più utilizzate sono la *scala Celsius* e la *scala assoluta*.

La scala Celsius è detta anche scala centrigrada.

Nella **scala Celsius** si definisce 0 °C (0 gradi Celsius centigradi) la temperatura del ghiaccio fondente e 100 °C (100 gradi Celsius) quella dei vapori di acqua bollente: poi si divide questo intervallo di temperature in 100 parti uguali.
La scala termometrica Celsius può essere estesa anche alle temperature negative e a quelle maggiori di 100 °C.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della temperatura è il *kelvin*, indicato con il simbolo K.

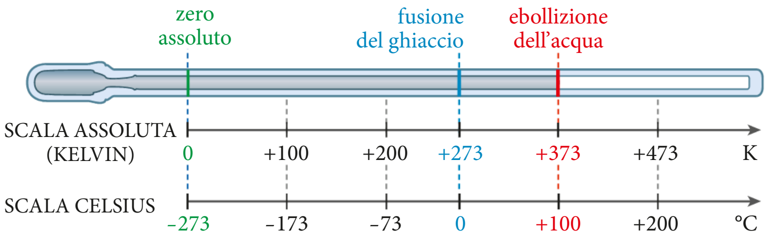
È un errore dire «grado Kelvin».

Nella **scala Kelvin**, detta **scala assoluta**, la variazione di temperatura di 1 K è uguale a quella di 1 °C. La temperatura di 0 K è detta **zero assoluto**: gli esperimenti mostrano che non è possibile raffreddare un corpo alla temperatura di 0 K o al di sotto di essa.

temperatura in kelvin

$$T = t + 273\ \text{K}$$

temperatura in gradi Celsius



Le temperature della scala assoluta si ottengono da quelle in gradi Celsius aggiungendo il numero 273.

Nella scala assoluta, la temperatura del ghiaccio fondente è pari a 273 K; quella dei vapori di acqua bollente è uguale a 373 K.

LA DILATAZIONE LINEARE DEI SOLIDI

I corpi solidi, come i liquidi, tendono a dilatarsi quando sono riscaldati e a contrarsi quando sono raffreddati.
La legge sperimentale della dilatazione lineare si può esprimere con la seguente relazione:

coefficiente di dilatazione lineare ($°C^{-1}$ o K^{-1})

allungamento (m)

$$\underbrace{l - l_o}_{\Delta l} = l_o \lambda \Delta t$$

variazione di temperatura (°C o K)

lunghezza iniziale (m)

L'allungamento di una barra è dato dalla differenza tra la lunghezza finale l alla nuova temperatura e la lunghezza iniziale l_0, ed è direttamente proporzionale alla variazione di temperatura. La legge di dilatazione lineare dei solidi può anche essere scritta come $l = l_0 (1 + \lambda \Delta t)$.

Il **coefficiente di dilazione lineare** λ è una costante numericamente uguale all'allungamento di una barra lunga un metro riscaldata di 1 °C, dipende dalla materia e si misura in $°C^{-1}$ o K^{-1}.

LA DILATAZIONE VOLUMICA DEI SOLIDI E DEI LIQUIDI

Consideriamo l'aumento di tutto il volume di un corpo, che passa dal volume iniziale V_0 al volume finale V a seguito di una variazione di temperatura t. Vale la legge della dilatazione volumica:

coefficiente di dilatazione volumica ($°C^{-1}$ o K^{-1})

volume finale (m^3)

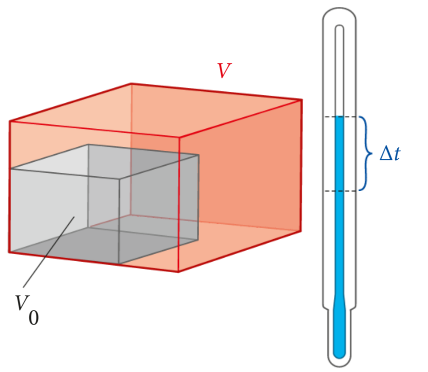
$$V = V_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

volume iniziale (m^3)

variazione di temperatura (°C o K)

Una barretta non si dilata soltanto in lunghezza, ma anche in larghezza e spessore. Queste dimensioni, però, sono molto minori della lunghezza, quindi la loro dilatazione è trascurabile. Se consideriamo una sfera, invece, essa si dilata nella stessa misura in tutte le sue direzioni.

I solidi e i liquidi, in generale, aumentano il proprio volume se aumenta la temperatura. La variazione del volume è direttamente proporzionale alla variazione di temperatura.



Il **coefficiente di dilatazione volumica** α per un solido è uguale al triplo del coefficiente di dilatazione lineare per la stessa sostanza: $\alpha = 3\lambda$.
Si misura, come λ, in $°C^{-1}$ o K^{-1}.

Il **coefficiente di dilatazione volumica** α per un liquido varia da materiale a materiale, ma con un valore da 10 a 100 volte maggiore di quello relativo ai solidi.

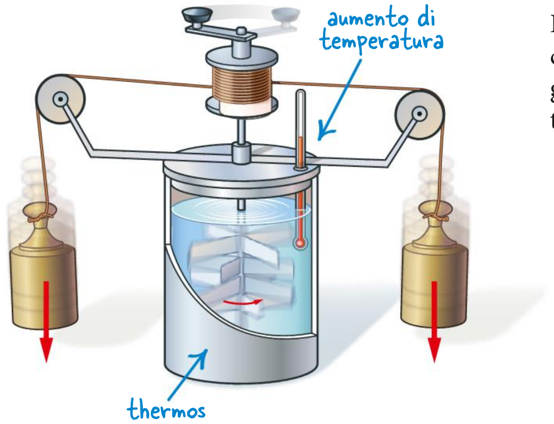
Il calore

CALORE, LAVORO ED ENERGIA

Il riscaldamento di un corpo può avvenire con un passaggio di calore da un corpo più caldo a un corpo più freddo o per effetto di un lavoro.
Calore e **lavoro** sono modi per **trasferire energia** da un sistema a un altro.

Si ha un passaggio di calore quando c'è un dislivello di temperatura: il calore fluisce da un corpo a temperatura più alta a uno a temperatura più bassa.

Per aumentare di 1 K la temperatura di un 1 kg d'acqua è necessario un **lavoro** di 4186 J.



L'aumento di temperatura dell'acqua è causato dal lavoro compiuto dalla forza di gravità che, facendo scendere i pesi, fa ruotare il mulinello che rimescola l'acqua.

Fu James P. Joule a ideare l'esperimento che consentì di determinare quanto lavoro è necessario per aumentare di 1 K la temperatura di 1 kg di acqua.

Il calore è energia **in transito** e compare ogni volta che c'è un dislivello di temperatura.
Si indica con la lettera *Q* e si misura in **joule**, perché è uguale a una variazione di energia.

Oltre al joule, una unità di misura (non SI) che si usa per il calore è la caloria: 1 cal = 4,186 J

La **caloria** è la quantità di energia necessaria per alzare la temperatura di 1 g d'acqua distillata da 14,5 °C a 15,5 °C alla pressione atmosferica normale.

CONDUZIONE E CONVEZIONE

Il **calore** si propaga per conduzione attraverso i corpi solidi, per convezione attraverso i fluidi e per irraggiamento anche attraverso lo spazio vuoto.

La **conduzione** è un meccanismo di propagazione del calore con trasporto di energia senza spostamento di materia. Il passaggio di calore attraverso uno strato di materia di area *S* e spessore *d* è descritto dalla legge sperimentale:

La quantità di calore che in un tempo fissato attraversa il vetro di una finestra è direttamente proporzionale alla superficie del vetro e alla differenza di temperatura tra l'interno e l'esterno della stanza; è inversamente proporzionale allo spessore del vetro.

calore trasferito (J)

area (m^2)

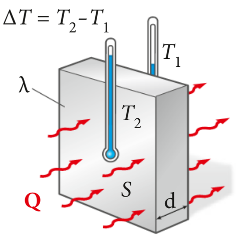
differenza di temperatura (K)

$$\frac{Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta T}{d}$$

intervallo di tempo (s)

spessore (m)

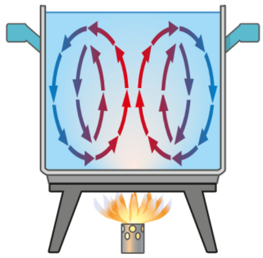
conducibilità termica (W/(m·K))



La costante λ si chiama **coefficiente di conducibilità termica** e dipende dal materiale: il suo valore è piccolo per i buoni isolanti e grande per i buoni conduttori termici.

Il riscaldamento di una stanza dovuto a un radiatore avviene per convezione: l'aumento della temperatura dell'aria a contatto col calorifero dà origine a una corrente convettiva di aria.

La convezione è un **trasferimento di energia** con trasporto di materia dovuto alla presenza di correnti nei fluidi, chiamate *correnti convettive*.



La convezione è il principale meccanismo di propagazione del calore nei liquidi e nei gas.

IRRAGGIAMENTO

L'**irraggiamento** è il meccanismo di trasmissione del calore nel **vuoto** o attraverso i corpi trasparenti.

L'energia solare giunge sulla Terra per irraggiamento.

Nei processi di conduzione e convezione era necessaria la presenza di materia, ma l'energia si propaga anche nel vuoto.

L'irraggiamento avviene perché tutti i corpi emettono e assorbono **radiazioni elettromagnetiche**. L'energia che un corpo emette ogni secondo dipende dalla sua temperatura T e dall'area S della sua superficie.
Questo principio si esprime in modo quantitativo con la **legge di Stefan-Boltzmann**:

energia emessa (J)

costante di Stefan-Boltzmann (J/(s·m^2·K^4))

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = ezST^4$$

temperatura (K)

intervallo di tempo (s)

area (m^2)

La legge di Stefan-Boltzmann ci permette, per esempio, di avere informazioni sui corpi celesti, che non potremmo studiare direttamente.

La costante z di Stefan-Boltzmann vale

$$5{,}67 \times 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

Se il corpo è nero e = 1.

Il coefficiente e è un numero compreso tra 0 e 1; dipende dalle caratteristiche della superficie del corpo.

CAPACITÀ TERMICA E CALORE SPECIFICO

L'assorbimento della stessa quantità di energia non provoca lo stesso aumento di temperatura in tutti i corpi. Per misurare questa caratteristica, introduciamo la grandezza capacità termica.

La **capacità termica** di un corpo è numericamente uguale all'energia necessaria per aumentare di 1 K la sua temperatura.

capacità termica (J/K)

$$C = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

energia assorbita (J)

aumento di temperatura (K)

La formula può anche essere scritta nella forma: $C = \frac{Q}{\Delta t}$.

La capacità termica dipende dalla massa del corpo e dalla sostanza di cui esso è fatto:

capacità termica (J/K)

$$C = cm$$

calore specifico $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$

massa (kg)

Il **calore specifico** è numericamente uguale all'energia necessaria per aumentare di 1 K la temperatura di 1 kg di quella sostanza.

Il calore specifico si misura in J/(kg · K) ed è la *costante di proporzionalità diretta* che lega la capacità termica di un corpo alla sua massa.

La quantità di energia scambiata (assorbita o ceduta) da un corpo è *direttamente proporzionale* alla variazione della sua temperatura (aumento o diminuzione) e alla sua massa.

energia scambiata (J)

$$\Delta E = cm\Delta T$$

calore specifico $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$

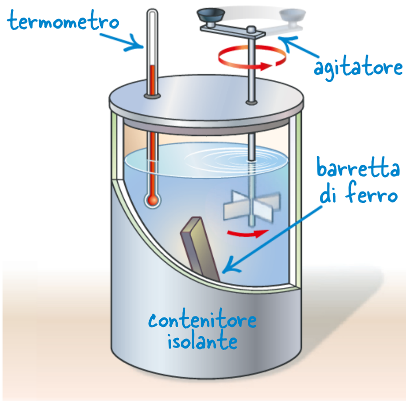
variazione di temperatura (K)

massa (kg)

La formula può anche essere scritta nella forma: $Q = mc\Delta T$, se si considera esclusivamente il calore Q scambiato.

IL CALORIMETRO

Dall'esperimento di Joule conosciamo il valore del calore specifico c_1 dell'acqua. Partendo da questo dato, il calore specifico di un'altra sostanza può essere misurato mediante un **calorimetro**, che è un contenitore leggero e ben isolato termicamente. Per esempio, prendiamo una barretta di ferro scaldata, immergiamola nel calorimetro in una certa quantità di acqua più fredda e chiudiamo il coperchio del calorimetro per ridurre le dispersioni di calore. Dopo poco tempo l'acqua e il ferro si trovano alla temperatura di equilibrio T_e. Per ricavare il calore specifico c_2 del ferro, bisogna misurare:



- la massa dell'acqua, m_1;
- la temperatura iniziale dell'acqua, T_1;
- la massa del ferro, m_2;
- la temperatura iniziale del ferro, T_2;
- la temperatura finale dell'acqua e della barretta di ferro, T_e.

Se conosciamo le altre grandezze possiamo calcolare la temperatura di equilibrio T_e:

$$T_e = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$$

Se le due sostanze avessero lo stesso calore specifico (o se si considerano masse diverse di una stessa sostanza), la formula si semplifica e diventa: $T_{eq} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$.

La formula vale anche se gli indici 1 e 2 si riferiscono a due sostanze qualunque, non necessariamente all'acqua e al ferro.

