EDOARDO SERNESI

GEOMETRIA 2

PROGRAMMA
DI
MATEMATICA
FISICA
ELETTRONICA

BOLLATI BORINGHIERI

Edoardo Sernesi, nato nel 1947,
è professore ordinario di Istituzioni di Geometria
superiore alla Terza Università di Roma.
È autore del volume Geometria 1, *pubblicato*
in questa collana 1989.

PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA

Mario Ageno, *Elementi di fisica*
T.M. Apostol, *Calcolo*
  Vol. 1 *Analisi 1*
  Vol. 2 *Geometria*
  Vol. 3 *Analisi 2*
Michiel Bertsch, *Istituzioni di matematica*
Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elettromagnetismo Ottica*
Max Born, *Fisica atomica*
Stefano Campi, Massimo Picardello e Giorgio Talenti, *Analisi matematica e calcolatori*
Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*
Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*
Sergio Carrà, *Termodinamica: aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*
Ciro Ciliberto, *Algebra lineare*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 1*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 2*
P.A.M. Dirac, *I princìpi della meccanica quantistica*
Albert Einstein, *Il significato della relatività*
Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica analitica con elementi di meccanica statistica e dei continui*
Enrico Fermi, *Termodinamica*
Bruno Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*
Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*
Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica* (vol. 1)
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica* (vol. 2)
Angelo Guerraggio, *Matematica generale*
Hermann Haken e Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*
Werner Heisenberg, *I princìpi fisici della teoria dei quanti*
Gerhard Herzberg, *Spettri atomici e struttura atomica*
David A. Hodges e Horace G. Jackson, *Analisi e progetto di circuiti integrati digitali*
Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*
Charles Kittel e Herbert Kroemer, *Termodinamica statistica*
Serge Lang, *Algebra lineare*
Giorgio Letta, *Teoria elementare dell'integrazione*
P.F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi, *L'amplificatore operazionale*
Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*
Jacob Millman e C.C. Halkias, *Microelettronica*
R.S. Muller e T.I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*
Athanasios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*
Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*
Giovanni Prodi, *Analisi matematica*
Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*
Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*
H.H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*
Edoardo Sernesi, *Geometria 1*
Edoardo Sernesi, *Geometria 2*
I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*
W.V. Smith e P.P. Sorokin, *Il laser*
Giovanni Soncini, *Tecnologie microelettroniche*
Guido Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*
Bruno Touschek e Giancarlo Rossi, *Meccanica statistica*

EDOARDO SERNESI

GEOMETRIA 2

BOLLATI BORINGHIERI

Prima edizione ottobre 1994

© 1994 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele 86
I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDROS), via delle Erbe 2, 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010863

Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino
CL 74-9384-3   ISBN 88-339-5548-6

Indice

Prefazione *VII*

1 Spazi topologici e applicazioni continue *3*

1 Spazi metrici, 3
2 Spazi topologici, 10
3 Sottoinsiemi di uno spazio topologico, 24
4 Applicazioni continue, 34

2 Esempi *42*

5 Sottospazi, 42
6 Prodotti, 61
7 Quozienti, 72

3 Proprietà topologiche *88*

8 Proprietà di separazione, 88
9 Compattezza, 101
10 Generalizzazioni della compattezza, 114
11 Connessione, 125
12 Connessione per archi, 135

4 Omotopia, gruppo fondamentale e rivestimenti *142*

13 Omotopia di applicazioni continue, 142
14 Il gruppo fondamentale, 145
15 Proprietà funtoriali del gruppo fondamentale, 151
16 Esempi ed applicazioni, 154
17 Rivestimenti, 162
18 Rivestimenti universali, 167

5 Varietà differenziabili *173*

19 Funzioni e applicazioni differenziabili - Varietà, 173
20 Esempi di varietà differenziabili, 180
21 Spazi tangenti, 190
22 Differenziali, 195
23 Orientabilità, 202
24 Diffeomorfismi locali, 207
25 Immersioni e sottovarietà, 213
26 Summersioni, 221
27 Applicazioni differenziabili e insiemi di misura nulla, 231
28 Campi vettoriali, 238
29 Il teorema di Whitney, 243

6 Geometria differenziale di curve e superfici *251*

30 Curve differenziabili, 251
31 Classificazione delle curve regolari di R^N, 255
32 Curve regolari di R^2 e di R^3, 263
33 Superfici di R^N: isometrie e prima forma fondamentale, 275
34 Superfici di R^3: operatore forma e seconda forma fondamentale, 288
35 Curvature, 292
36 Proprietà globali delle superfici di R^3, 308
37 Il Theorema Egregium, 313
38 Geodetiche, 319
39 Geometrie non euclidee, 324

7 Integrazione sulle varietà differenziabili *331*

40 Algebra multilineare, 331
41 Varietà con bordo, 345
42 Forme differenziali, 353
43 Integrazione sulle varietà con bordo, 359
44 Differenziazione esterna, 365
45 Il teorema di Stokes, 369

Risoluzione degli esercizi *375*

Bibliografia *383*

Elenco dei simboli *385*

Indice analitico *389*

Prefazione

Questo manuale è un libro di testo per il corso di Geometria II del Corso di Laurea in Matematica e insieme al mio precedente Geometria 1 *completa, per quanto riguarda la geometria, l'insieme degli argomenti istituzionali del primo biennio. In realtà il programma di un secondo corso di geometria varia anche di molto da università a università: per questo motivo ho deciso di inserire materiale "in eccesso" in modo da assicurare un impiego abbastanza flessibile del testo.*

Mentre nel primo volume il tema dominante è l'algebra lineare, questo secondo volume si occupa dell'aspetto topologico-differenziale della geometria nelle sue varie forme.

Una prima parte è dedicata alla topologia generale. Pur sapendo che le si dedica sempre meno spazio nei corsi istituzionali, rimango convinto della sua funzione formativa.

Quindi ad essa ho dato ampio spazio (i primi 3 capitoli) in modo che lo studente possa approfondire attraverso molti esempi ed esercizi ciò che il docente decide di svolgere a lezione. Il capitolo 4 tratta la teoria del gruppo fondamentale e dei rivestimenti, primo approccio alla topologia algebrica.

Il resto del volume si occupa delle varietà differenziabili, concetto che deve essere conosciuto da ogni matematico. Un obiettivo che mi sono posto è di separare l'aspetto topologico-differenziale da quello geometrico-differenziale. Ho pertanto riservato il capitolo 5 ad un minicorso di topologia differenziale nel quale il lettore, con l'ausilio di molti esempi, può familiarizzarsi con tecniche e nozioni di base dove non intervengono questioni di natura metrica (summersioni, immersioni, partizioni dell'unità, ecc.), spingendomi fino a dimostrare il teorema di immersione di Whitney. Nel successivo capitolo 6 si studia invece la geometria differenziale classica di curve e superfici. Qui vengono introdotte, seppure in modo elementare, anche le superfici riemanniane e la geometria intrinseca; inoltre qualche spazio è dedicato alla geometria iperbolica. Questa mi ha dato lo spunto per discutere brevemente l'assiomatica euclidea secondo Hilbert, un argomento culturalmente importante che non aveva trovato posto nel primo volume. Per il capitolo 6 non *è necessario tutto il capitolo 5: se il docente vuole svolgere solo la geometria differenziale classica può limitarsi ad introdurre le prime proprietà delle varietà differenziabili (§§ 19-23).*

Il capitolo 7 tratta dell'integrazione sulle varietà differenziabili supponendo nota l'integrazione secondo Riemann negli spazi R^n. *Questo argomento fondamentale è svolto nella maggior parte dei testi di analisi matematica in modo piuttosto affrettato e inadatto alle applicazioni geometriche. Perciò l'ho inserito, pur sapendo che non spesso troverà posto in un corso di Geometria II.*

In conclusione, il libro contiene materiale a sufficienza da consentire al docente una certa flessibilità di utilizzo, in parte anche in corsi di Istituzioni di Geometria Superiore. Gli esercizi, molti dei quali risolti, sono numerosi. L'esposizione è sistematica e rigorosa, e per questo motivo è possibile che questo testo possa rendersi utile anche come opera di consultazione a studenti del secondo biennio e a laureati.

Quasi tutti i testi elencati nella bibliografia che si trova alla fine del volume sono stati utilizzati e consultati nella preparazione del volume. Alcuni di essi potranno fornire al lettore l'occasione per approfondimenti degli argomenti trattati.

Diverse persone mi hanno aiutato nella preparazione di questo secondo volume e del precedente. Desidero ringraziare E. Arbarello, G. Campanella, Ciro Ciliberto, R. Salvati Manni, E. Sinestrari per utili suggerimenti e osservazioni. Ringrazio in modo particolare il dottor M. Bruno della Bollati Boringhieri per il suo accurato e competente lavoro redazionale.

Un ringraziamento speciale va agli studenti dei miei corsi, tra cui in particolare A. Sambusetti, per aver preteso precisione e chiarezza. Spero di riuscire ad accontentare i loro successori.

E.S.

AVVERTENZE

Come è consuetudine, denoteremo con N, Z, Q, R, C gli insiemi numerici fondamentali.

La scrittura $A := B$ significa "A è per definizione uguale a B". La fine di una dimostrazione viene contrassegnata con il simbolo ■. La composizione di due applicazioni $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ viene denotata $g \cdot f$.

Per gli altri simboli utilizzati e diversi da quelli di uso comune, rinviamo il lettore all'elenco che si trova alla fine del volume.

Geometria 2

Capitolo 1

Spazi topologici e applicazioni continue

1 Spazi metrici

Il concetto di continuità di una funzione $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, dove R è la retta reale, si esprime mediante quello di distanza: f si dice *continua in* $x \in \mathsf{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

per ogni y tale che $|y - x| < \delta_\varepsilon$. f si dice *continua* se lo è in ogni $x \in \mathsf{R}$. Analoga definizione si dà per una funzione $f : J \to \mathsf{R}$ definita in un intervallo J di R.

Si può estendere la nozione di continuità a funzioni $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ semplicemente sostituendo il modulo di un numero reale con il modulo di un vettore. Più in generale è possibile introdurre il concetto di continuità di applicazioni tra insiemi su cui siano definite funzioni "distanza" soddisfacenti ad opportune condizioni.

Precisamente, uno *spazio metrico* è un insieme non vuoto X su cui sia definita una *distanza*, cioè un'applicazione

$$d : X \times X \to \mathsf{R}$$

tale che per ogni x, x', $x'' \in X$

$$d(x, x') \geq 0$$

$$d(x, x') = d(x', x)$$

$$d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x'') \quad \text{(disuguaglianza triangolare)}$$

$$d(x, x') = 0 \text{ se e solo se } x = x'.$$

Quindi uno spazio metrico è una coppia (X, d): distanze diverse sullo stesso insieme X definiscono spazi metrici diversi.

Per esempio R con distanza $d(x, x') = |x - x'|$ è uno spazio metrico; più in generale, è uno spazio metrico R^n con la *distanza euclidea*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||,$$

dove

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2}$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ed $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ in R^n (cfr. esercizio 1).

L'insieme C dei numeri complessi è uno spazio metrico se si definisce la distanza ponendo $d(z, w) = |z - w|$.

Su un insieme arbitrario X è sempre possibile introdurre una distanza ponendo

$$d(x, x') = \begin{cases} 0 & \text{se } x = x' \\ 1 & \text{se } x \neq x'. \end{cases}$$

Questa si dice *distanza discreta* su X.

Se X è uno spazio metrico con distanza d_X e Y è un suo sottoinsieme non vuoto, ponendo

$$d_Y(y, y') = d_X(y, y')$$

per ogni y, $y' \in Y$, si definisce una distanza d_Y su Y, detta *restrizione* di d_X a Y. Lo spazio metrico (Y, d_Y) si dice *sottospazio* di (X, d_X), e questo è chiamato lo *spazio ambiente* di (Y, d_Y).

Diremo che un'applicazione $f : X \to Z$ di spazi metrici, con distanze d_X e d_Z rispettivamente, è *continua nel punto* $x \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$d_Z(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

per ogni $x' \in X$ tale che $d_X(x, x') < \delta_\varepsilon$. f sarà detta *continua* se è continua in ogni punto di X.

Si ottiene in questo modo una generalizzazione della nozione di applicazione continua di un intervallo reale in R, o di R^n in R^m.

Le applicazioni costanti di uno spazio metrico in un altro e l'identità di uno spazio metrico qualunque in se stesso sono applicazioni continue. È anche continua l'inclusione di un sottospazio nel suo spazio ambiente.

Esercizi

1. Dimostrare che ognuna delle seguenti è una distanza in R^n:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|;$$

$$d'(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'|$$

$$d''(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \max_i \{|x_i - x_i'|\}$$

2. Dimostrare che ponendo

$$d'''(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \min_i \{|x_i - x_i'|\}$$

non si definisce una distanza in R^n.

3. Dimostrare che per ogni spazio metrico X con distanza d e per ogni $r > 0$, ponendo $d_r(x,x') = rd(x,x')$, si ottiene una distanza.

4. Dimostrare che se X è uno spazio metrico con distanza d, anche

$$\bar{d}(x,x') = d(x,x')/[1 + d(x,x')]$$

è una distanza su X.

Sia X uno spazio metrico con distanza d. Se $x \in X$ ed $r > 0$, il *disco aperto di centro x e raggio r* è

$$D_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Un *sottoinsieme* di X si dice *aperto* (rispetto alla distanza d) se è unione di dischi aperti, oppure se è vuoto. Con questa definizione l'intero spazio X ed i dischi aperti sono particolari insiemi aperti.

In R con la distanza euclidea i dischi aperti sono gli intervalli aperti e limitati (a,b) $(= D_{(b-a)/2}((b+a)/2))$, $a < b$. Sono insiemi aperti ad esempio R, le semirette $(-\infty,b)$ ed $(a,+\infty)$, per ogni a, $b \in \mathsf{R}$, e i complementari di insiemi finiti. Non sono aperti gli intervalli del tipo $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $a < b$, gli insiemi finiti, e gli insiemi Z e Q, dei numeri interi e dei numeri razionali rispettivamente. Inoltre $\mathsf{R}\backslash\mathsf{Z}$ è aperto, mentre $\mathsf{R}\backslash\mathsf{Q}$ non è aperto.

Esercizi

5. Dimostrare che un sottoinsieme A di uno spazio metrico X è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ esiste $r(x) > 0$ tale che $D_{r(x)}(x)$ sia contenuto in A.

6. Dire quali dei sottoinsiemi seguenti di R^2 sono aperti rispetto alla distanza euclidea:

$$A = \{(x_1,x_2) : x_1 = x_2\}; \quad B = \{(x_1,x_2) : x_1x_2 \neq 0\};$$

$$C = \{(x_1,x_2) : x_1 > 0\}; \quad D = \{(x_1,x_2) : x_2 \leq 0\}.$$

7. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^3 sono aperti rispetto alla distanza euclidea:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : \|\mathbf{x}\| > 2\}; \qquad B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1\};$$
$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 1\}; \quad D = \mathsf{R}^2 \times \mathsf{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \in \mathsf{Q}\}.$$

8. Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di R^n non sono aperti rispetto alla distanza euclidea:

$$\mathsf{Z}^n, \ \mathsf{Q}^n, \ \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}, \ \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

9. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che

(a) $\emptyset$ ed X sono insiemi aperti;

(b) l'unione di una qualunque famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;

(c) l'intersezione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

Una delle ragioni dell'importanza degli insiemi aperti sta nel fatto che è possibile caratterizzare la continuità di un'applicazione di spazi metrici esclusivamente in termini di tali insiemi, utilizzando quindi la distanza solo indirettamente.

1.1 TEOREMA *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto A di Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in X.*

Dimostrazione. Denotiamo con d_X e d_Y le distanze in X e in Y rispettivamente. Supponiamo che f sia continua; sia A un sottoinsieme aperto e non vuoto di Y e sia $x \in f^{-1}(A)$. Poiché $f(x) \in A$ che è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $D_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Per la continuità di f in x esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$f(D_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset D_\varepsilon(f(x)).$$

Ma allora $D_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Poiché x è un punto qualsiasi di $f^{-1}(A)$ ne discende che $f^{-1}(A)$ è aperto.

Supponiamo viceversa che la condizione dell'enunciato sia soddisfatta e sia $x \in X$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon(f(x))$ è un aperto di Y e quindi $f^{-1}[D_\varepsilon(f(x))]$ è aperto in X. Poiché $x \in f^{-1}[D_\varepsilon(f(x))]$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$D_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}[D_\varepsilon(f(x))].$$

Ma allora

$$f(D_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset D_\varepsilon(f(x)),$$

cioè per ogni $x' \in X$ tale che $d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$ si ha

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

e quindi f è continua in x. Dall'arbitrarietà della scelta di x segue che f è continua. ■

Il teorema precedente è concettualmente importante perché esso afferma che per poter parlare di continuità di applicazioni non è necessario conoscere le distanze definite sul dominio e sul codominio. Tutto quel che serve è conoscere gli insiemi aperti. Questo è il punto di partenza della topologia, la quale studia insiemi su cui siano assegnati dei sottoinsiemi, che si dicono "aperti" (senza necessariamente far ricorso ad una distanza), in modo tale che il concetto di continuità si possa definire e studiare efficacemente.

1.2 *Esempi*

1. È possibile che due diverse distanze su uno stesso insieme definiscano gli stessi insiemi aperti. In questo caso le due distanze si diranno *topologicamente equivalenti*. Se ad esempio su X è definita la distanza d, ed r è un numero reale positivo, ponendo

$$d_r(x, y) = rd(x, y)$$

per ogni x, $y \in X$ si ottiene una distanza d_r su X (cfr. esercizio 3) che è diversa da d se $r \neq 1$. Si ha inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon(x) = D^r_{r\varepsilon}(x)$$

dove abbiamo denotato con D e con D^r i dischi aperti rispetto a d ed a d_r rispettivamente; ne segue che la famiglia dei dischi aperti rispetto a d coincide con quella dei dischi aperti rispetto a d_r. Quindi d e d_r sono topologicamente equivalenti.

2. In R^n le distanze d, d', d'' introdotte nell'esercizio 1 sono topologicamente equivalenti.

Per dimostrarlo consideriamo due punti distinti

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathsf{R}^n.$$

Si ha

$$d''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq nd''(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \qquad [1.1]$$

La prima disuguaglianza discende dal fatto che

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - y_i)^2\}} = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

e la seconda è vera perché

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 = \sum_i (x_i - y_i)^2 \leq \left(\sum_i |x_i - y_i|\right)^2 = d'(\mathbf{x},\mathbf{y})^2.$$

L'ultima disuguaglianza è evidente.

Fissati $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$ ed $\varepsilon > 0$, dalle [1.1] segue che

$$D''_\varepsilon(\mathbf{x}) \supset D_\varepsilon(\mathbf{x}) \supset D'_\varepsilon(\mathbf{x}) \supset D''_{\varepsilon/n}(\mathbf{x}). \qquad [1.2]$$

Quindi se A è un aperto rispetto alla distanza d, per ogni $\mathbf{x} \in A$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $D_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset A$ e allora, per le [1.2],

$$D'_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset D_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset A \text{ e } D''_{\varepsilon/n}(\mathbf{x}) \subset D_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset A,$$

quindi A è aperto anche rispetto a d'' e a d'. Gli altri casi si verificano in modo simile.

3. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione. Sia $x \in X$; se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x' \in X$ si abbia

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq M d_X(x', x)$$

allora f è continua in x.

Infatti l'ipotesi implica che per ogni $\varepsilon > 0$

$$f(D_{\varepsilon/M}(x)) \subset D_\varepsilon(f(x)),$$

e quindi prendendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon/M$ la condizione della definizione è soddisfatta.

4. Ogni applicazione lineare $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee. Per dimostrarlo utilizzeremo il criterio dell'esempio 3 applicato alle distanze d' in R^n ed in R^m che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee (cfr. esempio 2).

Poiché ogni applicazione costante è continua, possiamo supporre che L non sia l'applicazione nulla. Sia $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ la matrice che rappresenta L. Se $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in \mathsf{R}^n$ si ha:

$$d'(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{x}')) = \left|\sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j)\right| + \ldots + \left|\sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j)\right| \leq$$

$$\leq (\max_j |a_{1j}|)\left|\sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)\right| + \ldots + (\max_j |a_{mj}|)\left|\sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)\right| \leq Mmd'(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

dove $M = \max|a_{ij}| > 0$ perché L non è l'applicazione nulla. Dal criterio dell'esempio 3 segue che L è continua.

Casi particolari importanti di applicazioni lineari sono le proiezioni $p_i : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$, $i = 1, \dots, n$, definite da $p_i(\mathbf{x}) = x_i$.

Più in generale siano $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m < n$; definiamo la *proiezione*

$$p_{i_1,\dots,i_m} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$$

ponendo

$$p_{i_1,\dots,i_m}(\mathbf{x}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}).$$

$p_{i_1,\dots,i_m}$ è lineare e quindi continua.

5. Siano X ed Y spazi metrici. Un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ si dice un'*isometria* se per ogni x, $x' \in X$ si ha

$$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')).$$

Un'isometria è un'applicazione continua; ciò segue dal criterio dell'esempio 3 con $M = 1$.

X e Y si dicono *isometrici* se esiste un'isometria $f : X \to Y$. L'identità di uno spazio metrico in sé stesso, l'inversa di un'isometria e la composizione di due isometrie sono altrettante isometrie. Quindi l'isometria è una relazione di equivalenza tra spazi metrici.

6. Siano X ed Y spazi metrici. Un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ si dice un *omeomorfismo* se è continua e se anche la sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Ad esempio l'applicazione

$$\exp : \mathsf{R} \to (0, +\infty)$$

definita da $\exp(x) = e^x$, è un omeomorfismo perché ha inversa continua

$$\log : (0, +\infty) \to \mathsf{R}$$
$$y \mapsto \log(y).$$

Ma evidentemente exp non è un'isometria, perché manda l'intervallo $(-\infty, 0]$ nell'intervallo $(0, 1]$.

Due spazi metrici si dicono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo di uno sull'altro. È immediato verificare che l'omeomorfismo è una relazione di equivalenza tra spazi metrici.

7. L'insieme Q dei numeri razionali, con la distanza usuale, non è omeomorfo ad R perché non esistono biezioni tra Q e R.

Esercizi

10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la distanza $\overline{d}$ definita nell'esercizio 4 è topologicamente equivalente a d.

11. Sia (X, d) uno spazio metrico ed $y \in X$. Dimostrare che l'applicazione $f : X \to \mathsf{R}$ definita da $f(x) = d(x, y)$ è continua.

12. Dimostrare che l'intersezione di una famiglia qualunque di sottoinsiemi aperti di uno spazio metrico non è in generale aperta (*suggerimento*: si prenda la famiglia di tutti i dischi aperti di centro un punto fissato).

13. Dimostrare che se d_1 e d_2 sono distanze topologicamente equivalenti su un insieme X, l'identità di X in se stesso è un omeomorfismo se si considera il dominio con distanza d_1 e il codominio con distanza d_2.

14. Dimostrare che un'applicazione lineare $L : \mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^m$ è continua.

15. Un sottoinsieme S di uno spazio metrico X si dice *limitato* se esistono $x \in X$ e $r > 0$ tali che $S \subset D_r(x)$.
Ogni sottoinsieme finito di uno spazio metrico è limitato. Gli intervalli di R della forma (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ sono limitati, mentre non sono limitati gli intervalli $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, R.
Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^n, $n \geq 2$, sono limitati:

$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n > 0\}; \qquad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n = 0\};$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : |x_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n\}; \quad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : |x_1 + \ldots + x_n| < 1\};$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : |x_1 + \ldots + x_n| > 1\}; \qquad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_1 x_2 \ldots x_n = 1\}.$$

16. Dimostrare che l'unione di una famiglia finita di sottoinsiemi limitati di uno spazio metrico X è un sottoinsieme limitato di X.

2 Spazi topologici

Sia X un insieme non vuoto. Una *struttura topologica*, o *topologia*, su X è una famiglia non vuota $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X, che si chiamano *insiemi aperti* della topologia, soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$(A1)$ *$\emptyset$ e X sono insiemi aperti;*

$(A2)$ *l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;*

$(A3)$ *l'intersezione di due insiemi aperti qualsiasi è un insieme aperto.*

Uno *spazio topologico* è un insieme X su cui sia assegnata una topologia $\mathcal{T}$, e si denota $(X, \mathcal{T})$, o semplicemente X sottintendendo la topologia $\mathcal{T}$ per comodità di notazione. Gli elementi di X si diranno *punti*. L'insieme X si dice *supporto* dello spazio topologico $(X, \mathcal{T})$.

2.1 *Esempi*

1. Se X è uno spazio metrico con distanza d la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una *topologia* su X (cfr. esercizio 1.9) che si dice *indotta da d.*

2. La *topologia euclidea* (o *topologia naturale*) su R^n è la topologia $\mathcal{E}$ indotta dalla distanza euclidea d.

3. Su C la *topologia euclidea* (o *naturale*) $\mathcal{E}$ è quella indotta dalla distanza $d(z,w) = |z - w|$; possiamo anche ottenere questa distanza, e quindi la topologia naturale, identificando C ad R^2 ($z = x + iy \mapsto (x,y)$) e considerando la distanza euclidea in R^2.

In modo analogo possiamo identificare C^n ad R^{2n}. La distanza euclidea in R^{2n} definisce su C^n una distanza e quindi induce una topologia $\mathcal{E}$ che si chiama *topologia euclidea,* o *naturale,* su C^n.

In seguito, quando considereremo R^n, *oppure* C^n, *come spazi topologici, sarà sottinteso che ci riferiremo alla topologia euclidea, a meno che non si specifichi il contrario.*

4. In un qualsiasi insieme non vuoto X la famiglia $\mathcal{B} = \{X, \emptyset\}$ soddisfa le condizioni $A1$, $A2$, $A3$ ed è quindi una topologia su X; $\mathcal{B}$ si chiama *topologia banale* e $(X, \mathcal{B})$ è uno *spazio topologico banale.*

Un'altra topologia su un qualsiasi insieme non vuoto X si ottiene considerando aperto ogni sottoinsieme, cioè prendendo $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Questa si chiama *topologia discreta* e $(X, \mathcal{P}(X))$ è uno *spazio topologico discreto.*

5. Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice *metrizzabile* se esiste su X una distanza che induce la topologia $\mathcal{T}$. Ad esempio ogni spazio discreto è metrizzabile: la topologia discreta è indotta dalla distanza discreta.

Non tutti gli spazi topologici sono metrizzabili; ad esempio uno spazio a supporto finito e non discreto non è metrizzabile perché ogni spazio metrizzabile e finito è discreto; la dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio (*suggerimento*: si cominci a dimostrarlo nel caso in cui X ha due punti).

Si noti che se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico metrizzabile, la distanza che induce la topologia $\mathcal{T}$ non è univocamente determinata (cfr. esempio 1.2.(2)).

Nel considerare uno spazio topologico metrizzabile supporremo sempre implicitamente assegnata una distanza che ne induce la topologia.

6. Sia Y un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrizzabile X con distanza d_X. Già sappiamo che la restrizione d_Y di d_X è una distanza su Y; la topologia indotta da d_Y su Y si dice *topologia indotta da X su Y.*

Sia $y \in Y$ ed $\varepsilon > 0$. Si ha evidentemente

$$D_{Y,\varepsilon}(y) = D_{X,\varepsilon}(y) \cap Y$$

(dove $D_{Y,\varepsilon}(y)$ e $D_{X,\varepsilon}(y)$ sono i dischi aperti di centro y e raggio ε in Y e in X rispettivamente), e quindi gli aperti di Y sono i sottoinsiemi della forma $Y \cap A$, dove A è un aperto di X.

Si noti che un sottoinsieme di Y aperto in Y non è necessariamente aperto anche in X. Ad esempio un intervallo chiuso $Y = [a,b]$ di $X = \mathbb{R}$ è aperto in se stesso ma non in $\mathbb{R}$.

7. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ la famiglia di sottoinsiemi di X costituita dall'insieme vuoto e dagli insiemi il cui complementare è finito. $\mathcal{K}$ è una topologia che si chiama *topologia cofinita* su X. Se X è finito, e solo in tal caso, $\mathcal{K}$ è la topologia discreta.

8. Nell'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ le famiglie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\};$$

$$\mathcal{S} = \{X, \emptyset, \{e\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}\}$$

sono topologie, mentre

$$\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, e\}\},$$

$$\mathcal{G} = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

$$\mathcal{H} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

non sono topologie.

Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono due topologie su un insieme non vuoto X, diremo che $\mathcal{T}$ è *meno fine* di $\mathcal{T}'$, oppure che $\mathcal{T}'$ è *più fine* di $\mathcal{T}$, se ogni aperto di $\mathcal{T}$ è anche aperto di $\mathcal{T}'$, cioè se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$; scriveremo in tal caso $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$.

Ad esempio la topologia banale è meno fine di ogni altra, mentre la topologia discreta è più fine di ogni altra.

Naturalmente può accadere che due topologie su X non siano confrontabili, cioè che nessuna delle due sia più fine dell'altra. Ad esempio, le topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ dell'esempio 2.1(8) non sono confrontabili.

Esercizi

1. Sia $\{\mathcal{T}_j\}_{j \in J}$ una famiglia di topologie sull'insieme non vuoto X. Dimostrare che $\mathcal{T} = \bigcap_j \mathcal{T}_j$ è una topologia su X.
2. Dare un esempio di due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su un insieme X tali che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non sia una topologia.

Sia $\mathcal{T}$ una topologia sull'insieme non vuoto X. Una *base* di $\mathcal{T}$ è una famiglia di aperti $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tale che ogni aperto di $\mathcal{T}$ sia unione di elementi di $\mathcal{B}$. Detto in altro modo, ma equivalente al precedente, $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$ se per ogni aperto A di X e per ogni punto $x \in A$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset A$. L'equivalenza delle due definizioni di base si verifica subito.

Un esempio (banale) di base di $\mathcal{T}$ è costituito dalla famiglia $\mathcal{T}$ stessa.

Come esempio tipico di base si pensi alla famiglia degli intervalli aperti di R, che costituiscono una base della topologia naturale. Più in generale, la famiglia di tutti i dischi aperti in uno spazio metrico (X, d) è una base della topologia indotta da d.

Dalla definizione segue che se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{T}$, allora anche $\mathcal{C}$ è una base di $\mathcal{T}$.

Come si fa a riconoscere una base di una topologia $\mathcal{T}$ su X? Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$, dati due qualsiasi A, $B \in \mathcal{B}$ la loro intersezione è un aperto ed è quindi unione di elementi di $\mathcal{B}$. Anche X, essendo aperto, è unione di elementi di $\mathcal{B}$. La proposizione seguente ci dice che queste due proprietà caratterizzano le basi.

2.2 PROPOSIZIONE *Sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tali che:*

(a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(b) *dati comunque A, $B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Allora esiste una topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base; $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è l'unica topologia con tale proprietà.

Dimostrazione. Se $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ esiste allora è unica perché ogni suo aperto deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$ e, viceversa, ogni unione di elementi di $\mathcal{B}$ deve stare in $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ perché gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti in $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Quindi $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ deve coincidere con la famiglia dei sottoinsiemi di X che sono unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Per dimostrare che questa famiglia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è effettivamente una topologia si osservi innanzitutto che X e $\emptyset$ vi appartengono; il primo per l'ipotesi (a), e il secondo come unione della famiglia vuota di elementi di $\mathcal{B}$. Se $\{U_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ allora si deve avere, per ogni $j \in J$:

$$U_j = \bigcup_{k \in K(j)} B_k, \quad B_k \in \mathcal{B}$$

dove i $K(j)$ sono opportuni insiemi di indici; quindi:

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{k \in K(j)} B_k \right) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$$

Infine, se

$$U_1 = \bigcup_{h \in H} B_h \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}, \; U_2 = \bigcup_{k \in K} B_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}},$$

allora

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{h \in H} B_h \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) =$$

$$= \bigcup_{\substack{h \in H \\ k \in K}} (B_h \cap B_k).$$

Poiché per l'ipotesi (b), $B_h \cap B_k \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$ per ogni $(h, k) \in H \times K$, la loro intersezione $U_1 \cap U_2$ sta in $\mathcal{T}_\mathcal{B}$. ■

Un *ricoprimento* di un insieme non vuoto X è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Più in generale, se A è un sottoinsieme non vuoto di un insieme X, una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$A \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

si dice un *ricoprimento di A*.

La condizione (a) della proposizione 2.2 afferma che $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X.

Esercizi

3. Dimostrare che se $\mathcal{B}$ soddisfa le condizioni (a) e (b) della proposizione 2.2, la topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ di cui si dimostra l'esistenza può anche caratterizzarsi come la topologia intersezione di tutte quelle che contengono $\mathcal{B}$, cioè

$$\mathcal{T}_\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}$$

o equivalentemente come la meno fine tra tutte le topologie che contengono $\mathcal{B}$.

Una *sottobase* di una topologia $\mathcal{T}$ sull'insieme X è una famiglia $\mathcal{S}$ di insiemi aperti tale che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap \ldots \cap U_n : U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}\},$$

costituita da tutte le intersezioni di un numero finito di elementi di $\mathcal{S}$ sia una base di $\mathcal{T}$. In altre parole, per ogni aperto U di X ed $x \in X$ deve essere possibile trovare $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}$ tali che

$$x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset U.$$

È chiaro che è sufficiente verificare questa condizione per gli aperti U di una base di $\mathcal{T}$.