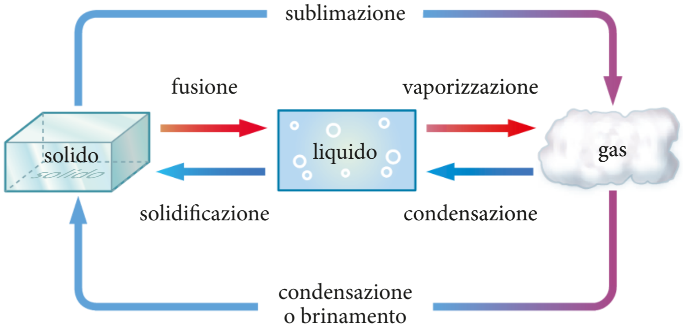
LEZIONE 18

I passaggi di stato

I PASSAGGI DI STATO

Abbiamo già visto nella lezione 14 che gli stati di aggregazione sono tre: solido, liquido e aeriforme.

Nel passaggio dallo stato solido allo stato liquido si ha di solito un aumento del volume. L'acqua è un'eccezione: il volume diminuisce passando dallo stato solido (ghiaccio) a quello liquido. Questa anomalia permette che il ghiaccio galleggi sull'acqua.



I cambiamenti di stato (o passaggi) rappresentano il passaggio da uno stato di aggregazione della materia all'altro e sono innescati da **scambi di calore**.

LA PRESSIONE E I PASSAGGI DI STATO

In alta montagna, per esempio, se la pressione atmosferica è circa la metà di quella al livello del mare, l'acqua bolle a 80 °C. Nella pentola a pressione, al contrario, il punto di ebollizione dell'acqua distillata supera i 100 °C.

I passaggi di stato dipendono soprattutto dalla temperatura, ma sono influenzati anche dalla pressione, in particolare se coinvolgono lo stato gassoso. Per esempio, abbassando la pressione esterna, l'acqua distillata bolle a una temperatura inferiore a 100 °C; invece, quando si aumenta la pressione esterna, l'acqua bolle a una temperatura superiore a 100 °C.

Per spiegare l'effetto della pressione sul punto di ebollizione, è necessario chiarire la differenza tra evaporazione ed ebollizione e definire la tensione di vapore.
Il termine **evaporazione** indica che il vapore si forma soltanto alla superficie del liquido: sfuggono dallo stato liquido le molecole con energia cinetica maggiore; gli strati sottostanti non sono direttamente coinvolti e appaiono in quiete. L'evaporazione, che avviene a qualsiasi temperatura, è tanto più intensa quanto più alta è la temperatura stessa.
L'**ebollizione** si ha quando si formano bolle di vapore in tutto il liquido e ciò comporta l'agitazione di tutta la massa. Come abbiamo visto, l'ebollizione di un liquido puro avviene a una temperatura ben definita.

> La **tensione di vapore** di un liquido, a una certa temperatura, è la pressione che esercita un vapore in equilibrio con il proprio liquido puro.
> Essa è tanto più alta quanto maggiore è la temperatura.

L'aumento della pressione esterna rende più difficile l'ebollizione di un liquido; la tensione di vapore, necessaria per farlo bollire, si raggiungerà infatti a temperature più alte.

Riscaldando un liquido a pressione atmosferica, finché la sua tensione di vapore è inferiore alla pressione atmosferica, si ha formazione di vapore soltanto alla sua superficie. Quando la tensione di vapore uguaglia la pressione esterna, le bolle di vapore si formano in tutto il liquido e inizia l'ebollizione.

> La **temperatura di ebollizione** di un liquido è la temperatura a cui la sua tensione di vapore uguaglia la pressione esterna.

LA FUSIONE

La **fusione** (o **liquefazione**) descrive il passaggio di un corpo dallo stato solido allo stato liquido.

energia per fondere (J)

$$\Delta E_f = L_f m$$

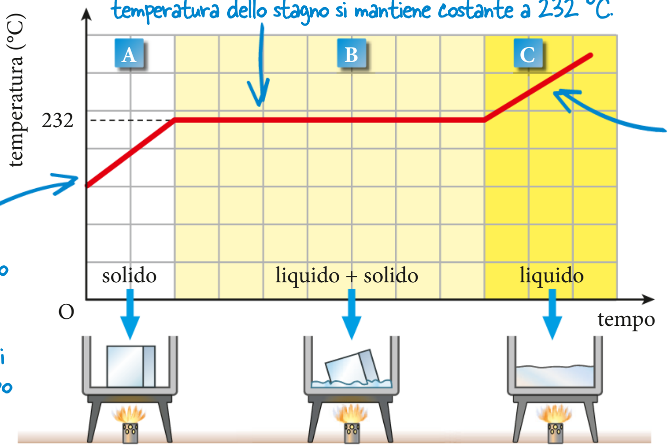
massa (kg)

calore latente di fusione (J/kg)

L'energia necessaria per fondere completamente una massa m di una certa sostanza, alla temperatura di fusione, è direttamente proporzionale a m.
La costante L_f, detta **calore latente di fusione**, dipende dalla sostanza e si misura in J/kg.
A una data pressione, ogni sostanza fonde a una temperatura determinata, detta **temperatura di fusione**.
Durante la fusione, la temperatura del corpo si mantiene costante e un corpo acquista energia dall'esterno: per convenzione, un passaggio di una quantità *positiva* di energia corrisponde a un *assorbimento* di energia.

Osserviamo la liquefazione di un blocco di stagno posto a contatto con una sorgente di calore costante. Il grafico mostra i valori della temperatura al trascorrere del tempo, a pressione costante.

Per tutta la durata del processo di fusione, la temperatura dello stagno si mantiene costante a 232 °C.



Quando tutto lo stagno è divenuto liquido, la sua temperatura ricomincia a salire.

Dapprima la temperatura dello stagno solido aumenta in modo proporzionale agli intervalli di tempo trascorsi.

Se l'energia viene assorbita sotto forma di calore Q la legge dei passaggi di stato si può scrivere anche nella forma: $Q = L_f m$

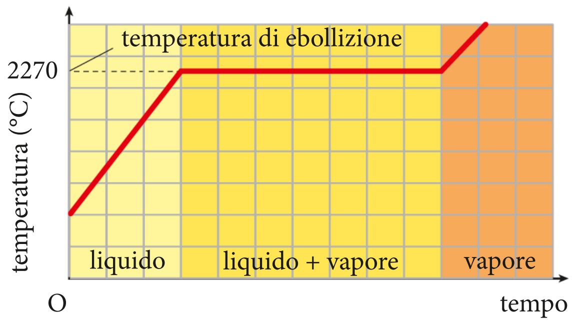
L_f è numericamente uguale alla quantità di energia per fondere completamente 1 kg di una data sostanza.

Perché avvenga la fusione è necessario fornire energia al sistema. Quando avviene il passaggio di stato inverso (solidificazione) viene invece ceduta energia dal sistema all'ambiente.

Curve di questo tipo (temperatura in funzione del tempo) sono dette, se la temperatura aumenta come in questo caso, *curve di riscaldamento*; se la temperatura diminuisce *curve di raffreddamento*.

EVAPORAZIONE ED EBOLLIZIONE

Riprendendo a scaldare lo stagno, passato lo stato liquido, vediamo che la sua temperatura aumenta fino a quando si giunge all'ebollizione a 2270 °C. L'ebollizione ha le stesse caratteristiche generali della fusione.
A una data pressione, per ogni liquido l'ebollizione avviene a una data temperatura di ebollizione.
Durante l'ebollizione di un liquido, la sua temperatura si mantiene costante.



L'energia necessaria per trasformare completamente in vapore l'intera massa m del liquido, che si trova già alla temperatura di ebollizione, è direttamente proporzionale a m:

energia di vaporizzazione (J)

$$\Delta E_v = L_v m$$

massa (kg)

calore latente di fusione (J/kg)

La costante L_v, detta *calore latente di vaporizzazione*, dipende dalla sostanza e si misura in J/kg.
L'evaporazione avviene a tutte le temperature in cui la sostanza è liquida.

Se l'energia viene assorbita sotto forma di calore Q la legge dei passaggi di stato si può scrivere anche nella forma: $Q = L_v m$

LEZIONE 19

Le leggi dei gas

LE TRASFORMAZIONI DEI GAS

Le leggi dei gas e la differenza tra gas reali e gas perfetti verrà trattata approfonditamente anche in chimica. Le trattazioni nei due casi sono leggermente diverse, ma se hai già studiato chimica puoi valutare se fare direttamente gli esercizi relativi a questa lezione, saltando la teoria. Negli anni scorsi, alle prove di ammissione sono stati somministrati quesiti su questi argomenti sia tra i test di fisica che di chimica.

Lo stato di un gas è descritto da quattro grandezze: la massa, il volume, la temperatura e la pressione. Se il gas è piuttosto rarefatto e la sua temperatura è molto maggiore di quella di liquefazione, il **gas** si dice **perfetto**.

Le trasformazioni dei gas definiscono il passaggio del gas da uno stato iniziale a uno stato finale. Tra le infinite trasformazioni che un gas può subire ce ne sono alcune particolarmente importanti:

Se la pressione è costante, si ha una **trasformazione isòbara**.

Se il volume è costante, si ha una **trasformazione isocòra**.

Una variazione di pressione e volume a temperatura costante è una **trasformazione isoterma**.

I termini gas e vapore non sono equivalenti: un gas è un aeriforme che si trova al di sopra della sua temperatura critica; il vapore è un aeriforme che si trova al di sotto della temperatura critica.

Se comprimo un aeriforme in una trasformazione isoterma, ottengo il passaggio di stato allo stato liquido, l'aeriforme è un vapore.

La **temperatura critica** è il valore di temperatura sopra il quale non è possibile, anche comprimendo il gas ad altissime pressioni, ottenere il passaggio di stato aeriforme-liquido.

La temperatura critica è caratteristica per ciascuna sostanza.

LA LEGGE DI BOYLE

Facciamo variare la pressione di un gas mantenendo costante la sua temperatura: il comportamento del gas in questo caso è descritto dalla **legge di Boyle** o **legge isoterma**:

La legge di Boyle si può scrivere anche nella forma: $p \cdot V = k$.

volume finale (m^3)

volume iniziale (m^3)

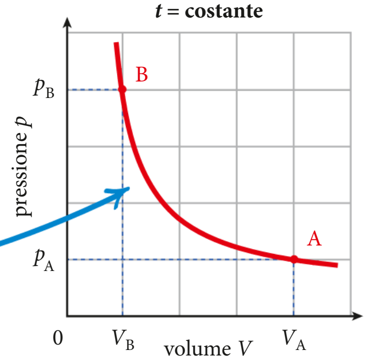
$$pV = p_1 V_1$$

pressione finale (Pa)

pressione iniziale (Pa)

A temperatura costante, pressione e volume di un gas, poco compresso e lontano dalla temperatura di liquefazione, sono inversamente proporzionali.

In chimica vedrai che la condizione di un gas poco compresso è lontano dalla temperatura di liquefazione



In un grafico pressione-volume, la legge di Boyle è descritta da un'iperbole equilatera.

LA PRIMA LEGGE DI GAY-LUSSAC

Scaldiamo un gas mantenendo costante la pressione: quello che osserviamo è descritto sperimentalmente dalla **prima legge di Gay-Lussac** o **legge isobara**:

volume a temperatura t (m^3)

coefficiente di dilatazione volumica ($°C^{-1}$)

$$V = V_0\,(1 + \alpha t)$$

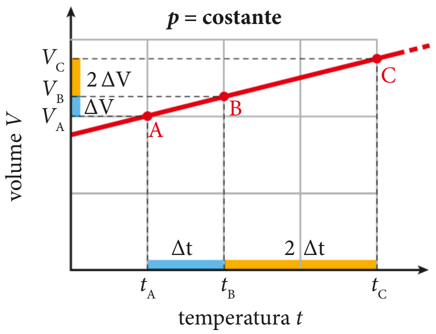
volume a 0 °C (m^3)

temperatura (°C)

Le variazioni di volume di un gas, poco compresso e lontano dalla liquefazione, sono *direttamente proporzionali* alle variazioni di temperatura che le determinano.

La legge di Gay-Lussac non descrive solo il riscaldamento di un gas, ma anche il suo raffreddamento: un gas riscaldato a pressione costante si dilata; un gas raffreddato si contrae.

In un grafico **volume-temperatura**, la legge di Gay-Lussac è descritta da una retta che non passa per l'origine.
Il coefficiente di dilatazione volumica a vale per tutti i gas: $\alpha = 3{,}66 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1} = \dfrac{1}{273} \cdot \dfrac{1}{°C}$.



Se invece della temperatura Celsius t utilizziamo la temperatura assoluta T, possiamo riscrivere la legge in un'altra forma:

$$V_T = \frac{V_0}{T_0}\,T,$$

dove T è la temperatura assoluta del gas e V_0 è il volume a $T_0 = 273$ K.

La prima legge di Gay-Lussac è nota anche come legge di Charles.

Il volume occupato da un gas è direttamente proporzionale alla sua temperatura assoluta.

LA SECONDA LEGGE DI GAY-LUSSAC

La legge sperimentale che descrive l'aumento di pressione di un gas a volume costante quando cambia la sua temperatura è la **seconda legge di Gay-Lussac** o **legge isocora**:

pressione a temperatura t (Pa)

coefficiente di dilatazione volumica ($°C^{-1}$). Per tutti i gas, $\alpha = \dfrac{1}{273}$, come nella prima legge di Gay-Lussac.

$$p = p_0\,(1 + \alpha t)$$

pressione a 0 °C (Pa)

temperatura (°C)

Le variazioni di pressione di un gas, poco compresso e lontano dalla liquefazione, sono *direttamente proporzionali* alle corrispondenti variazioni di temperatura.