Si osservi che ogni base è anche una sottobase e che ogni sottobase è un ricoprimento di X.

Un esempio di sottobase della topologia naturale di R è la famiglia $\mathcal{S}$ degli intervalli aperti illimitati (a destra o a sinistra), cioè del tipo $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$. Infatti la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ coincide con la famiglia di tutti gli intervalli aperti di R. Si noti che $\mathcal{S}$ non è una base.

Sia X uno spazio topologico. Un intorno di un punto $x \in X$ è un insieme N che contiene un aperto A contenente x:

$$x \in A \subset N.$$

Denotiamo con $\mathcal{N}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x; questa famiglia si chiama *sistema degli intorni di x*. Si noti che $\mathcal{N}(x)$ non è vuoto perché $X \in \mathcal{N}(x)$. Più in generale ogni aperto contenente x sta in $\mathcal{N}(x)$; ne segue che un aperto è intorno di ogni suo punto. Anche il viceversa è vero, come è affermato dalla seguente

2.3 PROPOSIZIONE *Un sottoinsieme A dello spazio X è aperto se e solo se $A \in \mathcal{N}(x)$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{N}(x)$ per ogni $x \in A$, la definizione di intorno implica che per ogni $x \in A$ esiste un aperto A_x tale che

$$x \in A_x \subset A,$$

e allora

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x$$

è aperto. Il viceversa è ovvio ed è stato già osservato prima dell'enunciato della proposizione. ∎

Una *base locale*, o *base di intorni*, o *sistema fondamentale di intorni di un punto* x dello spazio topologico X è una famiglia $\mathcal{B}(x)$ di intorni di x tale che per ogni intorno M di x esista un $N \in \mathcal{B}(x)$ tale che $N \subset M$.

Si noti che nella definizione non si richiede che gli insiemi di $\mathcal{B}(x)$ siano aperti. Ad esempio gli intervalli chiusi $[x - r, x + r]$, $r > 0$, costituiscono un sistema fondamentale di intorni di $x \in \mathsf{R}$ nella topologia euclidea. Gli intervalli aperti $(x - r, x + r)$, $r > 0$, costituiscono un sistema fondamentale di intorni aperti di $x \in \mathsf{R}$. Più in generale per un punto x di uno spazio metrizzabile i dischi $D_r(x)$, $r > 0$, costituiscono un sistema fondamentale di intorni di x.

Ovviamente il sistema $\mathcal{N}(x)$ di tutti gli intorni di x è un particolare sistema fondamentale di intorni di $x \in X$.

Se $\mathcal{B}$ è una base di X, la famiglia

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

è un sistema fondamentale di intorni aperti di x. Viceversa, se per ogni $x \in X$ è assegnato un sistema fondamentale di intorni aperti $\mathcal{B}(x)$ di x, allora

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$$

è una base della topologia di X.

Uno spazio topologico X soddisfa il *primo assioma di numerabilità* se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile, cioè se per ogni $x \in X$ esiste una famiglia $\{N_i : i = 1,2,\ldots\}$ che è una base di intorni di x. Si può sempre supporre che un sistema fondamentale di intorni numerabile di x soddisfi l'ulteriore condizione $N_{i+1} \subset N_i$ per ogni i: altrimenti basta sostituire $\{N_i\}$ con $\{M_i := \bigcap_{j \leq i} N_j : i = 1,2,\ldots\}$.

Uno spazio topologico X soddisfa il *secondo assioma di numerabilità* se X possiede una base numerabile.

Ogni spazio metrizzabile (in particolare R^n) soddisfa il primo assioma di numerabilità. Infatti per ogni $x \in X$ la famiglia:

$$\mathcal{B}(x) = \{D_{1/n}(x) : n \geq 1 \text{ intero}\}$$

è una base numerabile di intorni di x.

R^n soddisfa il secondo assioma di numerabilità perché la famiglia

$$\mathcal{B} = \{D_{1/n}(\mathbf{x}) : n \geq 1 \text{ intero, } \mathbf{x} \text{ un punto a coordinate razionali}\}$$

costituisce una base della topologia euclidea (cfr. anche esempio 2.4(5) ed esercizio 9).

Se uno spazio topologico X soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora soddisfa anche il primo. Se infatti $\mathcal{B}$ è una base numerabile di X allora per ogni $x \in X$ la famiglia

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

è una base di intorni di x numerabile.

Il viceversa non è vero: ogni spazio discreto X soddisfa il primo assioma di numerabilità, ma se X non è numerabile allora X non possiede una base numerabile. Infatti ogni base della topologia discreta deve contenere tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo punto (cfr. esempi 2.4(4), (6)).

Sia X uno spazio topologico. Denotiamo con N^+ l'insieme dei numeri naturali positivi. Un'applicazione $f : \mathsf{N}^+ \to X$ si chiama una *successione di elementi di* X. Per ogni $n \in \mathsf{N}^+$ l'immagine $x_n = f(n)$ si chiama *n-esimo termine della successione* f. Di solito una successione viene denotata $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ oppure $\{x_n\}_{n\geq 1}$ o più semplicemente $\{x_n\}$, cioè viene identificata con l'insieme $f(\mathsf{N}^+)$. La successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ si dice *convergente al punto* $x \in X$ (e x si dice *limite della successione*) se per ogni intorno M di x esiste $n(M) \in \mathsf{N}^+$ tale che $x_n \in M$ per ogni $n \geq n(M)$; si scriverà

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Una *sottosuccessione* di $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ è una successione $\{x_{n_k} : k = 1, 2, \ldots\}$ ottenuta in corrispondenza di una successione crescente di interi positivi: $n_1 < n_2 < < n_3 < \ldots$. Equivalentemente una sottosuccessione della successione $f : \mathsf{N}^+ \to X$ è una successione ottenuta come composizione $f \cdot \rho : \mathsf{N}^+ \to X$ dove $\rho : \mathsf{N}^+ \to \mathsf{N}^+$ è un'applicazione crescente.

Contrariamente a quanto accade per le successioni in R, una successione in uno spazio topologico qualsiasi può convergere a più limiti distinti. Ad esempio, se X è uno spazio topologico banale e $\{x_n\}$ è una successione in X si ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ per ogni $x \in X$. In uno spazio metrizzabile se una successione ha un limite questo è unico (cfr. esercizio 19 e proposizione 8.5).

2.4 *Esempi*

1. La famiglia

$$\iota_s = \{(-\infty, b) : b \in \mathsf{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathsf{R}\}$$

è una topologia su R strettamente meno fine della topologia naturale $\mathcal{E}$.

Analogamente,

$$\iota_d = \{(a, +\infty) : a \in \mathsf{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathsf{R}\}$$

è una topologia meno fine di $\mathcal{E}$.

Le due topologie ι_s e ι_d non sono confrontabili.

La famiglia degli intervalli aperti a sinistra (e chiusi a destra) soddisfa alle condizioni della proposizione 2.2 e quindi è base di una topologia j_s su R. Di essa fanno ovviamente parte gli intervalli aperti a sinistra, che non sono aperti nella topologia naturale; quindi $j_s \neq \mathcal{E}$. D'altra parte, ogni intervallo aperto (a, b) può scriversi come unione

$$(a, b) = \bigcup_{m > \frac{1}{b-a}} \left(a, b - \frac{1}{m}\right]$$

di intervalli aperti a sinistra, e quindi sta in j_s. Perciò j_s è strettamente più fine di $\mathcal{E}$.

Ad una analoga conclusione si arriva se si considerano gli intervalli aperti a destra (e chiusi a sinistra). La topologia j_d che si ottiene e la topologia j_s non sono confrontabili: infatti non è possibile ottenere un intervallo aperto a destra come unione di intervalli aperti a sinistra, e viceversa (perché?).

2. Se $r > 0$ ed $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2$, il sottoinsieme di R^2

$$Q_r(\mathbf{x}) = \left\{(y_1, y_2) \in \mathsf{R}^2 : |y_1 - x_1| < \frac{r}{2},\ |y_2 - x_2| < \frac{r}{2}\right\}$$

si chiama *quadrato aperto con lati paralleli agli assi, di centro* $\mathbf{x}$ *e lato* r.

$Q_r(\mathbf{x})$ è un insieme aperto. Se infatti $\mathbf{z} \in Q_r(\mathbf{x})$ e

$$\delta = \min\left\{\frac{r}{2} - |z_1 - x_1|,\ \frac{r}{2} - |z_2 - x_2|\right\},$$

allora $Q_r(\mathbf{x}) \supset D_\delta(\mathbf{z})$, perché se $\mathbf{y} \in D_\delta(\mathbf{z})$ allora

$$|y_i - x_i| \leq |y_i - z_i| + |z_i - x_i| < \delta + |z_i - x_i| \leq \frac{r}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Facciamo vedere che la famiglia di insiemi aperti

$$\mathcal{Q}_2 = \{Q_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathsf{R}^2,\ r > 0\}$$

è una base della topologia euclidea di R^2.

Allo scopo sarà sufficiente far vedere che ogni disco aperto $D_\rho(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathsf{R}^2$, $\rho > 0$, è unione di insiemi $Q_r(\mathbf{x})$ opportunamente scelti.

Osserviamo preliminarmente che per ogni $\mathbf{x}' \in Q_r(\mathbf{x})$ si ha

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \sqrt{2}\,\frac{r}{2}\cdot$$

Sia ora $\mathbf{x} \in D_\rho(\mathbf{y})$ e $\delta = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Allora

$$Q_r(\mathbf{x}) \subset D_\rho(\mathbf{y})$$

dove $r = \sqrt{2}(\rho - \delta)$ perché per ogni $\mathbf{z} \in Q_r(\mathbf{x})$ si ha:

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta + (\rho - \delta) = \rho$$

e l'asserto è provato (fig. 2.1).

Se $a < b$ e $c < d$ l'insieme

$$R(a, b; c, d) = (a, b) \times (c, d) = \{(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 : a < x_1 < b,\ c < x_2 < d\}$$

è un *rettangolo aperto con lati paralleli agli assi*. È immediato verificare che $R(a, b; c, d)$ è unione di quadrati $Q_r(\mathbf{x})$ e quindi è aperto. Denotiamo con $\mathcal{R}_2$ la

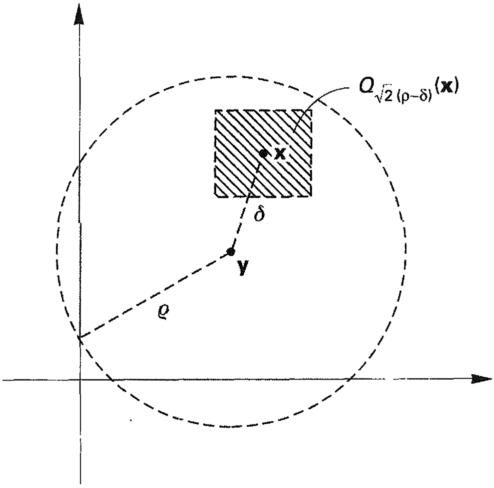


Figura 2.1

famiglia di tutti i rettangoli $R(a,b;c,d)$. Poiché

$$Q_r(\mathbf{x}) = R\left(x_1 - \frac{r}{2},\ x_1 + \frac{r}{2};\ x_2 - \frac{r}{2},\ x_2 + \frac{r}{2}\right),$$

si ha $\mathcal{R}_2 \supset \mathcal{Q}_2$ e quindi anche la famiglia $\mathcal{R}_2$ è una base della topologia euclidea.

Gli insiemi della forma $(a,b) \times \mathsf{R}$ oppure $\mathsf{R} \times (a,b)$ con $a < b$ sono sottoinsiemi aperti di R^2 che si chiamano *strisce aperte parallele ad uno degli assi.* Poiché per ogni $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2$, $r > 0$, si ha

$$Q_r(\mathbf{x}) = \left[\left(x_1 - \frac{r}{2},\ x_1 + \frac{r}{2}\right) \times \mathsf{R}\right] \cap \left[\mathsf{R} \times \left(x_2 - \frac{r}{2},\ x_2 + \frac{r}{2}\right)\right],$$

la famiglia $\mathcal{S}_2$ delle strisce aperte è una sottobase della topologia euclidea (fig. 2.2).

3. Sia X un insieme non vuoto ed $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X costituiti da un solo elemento. $\mathcal{F}$ soddisfa le condizioni della proposizione 2.2: la topologia di cui $\mathcal{F}$ è base è la topologia discreta.

4. Ogni spazio discreto soddisfa il primo assioma di numerabilità, perché per ogni $x \in X$ $\{\{x\}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

5. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli intervalli aperti di R della forma $(x - q, x + q)$, dove x e q sono numeri razionali e $q > 0$.

Evidentemente $\mathcal{B}$ è una famiglia numerabile di insiemi aperti. Sia (a,b) un intervallo aperto ed y un suo punto. Sia $r > 0$ tale che

$$(a,b) \supset (y - r, y + r);$$

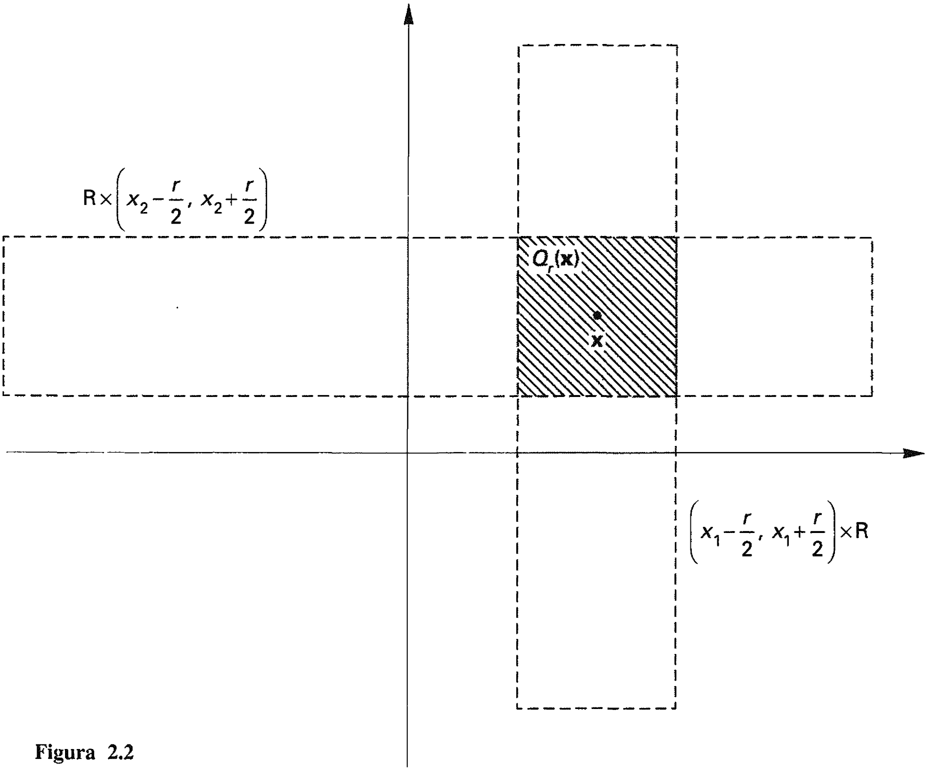

$\mathbb{R}\times\left(x_2-\frac{r}{2}, x_2+\frac{r}{2}\right)$
$Q_r(\mathbf{x})$
$\mathbf{x}$
$\left(x_1-\frac{r}{2}, x_1+\frac{r}{2}\right)\times\mathbb{R}$

Figura 2.2

siano x, q numeri razionali tali che

$$|y-x|<\frac{r}{3} \text{ e } \frac{r}{3}<q<\frac{r}{2}.$$

Allora

$$y\in(x-q,x+q)\subset(a,b).$$

Quindi (a,b) è unione di intervalli appartenenti a $\mathcal{B}$; ne deduciamo che $\mathcal{B}$ è una base della topologia euclidea di R e quindi R soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

È facile dimostrare che anche $\mathbb{R}^2$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità, sostituendo la famiglia $\mathcal{B}$ considerata in R con la seguente:

$$\mathcal{B}_2=\{Q_q(\mathbf{x}):q,\ x_1,\ x_2\in\mathbb{Q},\ q>0\}.$$

Più in generale, $\mathbb{R}^n$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità per ogni n (cfr. esercizio 9).

6. Se uno spazio X soddisfa il primo assioma di numerabilità, X non soddisfa necessariamente il secondo. Un esempio è dato da uno spazio discreto non numerabile.

Un altro esempio è dato da R con la topologia j_d. Questo spazio soddisfa il primo assioma di numerabilità. Infatti per ogni $x \in \mathsf{R}$ la famiglia

$$\left\{\left[x, x+\frac{1}{n}\right) : n \geq 1 \text{ intero}\right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di x.