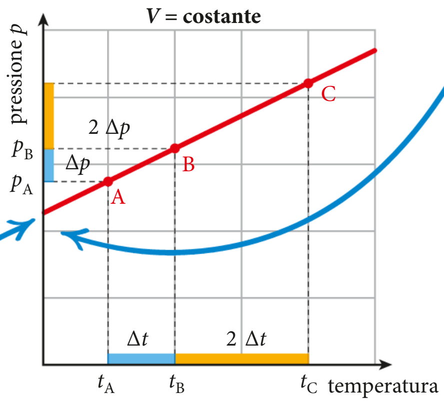
In un grafico **pressione-temperatura**, è descritta da una retta che non passa per l'origine.

Utilizzando la temperatura assoluta T, la seconda legge di Gay-Lussac diventa:

$$P_T = \frac{P_0}{T_0}\,T,$$

dove T è la temperatura assoluta e p_0 è la pressione a $T_0 = 273$ K.

La pressione di un gas è direttamente proporzionale alla sua temperatura assoluta.



Se si prolungasse la retta verso sinistra (cioè continuando a raffreddare il gas), si vedrebbe che il volume si annulla quando la temperatura raggiunge il valore di −273,15 °C, pari a 0 K (zero assoluto), temperatura a cui il volume è uguale a 0.

IL GAS PERFETTO

Un gas perfetto è un modello di gas ideale che obbedisce alla legge di Boyle e alle due leggi di Gay-Lussac. È un modello che permette di descrivere in molti casi i gas reali.

In chimica vedrai le caratteristiche di un gas perfetto o ideale. I gas reali si avvicinano al comportamento dei gas perfetti quando sono molto rarefatti e a una temperatura molto maggiore della temperatura di liquefazione.

La legge di Boyle e le due leggi di Gay-Lussac possono essere sintetizzate in un'unica relazione: l'**equazione di stato dei gas perfetti**:

valori di pressione e volume alla temperatura $T_0 = 273$ K

volume (m^3)

$$pV = \left(\frac{p_0 V_0}{T_0}\right) T$$

pressione (Pa)

temperatura (K)

Si può dimostrare che se si considera una mole di gas alla temperatura t_0 di 0 °C e alla pressione p_0 di 1 atm; il volume di una mole V_M è 22,4 L per qualsiasi gas. Alle condizioni indicate, il rapporto $\frac{P_o \cdot V_M}{T}$, assume un valore ben definito e viene indicato con la lettera R:

$$\frac{P_o \cdot V_M}{T} = R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22{,}4 \text{ L/mol}}{273{,}15 \text{ K}} = 0{,}0821 \text{ L} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) = 8{,}31 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})$$

La temperatura di 0 °C è considerata la temperatura standard.

La pressione di 1 atm è considerata la pressione standard.

Poiché il valore di R è uguale per tutti i gas, essa prende il nome di **costante universale dei gas**. Se ora consideriamo n moli di gas, abbiamo:

Come vedrai in chimica, una mole è la quantità di sostanza che contiene un numero di particelle elementari (atomi, molecole, o ioni) uguale al numero di atomi contenuti in 12 g di 12 C (questo numero è detto anche Numero di Avogadro N_A ed è pari a $6{,}02 \cdot 10^{23}$). Alla temperatura di 0 °C e alla pressione di 1 atm il volume molare di qualsiasi gas è sempre 22,4 L.

$$\frac{P_o \cdot V_M}{T} = R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22{,}4 \text{ L/mol}}{273{,}15 \text{ K}} = 0{,}0821 \text{ L} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) = 8{,}31 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})$$

da cui

$$pV = nRT$$

Possiamo utilizzarle la formula generale per calcolare una delle quattro variabili (p, V, T, n), note le altre tre.

Questa relazione è una *forma generale* dell'equazione di stato dei gas perfetti e descrive con buona approssimazione anche il comportamento dei gas reali.

Esprimendo il numero di moli n come il rapporto tra il numero di molecole N e il numero di Avogadro N_A, la legge dei gas perfetti diventa:

$$pV = NkT$$

con $k = 1{,}381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Il primo principio della termodinamica

LA TERMODINAMICA

La termodinamica studia le leggi con cui i *sistemi scambiano energia con l'ambiente* sotto forma di calore e lavoro.

Lo stato di un sistema termodinamico, come per esempio un gas perfetto, è descritto da tre grandezze (volume V, pressione p e temperatura T) ed è rappresentato da un punto nel grafico *pressione-volume.*

L'INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DELLA TEMPERATURA

Consideriamo il moto delle molecole di un gas.

Esiste un legame preciso tra la temperatura e la velocità: l'energia cinetica media K_{media} di una molecola, dovuta al moto di traslazione, è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta attraverso la relazione

$$K_{media} = \frac{3}{2} k_B T$$

L'energia cinetica di una molecola può in parte derivare dai moti di rotazione e di vibrazione: la formula, invece, tiene conto soltanto del movimento di traslazione.

k_B è detta **costante di Boltzmann** e vale

$$k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Nella formula di K_{media}, il primo membro deve essere maggiore o uguale a zero, perché l'energia cinetica non può essere negativa. Allora, anche il secondo membro non può essere negativo:

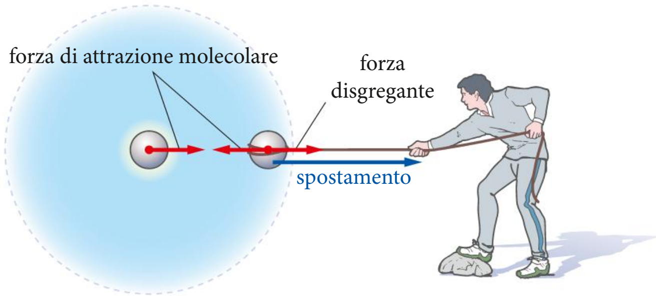
la temperatura assoluta $T = 0$ K è detta **zero assoluto** perché si tratta della minima temperatura teoricamente concepibile, visto che la temperatura T non può essere negativa.

L'ENERGIA POTENZIALE

Vedrai in chimica che tra le caratteristiche che distinguono un gas reale e un gas perfetto le molecole vengono considerate puntiformi e non attratte reciprocamente.

L'**energia potenziale** di un corpo è uguale al lavoro compiuto dalle forze di attrazione molecolare quando una forza esterna disgrega il sistema, portando tutte le molecole a grande distanza l'una dall'altra.

L'energia potenziale di un gas reale è negativa, perché le forze molecolari hanno verso opposto allo spostamento delle molecole, quindi il lavoro è negativo.
L'energia potenziale di un gas perfetto, invece, è nulla, perché le molecole sono in media lontane tra loro dato che il gas è molto rarefatto.



L'ENERGIA INTERNA

Tutte le funzioni di stato hanno variazione nulla in una trasformazione ciclica.

L'**energia interna** di un corpo è l'energia complessiva di tutte le sue componenti microscopiche.

È una *funzione di stato*, cioè a ogni stato del sistema corrisponde uno e un solo valore dell'energia interna. Pertanto, per un gas reale:

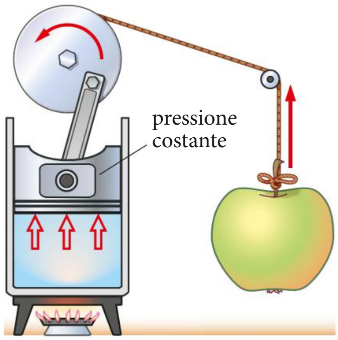
energia interna
$$U = E_{pot} + K$$
energia cinetica
energia potenziale

Nel caso del gas perfetto, l'energia interna è uguale alla somma delle energie cinetiche delle sue molecole e aumenta all'aumentare della temperatura del gas.

energia interna
$$U = K$$
energia cinetica

Se il gas perfetto alla temperatura T è composto da N molecole, ciascuna composta da un solo atomo, K è uguale a N volte l'energia cinetica di un atomo, cioè

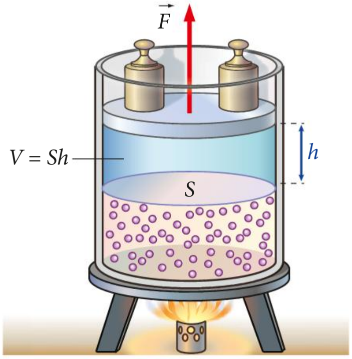
$$U = NK_{media} = \frac{3}{2}Nk_BT$$



IL LAVORO DEL SISTEMA

Scaldiamo lentamente il gas, in modo che si espanda a pressione costante (*trasformazione isòbara*). Lasciamo che il volume del gas aumenti piano piano.
Poiché il pistone si solleva, il sistema compie un lavoro positivo. Potremmo utilizzare l'energia che il sistema cede all'esterno per fare un lavoro utile: per esempio sollevare una mela o l'acqua da un pozzo.

Il lavoro W, che il sistema compie, è uguale al prodotto della forza F, che spinge verso l'alto il pistone, per lo spostamento h del pistone: $W = F\,h$.



Poiché la forza è uguale al prodotto della pressione p del gas per la superficie S del pistone, si ha
$W = F\,h = (p \cdot S)\,h = p(S \cdot h) = p\Delta V$,
dove ΔV, uguale al prodotto $S \cdot h$, è la variazione di volume del gas.

Quindi il lavoro compiuto dal sistema durante l'espansione a pressione costante è

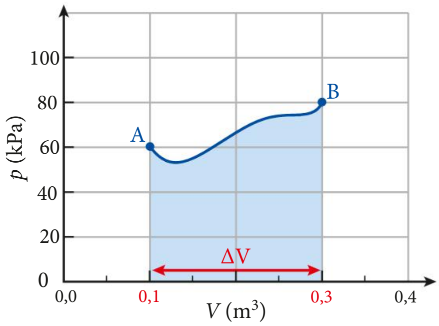
lavoro compiuto del gas (J)

pressione del gas (Pa)

$$W = p\Delta V$$

variazione di volume (m^3)

In un grafico *pressione-volume*, il lavoro del sistema è uguale all'area compresa tra la curva che descrive la trasformazione termodinamica e l'asse dei volumi.



IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Consideriamo la variazione di energia interna nel corso di un'espansione a pressione costante. Il sistema ha guadagnato energia perché ha assorbito una quantità positiva di calore Q dall'ambiente, e ha perso energia perché ha compiuto un lavoro W positivo, spingendo verso l'alto il pistone.
Il primo principio della termodinamica esprime la conservazione dell'energia:

variazione dell'energia interna (J)

$$\Delta U = Q - W$$

lavoro compiuto (J)

calore assorbito (J)

Si applica a tutti i sistemi e non soltanto al gas perfetto.
$\boldsymbol{Q > 0}$ se il sistema acquista energia mediante scambio di calore, $\boldsymbol{Q < 0}$ se invece la cede.

$\boldsymbol{W > 0}$ se il sistema compie lavoro positivo e cede energia (espansione), $\boldsymbol{W < 0}$ se invece esegue lavoro negativo e acquista energia (compressione).

APPLICAZIONI DEL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Facendo riferimento al sistema del gas perfetto, possiamo vedere che cosa succede nel caso di alcune trasformazioni che il gas può subire.
Le trasformazioni *isòbare* avvengono *a pressione costante*, quindi il lavoro compiuto dal gas è:

$$W = p\Delta V$$

Pertanto:

$$\Delta U + p\Delta V = Q$$

Le trasformazioni *isocòre* avvengono *a volume costante*, quindi il lavoro è nullo. Si ha quindi:

$$\Delta U = Q$$

Nelle trasformazioni *adiabatiche* il calore scambiato è nullo: $Q = 0$. Pertanto: $\Delta U = -W$.

Una trasformazione adiabatica è una trasformazione che avviene senza scambi di calore.

LEZIONE 21

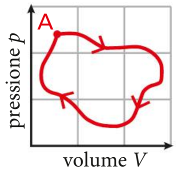
Il secondo principio della termodinamica

LA MACCHINA TERMICA

Una **macchina termica** è un dispositivo capace di trasformare calore in lavoro attraverso una serie di trasformazioni cicliche.

La più semplice di queste macchine è costituita da un cilindro, chiuso da un pistone mobile, che racchiude una certa quantità di gas.

Una **trasformazione ciclica** è rappresentata nel diagramma pressione-volume da una curva chiusa.
Al termine, il calore totale assorbito è uguale al lavoro totale compiuto, cioè il lavoro compiuto dal sistema è uguale alla somma algebrica dei calori assorbiti (positivi) e ceduti all'esterno (negativi).

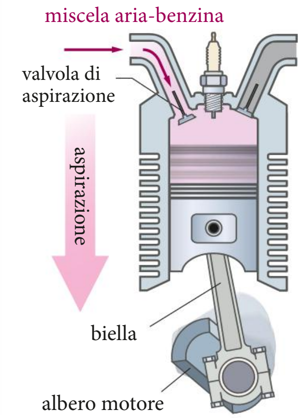


$$Q_{\text{totale}} = W_{\text{totale}}$$

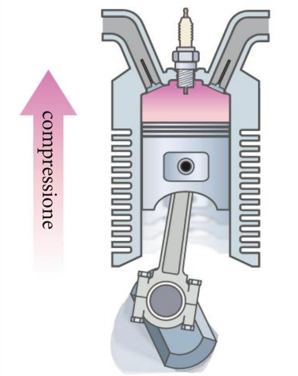
Poiché lo stato iniziale coincide con quello finale, in una **trasformazione ciclica** la variazione di energia interna del sistema è uguale a zero.

Il funzionamento del **motore a scoppio** è descritto da una trasformazione ciclica a quattro fasi.