Ma (R, j_d) non soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Sia infatti $\mathcal{B}$ una base di j_d. Per ogni $x \in \mathsf{R}$ deve esistere $A_x \in \mathcal{B}$ tale che

$$x \in A_x \subset [x, +\infty)$$

perché $[x, +\infty)$ è un aperto di j_d. Allora, se $x < y$ si ha $A_x \neq A_y$ e quindi $\mathcal{B}$ contiene l'infinità non numerabile di aperti

$$\{A_x : x \in \mathsf{R}\}$$

e pertanto $\mathcal{B}$ non è numerabile.

Alla stessa conclusione si arriva considerando la topologia j_s.

Esercizi

4. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2$ ed $r > 0$ il sottoinsieme di R^2

$$N_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathsf{R}^2 : |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\}$$

è un *quadrato aperto con diagonali parallele agli assi* (fig. 2.3). Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{D}_2 = \{N_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathsf{R}^2,\ r > 0\}$$

è una base della topologia euclidea di R^2.

5. Sia $\mathcal{A}_2$ la famiglia dei semipiani aperti di R^2 di una delle seguenti forme:

$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_1 < a\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_1 > a\},$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 < a\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 > a\}, \quad a \in \mathsf{R}.$$

Dimostrare che $\mathcal{A}_2$ è una sottobase della topologia euclidea.

6. Sia $n \geq 1$; per ogni $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$, $r > 0$, sia

$$Q_r(\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{y} \in \mathsf{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{r}{2},\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

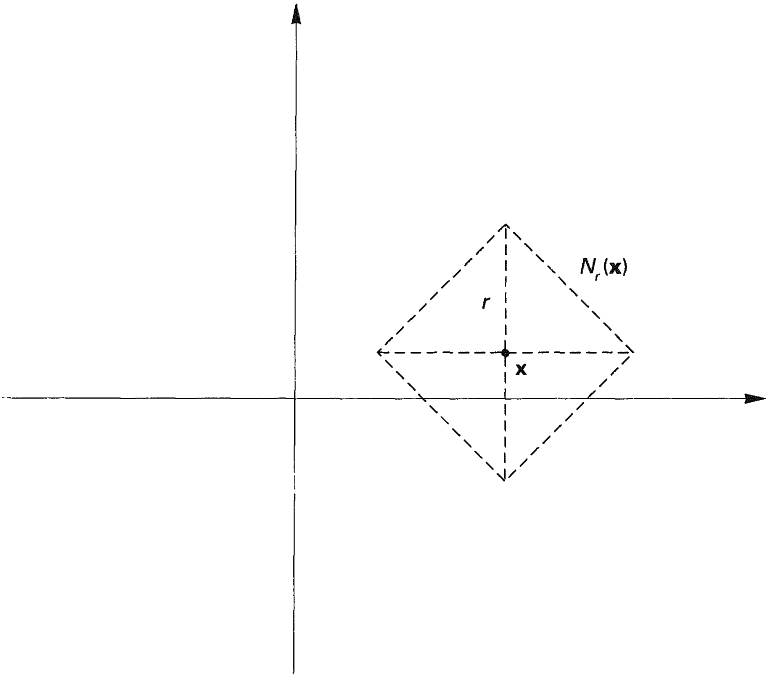


Figura 2.3

Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{Q}_n = \{Q_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathsf{R}^n,\ \ r > 0\}$$

è una base della topologia euclidea di R^n.
Per ogni scelta di $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathsf{R}^n$ tali che

$$a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n,$$

sia

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{R}_n = \{R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : a_i < b_i,\ \ i = 1, \ldots, n\}$$

è un'altra base della topologia euclidea di R^n.

7. Sia $\mathcal{A}_n$ la famiglia dei semispazi aperti di R^n della forma

$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_i < a\},$$

oppure

$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_i > a\},$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$ e per qualche $i = 1, \ldots, n$. Dimostrare che $\mathcal{A}_n$ è una sottobase della topologia euclidea.

8. Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ la famiglia di sottoinsiemi

$$\{Q_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ r > 0\},$$

è una base della topologia euclidea.

9. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità. (*Suggerimento.* Dimostrare che la famiglia

$$\{Q_q(\mathbf{x}) : q, \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}, \ q > 0\}$$

è una base della topologia euclidea).

10. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X, la topologia meno fine tra tutte le topologie $\mathcal{T}$ contenenti $\mathcal{F}$, cioè nelle quali gli insiemi di $\mathcal{F}$ sono aperti, è

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}.$$

$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ si chiama *topologia generata da* $\mathcal{F}$. Dimostrare che:

(a) $\mathcal{F}$ è una sottobase della topologia $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ se e solo se $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di X.

(b) Un ricoprimento di X è sottobase di un'unica topologia; precisamente, se $\mathcal{T}$ è una topologia di cui $\mathcal{F}$ è una sottobase allora $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$.

(c) Se $\mathcal{F}$ non è un ricoprimento di X, allora una sottobase di $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ è costituita dalla famiglia $\mathcal{F} \cup \{X\}$.

(d) Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ sono due famiglie di sottoinsiemi di X, si ha $\mathcal{T}(\mathcal{F}) < \mathcal{T}(\mathcal{F}')$.

11. Si fissi un numero reale positivo r. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{Q}_{n,r} = \{Q_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

non è una base della topologia euclidea. Qual è la topologia generata da $\mathcal{Q}_{n,r}$?

12. Sia $\mathcal{T}^*$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ costituita da $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$ e da tutti i sottoinsiemi il cui complementare è unione di un numero finito di punti e di un numero finito di rette. Dimostrare che $\mathcal{T}^*$ è una topologia e che $\mathcal{K} < \mathcal{T}^* < \mathcal{E}$, dove $\mathcal{K}$ è la topologia cofinita ed $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea.
Dire se e quali delle topologie $\mathcal{K}$ e $\mathcal{T}^*$ soddisfano il primo oppure il secondo assioma di numerabilità.

13. Sia x un punto dello spazio topologico X e $\mathcal{N}(x)$ il sistema degli intorni di x. Dimostrare che $\mathcal{N}(x)$ ha le seguenti proprietà:

(a) Se N_1, $N_2 \in \mathcal{N}(x)$, allora $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$.

(b) Se $N \in \mathcal{N}(x)$ e $X \supset M \supset N$, allora $M \in \mathcal{N}(x)$.

14. Sia X un insieme non vuoto; supponiamo che per ogni $x \in X$ sia assegnata una famiglia $\mathcal{N}(x)$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

(a) $\mathcal{N}(x)\neq\emptyset$ e ogni $N\in\mathcal{N}(x)$ contiene x.

(b) Se N_1, $N_2\in\mathcal{N}(x)$ allora $N_1\cap N_2\in\mathcal{N}(x)$.

(c) Se $N\in\mathcal{N}(x)$ e $X\supset M\supset N$, allora $M\in\mathcal{N}(x)$.

(d) Se $N\in\mathcal{N}(x)$, esiste $M\in\mathcal{N}(x)$ tale che $M\subset N$ ed $M\in\mathcal{N}(y)$ per ogni $y\in M$.

Dimostrare che esiste una ed una sola topologia $\mathcal{T}$ su X tale che per ogni $x\in X$ $\mathcal{N}(x)$ sia il sistema degli intorni di x rispetto a $\mathcal{T}$.

15. Nell'insieme $\{a,b,c,d,e\}$ si determinino le topologie generate dalle famiglie $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ dell'esempio 2.1(8).

16. Dimostrare che $\mathbb{R}$ con la topologia ι_s (cfr. esempio 2.4(1)) soddisfa il primo e il secondo assioma di numerabilità.

17. Dimostrare che la famiglia degli intervalli chiusi e limitati

$$\{[a,b]:a<b\}$$

non è base di alcuna topologia su $\mathbb{R}$ e che la famiglia

$$\{[a,b]:a<b,\ \ a\in\mathbb{Q},\ \ b\notin\mathbb{Q}\}$$

è base di una topologia su $\mathbb{R}$.

18. Quali sono le topologie generate dalle due famiglie dell'esercizio 17?

19. Sia $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di elementi di uno spazio metrizzabile X. Dimostrare che se $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge in X il suo limite è unico.

20. Trovare tutte le topologie su un insieme $X=\{a,b,c\}$ costituito da tre elementi.

3 Sottoinsiemi di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico e S un sottoinsieme di X. Un *punto* $x\in X$ si dice *interno* a S se esiste un intorno N di x tutto contenuto in S. Il *punto* $x\in X$ si dice *esterno* a S se esiste un suo intorno N tale che $N\cap S=\emptyset$, cioè se x è interno a $X\backslash S$. Il punto x si dice *punto di frontiera* di S se x non è né interno né esterno a S; equivalentemente se, per ogni $N\in\mathcal{N}(x)$,

$$N\cap S\neq\emptyset$$

$$N\cap(X\backslash S)\neq\emptyset.$$

L'insieme dei punti interni a S si chiama *interno di* S, e si indica con Int(S). Analogamente Est(S) denoterà l'*esterno di* S, cioè l'insieme dei punti esterni a S, mentre Fr(S) denota la *frontiera di* S, che è l'insieme dei punti di frontiera di S. Ovviamente si ha:

$$\mathrm{Int}(S)\subset S \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Est}(S)=\mathrm{Int}(X\backslash S) \tag{3.2}$$

e quindi

$$\mathrm{Est}(S) \cap S = \emptyset \qquad [3.3]$$

Un punto $x \in \mathrm{Fr}(S)$ può stare o non stare in S; ad esempio

$$\mathrm{Fr}([a,b)) = \{a,b\}$$

dove $[a,b) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto a destra, e ovviamente $a \in [a,b)$ e $b \notin [a,b)$ (cfr. esempio 3.4(2)).

Per ogni sottoinsieme S dello spazio topologico X si ha:

$$X = \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Est}(S) \cup \mathrm{Fr}(S) \qquad [3.4]$$

dove l'unione è disgiunta.

3.1 PROPOSIZIONE *Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Allora:*

(a) $\mathrm{Int}(S)$ *è l'unione di tutti gli aperti contenuti in S, cioè è il più grande aperto contenuto in S.*

(b) *S è aperto se e solo se $S = \mathrm{Int}(S)$.*

(c) *S è aperto se e solo se $S \cap \mathrm{Fr}(S) = \emptyset$.*

Dimostrazione

(a) Sia A un aperto contenuto in S. Per ogni $x \in A$ si ha che $A \in \mathcal{N}(x)$ e quindi $x \in \mathrm{Int}(S)$; dunque $A \subset \mathrm{Int}(S)$. Facciamo vedere che $\mathrm{Int}(S)$ è aperto. Sia $x \in \mathrm{Int}(S)$; per definizione esiste $N_x \in \mathcal{N}(x)$ tale che $N_x \subset S$ e quindi esiste un aperto A_x tale che $x \in A_x \subset N_x \subset S$. Da quanto già dimostrato segue che $A_x \subset \mathrm{Int}(S)$. Ma allora

$$\mathrm{Int}(S) = \bigcup_{x \in \mathrm{Int}(S)} A_x$$

è aperto.

(b) Segue subito da (a).

(c) Segue da (b) tenuto conto di [3.3] e di [3.4]. ∎

La proposizione che ora dimostreremo caratterizza una classe importante di sottoinsiemi di uno spazio topologico.

3.2 PROPOSIZIONE *Le condizioni seguenti sono equivalenti per un sottoinsieme S di uno spazio topologico X:*

(a) $\mathrm{Fr}(S) \subset S$.

(b) $S = \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Fr}(S)$.

(c) *Il complementare* $X \backslash S$ *è aperto.*

Dimostrazione

(b) $\Rightarrow$ (a). Banale.

(a) $\Rightarrow$ (c). Poiché $\mathrm{Fr}(S) = \mathrm{Fr}(X \backslash S)$, dalla (a) e dalla [3.4] segue che:

$$\mathrm{Fr}(X \backslash S) \cap (X \backslash S) = \emptyset$$

e quindi $X \backslash S$ è aperto, per la proposizione 3.1(c).

(c) $\Rightarrow$ (b). Dalla (c), tenuto conto della [3.2] e della proposizione 3.1(b), segue che

$$X \backslash S = \mathrm{Est}(S)$$

e quindi

$$S = \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Fr}(S)$$

per la [3.4]. ■

Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X che soddisfa le condizioni equivalenti della proposizione 3.2 si dice *chiuso*.

Denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi chiusi dello spazio topologico X. Dalle proprietà ($A1$), ($A2$), ($A3$) degli insiemi aperti segue subito che la famiglia $\mathcal{F}$ gode delle seguenti proprietà:

($C1$) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

($C2$) *L'intersezione di una qualsiasi famiglia di elementi di* $\mathcal{F}$ *appartiene ad* $\mathcal{F}$.

($C3$) *L'unione di due (e quindi di un numero finito qualsiasi di) elementi di* $\mathcal{F}$ *appartiene ad* $\mathcal{F}$.

Viceversa, dato un insieme non vuoto X ed una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X che gode delle proprietà ($C1$), ($C2$), ($C3$), la famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ definita da

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (X \backslash U) \in \mathcal{F}$$

soddisfa evidentemente le condizioni ($A1$), ($A2$), ($A3$). Quindi $\mathcal{T}$ è una topologia su X nella quale $\mathcal{F}$ è la famiglia degli insiemi chiusi. È evidente che $\mathcal{T}$ è l'unica topologia che gode di tale proprietà. Ciò significa che una topologia su un insieme

$X \neq \emptyset$ può anche essere definita assegnando la famiglia degli insiemi chiusi rispetto a tale topologia, cioè assegnando una famiglia $\mathcal{F}$ che soddisfi le condizioni ($C1$), ($C2$), ($C3$).

Se S è un qualsiasi sottoinsieme di uno spazio topologico X la *chiusura* di S, che si denota $\overline{S}$, è definita come il più piccolo sottoinsieme chiuso di X contenente S, o equivalentemente come l'intersezione di tutti i sottoinsiemi chiusi contenenti S (tale intersezione è un chiuso per la ($C2$)). I punti di $\overline{S}$ si dicono *aderenti* ad S, o *punti di aderenza* di S. Si ha:

$$S \subset \overline{S}, \qquad [3.5]$$

$$S \text{ è chiuso se e solo se } S = \overline{S}, \qquad [3.6]$$

$$\overline{S} = X \backslash \mathrm{Est}(S), \qquad [3.7]$$

e poiché $\mathrm{Fr}(S) = \mathrm{Fr}(X \backslash S)$:

$$\overline{S} = S \cup \mathrm{Fr}(S) = \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Fr}(S). \qquad [3.8]$$

$$S \subset T \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{T} \qquad [3.9]$$

Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione* (o *punto limite*) dell'insieme $S \subset X$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x, cioè se

$$(N \backslash \{x\}) \cap S \neq \emptyset \text{ per ogni } N \in \mathcal{N}(x). \qquad [3.10]$$

L'insieme dei punti di accumulazione di S si chiama *derivato* di S e si denota con $D(S)$.

3.3 PROPOSIZIONE *Per ogni sottoinsieme S di uno spazio topologico X si ha:*

$$\overline{S} = S \cup D(S).$$

Dimostrazione. Per definizione di derivato si ha

$$D(S) \cap \mathrm{Est}(S) = \emptyset$$

e quindi, per la [3.7]:

$$S \cup D(S) \subset \overline{S}.$$

Sia $x \in \overline{S}$. Se $x \notin S$ allora, per la [3.8], $x \in \mathrm{Fr}(S)$. Quindi $N \cap S \neq \emptyset$ per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ e poiché $x \notin S$ ne discende che $x \in D(S)$. Dunque $\overline{S} \subset S \cup D(S)$. ■

3.4 PROPOSIZIONE *Sia X uno spazio topologico e sia S un sottoinsieme di X.*

(a) *Un punto $x \in X$ è aderente a S se e solo se $N \cap S \neq \emptyset$ per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$.*

(b) *Un punto $x \in X$ è aderente a S se esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di S che converge ad x. Se X soddisfa il primo assioma di numerabilità anche il viceversa è vero.*

Dimostrazione

(a) Supponiamo $x \in \overline{S}$. Se $x \in S$ la condizione è soddisfatta perché ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ contiene x. Se $x \in D(S)$ la condizione è soddisfatta per la [3.10]. Supponiamo viceversa che la condizione dell'enunciato sia soddisfatta. Allora $x \notin \text{Est}(S)$ perché $\text{Est}(S) \cap S = \emptyset$ e $\text{Est}(S)$, essendo aperto, è intorno di ogni suo punto. Pertanto $x \in \overline{S}$ tenuto conto della [3.7].

(b) Supponiamo che $\{x_n\}$ sia una successione di elementi di S tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Per definizione di limite per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ esiste $x_n \in N$, e quindi la condizione della parte (a) è soddisfatta; dunque $x \in \overline{S}$. Supponiamo viceversa che $x \in \overline{S}$ e sia $\{N_n : n = 1, 2, \ldots\}$ un sistema fondamentale di intorni di x che soddisfi la condizione $N_{n+1} \subset N_n$ per ogni n. Per la (a) per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un punto $x_n \in N_n \cap S$. La successione $\{x_n\}$ converge ad x. ■

3.5 *Esempi*

1. Sia X uno spazio topologico e $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una successione in X. Supponiamo che $\{x_n\}$ possieda una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k} : k = 1, 2, \ldots\}$ e sia $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$; allora $x \in \overline{\{x_n\}}$ (proposizione 3.4(b)). Naturalmente ciò non significa necessariamente che x è un punto di accumulazione di $\{x_n\}$: si pensi ad esempio ad una successione costante in uno spazio metrico.

D'altra parte, se $x \in D(\{x_n\}_{n\geq 1})$ non è necessariamente vero che esiste una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che converge ad x. Ad esempio sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia $\mathcal{T}$ dell'esempio 2.1(8), e siano $x_1 = a$, $x_n = c$, $n \geq 2$. Allora $e \in D(\{x_n\}_{n\geq 1})$ ma $\{x_n\}_{n\geq 1}$ non possiede una sottosuccessione convergente ad e.

Se X è uno spazio metrizzabile e $x \in D(\{x_n\}_{n\geq 1})$ allora $\{x_n\}_{n\geq 1}$ possiede una sottosuccessione convergente a x. Per la dimostrazione rinviamo il lettore a un risultato più generale che dimostreremo successivamente (proposizione 8.6).

2. In $\mathbb{R}$ gli insiemi finiti (in particolare i punti), gli intervalli chiusi $[a, b]$ e le loro unioni finite sono insiemi chiusi. Gli intervalli aperti a destra $[a, b)$ e quelli aperti a sinistra $(a, b]$ non sono né aperti né chiusi.

Ogni sottoinsieme finito di R ha derivato vuoto e interno vuoto e quindi coincide con la sua frontiera.

Se $a < b$ e S è uno qualsiasi degli intervalli $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, (a,b), allora

$$\mathrm{Int}(S) = (a,b), \quad \mathrm{Fr}(S) = \{a,b\}, \quad D(S) = [a,b].$$

Una successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è un insieme chiuso se non possiede sottosuccessioni convergenti oppure se contiene il limite di ogni sua sottosuccessione convergente. Ad esempio $\{n\}_{n\geq 1}$ è un insieme chiuso, mentre $\{1/n\}_{n\geq 1}$ non è chiuso e

$$\overline{\{1/n\}_{n\geq 1}} = \{1/n\}_{n\geq 1} \cup \{0\}.$$

L'insieme Q dei numeri razionali soddisfa

$$\mathrm{Int}(\mathsf{Q}) = \emptyset, \quad \mathrm{Est}(\mathsf{Q}) = \emptyset, \quad \mathrm{Fr}(\mathsf{Q}) = \mathsf{R}$$

e quindi $\overline{\mathsf{Q}} = \mathsf{R}$.

3. In uno spazio metrizzabile X si ha, per ogni $x \in X$, $r > 0$:

$$\overline{D_r(x)} \subset \{y \in X : d(x,y) \leq r\};$$

$$\mathrm{Fr}(D_r(x)) \subset \{y \in X : d(x,y) = r\};$$

Ogni punto è chiuso in X. Per le successioni valgono le stesse affermazioni fatte nell'esempio 2.

4. In R con la topologia cofinita gli insiemi chiusi sono gli insiemi finiti ed R stesso. Quindi in questa topologia si ha, se $a < b$:

$$\overline{(a,b)} = \mathsf{R};$$

$$\mathrm{Int}((a,b)) = \emptyset;$$

$$\mathrm{Fr}((a,b)) = \mathsf{R}.$$

3.6 PROPOSIZIONE *Le seguenti condizioni sono equivalenti per un sottoinsieme S di uno spazio topologico X:*

(a) $\overline{S} = X$.

(b) $\mathrm{Int}(X\backslash S) = \emptyset$.

(c) *S interseca ogni insieme aperto non vuoto.*

(d) *Esiste una base $\mathcal{B}$ per la topologia di X tale che S intersechi ogni aperto non vuoto appartenente a $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione

(a) $\Rightarrow$ (b). Segue dalla [3.7].

(b) $\Rightarrow$ (c). Se A è aperto e $A \cap S = \emptyset$ allora $A \subset \mathrm{Est}(S)$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Ovvio.

(d) $\Rightarrow$ (a). Sia $x \in X \backslash S$. Per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ esiste $A \in \mathcal{B}$ tale che $x \in A \subset N$. Poiché $A \cap S \neq \emptyset$ si ha

$$(N \backslash \{x\}) \cap S \neq \emptyset$$

e quindi $x \in D(S) \subset \overline{S}$. ■

Un *sottoinsieme* di uno spazio topologico X che gode delle proprietà equivalenti della proposizione precedente si dice *denso* in X.

$\mathbb{Q}$ è un esempio di sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$. Si osservi che se $S \subset T \subset X$ e S è denso in X allora segue dalla [3.9] che anche T è denso in X.

Uno spazio topologico si dice *separabile* se possiede un sottoinsieme numerabile che è denso. $\mathbb{R}$ è un esempio di spazio separabile perché $\mathbb{Q}$ è denso e numerabile.

3.7 PROPOSIZIONE

(a) *Uno spazio X che soddisfa il secondo assioma di numerabilità è separabile.*

(b) *Uno spazio metrizzabile e separabile X soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione

(a) Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X. In ogni aperto non vuoto A della base $\mathcal{B}$ scegliamo un punto x_A e sia

$$S = \{x_A : A \in \mathcal{B}\}.$$

S è un insieme numerabile che è denso perché soddisfa la condizione (d) della proposizione 3.6; quindi X è separabile.

(b) Sia S un sottoinsieme denso numerabile di X e sia

$$\mathcal{B} = \{D_q(x) : x \in S, \ q > 0 \text{ razionale}\}$$

la famiglia dei dischi aperti di centro punti di S e raggio razionale; $\mathcal{B}$ è una famiglia numerabile. Facciamo vedere che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di X.

Sia $A \subset X$ aperto ed $y \in A$. Sia $r > 0$ tale che $A \supset D_r(y)$. Poiché S è denso esiste $x \in D_{r/3}(y) \cap S$. Allora se q è un numero razionale tale che

$$\frac{r}{3} < q < \frac{2r}{3}$$

si ha

$$y \in D_q(x) \subset D_r(y) \subset A$$

e quindi A è unione di elementi di $\mathcal{B}$. ■

3.8 *Esempi*

1. Siano $0 < m \leq n$ interi ed R^n_m l'insieme dei punti di R^n aventi esattamente m coordinate razionali. R^n_m è denso in R^n. Poiché $\mathsf{R}^n_n = \mathsf{Q}^n$ è numerabile, R^n è separabile e quindi soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

2. (R, j_d) è separabile perché Q è denso nella topologia j_d, ma non soddisfa il secondo assioma di numerabilità (cfr. esempio 2.4(6)). Quindi (R, j_d) non è uno spazio metrizzabile.

3. Sia K un campo, $n \geq 1$ un intero e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminate. Denotiamo con $\mathbf{P}$ l'anello dei polinomi in $X_1, \ldots, X_n$ a coefficienti in K. Se S è un sottoinsieme di $\mathbf{P}$, denotiamo con (S) *l'ideale generato da* S, che è l'intersezione di tutti gli ideali contenenti S; ovvero, costruttivamente, (S) è l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di S:

$$(S) = \{p_1 f_1 + \ldots + p_h f_h : f_1, \ldots, f_h \in S,\ p_1, \ldots, p_h \in \mathbf{P}\}.$$

Sia $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un elemento del prodotto cartesiano K^n. Diremo che $\mathbf{a}$ è uno *zero di* S se $f(\mathbf{a}) = 0$ per ogni $f \in S$.

L'insieme degli zeri di S verrà denotato $V(S)$, e si dirà *sottoinsieme algebrico* di K^n, o semplicemente *insieme algebrico*. Dalla definizione costruttiva dell'ideale (S) segue immediatamente che

$$V(S) = V((S))$$

per ogni $S \subset \mathbf{P}$, e quindi non è restrittivo considerare solo gli insiemi algebrici definiti da ideali. Si ha inoltre:

(a) $I_1 \subset I_2 \Leftrightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$;

(b) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$, I_1, I_2 ideali;

(c) $V\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$ se $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una famiglia di ideali, dove denotiamo con $\sum_{\alpha \in A} I_\alpha$ l'ideale somma degli ideali I_α, definito come

$$\sum_{\alpha \in A} I_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$$

(d) se $\mathbf{m_a} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ allora $V(\mathbf{m_a}) = \{\mathbf{a}\}$;

(e) per ogni ideale I di $\mathbf{P}$, si ha $V(I) = V(\sqrt{I})$, dove

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbf{P} : f^s \in I \text{ per qualche } s > 0\}$$

è l'ideale *radicale di I*.

Le (a), (c), (d), (e) sono di dimostrazione immediata. Dimostriamo la (b). Per la (a)

$$V(I_1 \cap I_2) \supset V(I_1) \cup V(I_2).$$

Viceversa, se $\mathbf{a} \notin V(I_1) \cup V(I_2)$, siano $f_1 \in I_1$, $f_2 \in I_2$ tali che $f_i(\mathbf{a}) \neq 0$, $i = 1, 2$. Allora $f_1 f_2 \in I_1 \cap I_2$ e

$$(f_1 f_2)(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a}) f_2(\mathbf{a}) \neq 0,$$

quindi $\mathbf{a} \notin V(I_1) \cup V(I_2)$.

Si osservi che

$$\emptyset = V((1))$$

$$\mathsf{K}^n = V((0))$$

sono insiemi algebrici. Dalle proprietà (b) e (c) segue allora che la famiglia dei sottoinsiemi algebrici di K^n ha le proprietà $(C1)$, $(C2)$ e $(C3)$ degli insiemi chiusi, e quindi definisce una topologia Z su K^n, nella quale gli aperti sono gli insiemi il cui complementare è un insieme algebrico; Z si chiama *topologia di Zariski* su K^n.

Si noti che per la (d) i punti di K^n sono chiusi nella topologia di Zariski; in particolare Z è più fine della topologia cofinita; se $n = 1$ le due topologie coincidono.

In R^n Z è meno fine della topologia euclidea perché gli insiemi algebrici sono chiusi nella topologia euclidea (cfr. esempio 4.3(4)). Lo stesso vale in C^n.

Esercizi

1. Dimostrare con esempi che l'unione di una famiglia infinita di sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico non è in generale un sottoinsieme chiuso.

2. Dimostrare che dati comunque due sottoinsiemi A, B di uno spazio topologico X si ha

$$\mathrm{Fr}(A \cap B) = \mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B),$$

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B),$$

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B),$$

$$\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B),$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Trovare esempi in cui le inclusioni precedenti sono strette.

3. In uno spazio topologico X siano E un sottoinsieme denso ed U un aperto. Dimostrare che si ha:

$$\overline{E \cap U} \supset U.$$

4. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X è discreto se e solo se per ogni sottoinsieme A di X, $D(A) = \emptyset$.

5. Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Dimostrare che $\mathrm{Fr}(A) \supset \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A))$. Dare un esempio in cui non vale l'uguaglianza.

6. Sia $\mathcal{S}$ la famiglia di sottoinsiemi di N costituita da $\emptyset$, N e da tutti i sottoinsiemi della forma

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \quad n \in \mathsf{N}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{S}$ è una topologia;

(b) trovare i punti di accumulazione dell'insieme

$$S = \{3, 7, 51, 107\}$$

e determinare $\overline{S}$.

(c) determinare i sottoinsiemi di N il cui derivato è N:

7. Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia $\mathcal{T}$ dell'esempio 2.1(8). Trovare la chiusura, il derivato, la frontiera e l'interno dei seguenti sottoinsiemi:

$$\{a\},\ \{e\},\ \{d, e\},\ \{a, c\},\ \{a, b\},\ \{a, d, e\}.$$

8. Descrivere la chiusura, la frontiera, l'interno, l'esterno e il derivato di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di R^3:

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathsf{Q}\};$$

$$\{\mathbf{x} : x_1 + x_2 = 1\}; \quad \{\mathbf{x} : x_1 \in \mathsf{Q}\};$$

$$\{\mathbf{x} : x_1 + x_2 = 2,\ \ x_3 > 0\}.$$

9. In R consideriamo il sottoinsieme

$$S = \left\{ \frac{n}{(n+1)} : n = 0, 1, 2, \ldots \right\}.$$

Dimostrare che

$\overline{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea,

$\overline{S} = \mathsf{R}$ nella topologia cofinita.

10. Sia X un insieme non vuoto. Un *operatore di chiusura* su X è un'applicazione $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che

$$C(\emptyset) = \emptyset,$$

$$C(S) \supset S \text{ per ogni } S \in \mathcal{P}(X),$$

$$C(C(S)) = C(S) \text{ per ogni } S \in \mathcal{P}(X),$$

$$C(A \cup B) = C(A) \cup C(B) \text{ per ogni } A, B \in \mathcal{P}(X).$$

Dimostrare che se C è un operatore di chiusura su X e se $\mathcal{T}$ denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi S di X tali che $C(X \setminus S) = X \setminus S$, allora $\mathcal{T}$ è una topologia. Dimostrare che per ogni sottoinsieme S di X si ha:

$$C(S) = \overline{S}$$

nella topologia $\mathcal{T}$.

11. Sia X un insieme non vuoto. Un *operatore di interno* su X è un'applicazione $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che

$$I(X) = X,$$

$$S \supset I(S) \text{ per ogni } S \in \mathcal{P}(X),$$

$$I(I(S)) = I(S) \text{ per ogni } S \in \mathcal{P}(X),$$

$$I(A \cap B) = I(A) \cap I(B) \text{ per ogni } A,\ B \in \mathcal{P}(X).$$

Dimostrare che se I è un operatore di interno su X e se $\mathcal{T}$ denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi A di X tali che $I(A) = A$, $\mathcal{T}$ è una topologia. Dimostrare che per ogni sottoinsieme S di X si ha $I(S) = \mathrm{Int}(S)$ nella topologia $\mathcal{T}$.

4 Applicazioni continue

Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione. f si dice *continua nel punto* $x \in X$ se per ogni intorno N di $f(x) \in Y$ esiste un intorno M di x tale che $f(M) \subset N$.

f si dice *continua* se è continua in ogni punto.

È evidente che la definizione di continuità che abbiamo dato coincide con quella data nel paragrafo 1 qualora X e Y siano spazi metrizzabili.

L'insieme i cui elementi sono le applicazioni continue di X in Y si denota $\mathcal{C}(X, Y)$.

4.1 PROPOSIZIONE *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di spazi topologici. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *f è continua.*

(b) *$f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni aperto A di Y.*

(c) *$f^{-1}(C)$ è chiuso in X per ogni chiuso C di Y.*

Dimostrazione

(a) $\Rightarrow$ (b) Sia A un aperto di Y e $x \in f^{-1}(A)$. Poiché A è un intorno di $f(x)$ e f è continua esiste un intorno M di x tale che $f(M) \subset A$. Quindi $x \in M \subset f^{-1}(A)$ e perciò $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}(x)$. Segue che $f^{-1}(A)$ è aperto perché è intorno di ogni suo punto.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sia $x \in X$ e $N \in \mathcal{N}(f(x))$. Esiste un aperto $A \subset Y$ tale che $f(x) \in A \subset N$. Allora $M = f^{-1}(A) \in \mathcal{N}(x)$ e $f(M) = A \subset N$. Quindi f è continua in x.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) segue facilmente dalla relazione:

$$f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$$

per ogni sottoinsieme S di Y. ■

4.2 PROPOSIZIONE *Siano X, Y, Z spazi topologici, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ applicazioni. Se f è continua in x e g è continua in $f(x) \in Y$ allora $g \cdot f$ è continua in x.*

Quindi se f e g sono continue anche la loro composizione $g \cdot f$ è continua.

Dimostrazione. Immediata. ■

4.3 *Esempi*

1. L'applicazione identità di uno spazio topologico in se stesso è continua. Se X, Y sono due spazi topologici e $y_0 \in Y$, l'applicazione costante:

$$c_{y_0} : X \to Y$$

che manda ogni $x \in X$ in y_0 è continua.

Ogni applicazione di uno spazio discreto X in uno spazio Y è continua. Ogni applicazione di uno spazio X in uno spazio banale Y è continua.

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme non vuoto X e $1_X : X \to X$ l'applicazione identità. Se si considera il dominio di 1_X con la topologia $\mathcal{T}'$ ed il codominio con la topologia $\mathcal{T}$ allora 1_X è continua se e solo se $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$.