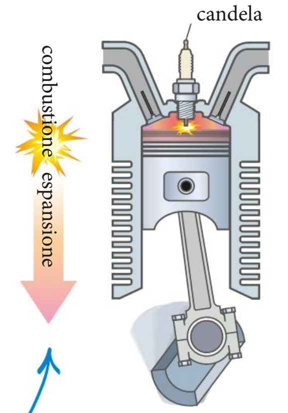
Aspirazione (espansione isobara)



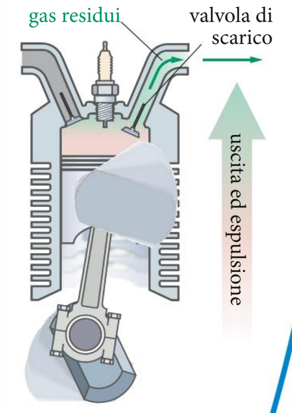
Compressione (adiabatica)



Combustione + espansione (trasformazione isocòra + espansione adiabatica)



Scarico (trasformazione isocòra + compressione isòbara)



Il terzo tempo (combustione ed espansione) rappresenta la fase utile, che produce movimento.

Il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo di funzionamento è uguale all'area del grafico pressione-volume contenuta nella linea chiusa.

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il motore di un'automobile, funzionando, si scalda e immette gas nell'atmosfera. Ciò significa che parte dell'energia contenuta nella benzina, invece di servire per fare muovere il veicolo, viene sprecata nell'emissione di gas di scarico e nel riscaldamento del motore.
Sarebbe possibile costruire un motore perfetto, cioè capace di funzionare senza dispersioni di calore? Per il **secondo principio della termodinamica**, non è possibile.

Enunciato di Kelvin

> Non è possibile realizzare una trasformazione ciclica che trasformi in lavoro tutto il calore prelevato da una sola sorgente.

Il secondo principio si può scrivere anche come:

Enunciato di Clausius

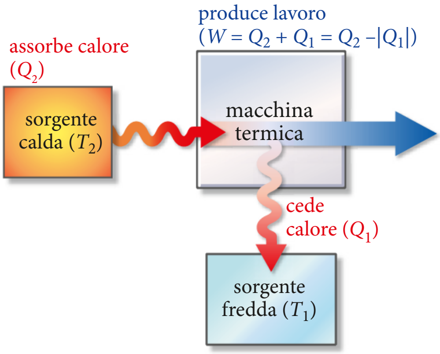
> È impossibile una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia quello di fare passare calore da un corpo più freddo a uno più caldo.

Per esempio, il frigorifero fa passare calore dal suo interno (più freddo) all'ambiente esterno (più caldo), ma per funzionare assorbe energia dall'esterno.

IL RENDIMENTO DI UNA MACCHINA TERMICA

Indichiamo con:

- Q_2 il calore (positivo) che la macchina termica assorbe dalla sorgente calda alla temperatura assoluta T_2;
- Q_1 il calore (negativo) che la macchina cede alla sorgente fredda alla temperatura assoluta T_1;
- W il lavoro utile prodotto dalla macchina.



Per il primo principio della termodinamica in un ciclo della macchina si ha $W = Q_2 - Q_1$. La «qualità» di funzionamento di una macchina termica è descritta dal rendimento.

> Il **rendimento** r è dato dal rapporto tra il lavoro compiuto W e il calore assorbito Q_2.

rendimento (numero)

$$r = \frac{W}{Q_2}$$

lavoro compiuto (J)

calore assorbito (J)

- Il valore minimo del rendimento è 0 e si ottiene quando il lavoro prodotto dalla macchina termica è nullo.
- Il valore massimo del rendimento sarebbe 1 (100%) se il lavoro W della macchina fosse uguale al calore Q_2 assorbito alla sorgente ad alta temperatura: per il secondo principio della termodinamica però r è *sempre* minore del 100%. Esiste anche un'altra enunciazione del secondo principio:

Enunciato del rendimento

> È impossibile progettare una macchina termica che abbia rendimento uguale a 1.

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

Una trasformazione si dice **reversibile** se è possibile riportare sia il sistema, sia l'ambiente esterno, nello stato iniziale, ripercorrendo la trasformazione a ritroso.

Una trasformazione è invece **irreversibile** se non gode di tali caratteristiche: per esempio il processo di riscaldamento mediante combustione è irreversibile.

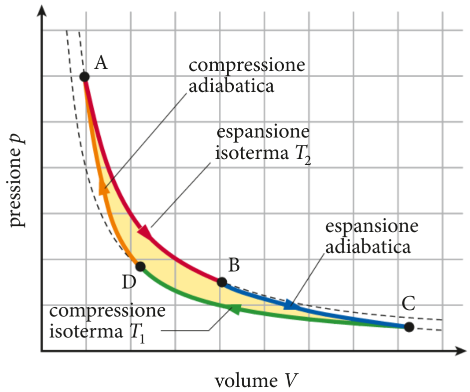
Una macchina reversibile è un dispositivo che compie una trasformazione ciclica reversibile: se questa trasformazione è composta da più fasi, ognuna deve essere reversibile.

IL TEOREMA E IL CICLO DI CARNOT

Il **teorema di Carnot** riguarda il rendimento delle macchine termiche reversibili.

Il rendimento di una macchina termica reversibile è sempre maggiore o uguale al rendimento di una macchina qualunque che lavora tra le stesse due temperature.

Il **ciclo di Carnot** è costituito da quattro fasi consecutive: un'espansione isoterma, un'espansione adiabatica, una compressione isoterma e una compressione adiabatica. Esso caratterizza il funzionamento della macchina di Carnot, una macchina reversibile che funziona con due sole sorgenti di calore.



Il rendimento della macchina di Carnot è:

$$r = 1 - T_1/T_2$$

con T_1 temperatura della sorgente fredda, T_2 temperatura della sorgente calda.

La formula si può anche scrivere nella forma: $r = (T_2 - T_1)/T_2$

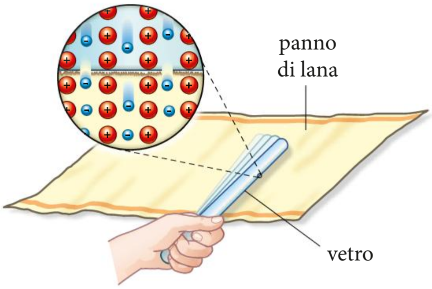
Il rendimento della macchina di Carnot rappresenta il massimo rendimento che una macchina termica reale, cioè non reversibile, potrebbe raggiungere lavorando con le due sorgenti di calore T_1 e T_2.

La carica elettrica

LA CARICA ELETTRICA

Un corpo che ha acquisito la capacità di attrarre oggetti leggeri è detto **elettrizzato**.

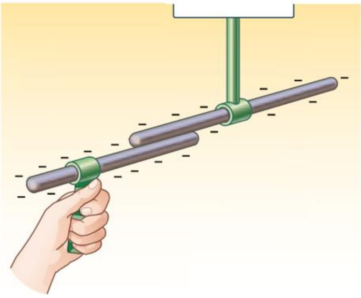
L'elettrizzazione può avvenire per strofinio o per contatto.



ELETTRIZZAZIONE PER STROFINIO

Strofinando il vetro con la lana lo si può elettrizzare, cioè il vetro è in grado attrarre oggetti leggeri.

ELETTRIZZAZIONE PER CONTATTO



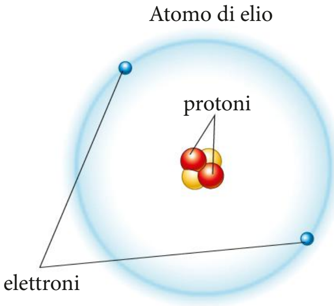
Parte della carica presente su un conduttore elettrizzato passa a un secondo conduttore che viene a contatto con esso.

Due oggetti elettrizzati possono attrarsi o respingersi. Questo fenomeno si spiega con l'esistenza di due tipi di elettricità:

- carica elettrica **positiva**;
- carica elettrica **negativa**.

L'esistenza delle due cariche elettriche si spiega conoscendo il modello microscopico dell'atomo.

Cariche di segno uguale si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.



Tutti gli atomi contengono due tipi di particelle cariche: gli elettroni con carica negativa e i protoni con carica positiva. Gli atomi contengono tanti protoni quanti elettroni e, quindi, sono elettricamente neutri.

Puoi approfondire la struttura dell'atomo nelle lezioni di chimica.

I CONDUTTORI E GLI ISOLANTI

Gli elettroni possono passare da un corpo all'altro.

Un corpo elettrizzato negativamente ha un *eccesso* di elettroni; un corpo elettrizzato positivamente ha una *mancanza* di elettroni.
Non tutte le sostanze si possono elettrizzare per strofinio. Le sostanze che si caricano sempre quando sono strofinate si dicono **isolanti**; quelle che non si elettrizzano sempre vengono definite **conduttori**.
Negli *isolanti* (plastica, ceramica) le cariche non possono spostarsi.
Nei *conduttori* (ferro, corpo umano) vi sono cariche elettriche libere di muoversi.

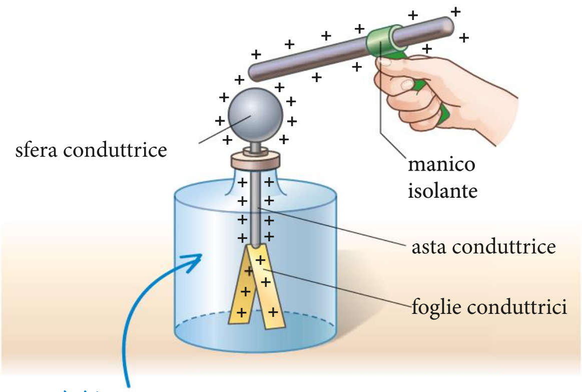
Si chiama equilibrio elettrostatico la condizione in cui tutte le cariche presenti sui conduttori che costituiscono il sistema in esame sono ferme.

LA MISURA DELLA CARICA ELETTRICA

L'elettroscopio è uno strumento utilizzato per misurare se un oggetto è carico.

Un oggetto è carico se, messo a contatto con un elettroscopio, fa divaricare le sue foglie.
Per misurare la carica elettrica si sceglie una carica come unità di misura, poi si tara l'elettroscopio con una scala che misuri le divaricazioni delle foglioline.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della carica elettrica è il coulomb (C). Definiamo e la carica dell'elettrone.



elettroscopio

Tutte le particelle elementari conosciute hanno una carica elementare che è un multiplo (positivo o negativo) di e è l'opposto della carica dell'elettrone e vale $e = 1{,}6021 \times 10^{-19}$ C.

Tutti gli elettroni dell'Universo hanno la stessa carica (negativa) $-e$, il cui valore numerico è $-e = -1{,}6021 \times 10^{-19}$ C.

> La **carica elementare** è la più piccola carica positiva che si può trovare in natura.

LA LEGGE DI COULOMB

Consideriamo due oggetti così piccoli (in confronto alla distanza r che li separa) da potere essere considerati puntiformi. Indichiamo con Q_1 e con Q_2 le cariche elettriche che si trovano su di essi. Ciascuno dei due oggetti risente di una forza elettrica dovuta alla presenza dell'altro, e ciò si esprime con la:

> **Legge di Coulomb.** Il valore della forza elettrica tra due cariche puntiformi è direttamente proporzionale a ciascuna carica e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

forza di Coulomb (N)

prima carica (C)

seconda carica (C)

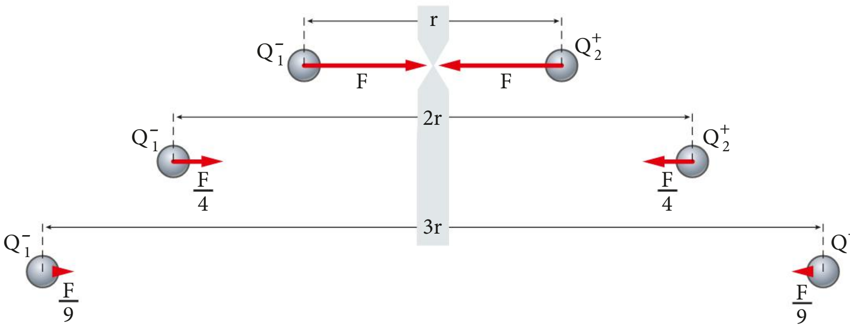
$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

costante di proporzionalità ($N \cdot m^2/C^2$)

distanza (m)

La direzione della forza elettrica è quella della retta che congiunge le due cariche puntiformi. Il verso dipende dal segno delle cariche.

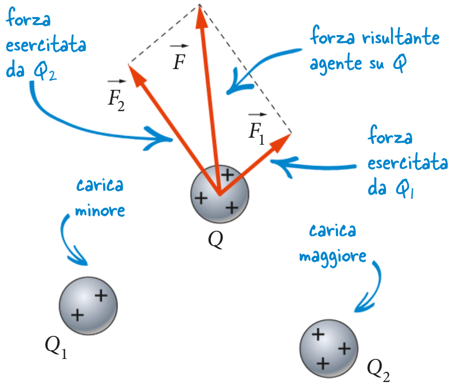
La forza di Coulomb esprime la forza elettrica che si esercita tra due cariche puntiformi.
È positiva (forza repulsiva), se le due cariche hanno lo stesso segno; è negativa (forza attrattiva), se le cariche hanno segno opposto.



Nel vuoto $k_0 = 8{,}99 \times 10^9 \dfrac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$ È una costante determinata sperimentalmente

Nell'aria, k_0 ha circa lo stesso valore che nel vuoto; se invece le cariche sono in un materiale isolante è più piccola e, di conseguenza, il valore della forza di Coulomb è minore che nel vuoto. Per esempio, nell'acqua distillata vale 1/80 rispetto a quella nel vuoto.