2. Se X e Y sono spazi metrizzabili, un'applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se è continua come applicazione tra spazi metrici. Ciò segue dal teorema 1.1. In particolare sono continue le applicazioni lineari $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ (cfr. esempio 1.2(4)); le traslazioni $T_a : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$, $a \in \mathsf{R}^n$, sono isometrie e quindi sono continue. Similmente sono continue le applicazioni lineari $L : \mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^m$ e le traslazioni $T_a : \mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^n$.

3. Sia X uno spazio topologico. Un'applicazione $f : X \to \mathsf{R}^n$ è continua in $x \in X$ se e solo se sono continue in x le composizioni:

$$p_i \cdot f : X \to \mathsf{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove p_i denota la i-esima proiezione di R^n in R.

L'affermazione "solo se" segue dal fatto che le proiezioni p_i sono continue perché lineari e dalla proposizione 4.2. Viceversa supponiamo che le applicazioni $f_i := p_i \cdot f$ siano continue in x, e sia $N \subset \mathsf{R}^n$ un intorno di $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Esiste $r > 0$ tale che $f(x) \in Q_r(f(x)) \subset N$, dove

$$Q_r(f(x)) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathsf{R}^n : |y_i - f_i(x)| < \frac{r}{2},\ i = 1, \dots, n \right\}$$

(cfr. esempio 2.4(2)). Per la continuità di $f_1, \dots, f_n$ in x esistono intorni $M_1, \dots, M_n$ di x tali che

$$f_i(M_i) \subset \left(f_i(x) - \frac{r}{2},\ f_i(x) + \frac{r}{2} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ma allora, posto $M = M_1 \cap \dots \cap M_n$, si ha:

$$f(M) \subset f_1(M_1) \times \dots \times f_n(M_n) \subset Q_r(f(x)) \subset N,$$

e quindi f è continua in x perché $M \in \mathcal{N}(x)$.

4. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Gli insiemi $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, si chiamano *fibre di f*. Se i punti di y sono chiusi le fibre di f sono sottoinsiemi chiusi di X. Le fibre di un'applicazione continua $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ si dicono *insiemi di livello di f*. Se $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ è lineare gli insiemi di livello di L sono i sottoinsiemi di equazione

$$L(x) = a, \quad a \in \mathsf{R},$$

e cioè *iperpiani affini* di R^n; per $n = 2, 3$ si ottengono *rette* e *piani affini* rispettivamente.

Due iperpiani affini

$$L(x) = a,$$

$$L(x) = b, \quad a,\ b \in \mathsf{R}$$

definiti dalla stessa applicazione lineare si dicono *paralleli*. Più in generale un *sottospazio affine* di R^n è un sottoinsieme chiuso che è fibra di un'applicazione lineare $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$. Quindi un sottospazio affine è un sottoinsieme di R^n definito da equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases} \qquad [4.1]$$

cioè è il luogo delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari. Se il sistema è omogeneo si ottiene un sottospazio vettoriale. Ogni sottospazio affine non vuoto A è il *traslato* di un unico sottospazio vettoriale V, quello delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema [4.1] che definisce A:

$$A = V + \mathbf{b} = \{\mathbf{v} + \mathbf{b} : \mathbf{v} \in V\}$$

dove $\mathbf{b} \in \mathsf{R}^n$ è un qualsiasi elemento di A, cioè una soluzione qualsiasi del sistema [4.1]. La *dimensione* di A è per definizione uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V.

Siano X, Y spazi topologici. Un'*applicazione* $f : X \to Y$ si dice *aperta* se per ogni sottoinsieme aperto $A \subset X$ l'insieme $f(A) \subset Y$ è aperto; f si dice *chiusa* se per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset X$ l'insieme $f(C)$ è chiuso in Y.

La composizione di due applicazioni aperte (rispettivamente chiuse) è aperta (chiusa).

L'applicazione $f : X \to Y$ si dice un *omeomorfismo* oppure un'*equivalenza topologica* se f è continua, biunivoca, e se l'inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua. Un'applicazione biunivoca e continua è un omeomorfismo se e solo se è anche aperta oppure chiusa. Un'isometria di spazi metrizzabili è un omeomorfismo (cfr. esempio 1.2(6)).

Due spazi topologici si dicono *omeomorfi*, oppure *topologicamente equivalenti*, e si scrive $X \approx Y$, se esiste un omeomorfismo $f : X \to Y$. Le tre proprietà seguenti sono ovvie:

(a) *l'identità di uno spazio in se stesso è un omeomorfismo;*

(b) *se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo, anche $f^{-1} : Y \to X$ è un omeomorfismo;*

(c) *se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono omeomorfismi, la composizione $g \cdot f : X \to Z$ è un omeomorfismo.*

Da queste proprietà segue che *l'equivalenza topologica è una relazione di equivalenza tra spazi topologici.*

Una proprietà che una volta posseduta da uno spazio X è anche posseduta da ogni spazio omeomorfo a X si dice *proprietà topologica*. Ogni proprietà che si definisce solo in termini di insiemi aperti o chiusi e di applicazioni continue è una proprietà topologica. Ad esempio soddisfare il primo oppure il secondo assioma di numerabilità, l'essere separabile, l'essere uno spazio discreto o banale, sono altrettante proprietà topologiche.

4.4 *Esempi*

1. Le proiezioni $p_i : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ sono applicazioni aperte. Sia $A \subset \mathsf{R}^n$ un aperto, $a \in p_i(A)$ e

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

un qualsiasi punto di A tale che $p_i(\mathbf{x}) = a$. Poiché A è aperto esiste $r > 0$ tale che $Q_r(\mathbf{x}) \subset A$. Allora

$$a \in p_i(Q_r(\mathbf{x})) \subset p_i(A)$$

e $p_i(Q_r(\mathbf{x})) = \left(a - \frac{r}{2}, \; a + \frac{r}{2}\right)$ è un intorno di a: quindi $p_i(A)$ è aperto.

Se $n \geq 2$ le proiezioni non sono chiuse. Sia infatti $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, e consideriamo il chiuso S di R^n di equazione:

$$x_i x_j - 1 = 0.$$

Allora $p_i(S) = \mathsf{R}\backslash\{0\}$ non è chiuso.

2. Sia $n < m$ e $\iota : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ l'inclusione lineare

$$\iota(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

ι è continua e chiusa ma non aperta. La continuità segue dalla linearità. Sia $C \subset \mathsf{R}^n$ chiuso e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathsf{R}^m\backslash\iota(C)$. Se $y_j \neq 0$ per qualche $j \geq n+1$, allora

$$D_{|y_j|}(\mathbf{y}) \subset \mathsf{R}^m\backslash\iota(\mathsf{R}^n) \subset \mathsf{R}^m\backslash\iota(C).$$

Se invece $y_{n+1} = \ldots = y_m = 0$, allora $\mathbf{y} = \iota(\mathbf{y}')$, dove $\mathbf{y}' = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathsf{R}^n\backslash C$. Sia $r > 0$ tale che $D_r(\mathbf{y}') \subset \mathsf{R}^n\backslash C$. Allora

$$D_r(\mathbf{y}) \subset \mathsf{R}^m\backslash\iota(C).$$

Quindi ogni $\mathbf{y} \in \mathsf{R}^m\backslash\iota(C)$ è esterno a $\iota(C)$, cioè $\iota(C)$ è chiuso. Questo dimostra che ι è un'applicazione chiusa.

L'applicazione ι non è aperta perché $\iota(\mathsf{R}^n)$ non ha punti interni.

3. Sia X uno spazio topologico. L'insieme Omeo(X) degli omeomorfismi di X in se stesso è un gruppo di trasformazioni di X, cioé è un insieme di biezioni di X in sé che costituisce un gruppo rispetto alla composizione (cfr. Sernesi 1989, § 14).

Le applicazioni lineari invertibili $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ sono particolari omeomorfismi; esse costituiscono un sottogruppo di Omeo(R^n) che si può identificare con il gruppo $GL_n(\mathsf{R})$ delle matrici $n \times n$ reali invertibili. Un altro sottogruppo di Omeo(R^n) è costituito dalle traslazioni:

$$T_{\mathbf{a}} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n, \quad T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \mathsf{R}^n.$$

Il gruppo delle traslazioni di R^n si identifica con il gruppo additivo R^n e verrà denotato Θ_n.

Se $T_{\mathbf{a}} \in \Theta_n$ e $L \in GL_n(\mathsf{R})$ la composizione

$$T_{\mathbf{a},L} := T_{\mathbf{a}} \cdot L = L \cdot T_{L^{-1}(\mathbf{a})}$$

è un'*affinità* di R^n. Si ha:

$$T_{\mathbf{a}.L}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \mathbf{a} = A\mathbf{x} + \mathbf{a} = \left(\sum_j a_{1j}x_j + a_1, \ldots, \sum_j a_{nj}x_j + a_n \right),$$

dove $A = (a_{ij})$ è la matrice che rappresenta L. Le affinità sono omeomorfismi perché composizione di due omeomorfismi; esse costituiscono un sottogruppo di Omeo(R^n) che denoteremo Aff(R^n) e che contiene $GL_n(\mathsf{R})$ e Θ_n come sottogruppi. Un altro sottogruppo notevole di Aff(R^n) è il gruppo Λ_n delle omotetie: ricordiamo che una *omotetia* è un'affinità $T_{\mathbf{a},L}$ in cui $L = \lambda 1_{\mathsf{R}^n}$ per qualche $\lambda \in \mathsf{R}\backslash\{0\}$.

Le applicazioni lineari $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ in cui L è un operatore unitario, cioè è rappresentato da una matrice ortogonale, costituiscono un sottogruppo di $GL_n(\mathsf{R})$ isomorfo al gruppo ortogonale $O(n)$. Le affinità $T_{\mathbf{a},L} \in$ Aff(R^n) in cui $L \in O(n)$ sono le *isometrie*, o *congruenze*, di R^n e costituiscono un sottogruppo Isom(R^n) di $GL_n(\mathsf{R})$. Le *isometrie dirette*, o *simmetrie*, di R^n sono quelle isometrie $T_{\mathbf{a},L}$ tali che $L \in SO(n)$, cioè tali che $\det(L) = 1$. Esse costituiscono un sottogruppo Isom$_0$(R^n) di Aff(R^n) contenuto nel sottogruppo Aff$_0$(R^n) di Aff(R^n) costituito dalle *affinità dirette*, cioè dalle affinità $T_{\mathbf{a},L}$ tali che $\det(L) > 0$.

Infine ricordiamo che una *similitudine* di R^n è un'affinità ottenuta componendo un numero finito di isometrie e di omotetie. Le similitudini costituiscono un sottogruppo Simil(R^n) di Aff(R^n) (cfr. Sernesi 1989, § 20).

Vediamo dunque che tutte le trasformazioni di R^n considerate in geometria affine e in geometria euclidea sono particolari omeomorfismi.

In modo simile si vede che Aff(C^n) è un sottogruppo di Omeo(C^n), cioè ogni affinità di C^n è un omeomorfismo (cfr. esercizio 11).

Esercizi

1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di spazi topologici, $x \in X$ e $\mathcal{B}(f(x))$ un sistema fondamentale di intorni di $f(x)$. Dimostrare che f è continua in x se e solo se per ogni $N \in \mathcal{B}(f(x))$ esiste $M \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(M) \subset N$.

2. Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione. Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente una sottobase e una base della topologia di Y. Dimostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti:

(a) f è continua;

(b) $f^{-1}(B)$ è aperto in X per ogni $B \in \mathcal{B}$;

(c) $f^{-1}(S)$ è aperto per ogni $S \in \mathcal{S}$;

(d) $f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)}$ per ogni sottoinsieme V di X;

(e) $f^{-1}(\overline{W}) \supset \overline{f^{-1}(W)}$ per ogni sottoinsieme W di Y.

3. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di un insieme X in uno spazio topologico Y con topologia $\mathcal{T}$. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{T}\}$$

è una topologia su X rispetto alla quale l'applicazione f è continua. $f^{-1}(\mathcal{T})$ è precisamente la meno fine tra tutte le topologie su X che rendono f continua, e si chiama *topologia indotta da f su X*.

4. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di uno spazio topologico X con topologia $\mathcal{T}$ in un insieme Y. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di Y:

$$f_*(\mathcal{T}) := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

è una topologia su Y, che l'applicazione f è continua rispetto ad essa, e che ogni altra topologia su Y che rende f continua è meno fine di $f_*(\mathcal{T})$. Questa si chiama *topologia indotta da f su Y.*

5. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e $\chi_S : X \to \mathsf{R}$ l'applicazione così definita:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Dimostrare che χ_S è continua in x se e solo se $x \notin \mathrm{Fr}(S)$.

6. Dimostrare che le topologie j_d e j_s su R sono omeomorfe. (*Suggerimento.* Verificare che l'applicazione $x \mapsto -x$ è un omeomorfismo).

7. Siano X uno spazio topologico, $f,\ g : X \to \mathsf{R}$ applicazioni continue e $\alpha \in \mathsf{R}$. Dimostrare che ognuna delle seguenti applicazioni è continua:

$$\begin{aligned} &\alpha f : X \to \mathsf{R}, && (\alpha f)(x) = \alpha f(x); \\ &|f| : X \to \mathsf{R}, && |f|(x) = |f(x)|; \\ &f+g : X \to \mathsf{R}, && (f+g)(x) = f(x)+g(x); \\ &fg : X \to \mathsf{R}, && (fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

8. Siano X uno spazio topologico, $f,\ g : X \to \mathsf{R}^n$ applicazioni continue e $\alpha \in \mathsf{R}$. Dimostrare che ognuna delle seguenti applicazioni è continua:

$$\begin{aligned} &f+g : X \to \mathsf{R}^n, && (f+g)(x) = f(x)+g(x); \\ &\alpha f : X \to \mathsf{R}^n, && (\alpha f)(x) = \alpha f(x); \\ &\|f\| : X \to \mathsf{R}, && \|f\|(x) = \|f(x)\|. \end{aligned}$$

9. Siano X uno spazio topologico e $f : X \to \mathsf{R}$ un'applicazione continua tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che l'applicazione:

$$\frac{1}{f} : X \to \mathsf{R}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad x \in X$$

è continua.

10. Siano $f_1, \dots, f_n : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ applicazioni continue. Dimostrare che le applicazioni

$$\begin{aligned} &f^+ : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}, && f^+(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n); \\ &f^\times : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}, && f^\times(\mathbf{x}) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sono continue.

11. Un'*affinità complessa* è un'applicazione $f : \mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^n$ della forma

$$f(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z} \in \mathsf{C}^n,$$

dove $\mathbf{b} \in \mathsf{C}^n$ e $L \in \mathrm{GL}_n(C)$. Dimostrare che un'affinità complessa è un omeomorfismo.

12. Sia X uno spazio topologico tale che per ogni sottoinsieme $I \subset X$ sia abbia $\mathrm{Int}(I) = \emptyset$. Dimostrare che ogni applicazione $f : Y \to X$ da uno spazio topologico Y in X è continua.

13. Sia $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ l'applicazione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua se il codominio ha la topologia euclidea ed il dominio ha la topologia j_d (cfr. esempio 2.4(1)).

14. Sia $n \geq 1$ un intero. Si identifichi l'insieme $M_n(\mathsf{R})$ delle matrici quadrate $n \times n$ a elementi reali allo spazio euclideo R^{n^2}, associando a una matrice $A = (a_{ij})$ il punto

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \in \mathsf{R}^{n^2}.$$

Dimostrare che l'applicazione

$$\det : M_n(\mathsf{R}) \to \mathsf{R} \quad A \mapsto \det(A)$$

è continua.

15. In modo simile al caso reale dell'esercizio precedente, si identifichi $M_n(\mathsf{C})$ a C^{n^2} e si dimostri che $\det : M_n(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ è un'applicazione continua.

Capitolo 2

Esempi

5 Sottospazi

Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, e sia S un suo sottoinsieme non vuoto. Consideriamo la famiglia $\mathcal{T}_S$ dei sottoinsiemi di S della forma $S \cap A$, al variare di A tra gli aperti di X. È immediato verificare che $\mathcal{T}_S$ è una topologia, che si chiama *topologia relativa di S in X* (ovvero *topologia indotta da X su S*); si ha $\mathcal{T}_S = i^{-1}(\mathcal{T})$, dove $i : S \subset X$ è l'inclusione (cfr. esercizio 4.3). In particolare l'inclusione i è continua se S ha la topologia $\mathcal{T}_S$ (ed infatti $\mathcal{T}_S$ è la topologia meno fine su S che rende i continua).

Nel caso particolare in cui X è metrizzabile la topologia relativa di S in X è quella indotta dalla distanza (cfr. esempio 2.1(6)).

Considerato come spazio topologico con la topologia relativa, S si chiama *sottospazio topologico* (o brevemente *sottospazio*) *di X* e X si chiama *spazio ambiente di S*.