Per la forza di Coulomb vale il **principio di sovrapposizione**:



La **forza totale** che agisce su una carica elettrica è uguale alla **somma vettoriale** delle singole forze che agirebbero su di essa se ciascuna delle altre cariche fosse presente da sola.

La forza elettrica è molto simile alla forza gravitazionale:

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Entrambe le forze agiscono a distanza, diminuiscono in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza e sono direttamente proporzionali a una grandezza caratteristica (la massa o la carica). Infine k_0 dipende dal mezzo materiale in cui sono poste le cariche (acqua ecc.), mente G è costante in tutto l'Universo.
Ci sono però diverse differenze: la forza gravitazionale è solo attrattiva, mentre quella elettrica è attrattiva e repulsiva. Inoltre la forza elettrica agisce solo fra corpi elettricamente carichi, mentre la gravitazione agisce sempre.

LA COSTANTE DIELETTRICA

La costante di proporzionalità k_0 che compare nella legge di Coulomb è in relazione con la **costante dielettrica assoluta nel vuoto**, ε_0.

La costante dielettrica assoluta del vuoto ε_0 è definita ponendo $k_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} \dfrac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N \cdot m^2}}$

La formula della forza di Coulomb diviene: $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

In un mezzo materiale diverso dal vuoto definiamo invece la **costante dielettrica relativa del mezzo**, ε_r. È il rapporto tra la forza elettrica F tra due cariche nel vuoto e la forza F_m tra le stesse due cariche in un mezzo materiale.

forza di Coulomb nel vuoto

$$\varepsilon_r = \frac{F}{F_m}$$

forza di Coulomb in un mezzo materiale

ε_r è un numero puro.

Nei mezzi materiali, a causa della loro polarizzazione, ε_r è sempre maggiore di 1.

Costanti dielettriche relative ($T = 298$ K)

ambra	2,8
carta	2,1
legno	3-7
PVC	4,5
silicio	12
vetro	5-10
zucchero	3,3
alcol etilico (etanolo)	24-26
ghiaccio (268 K)	75
acqua	80
vapore acqueo* (393 K)	1,00060
aria (273 K)*	1,00056

* a pressione normale ($1{,}01 \times 10^5$ Pa)

La forza di Coulomb in un mezzo materiale diventa:

$$F_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

In un mezzo materiale isolante (per esempio nell'acqua o dentro il vetro), a parità di cariche e di distanza, la forza di Coulomb F_m ha un valore minore di quello della forza F che agisce nel vuoto, a causa della polarizzazione dell'isolante.
$\varepsilon_0\varepsilon_r$ è la costante dielettrica assoluta del mezzo considerato e misura di quanto l'intensità della forza elettrica è ridotta, rispetto al vuoto, dalla presenza del mezzo.

Si dice **costante dielettrica assoluta** del mezzo ε il prodotto della costante dielettrica assoluta del vuoto ε_0 per la costante dielettrica relativa ε_r del mezzo considerato.

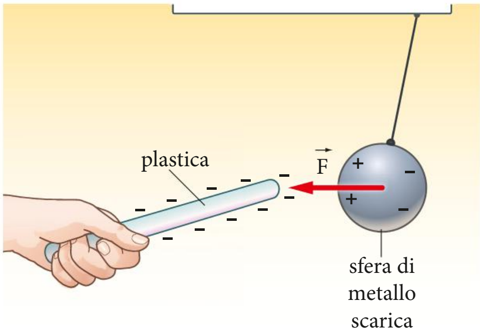
costante dielettrica relativa

costante dielettrica assoluta del mezzo $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$

costante dielettrica assoluta del vuoto

Ha le stesse unità di misura di ε_0 .

L'ELETTRIZZAZIONE PER INDUZIONE



La bacchetta di plastica, carica negativamente, respinge gli elettroni della sfera. Di conseguenza, la superficie della sfera vicino alla bacchetta diventa positiva e la superficie lontana negativa. Per la legge di Coulomb, la sfera è attratta verso la bacchetta. Il conduttore (la sfera) è ancora neutro nel complesso, ma la carica non è più distribuita in modo uniforme.

La legge di Coulomb spiega l'elettrizzazione: la forza elettrica diminuisce rapidamente con l'aumentare della distanza.

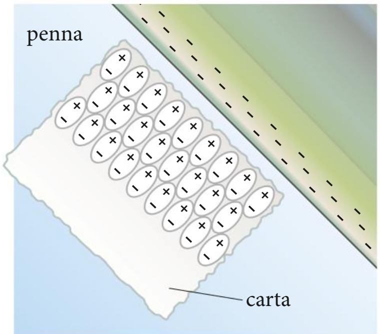
Si chiama **induzione elettrostatica** la ridistribuzione di carica, in un *conduttore* neutro (sfera metallica), causata dalla vicinanza di un corpo carico (plastica).

Permette di caricare un conduttore neutro.

Negli isolanti, invece, gli elettroni non sono liberi di muoversi e il fenomeno è un po' diverso.

Si chiama **polarizzazione** la ridistribuzione di carica in un isolante neutro, causata dalla vicinanza di un corpo carico.

Spiega perché piccoli oggetti neutri (come pezzettini di carta) sono attratti da un corpo carico (penna strofinata).



Il campo elettrico

IL VETTORE CAMPO ELETTRICO

Un oggetto carico esercita una forza elettrica su altri oggetti carichi vicini. Per studiare questa forza si può esplorare lo spazio con una piccola **carica di prova** positiva q^+, abbastanza piccola da non esercitare forze apprezzabili sulle altre cariche presenti.

Una carica elettrica modifica le proprietà dello spazio che la circonda perché genera un *campo elettrico*. Una carica di prova subisce l'azione di una forza elettrica e si muove secondo le proprietà dello spazio modificato dalla prima carica.

vettore campo elettrico (N/C)

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q^+}$$

forza (N)

carica di prova positiva (C)

Il vettore **campo elettrico** è il rapporto fra la forza che agisce sulla carica di prova e la carica stessa.
Permette di calcolare la forza elettrica che agisce su qualsiasi carica che si trova nella zona in cui è attivo il campo elettrico: $\vec{F}=q\vec{E}$.
In ogni punto dello spazio, la direzione e il verso del vettore campo elettrico coincidono con quelli della forza elettrica che agisce sulla carica di prova positiva che si trova in quel punto.
La sua intensità in un punto P è numericamente uguale al valore della forza che agirebbe su una carica puntiforme di 1 C posta in P.
Il campo elettrico non dipende dalla carica di prova.

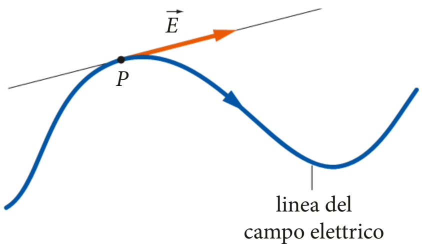
Se la carica q è positiva, il campo elettrico e la forza hanno stessa direzione e stesso verso.

La forza che agisce sulla carica si ottiene moltiplicando entrambi i membri dell'espressione $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ per q.

IL CAMPO ELETTRICO E LE LINEE DI CAMPO

Il campo elettrico si rappresenta mediante **linee di campo**, utili per rappresentarlo visivamente ma che non esistono nella realtà. Hanno particolari caratteristiche:

- sono linee orientate;
- in ogni punto sono *tangenti* al campo elettrico;
- il vettore $\vec{E}$ ha il verso delle linee di campo;
- il modulo di $\vec{E}$ in una regione è proporzionale alla densità di linee di campo in quella regione.



Il campo elettrico più semplice è quello generato da una singola carica puntiforme Q.
L'intensità del campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme Q alla distanza r è:

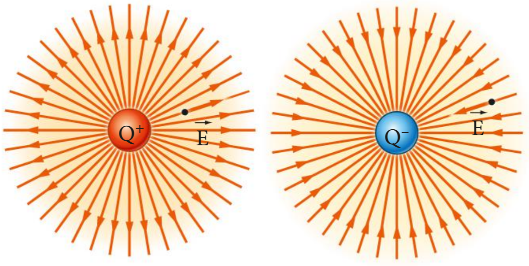
campo elettrico in un punto P (N/C)

$$E=k_0\frac{Q}{r^2}$$

carica che genera il campo (C)

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

distanza tra il punto P e la carica (m)



Il valore di E non dipende dalla carica di prova q.

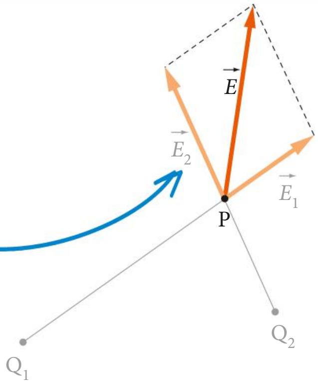
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ è la costante di proporzionalità che compare nell'espressione della forza di Coulomb.

> E è direttamente proporzionale al valore della carica che genera il campo e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra il punto considerato e la carica.

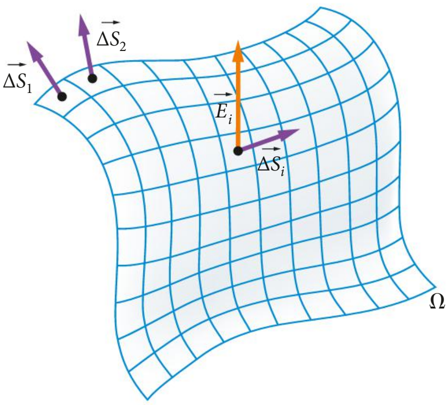
Le linee di campo sono semirette uscenti dalle cariche positive e semirette entranti verso le cariche negative.

In caso di diverse cariche puntiformi vale il **principio di sovrapposizione**:

I diversi campi elettrici in uno stesso punto si sommano con la regola del parallelogramma.



TEOREMA DI GAUSS

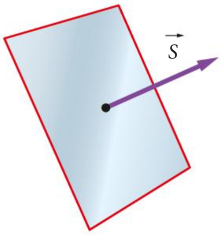


Il teorema di Gauss permette di determinare il campo elettrico generato da distribuzioni di carica con particolari simmetrie.

È necessario innanzitutto definire il flusso $\Phi(\vec{E})$ del vettore campo elettrico attraverso una superficie S.

- Caso semplice (superficie piana e campo $\vec{E}$ uniforme):
  $\Phi_{\vec{S}}(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{S} = ES\cos\alpha$
- Caso generale (superficie suddivisa in porzioni così piccole da essere considerate piane):
  $\Phi_\Omega(\vec{E}) = \Sigma\Delta\Phi(\vec{E}) = \Sigma\vec{E}_i\cdot\Delta\vec{S}_i = \Sigma E_i\Delta S_i\cos\alpha_i$

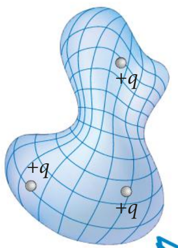
Il vettore superficie si definisce per una superficie piana S immersa nello spazio e ha le seguenti caratteristiche.



- Ha direzione perpendicolare alla superficie.
- Ha modulo pari all'area della superficie.
- Ha verso arbitrario se la superficie è aperta, verso uscente se la superficie è chiusa.

Il **flusso** del vettore campo elettrico è il prodotto scalare fra il campo elettrico $\vec{E}$ e la superficie orientata sul quale il campo elettrico è costante.
È massimo quando il campo elettrico e il vettore superficie sono paralleli, è zero quando sono perpendicolari.
Si misura in $\frac{N\cdot m^2}{C}$.

> **Teorema di Gauss per l'elettrostatica.** Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è direttamente proporzionale alla carica totale contenuta all'interno della superficie.



flusso del campo elettrico

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon}$$

carica totale

costante dielettrica assoluta del mezzo

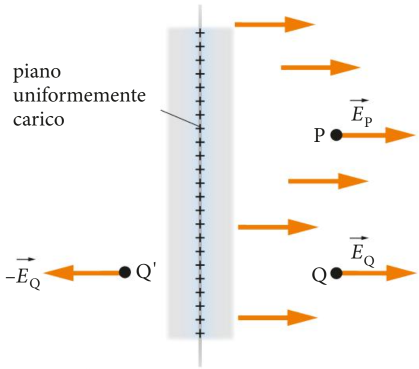
Il flusso del campo elettrico è zero se la superficie non racchiude nessuna carica al suo interno.

Il valore del flusso non dipende dalla forma della superficie, purché sia chiusa.

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS

Distribuzione piana infinita di carica per:

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$ (σ: densità superficiale di carica)

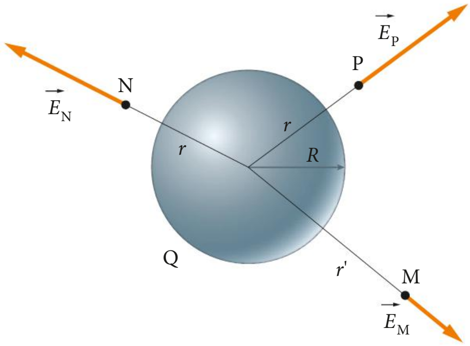


Il vettore $\vec{E}$ ha:

- direzione perpendicolare al piano di carica.
- verso uscente dal piano (carica positiva), entrante (carica negativa).