Si noti che dalla definizione segue che un sottoinsieme $H \subset S$ è chiuso se e solo se esiste un chiuso $K \subset X$ tale che $H = K \cap S$. Come abbiamo già osservato nel caso degli spazi metrizzabili, dal fatto che un sottoinsieme B di S sia aperto (oppure chiuso) in S non segue necessariamente che B è aperto (risp. chiuso) in X. Le principali proprietà dei sottospazi sono date dalla seguente

5.1 PROPOSIZIONE *Siano X uno spazio topologico e S un suo sottospazio.*

(a) *Se $\emptyset \neq T \subset S$, la topologia relativa di T in S coincide con la topologia relativa di T in X.*

(b) *Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia di X, la famiglia*

$$\mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$$

è una base della topologia di S.

(c) *Se $\mathcal{S}$ è una sottobase della topologia di X, la famiglia*

$$\mathcal{S}_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{S}\}$$

è una sottobase della topologia di S.

(d) *Sia $x \in S$; un sottoinsieme U di S è un intorno di x in S se e solo se esiste un intorno V di x in X tale che $U = V \cap S$.*

(e) *Se W è un sottoinsieme di S e denotiamo con $\overline{W}^r$ la chiusura di W in S e con $\overline{W}$ la chiusura di W in X, allora $\overline{W}^r = \overline{W} \cap S$.*

(f) *S è aperto in X se e solo se l'inclusione $i : S \subset X$ è aperta.*

(g) *S è chiuso in X se e solo se l'inclusione i è chiusa.*

Dimostrazione

(a) Se $A \subset T$ è aperto nella topologia relativa di T in S esiste B aperto in S tale che $A = B \cap T$; per la definizione di topologia relativa di S in X esiste un aperto U di X tale che $B = U \cap S$; quindi $A = T \cap (S \cap U) = T \cap U$ è aperto nella topologia relativa di T in X. Il viceversa si dimostra in modo simile.

(b) Sia A un aperto di S e B un aperto di X tale che $A = B \cap S$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base di X si ha

$$B = \bigcup_{j \in J} B_j, \quad B_j \in \mathcal{B}$$

e perciò

$$A = B \cap S = \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \cap S = \bigcup_{j \in J} (B_j \cap S);$$

poiché ogni $B_j \cap S \in \mathcal{B}_S$, ciò prova che $\mathcal{B}_S$ è una base della topologia di S.

(c) Segue immediatamente da (b).

(d) Se V è un intorno di x in X esiste un aperto B di X tale che $x \in B \subset V$; allora $A = S \cap B$ è un aperto di S tale che $x \in A \subset V \cap S = U$, e quindi U è un intorno di x in S. Se viceversa U è un intorno di x in S ed A un aperto di S tale che $x \in A \subset U$, esiste un aperto B di X tale che $A = B \cap S$. Poniamo $V = B \cup U$. Allora $x \in B \subset V$, quindi V è un intorno di x in X e $V \cap S = U$.

Le dimostrazioni di (e), (f) e (g) sono lasciate al lettore. ■

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici e sia Y' un sottospazio di Y tale che $f(X) \subset Y'$. Ponendo $f'(x) = f(x)$, $x \in X$, resta definita un'applicazione $f' : X \to Y'$ che, è immediato verificarlo, è continua; f' si chiama *applicazione di X in Y' indotta da f*. f si dice *inclusione continua* se l'applicazione $X \to f(X)$ indotta da f è un omeomorfismo. In particolare se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo allora f è un'inclusione continua.

L'inclusione di un sottospazio nel suo spazio ambiente è un'inclusione continua.

Se $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sono due topologie su un insieme $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ strettamente, l'identità $(X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ è un esempio di applicazione continua e biettiva che non è un'inclusione continua.

Siano $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici, S un sottospazio di X ed $i : S \subset X$ l'inclusione. La composizione $f \cdot i : S \to Y$ è un'applicazione continua che si chiama *restrizione di f a S*, e si denota $f_{|S}$. Se viceversa $g : S \to Y$ è un'applicazione continua, ogni applicazione continua $f : X \to Y$ tale che $f_{|S} = g$ si chiama *estensione continua di g ad X*.

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente:

5.2 PROPOSIZIONE *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ un omeomorfismo ed S un sottospazio di X. Allora la restrizione $f_{|S} : S \to Y$ è un'inclusione continua.*

Supponiamo dati un ricoprimento $\mathcal{F}$ dello spazio X ed un'applicazione continua $f : X \to Y$. Per ogni $F \in \mathcal{F}$ consideriamo la restrizione $f_{|F} : F \to Y$. La famiglia di applicazioni continue

$$\{f_{|F} : F \to Y\}_{F \in \mathcal{F}}$$

soddisfa alle ovvie *condizioni di compatibilità*

$$(f_{|F_1})_{|F_1 \cap F_2} = (f_{|F_2})_{|F_1 \cap F_2}, \quad \text{per ogni } F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}.$$

Supponiamo viceversa dato un ricoprimento $\mathcal{F}$ dello spazio X ed una famiglia di applicazioni continue

$$\{f_F : F \to Y\}_{F \in \mathcal{F}}$$

soddisfacenti alle condizioni di compatibilità

$$(f_{F_1})_{|F_1 \cap F_2} = (f_{F_2})_{|F_1 \cap F_2}, \quad \text{per ogni } F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}. \qquad [5.1]$$

Possiamo allora definire *l'incollamento delle applicazioni* $\{f_F\}$ come l'applicazione $f : X \to Y$ data da

$$f(x) = f_F(x) \quad \text{se } x \in F.$$

Si ha ovviamente

$$f_{|F} = f_F \quad \text{per ogni } F \in \mathcal{F},$$

ma in generale f non è continua. Ad esempio l'applicazione $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

non è continua ed è l'incollamento delle applicazioni costanti

$$c_0 : (-\infty, 0] \to \mathsf{R}, \quad c_1 : (0, +\infty) \to \mathsf{R},$$

che sono continue.

La proposizione seguente dà delle condizioni che garantiscono la continuità dell'incollamento di una famiglia di applicazioni continue.

5.3 PROPOSIZIONE *Siano $\mathcal{F}$ un ricoprimento dello spazio topologico X, $\{f_F : F \to Y\}_{F \in \mathcal{F}}$ una famiglia di applicazioni continue a valori in uno spazio topologico Y, soddisfacenti alle condizioni di compatibilità* [5.1], *e $f : X \to Y$ l'incollamento delle $\{f_F\}$. Supponiamo che una delle seguenti condizioni sia soddisfatta:*

(a) *tutti gli $F \in \mathcal{F}$ sono insiemi aperti (si dice in questo caso che $\mathcal{F}$ è un* ricoprimento aperto*);*

(b) *$\mathcal{F}$ è una famiglia finita di insiemi chiusi ($\mathcal{F}$ è un* ricoprimento chiuso finito*).*

Allora f è continua.

Dimostrazione. Supponiamo soddisfatta la (a), e sia A un aperto di Y. Poiché $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di X, si ha

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (f^{-1}(A) \cap F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} f_F^{-1}(A).$$

Per la continuità delle applicazioni f_F, $f_F^{-1}(A)$ è aperto in F per ogni $F \in \mathcal{F}$ e quindi è aperto in X, perché gli F sono insiemi aperti; ne segue che $f^{-1}(A)$ è aperto in X, e quindi f è continua.

Nell'ipotesi (b) la dimostrazione è simile: si considera un chiuso $H \subset Y$ e si verifica che $f^{-1}(H)$ è chiuso in X. ■

5.4 *Esempi*

1. Se X e Y sono due spazi metrici e $f : X \to Y$ è un'applicazione tale che $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ per ogni $x, x' \in X$, allora f è un'inclusione continua di X in Y considerati come spazi topologici metrizzabili.

2. I seguenti sottospazi di R^n, $n \geq 1$, sono esempi che ricorrono frequentemente in topologia:

$\mathbf{I} = [0, 1]$: l'intervallo unitario chiuso di R.

$\mathbf{I}^n = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\}$: l'*n-cubo.*

$\mathbf{D}^n = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$: l'*n-disco unitario chiuso.*

$\mathbf{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \mathrm{Fr}(\mathbf{D}^n)$: l'$(n-1)$-*sfera.*

$\mathbf{S}^{n-1}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{n-1} : x_n \geq 0\}$;

$\mathbf{S}^{n-1}_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{n-1} : x_n \leq 0\}$; le $(n-1)$-*semisfere chiuse* (o $(n-1)$-*calotte chiuse*).

$\Delta^n = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_1 + \ldots + x_n \leq 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$: l'*n-simplesso.*

Uno spazio X omeomorfo a $\mathbf{D}^n$ si chiama *n-cella.*

Si verifica facilmente che ogni sottospazio affine $\mathbf{A}$ di dimensione m di R^n è omeomorfo a R^m. Sia infatti $\mathbf{A} = \mathbf{V} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathsf{R}^n$, dove $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione m in R^n, e sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base ortonormale di $\mathbf{V}$. L'applicazione $h : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$ definita da

$$h(\mathbf{y}) = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_m\mathbf{v}_m + \mathbf{b}$$

induce un omeomorfismo di R^m su $\mathbf{A}$.

Un *sottoinsieme* K di R^n si dice *convesso* se per ogni coppia di punti distinti P, $Q \in K$, il segmento che li congiunge

$$\overline{PQ} = \{(1-t)P + tQ : t \in \mathbf{I}\}$$

è contenuto in K. Un *solido convesso* è un sottoinsieme convesso il cui interno è non vuoto.

$\mathbf{I}^n$, $\mathbf{D}^n$ e Δ^n sono solidi convessi (fig. 5.1); un sottospazio affine diverso da R^n è convesso ma non è un solido; $\mathbf{S}^{n-1}$ non è convesso.

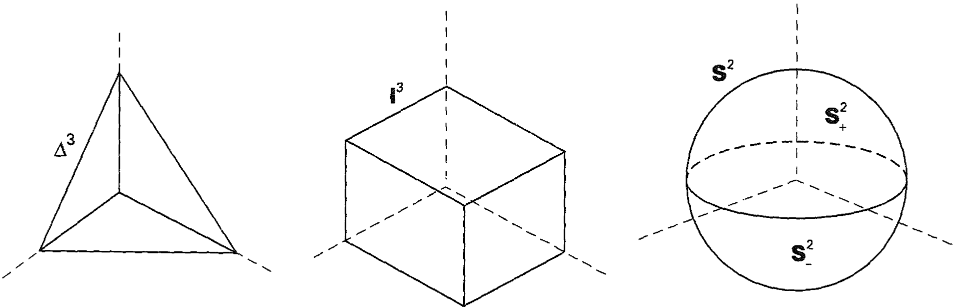


Figura 5.1

L'intersezione di una famiglia qualunque di insiemi convessi è un insieme convesso, come segue subito dalla definizione.

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ è un qualunque sottoinsieme, l'*inviluppo convesso* di S è il più piccolo insieme convesso $K(S)$ contenente S, cioè l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti S. Ovviamente l'inviluppo convesso di un insieme convesso S è S stesso.

L'inviluppo convesso di $\mathbf{S}^{n-1}$ è $\mathbf{D}^n$. Δ^n è l'inviluppo convesso dell'insieme finito $\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dove $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Più in generale l'inviluppo convesso di un insieme finito $\{P_1, \ldots, P_m\}$ è

$$K(P_1, \ldots, P_m) = \{t_1 P_1 + \ldots + t_m P_m : t_1 + \ldots + t_m = 1,\ t_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

3. Per costruire omeomorfismi tra sottospazi di $\mathbb{R}^n$ useremo quando possibile affinità o addirittura congruenze o similitudini.

Due sottospazi topologici S e T di $\mathbb{R}^n$ si diranno *affinemente equivalenti* (rispettivamente *congruenti*, risp. *simili*) se esiste un'affinità (risp. una congruenza, risp. una similitudine) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(S) = T$.

Poiché le affinità sono omeomorfismi, segue dalla proposizione 5.2 che due sottospazi affinemente equivalenti (in particolare congruenti o simili) sono omeomorfi.

Ad esempio $\mathbf{D}^n$ ed $\mathbf{S}^{n-1}$ sono omeomorfi ad un qualsiasi disco chiuso $\overline{D_r(\mathbf{x})}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, e alla sua frontiera rispettivamente, perché è possibile, con una opportuna similitudine (quale?) mandare $\mathbf{D}^n$ su $\overline{D_r(\mathbf{x})}$ in modo che $\mathbf{S}^{n-1}$ abbia per immagine $\mathrm{Fr}(\overline{D_r(\mathbf{x})})$. Denoteremo d'ora in poi $\mathrm{Fr}(\overline{D_r(\mathbf{x})})$ con $S^{n-1}(\mathbf{x}, r)$.

4. Consideriamo $D_1(\mathbf{0}) = \mathbf{D}^n \setminus \mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, il disco aperto di centro l'origine e raggio 1. L'applicazione

$$h : D_1(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}^n$$

definita da

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/(1 - \|\mathbf{x}\|)$$

è un omeomorfismo. Infatti h è continua e possiede un'inversa continua data da

$$h^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}/(1 + \|\mathbf{y}\|).$$

Sottospazi di $\mathbb{R}$

5. Siano $[a, b]$ e $[c, d]$ due intervalli chiusi e limitati ($a < b$, $c < d$), considerati come sottospazi topologici di $\mathbb{R}$. L'applicazione

$$f : [a, b] \to [c, d]$$

definita da

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

è la restrizione ad $[a,b]$ di una affinità di R in R, che è un omeomorfismo. Per la proposizione 5.2 f è un omeomorfismo. Con un'ulteriore restrizione otteniamo omeomorfismi tra

(a,b) e (c,d),

$[a,b)$ e $[c,d)$,

$(a,b]$ e $(c,d]$.

L'omeomorfismo f che abbiamo considerato soddisfa $f(a) = c$, $f(b) = d$. Se si considera invece l'applicazione

$$g : [a,b] \to [c,d]$$

definita da

$$g(x) = d + \frac{c-d}{b-a}(x-a)$$

si ottiene un omeomorfismo tale che $g(a) = d$, $g(b) = c$; g induce omeomorfismi di

$[a,b)$ su $(c,d]$

e di

$(a,b]$ su $[c,d)$.

Si noti che se $b - a \neq d - c$ gli intervalli $[a,b]$ e $[c,d]$ non sono congruenti pur essendo omeomorfi.

6. Siano $c < b$ ed $f : [c,b) \to \mathsf{R}$ definita da

$$f(x) = (x-c)/(b-x).$$

f è un'inclusione continua cioè induce un omeomorfismo di $[c,b)$ sull'immagine, che è l'intervallo $[0,+\infty)$. Infatti f è continua e dotata di inversa $f^{-1} : [0,+\infty) \to [c,b)$ data da

$$f^{-1}(t) = (bt+c)/(t+1).$$

Per restrizione f definisce un omeomorfismo di (c,b) su $(0,+\infty)$.

Analogamente, se $a < c$ e se poniamo

$$g(x) = (x-c)/(x-a)$$

definiamo un omeomorfismo $g : (a, c] \rightarrow (-\infty, 0]$, il cui inverso è

$$g^{-1}(t) = (c - at)/(1 - t).$$

Anche qui per restrizione si definisce un omeomorfismo di (a, c) su $(-\infty, 0)$.

Il lettore può modificare facilmente questi esempi sostituendo $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$ con $[d, +\infty)$ e $(-\infty, d]$ per un qualsiasi $d \in \mathsf{R}$.

Se $a < b$ e se poniamo $c = (a + b)/2$, possiamo definire

$$h : (a, b) \rightarrow \mathsf{R}$$

come incollamento di f e g definite qui sopra, ponendo cioè

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - c}{x - a} & \text{se } a < x \leq c, \\ \dfrac{x - c}{b - x} & \text{se } c \leq x < b. \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo un omeomorfismo di (a, b) su R.

7. Riassumendo gli esempi 5 e 6, possiamo dire che: (α) due intervalli aperti, limitati o no, sono omeomorfi; (β) due intervalli chiusi e limitati sono omeomorfi; (γ) due intervalli aperti da una parte e chiusi dall'altra, limitati o no, sono omeomorfi.

È possibile dimostrare che le classi (α), (β) e (γ) sono topologicamente distinte, cioè che ogni intervallo di una di esse non è omeomorfo ad alcun intervallo di un'altra. Dimostreremo questo fatto nel paragrafo 11 (cfr. esempio 11.14(1)).