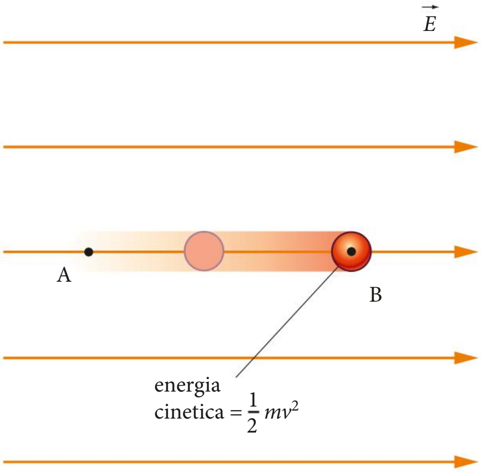
Distribuzione di carica con simmetria sferica:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} (r \geq R)$



Il campo elettrico è lo stesso che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro della sfera.

L'ENERGIA ELETTRICA



Il campo elettrico contiene energia, perché ha la capacità di compiere lavoro.
L'energia elettrica è l'energia potenziale immagazzinata nel campo elettrico, che può trasformarsi in energia luminosa, energia cinetica o dissiparsi sotto forma di calore.

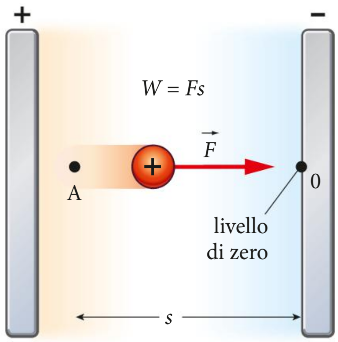
Il lavoro compiuto dal campo elettrico si esprime come:

$$W = qEs$$

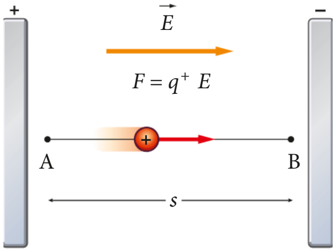
F (forza elettrica)

Come per il campo gravitazionale, anche per il campo elettrico si può definire l'energia potenziale elettrica.

L'**energia potenziale elettrica** è uguale al lavoro compiuto dalla forza elettrica quando la carica si sposta dalla posizione *A* a quella di riferimento (livello di zero).



LA DIFFERENZA DI POTENZIALE



Introduciamo una nuova grandezza, la *differenza di potenziale*, che misura il «dislivello elettrico» tra due punti dello spazio in cui è presente un campo elettrico.

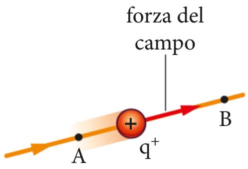
La **differenza di potenziale** $V_A - V_B$ (tra i punti A e B) è uguale al lavoro $W_{A\text{-}B}$, che la forza del campo compie quando la carica di prova positiva q^+ si sposta da A a B, diviso per questa carica q^+:

$$V_A - V_B = \frac{W_{A-B}}{q^+}$$

La differenza di potenziale, chiamata anche tensione o voltaggio, è una grandezza unitaria, perché non dipende dalla carica di prova.

Nel Sistema Internazionale la differenza di potenziale si misura in volt (V):

$$1 \text{ volt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ coulumb}}$$



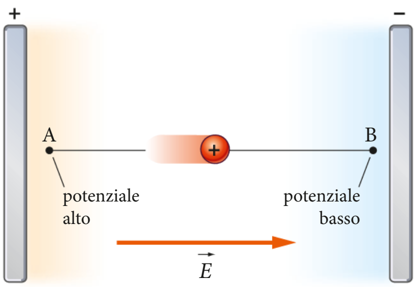
La differenza di potenziale in un campo uniforme è pari a:

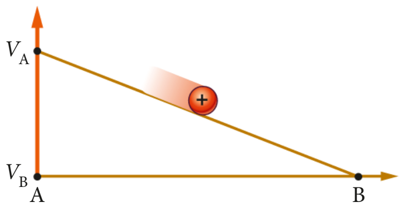
$$V_A - V_B = Es$$

Il potenziale tende all'infinito in coincidenza della carica che lo genera.

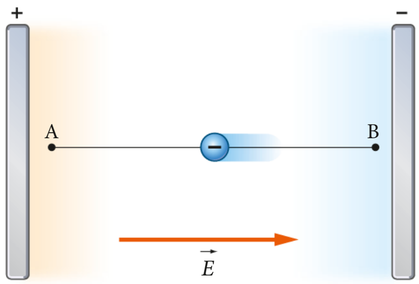
Il **potenziale elettrico** in un punto A è uguale alla differenza di potenziale tra A e il punto R di riferimento.

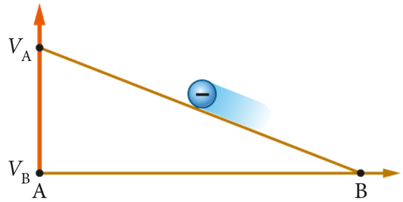
Le cariche positive si spostano da punti a potenziale più alto verso punti a potenziale più basso.





Le cariche negative passano da punti a potenziale più basso verso punti a potenziale più alto.





La corrente elettrica

L'INTENSITÀ DELLA CORRENTE ELETTRICA

Si chiama **corrente elettrica** un moto ordinato di cariche elettriche.

Per indicare quanto è grande la corrente elettrica introduciamo una nuova grandezza, l'intensità di corrente elettrica.

carica elettrica (Q)

intensità di corrente elettrica (A)

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

intervallo di tempo (s)

L'**intensità di corrente** è una grandezza unitaria, pari al rapporto tra la quantità di carica che attraversa una sezione del conduttore e l'intervallo di tempo impiegato.

In una corrente continua, la carica che attraversa una sezione del filo e il tempo trascorso sono direttamente proporzionali: $Q = it$.

Per convenzione, il suo verso è quello in cui si muovono le cariche positive, cioè da punti a potenziale elettrico più alto a punti a potenziale più basso.

Una **corrente** si dice **continua** se la sua intensità non cambia nel tempo.

Si misura con l'amperometro, che deve essere collegato in serie al conduttore e l'unità di misura nel SI è l'**ampere**: $1\,\text{A} = \frac{1\,\text{C}}{1\,\text{s}}$

I GENERATORI DI TENSIONE E I CIRCUITI ELETTRICI

Una differenza di potenziale ai capi di un conduttore genera una corrente elettrica.

Si chiama **generatore di tensione continua** un dispositivo capace di mantenere ai suoi capi una differenza di potenziale costante.

Esempi di generatori di tensione sono:
- la pila;
- la dinamo della bicicletta;
- la centrale elettrica.

Un generatore di tensione continua, come una pila, ha due poli contraddistinti dai simboli «+» (a potenziale più alto) e «-» (a potenziale più basso). In un filo conduttore collegato a essi, le cariche positive si muovono dal polo positivo a quello negativo. Questo è il verso convenzionale scelto per la corrente elettrica.
In realtà ora sappiamo che nei conduttori metallici le uniche cariche in movimento sono quelle degli elettroni.
Per funzionare, un generatore di tensione consuma energia.

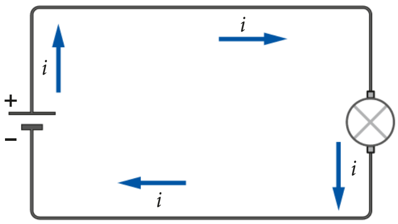
Gli elettroni, essendo negativi, risalgono la «discesa di potenziale», spostandosi dal polo negativo al polo positivo e quindi si muovono nel verso opposto a quello convenzionale della corrente.

Colleghiamo i capi di una lampadina ai poli di una pila con due fili di rame: vediamo che la lampadina si illumina. Ciò che abbiamo realizzato è un circuito elettrico.

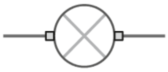
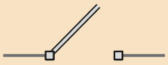
Se la catena dei conduttori non è interrotta, il circuito si dice *chiuso* e in esso fluisce una corrente elettrica. Se è interrotta, il circuito si dice *aperto* e in esso non c'è corrente.

> Si chiama **circuito elettrico** un insieme di conduttori collegati in modo continuo e collegati a un generatore.

Esso è rappresentato da uno *schema*, in cui è indicato il verso convenzionale della corrente.
Ciascun elemento di un circuito è rappresentato da un simbolo, come indicato in tabella.

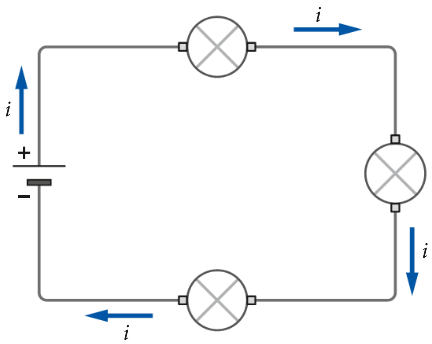


Simboli elettrici

Generatore di tensione continua	
Lampadina	
Resistore	
Conduttore di resistenza zero	
Interruttore aperto	
Interruttore chiuso	
Condensatore	
Messa a terra	

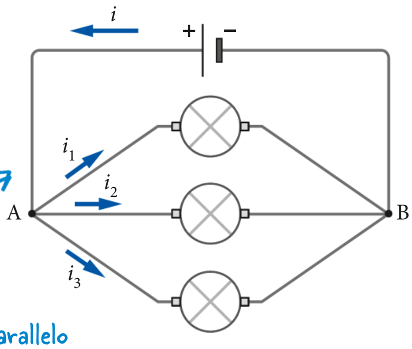
I conduttori di un circuito possono essere collegati *in serie* o *in parallelo*.

> Più conduttori sono collegati **in serie** se sono posti in successione tra loro. In essi passa la stessa corrente elettrica.



collegamento in serie

> Più conduttori sono collegati **in parallelo** se hanno le prime estremità connesse tra loro e anche i secondi estremi connessi tra loro. Essi sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale.



collegamento in parallelo

LE LEGGI DI OHM

Come varia la corrente in un conduttore di metallo quando aumentiamo la differenza di potenziale ai suoi capi? La relazione che cerchiamo è data dalla

Prima legge di Ohm. Nei conduttori metallici l'intensità di corrente è *direttamente proporzionale* alla differenza di potenziale applicata ai loro capi.

intensità di corrente elettrica (A)

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

differenza di potenziale (V)

resistenza (Ω)

Prima legge di Ohm

La costante di proporzionalità R si chiama **resistenza elettrica** si misura in ohm (Ω): $1\ \Omega = \dfrac{1\,V}{1\,A}$

Un **resistore** è un componente elettrico che segue la prima legge di Ohm.

La differenza di potenziale ai capi di un resistore si misura con il voltmetro, che va collegato in parallelo al conduttore, e deve avere una resistenza interna molto grande.

L'amperometro che va collegato in serie al conduttore deve avere, invece, una resistenza interna molto piccola.

Consideriamo un filo metallico caratterizzato da una lunghezza l e da un'area trasversale A: possiamo ora enunciare la

Seconda legge di Ohm. La resistenza R di un filo conduttore è direttamente proporzionale alla sua lunghezza l e inversamente alla sua area trasversale A.

resistenza elettrica (Ω)

resistività (Ω·m)

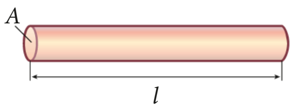
$$R = \rho\,\frac{l}{A}$$

lunghezza (m)

area trasversale (m²)

Seconda legge di Ohm

ρ è la **resistività**, una proprietà che dipende dal particolare materiale con cui è fatto il filo e si misura in $\Omega \cdot m$.
I buoni conduttori hanno resistività bassa; nei buoni isolanti la resistività è molto elevata; nei **semiconduttori** essa ha valori intermedi.



LA FORZA ELETTROMOTRICE

Ogni generatore di tensione è caratterizzato da una grandezza unitaria, detta **forza elettromotrice**.

La **forza elettromotrice** f_{em} di un generatore è il rapporto tra il lavoro W che il generatore compie per spostare una carica q al suo interno e la carica q stessa.

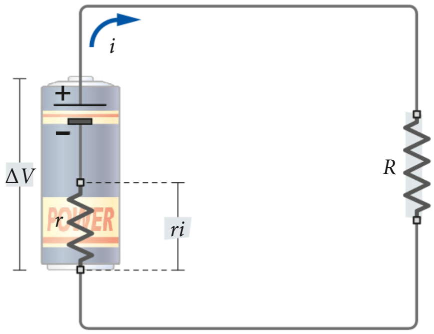
forza elettromotrice (V)

$$f_{em} = \frac{W}{q}$$

lavoro (J)

carica elettrica (C)

La f.e.m. si misura in volt (V).
La forza elettromotrice f_{em} di un generatore è uguale alla tensione che si ha tra i poli quando il generatore non eroga corrente.



In realtà, quando circola corrente, una parte dell'energia fornita dal generatore serve per vincere la resistenza al moto delle cariche al suo interno. Associamo pertanto a ogni generazione reale una sua resistenza interna r.
Un generatore reale è un generatore ideale in serie a una data resistenza interna r.
La differenza di potenziale ΔV ai capi del generatore è uguale alla differenza tra la tensione f_{em} mantenuta dal generatore e la tensione ai capi della resistenza interna:

$$\Delta V = f_{em} - ri$$

ΔV risulta sempre minore di f_{em}

LE LEGGI DI KIRCHHOFF

Risolvere un circuito significa determinare il valore e il verso di tutte le correnti presenti e, di conseguenza, anche il valore delle tensioni ai capi di tutti i resistori.
Le leggi di Kirchhoff esprimono le proprietà fondamentali di un circuito ohmico.
Sono necessarie per risolvere un circuito con più di un generatore o con una disposizione di resistori complessa.

Un **nodo** è un punto in cui convergono tre o più conduttori.

PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF (LEGGE DEI NODI)

La prima legge di Kirchhoff è diretta conseguenza del principio di conservazione della carica elettrica.

$$i_1 + i_2 + ... + i_m = \sum_{k=1}^{m} i_k = 0$$

La somma delle intensità di corrente entranti in un nodo è uguale alla somma di quelle uscenti.

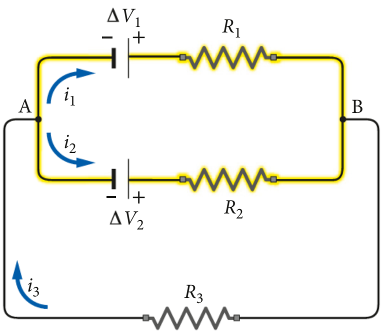
SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF (LEGGE DELLE MAGLIE)

In una rete elettrica, una maglia è un percorso chiuso che parte da un nodo e torna allo stesso nodo, senza percorrere lo stesso ramo due o più volte.

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + ... + \Delta V_p = \sum_{k=1}^{p} \Delta V_k = 0$$

La somma algebrica delle differenze di potenziale che si incontrano percorrendo una maglia è uguale a zero.

La seconda legge di Kirchoff è un'espressione del principio di conservazione dell'energia.



LA TRASFORMAZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

L'energia elettrica può essere trasformata in calore.

L'**effetto Joule** è la trasformazione dell'energia elettrica in energia interna che si manifesta come aumento della temperatura del filo percorso dalla corrente: è sfruttato nei ferri da stiro e negli asciugacapelli.

L'effetto Joule vale sia per la corrente continua che per la corrente alternata. Puoi approfondire la corrente alternata alla **lezione 26**.

Consideriamo un resistore percorso da una corrente elettrica.

Si chiama **potenza dissipata** dal resistore la rapidità con cui l'energia elettrica è trasformata in calore.

potenza dissipata (W)

resistenza (Ω)

$$P = Ri^2$$

intensità di corrente (A)

Combinando la formula con la prima legge di Ohm, la relazione si può riscrivere nella forma

$$P = \frac{\Delta v^2}{R} \quad \text{oppure } P = \Delta v \cdot i$$

Per esempio, una lavatrice, nella fase in cui scalda l'acqua, assorbe una potenza di 2 kW. Se continua a funzionare per 2 ore, consuma un'energia di 4 kWh.
I consumi di energia elettrica non sono di solito espressi in joule, ma in kilowattora (kWh), che è una unità di misura di energia e non di potenza.

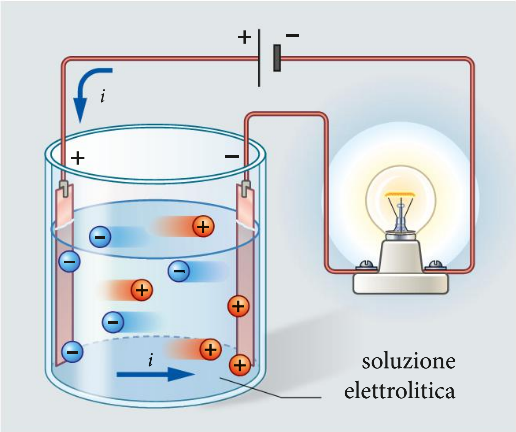
$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ J}$

1 kWh è l'energia assorbita in un'ora da un dispositivo che dissipa la potenza di 1000 W.

LA CORRENTE ELETTRICA NEI LIQUIDI

Se in una soluzione sono sciolti sali o acidi, la soluzione si dice **soluzione elettrolitica** e può condurre l'elettricità.

In una soluzione elettrolitica (liquido + acido o sale) la corrente elettrica è costituita da ioni positivi che si spostano verso il polo negativo, e da ioni negativi, che migrano verso il polo positivo.

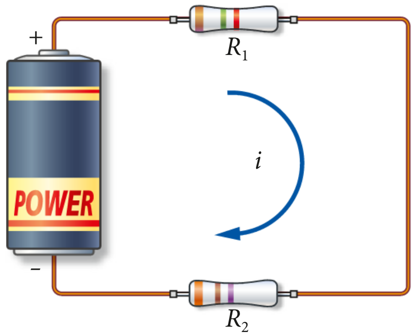


LEZIONE 25

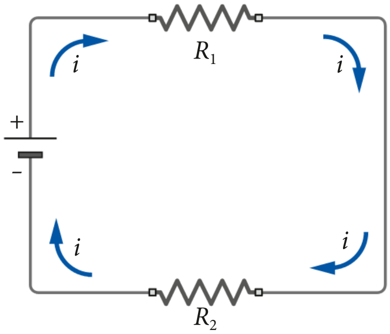
Resistenze e condensatori

RESISTORI IN SERIE

Questo circuito è costituito da una pila e da due resistori in serie.



Lo stesso circuito è rappresentato da questo schema.



L'intensità i della corrente che scorre nel circuito sarebbe la stessa sostituendo i due resistori (di resistenze R_1 e R_2) con un unico resistore che ha resistenza $R = R_1 + R_2$.
R è detta **resistenza equivalente** delle due resistenze in serie perché, dal punto di vista della pila, non cambia niente se nel circuito ci sono le due resistenze originali o la sola resistenza R.
In generale si dimostra che la resistenza di un conduttore, formato da più resistori posti in serie, è uguale alla somma delle resistenze dei singoli resistori:

Resistenza equivalente (serie)

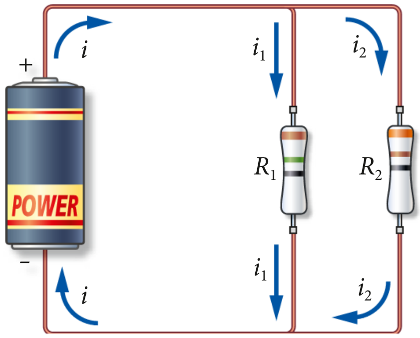
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + ...$$

Ogni resistore aggiunto in serie aumenta la resistenza totale del circuito, perché si aggiunge un nuovo ostacolo al fluire della corrente.

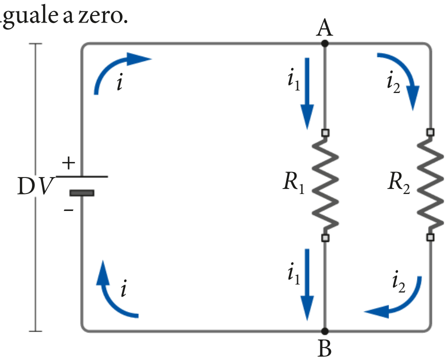
RESISTORI IN PARALLELO

Nel caso di due resistenze in parallelo l'espressione per la resistenza equivalente diventa: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Il circuito sotto è costituito da una pila e da due resistori collegati in parallelo.



Nello schema i segmenti, che rappresentano i fili di connessione, hanno resistenza uguale a zero.



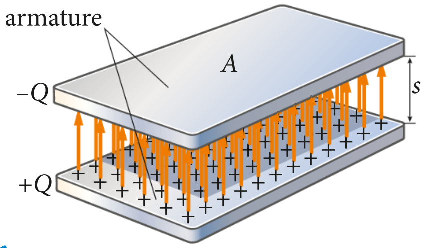
L'intensità i della corrente che esce dal generatore sarebbe la stessa, sostituendo i due resistori (di resistenze R_1 e R_2) con un unico resistore di resistenza R data dalla relazione $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. R è detta **resistenza equivalente** delle due resistenze in parallelo. In generale si dimostra che se si hanno diversi resistori collegati in parallelo, l'inverso della loro resistenza equivalente R è uguale alla somma degli inversi delle resistenze dei singoli resistori:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+...$$

Resistenza equivalente (parallelo)

Ogni resistore aggiunto in parallelo diminuisce la resistenza totale del circuito, perché è come offrire una possibilità in più al fluire della corrente elettrica.

CONDENSATORI PIANI



Un condensatore piano è formato da due lastre metalliche parallele, dette *armature*, elettrizzate con cariche uguali e opposte, sistemate a una distanza piuttosto piccola rispetto alla loro estensione.
Al suo interno il campo elettrico è uniforme e perpendicolare alle armature.

$$C=\frac{Q}{\Delta V}$$

La capacità di un conduttore è data dal rapporto tra carica e potenziale: $C=\frac{Q}{V}$

Q è la carica sulla piastra positiva del condensatore e ΔV la differenza di potenziale tra le due piastre. La costante C si chiama **capacità di un condensatore**: dipende dalla geometria del condensatore e dal mezzo materiale che si trova tra le armature.

La capacità si misura in **farad**: $1\text{ F} = \frac{1\text{ C}}{1\text{ V}}$.

Gli esperimenti mostrano che la capacità di un condensatore è direttamente proporzionale all'area A di una delle armature e inversamente proporzionale alla distanza s che le separa.

Nel vuoto: $C=\frac{A}{4\pi k_0 s}$

k_0 è la costante che compare nella legge di Coulomb

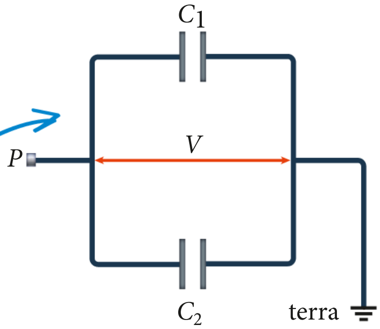
La capacità di un condensatore aumenta se tra le sue armature è inserito un dielettrico. Infatti, il dielettrico si polarizza. Per calcolare la capacità del condensatore in presenza di un dielettrico, si deve sostituire alla costante dielettrica assoluta nel vuoto, la costante dielettrica assoluta del mezzo, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, ottenendo nel mezzo:

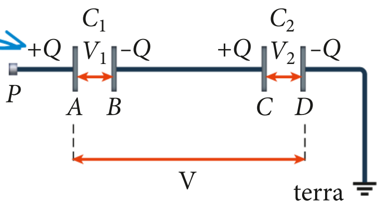
$$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{S}$$

CONDENSATORI IN SERIE E IN PARALLELO

Due o più condensatori sono collegati in parallelo se sono connessi in modo da avere ai loro estremi la stessa differenza di potenziale. $C_{eq}=C_1+C_2+C_3+...$

Due o più condensatori collegati in serie portano sulle armature la stessa carica. $\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+...$





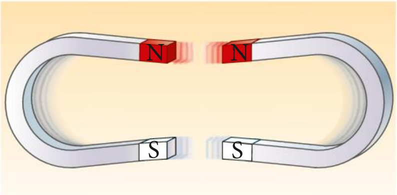
La loro capacità equivalente è uguale alla somma delle capacità dei singoli condensatori.

L'inverso della loro capacità equivalente è pari alla somma degli inversi delle loro singole capacità.

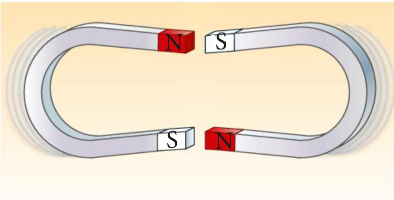
LEZIONE 26

Il magnetismo

LA FORZA MAGNETICA



repulsione



attrazione

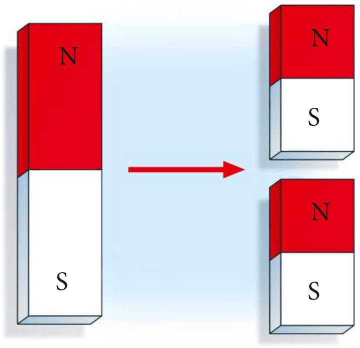
In natura esistono sostanze dette *ferromagnetiche* che possono essere magnetizzate, cioè attirano piccoli pezzetti di ferro, e diventano *calamite* o *magneti artificiali.*

Un ago magnetico è una piccola calamita che può ruotare intorno al suo centro: ruota sempre fino a disporsi nella direzione nord-sud.

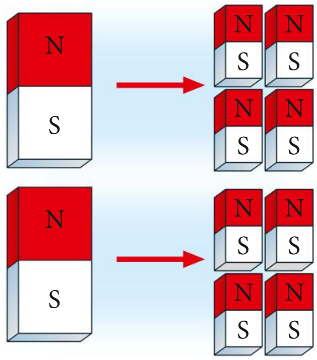
Il **polo nord** è l'estremo del magnete che punta verso il Polo Nord terrestre; l'estremo diametralmente opposto si chiama **polo sud**.

Due poli nord o due poli sud, affacciati, si respingono. Un polo nord e un polo sud, vicini, si attraggono.

Se dividiamo una calamita in due parti, ciascuno dei frammenti ha un polo nord e un polo sud.



Suddividendo le due calamite piccole in quattro parti, otteniamo otto magneti, ciascuno con due poli.



Non è possibile suddividere un magnete in modo da ottenere un polo nord isolato o un polo sud isolato.

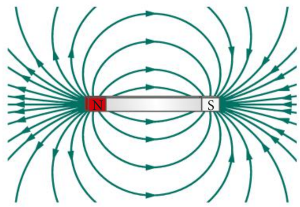
Il campo elettrico e il campo magnetico hanno proprietà simili, però differiscono per aspetti molto importanti:

- quando si ha l'elettrizzazione per contatto, parte della carica elettrica del primo corpo passa al secondo, mentre nella magnetizzazione di un oggetto ferromagnetico non si ha alcun passaggio di poli magnetici;
- esistono oggetti carichi positivamente o carichi negativamente, mentre una calamita ha *sempre entrambi* i poli sud e nord.

LE LINEE DEL CAMPO MAGNETICO

Ogni magnete produce nello spazio intorno a sé un campo magnetico: quindi una calamita esercita una forza magnetica su una seconda calamita.
Il campo magnetico, come il campo elettrico, si rappresenta mediante **linee di campo**. Si disegnano utilizzando un **magnete di prova**, cioè un piccolo ago magnetico. Le linee di campo:

- in ogni punto sono **tangenti** alla direzione del campo magnetico;
- escono dai poli nord dei magneti ed entrano nei poli sud;
- hanno **densità** direttamente proporzionale all'intensità del campo magnetico.



FORZE TRA MAGNETI E CORRENTI

Nel 1820 Hans Christian Oersted scoprì un legame tra fenomeni elettrici e fenomeni magnetici.

> Un filo percorso da corrente genera un campo magnetico (che fa ruotare un ago magnetico).

Esperimento di Oersted

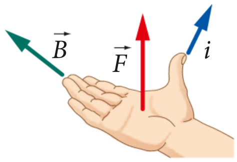
L'anno successivo Michael Faraday scoprì che:

> Un filo percorso da corrente, posto in un campo magnetico, subisce una forza magnetica.

Esperimento di Faraday

Per stabilire il **verso** della forza magnetica su un filo rettilineo percorso da corrente si utilizza la **regola della mano destra**. Ponendo:

- il pollice della mano destra nel verso della corrente,
- le altre dita nel verso delle linee di campo magnetico,
- il verso della forza magnetica è quello che esce dal palmo della mano.



La forza a cui è soggetto un filo percorso da corrente è nulla se campo magnetico e filo sono **paralleli**. Infatti tale forza è data dalla relazione $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ in cui compare un prodotto vettoriale che si annulla quando i due vettori sono paralleli.

Le esperienze di Oersted e Faraday mostrano che esiste **una relazione fra corrente elettrica e campo magnetico**, perché una corrente elettrica genera un campo magnetico e subisce una forza magnetica.
Ci si deve aspettare allora che esista una forza magnetica tra due fili percorsi da corrente: lo verificò il fisico francese André Marie Ampère, da cui prende il nome la

> **Legge di Ampère.** Due fili rettilinei e paralleli si attraggono se attraversati da correnti nello stesso verso, si respingono se le correnti hanno versi opposti.

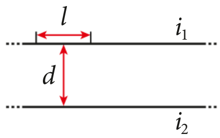
La relazione matematica che esprime la legge di Ampère è:

prima corrente (A) — seconda corrente (A)

$$F = k_m \frac{i_1 i_2}{d} l$$

forza (N) — lunghezza (m)

costante di proporzionalità (N/A²) — distanza (m)



Legge di Ampère

$$\text{con } k_m = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad \text{nel vuoto}$$

Il valore della costante k_m è stato scelto convenzionalmente per definire in modo operativo l'unità di misura della corrente elettrica, cioè l'ampere.

> Una corrente ha intensità di 1 A se, circolando in due fili rettilinei molto lunghi, che distano 1 m tra di loro, provoca una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ N su ogni tratto di filo lungo 1 m.

L'**ampere** è una unità di misura fondamentale del SI.
Il **coulomb** è la carica che attraversa, in 1 s, una sezione di un filo percorsa da una corrente di intensità 1 A.

$$1\ \mathrm{C} = (1\ \mathrm{A}) \cdot (1\ \mathrm{s})$$

Il coulomb è una unità di misura derivata dall'ampere.

L'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO

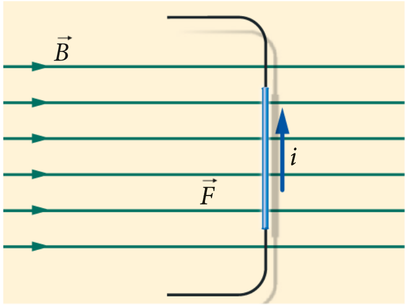
Usando un ago magnetico, determiniamo la direzione e il verso di un campo magnetico $\vec{B}$. Per definire la sua intensità, usiamo un filo di prova percorso da corrente immerso nel campo magnetico.

> La forza magnetica F su un filo percorso da corrente i e perpendicolare alle linee di campo è **direttamente proporzionale** alla lunghezza l del filo e all'intensità di corrente che lo attraversa.

campo magnetico (T) — forza magnetica (N)

$$B = \frac{F}{il}$$

lunghezza (m) — intensità di corrente (A)



Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo magnetico è il **tesla** (T):

$$1\,\mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}$$

LA FORZA MAGNETICA SU UNA CARICA IN MOVIMENTO

Il campo magnetico è generato da cariche elettriche *in moto* e, a loro volta, cariche elettriche *in moto* sono soggette a forze dovute a un campo magnetico.
Possiamo definire la forza di Lorentz:

> La **forza di Lorentz** è la forza esercitata da un campo magnetico su una carica q in moto con velocità $\vec{v}$.

forza di Lorentz (N) — velocità (m/s)

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \vec{B}$$

carica elettrica (C) — campo magnetico (T)

Il suo modulo è dato da $F_q = qvB_\perp$ o $F_q = qvB\mathrm{sen}\alpha$, dove α è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$.
La direzione è perpendicolare al piano definito dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$.
Il verso è dato dalla **regola della mano destra**: se la carica è positiva, si punta il pollice nel verso della velocità; se è negativa, si punta il pollice nel verso opposto a quello di $\vec{v}$.
La forza di Lorentz e lo spostamento istantaneo della carica sono perpendicolari: di conseguenza, la forza non può cambiare il valore della velocità di una carica, ma può modificare la sua direzione.

CAMPO MAGNETICO DI UN FILO

Un filo percorso da corrente genera un campo magnetico. In un punto a distanza d dal filo, in cui circola una corrente i, il valore del campo è dato dalla formula:

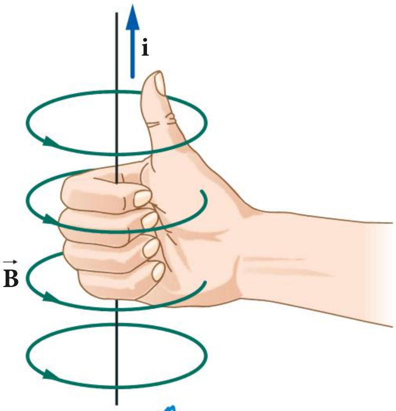
campo magnetico (T)

intensità di corrente (A)

$$B = k_m \frac{i}{d}$$

costante di proporzionalità (N/A²)

distanza (m)



Il campo magnetico è direttamente proporzionale all'intensità di corrente e inversamente proporzionale alla distanza dal filo.
Le linee di campo sono circonferenze concentriche al filo e perpendicolari a esso.

regola della mano destra

LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN E LA LEGGE DI LENZ

Un campo magnetico che *varia* genera in un circuito una corrente *indotta*, che dipende da tre grandezze:

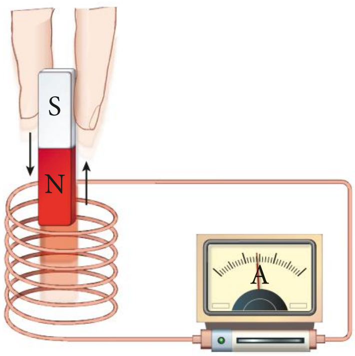
- la rapidità di variazione del campo magnetico esterno
- l'area del circuito indotto
- la sua orientazione.

Si ha corrente indotta quando varia il flusso di campo magnetico attraverso la superficie che ha per contorno il circuito indotto. Possiamo enunciare la

Legge di Faraday-Neumann. La forza elettromotrice indotta media è direttamente proporzionale alla rapidità con cui varia il flusso di campo magnetico.

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Legge di Faraday-Neumann



Nel caso di circuito in moto, la corrente indotta è interpretata come l'effetto della forza di Lorentz che agisce sugli elettroni di conduzione nel circuito.

La legge di Lenz è espressa, dal punto di vista matematico, dal segno «meno» che compare nella legge di Faraday-Neumann.

Legge di Lenz. Il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera.

La legge di Lenz afferma la validità del principio di conservazione dell'energia: se il campo indotto, per esempio, accentuasse un aumento di flusso totale, questo creerebbe una corrente indotta più intensa e quindi un nuovo campo magnetico indotto, innescando un processo senza fine.

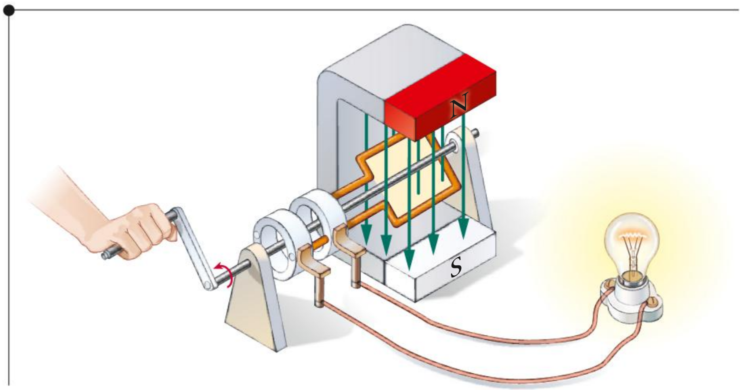
LA CORRENTE ALTERNATA

La tensione elettrica degli impianti domestici è generata nelle centrali elettriche dagli *alternatori*, dispositivi che trasformano energia cinetica in energia elettrica e che sono un'applicazione della legge sperimentale dell'induzione elettromagnetica.

Un **alternatore** è un dispositivo che trasforma energia cinetica in energia elettrica.

Infatti, l'alternatore contiene delle parti che devono continuare a muoversi, altrimenti esso smette di produrre forza elettromotrice.

L'alternatore di un'automobile, che alimenta la batteria, è mantenuto in movimento dal motore.



In linea di principio un alternatore è formato da una spira che viene fatta ruotare con velocità angolare costante all'interno di un campo magnetico. La diversa orientazione della spira rispetto alle linee del campo $\vec{B}$ fa sì che il flusso magnetico vari continuamente, generando così una corrente indotta.
Per la legge di Faraday-Neumann, più rapidamente muoviamo la spira, maggiore è la forza elettromotrice e, a parità di resistenza elettrica, maggiore è anche la corrente indotta nella spira.

forza elettromotrice alternata

$$f_{em}(t) = f_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

tempo

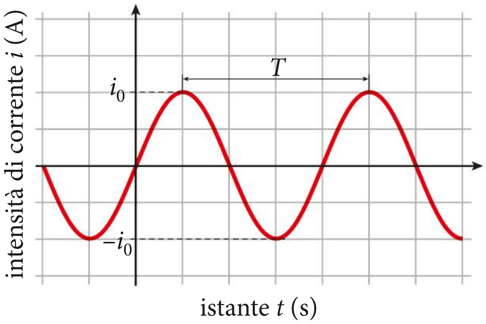
ampiezza della forza elettromotrice

velocità angolare della spira

La tensione alternata è prodotta dall'alternatore, in cui una spira rettangolare ruota all'interno di un campo magnetico: la variazione del flusso di campo magnetico genera nella spira una corrente indotta.

- ω è la velocità angolare costante della spira attorno al suo asse;
- f_0 è detta *ampiezza* della forza elettromotrice.

La tensione alternata cambia continuamente valore, ma si ripete uguale dopo un periodo T, impiegato dalla spira a compiere un giro completo.



La corrente alternata scorre con intensità variabile e cambia di verso ogni metà periodo.

$$i(t) = i_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Il **valore efficace** della corrente alternata rappresenta l'intensità di una corrente continua che eroga la stessa potenza fornita dalla corrente alternata.

$$i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

valore massimo corrente

Si può definire anche il valore efficace della forza elettromotrice alternata:

$$f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

ampiezza della forza elettromotrice

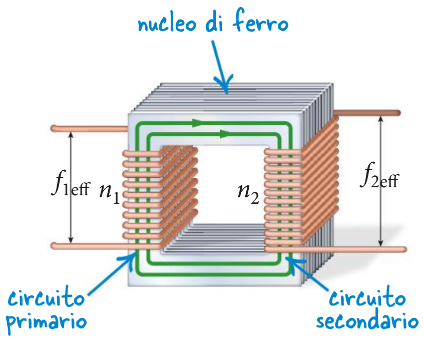
Dire che la tensione domestica è 220 V significa in realtà che f_{eff} = 220 V.

Si riesce così a scrivere la **potenza media dissipata** come $\overline{P} = i_{eff} f_{eff}$.

IL TRASFORMATORE

I trasformatori servono per innalzare e abbassare la tensione dalla rete di distribuzione dell'energia elettrica.

Il **trasformatore** è un dispositivo capace di modificare il valore della tensione e della corrente alternata.



È composto da un nucleo di ferro, attorno a cui sono avvolte due bobine.

- Il *circuito primario* genera un campo magnetico che varia con la corrente alternata.
- Di conseguenza, nel *circuito secondario* si genera una corrente indotta.

Il nucleo di ferro aumenta l'intensità del campo magnetico generato dal circuito primario.
Il circuito primario è formato da n_1 spire, mentre quello secondario è formato da n_2 spire. Se indichiamo con f_{1eff} il valore efficace della tensione in ingresso nel trasformatore e con f_{2eff} il valore efficace di quella in uscita, dalla legge di Faraday-Neumann si dimostra la seguente relazione:

tensione efficace in uscita (V)

numero di spire del secondario

$$f_{2eff} = f_{1eff} \frac{n_2}{n_1}$$

tensione efficace in ingresso (V)

numero di spire del primario

Quindi, costruendo il trasformatore con un numero opportuno di spire nei due circuiti, è possibile modificare il valore della tensione alternata nel modo che si desidera.

$$\frac{n_2}{n_1}$$

rapporto di trasformazione

I trasformatori possono avere caratteristiche e dimensioni molto diverse tra loro.