Sottospazi di R^2 *e di* C

8. Siano $P_1, \ldots, P_m$, $m \geq 2$ punti di R^2 tali che $P_{j-1} \neq P_j$ per ogni $j = 2, \ldots, m$. La *poligonale di vertici* $P_1, \ldots, P_m$ è l'unione di segmenti

$$\Pi = \Pi(P_1, \ldots, P_m) = \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \ldots \cup \overline{P_{m-1}P_m}.$$

La poligonale Π si dice *chiusa* se $P_1 = P_m$; Π si dice *semplice* se non si autointerseca, cioè se due qualsiasi dei segmenti che la compongono non hanno punti in comune, fatta eccezione per l'estremo comune a due segmenti consecutivi ($\{P_j\} = \overline{P_{j-1}P_j} \cap \overline{P_jP_{j+1}}$) e per il punto $P_1 = P_m$ (comune a $\overline{P_1P_2}$ e a $\overline{P_{m-1}P_m}$) nel caso in cui Π è chiusa (fig. 5.2). È facile dimostrare che una poligonale semplice e non chiusa $\Pi(P_1, \ldots, P_m)$ è omeomorfa ad $\mathbf{I}$. Un omeomorfismo è indotto dall'immersione $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathsf{R}^2$, definita come incollamento delle applicazioni ($j =$

$= 2, \dots, m)$

$$f_j \cdot u_j : \left[\frac{j-2}{m-1}, \frac{j-1}{m-1}\right] \to \mathsf{R}^2,$$

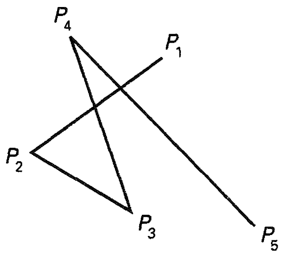
dove

$$u_j : \left[\frac{j-2}{m-1}, \frac{j-1}{m-1}\right] \to \mathbf{I}, \; u_j(t) = (m-1)t - j + 2,$$

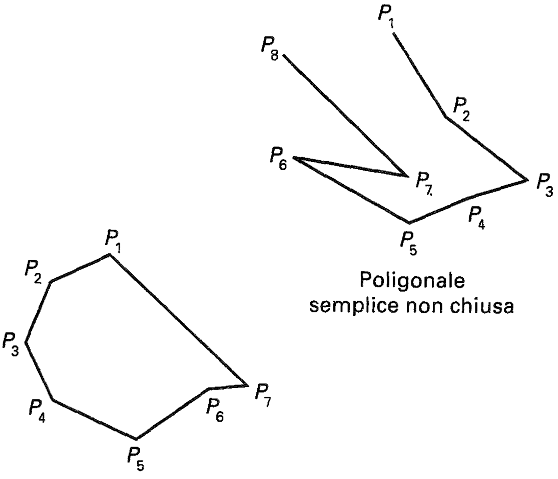
e

$$f_j : \mathbf{I} \to \mathsf{R}^2 \quad f_j(u) = (1-u)P_{j-1} + uP_j.$$

Una poligonale semplice e chiusa $\Pi = \Pi(P_1, \dots, P_{m\ 1}, P_1)$ (con $m \geq 4$) è omeomorfa alla circonferenza $\mathbf{S}^1$.


P_4
P_1
P_2
P_3
P_5

Poligonale
né semplice né chiusa


P_1
P_8
P_2
P_6
P_7
P_3
P_4
P_5
P_1
P_2
P_3
P_7
P_4
P_6
P_5

Poligonale
semplice non chiusa

Poligonale
semplice e chiusa

Figura 5.2

Per costruire un omeomorfismo $h : \mathbf{S}^1 \to \Pi$ si ponga:

$$\mathbf{S}^+ := \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{S}^1 : y \geq 0\}, \quad \mathbf{S}^- := \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{S}^1 : y \leq 0\},$$

$$\Pi' := \Pi(P_{m-1}, \ldots, P_2, P_1), \quad \Pi'' := \Pi(P_{m-1}, P_1).$$

Essendo Π' una poligonale semplice e non chiusa, dalla prima parte di questo esempio otteniamo un omeomorfismo $f : [0, 1] \to \Pi'$. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^+$, si ponga

$$h'(\mathbf{x}) = f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Ovviamente $h' : \mathbf{S}^+ \to \Pi'$ è un omeomorfismo e si ha:

$$h'(1, 0) = f(1) = P_1;$$

$$h'(-1, 0) = f(0) = P_{m-1}.$$

Sia ora $g : [0, 1] \to \Pi''$ l'omeomorfismo così definito: $g(t) = (1 - t)P_{m-1} + tP_1$. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^-$, si ponga

$$h''(\mathbf{x}) = g\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Ovviamente $h'' : \mathbf{S}^- \to \Pi''$ è un omeomorfismo e si ha:

$$h''(-1, 0) = g(0) = P_{m-1};$$

$$h''(1, 0) = g(1) = P_1.$$

Ne segue che h' e h'' si incollano in un'applicazione $h : \mathbf{S}^1 \to \Pi$. Inoltre h è continua (infatti $\{\mathbf{S}^-, \mathbf{S}^+\}$ è un ricoprimento finito e chiuso di $\mathbf{S}^1$) e dunque h è un omeomorfismo come richiesto.

9. Il quadrato $\mathbf{I}^2$ ed il disco chiuso $\mathbf{D}^2$ sono omeomorfi (cioè $\mathbf{I}^2$ è una 2-cella). Possiamo sostituire $\mathbf{I}^2$ con il quadrato chiuso

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

di centro l'origine e lato di lunghezza 2 : $\mathbf{I}^2$ e Q sono simili e quindi omeomorfi. La similitudine $s : \mathbf{I}^2 \to Q$ è data da

$$s(\mathbf{x}) = (2x_1 - 1, 2x_2 - 1)$$

e l'inversa è

$$s^{-1}(\mathbf{t}) = \left(\frac{t_1+1}{2}, \frac{t_2+1}{2}\right).$$

Costruiamo un omeomorfismo f di $\mathbf{D}^2$ su Q nel modo seguente.

Per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ denotiamo con $\mathbf{x}' \in \mathrm{Fr}(Q)$ il punto di intersezione con Fr(Q della semiretta di origine $\mathbf{0}$ e passante per $\mathbf{x}$. Definiamo

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ \|\mathbf{x}'\|\mathbf{x} & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{D}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

L'applicazione $f : \mathbf{D}^2 \to Q$ così definita è biunivoca perché ha inversa

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}/\|\mathbf{y}'\| & \text{se } \mathbf{y} \in Q \backslash \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

La continuità di f e di f^{-1} segue da quella della funzione

$$Q\backslash\{\mathbf{0}\} \to \mathsf{R}$$
$$\mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{y}'\|$$

la cui verifica elementare è lasciata al lettore (fig. 5.3).

Si noti che f induce un omeomorfismo di $\mathbf{S}^1$ sulla poligonale Fr(Q). Si osservi anche che f non può essere la restrizione di un'affinità $\tilde{f} : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$. Tale affinità sarebbe infatti un'applicazione lineare (perché $\tilde{f}(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) e quindi

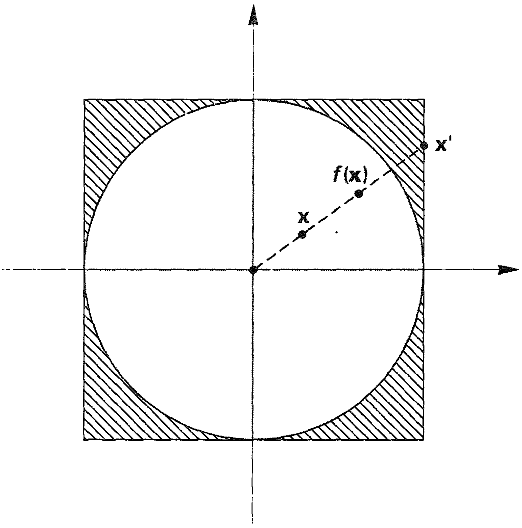


Figura 5.3

un'omotetia (per come è definita f). Ma ciò implicherebbe che $\|\mathbf{x}'\|$ è costante al variare di $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^1$, il che è falso.

10. Siano $P_1, \ldots, P_m \in \mathsf{R}^2$, $m \geq 3$ punti distinti a tre a tre non allineati e tali che per ogni $j = 2, \ldots, m$ i punti $P_1, \ldots, P_{j-2}$, $P_{j+1}, \ldots, P_m$ siano tutti in uno dei due semipiani in cui R^2 è diviso dalla retta contenente P_{j-1} e P_j. L'inviluppo convesso $K(P_1, \ldots, P_m)$ si chiama *poligono convesso di vertici* $P_1, \ldots, P_m$. Con un metodo simile a quello dell'esempio 9 si dimostra che ogni poligono convesso è una 2-cella.

11. Un sottospazio topologico di R^2 omeomorfo a $\mathbf{S}^1$ si chiama *arco di Jordan*. Come dimostrato nell'esempio 8 una poligonale semplice e chiusa è un arco di Jordan. La figura 5.4 rappresenta un arco di Jordan.

12. In molti casi è comodo identificare R^2 al piano complesso C e avere così a disposizione il linguaggio e le proprietà dei numeri complessi per studiare la topologia del piano.

Ad esempio, sia $0 < \theta \leq 2\pi$ e sia

$$A_\theta = \{z \in \mathsf{C} \setminus \{0\} : 0 < \arg(z) < \theta\}.$$

Se $n \geq 2$ è un intero, l'applicazione

$$\begin{aligned} &\mathsf{C} \to \mathsf{C} \\ &z \mapsto z^n \end{aligned}$$

definisce per restrizione un omeomorfismo di $A_{\theta/n}$ su A_θ per ogni $\theta \in (0, 2\pi]$, il cui inverso è indotto dall'applicazione di C in C:

$$w \mapsto (\text{determinazione principale di } w^{1/n}) =$$

$$= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg(w)}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\arg(w)}{n}\right)\right).$$

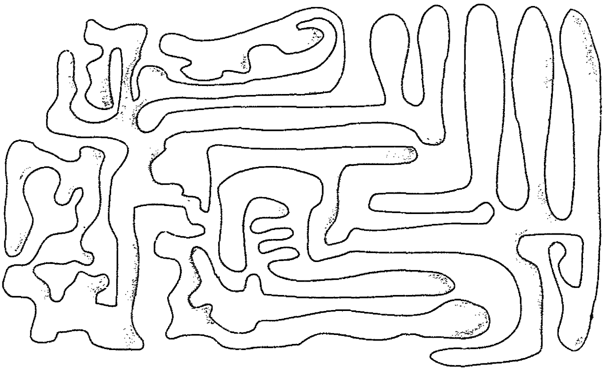


Figura 5.4

In particolare si trova che il semipiano

$$A_\pi = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

è omeomorfo al primo quadrante aperto

$$A_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0,\ \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

e anche a

$$A_{2\pi} = \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Più in generale, qualsiasi siano θ_1, $\theta_2 \in (0, 2\pi]$ gli aperti A_{θ_1} ed A_{θ_2} son omeomorfi; un omeomorfismo

$$A_{\theta_1} \to A_{\theta_2}$$

è definito da

$$z \mapsto (\text{determinazione principale di } z^{\theta_2 \theta_1^{-1}})$$

$$= |z|^{\theta_2 \theta_1^{-1}} (\cos(\theta_2 \theta_1^{-1} \arg(z)) + \mathrm{i}\ \sin(\theta_2 \theta_1^{-1} \arg(z)))$$

13. Consideriamo la funzione esponenziale complessa

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

definita da

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\ \sin(y)), \quad \text{se } z = x + \mathrm{i}y.$$

Questa applicazione è evidentemente continua. Inoltre

$$\exp(z_1) = \exp(z_2)$$

se e solo se

$$x_2 = x_1,\ y_2 = y_1 + 2k\pi \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi exp è iniettiva ad esempio nella striscia aperta

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$$

la quale viene mandata sull'aperto $A_{2\pi}$ (fig. 5.5). Su $A_{2\pi}$ l'applicazione inversa di exp è data dalla determinazione principale del *logaritmo naturale complesso*

$$\ln : A_{2\pi} \to \mathbb{C}$$

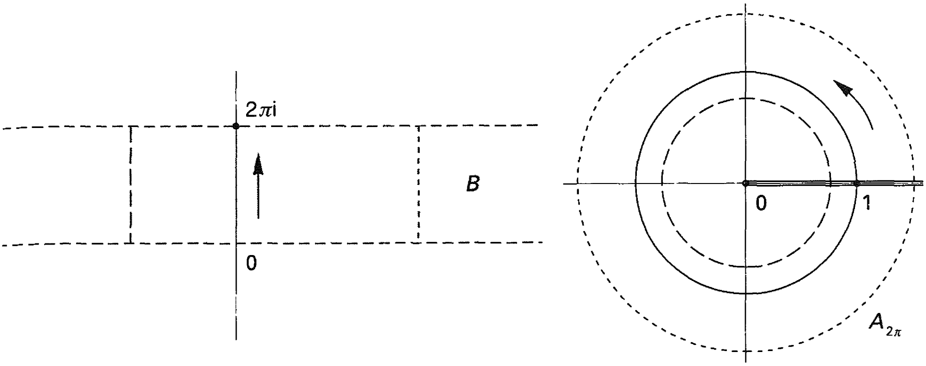


Figura 5.5

definito da

$$\ln(w) = \ln|w| + \mathrm{i}\ \arg(w).$$

Poiché ln è continua, abbiamo che B è omeomorfa ad $A_{2\pi}$ e quindi, per quanto visto prima, ad A_θ per ogni $\theta \in (0, 2\pi]$.

Si noti che exp trasforma i segmenti di B paralleli all'asse immaginario in circonferenze di centro l'origine.

14. Il semipiano $A_\pi \subset \mathbb{C}$ e il disco aperto unitario

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

sono omeomorfi. Un omeomorfismo è indotto dall'applicazione

$$\tau : A_\pi \to \mathbb{C}$$

definita da

$$\tau(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} \cdot$$

Per verificarlo osserviamo che τ è ben definita e continua in tutto A_π e che $\tau(z) \in D$ per ogni $z \in A_\pi$. Infatti $\mathrm{Im}(z) > 0$ implica $|\mathrm{Im}(z - \mathrm{i})| < |\mathrm{Im}(z + \mathrm{i})|$, ed essendo

$$\mathrm{Re}(z - \mathrm{i}) = \mathrm{Re}(z + \mathrm{i})$$

si ha $|z - \mathrm{i}| < |z + \mathrm{i}|$, cioè $|\tau(z)| < 1$.

D'altra parte consideriamo l'applicazione $\sigma : D \to \mathrm{C}$ definita da

$$\sigma(w) = \frac{w+1}{\mathrm{i}(w-1)};$$

σ è continua e soddisfa $\sigma(D) \subset A_\pi$. Quest'ultimo fatto segue osservando che

$$\frac{w+1}{\mathrm{i}(w-1)} = \frac{-\mathrm{i}(w+1)(\overline{w}-1)}{(w-1)(\overline{w}-1)} = \frac{-2\,\mathrm{Im}(w) + \mathrm{i}(1-|w|^2)}{|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(w) + 1};$$

il denominatore è reale positivo perché

$$|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(w) + 1 \geq (\mathrm{Re}(w) - 1)^2 \quad \text{per ogni } w \in \mathrm{C};$$

la parte immaginaria del numeratore è $1 - |w|^2 > 0$; quindi $\sigma(w) \in A_\pi$.

È immediato verificare che, per ogni $z \in A_\pi$, $w \in D$, si ha

$$\sigma(\tau(z)) = z, \quad \tau(\sigma(w)) = w.$$

Questo dimostra che

$$\sigma(D) = A_\pi, \quad \tau(A_\pi) = D$$

e che τ e σ sono iniettive. Quindi τ e σ sono omeomorfismi tra A_π e D uno inverso dell'altro.

Altri esempi

15. Sia $\mathbf{c} \in \mathrm{R}^3$ e H un piano di R^3 non contenente $\mathbf{c}$; sia $H_\mathbf{c}$ il piano parallelo a H passante per $\mathbf{c}$. Denotiamo con

$$\pi_{\mathbf{c},H} : \mathrm{R}^3 \backslash H_\mathbf{c} \to H$$

l'applicazione definita da

$$\pi_{\mathbf{c},H}(\mathbf{x}) = H \cap r(\mathbf{c},\mathbf{x})$$

dove abbiamo denotato con $r(\mathbf{c},\mathbf{x})$ la retta contenente $\mathbf{c}$ ed $\mathbf{x}$. $\pi_{\mathbf{c},H}$ si chiama *proiezione di* R^3 *su H di centro* $\mathbf{c}$; $\mathbf{c}$ è il *centro di proiezione.*

Per la sua definizione geometrica è evidente che $\pi_{\mathbf{c},H}$ è continua. Per verificare questo fatto analiticamente scegliamo ad esempio H come il piano di equazione $x_3 = 0$ e $\mathbf{c} = (0,0,1)$. Allora, identificando H a R^2, l'applicazione

$$\pi_{\mathbf{c},H} : \mathrm{R}^3 \backslash H_\mathbf{c} \to \mathrm{R}^2 \text{ (dove } H_\mathbf{c} \text{ è il piano di eq. } x_3 = 1)$$

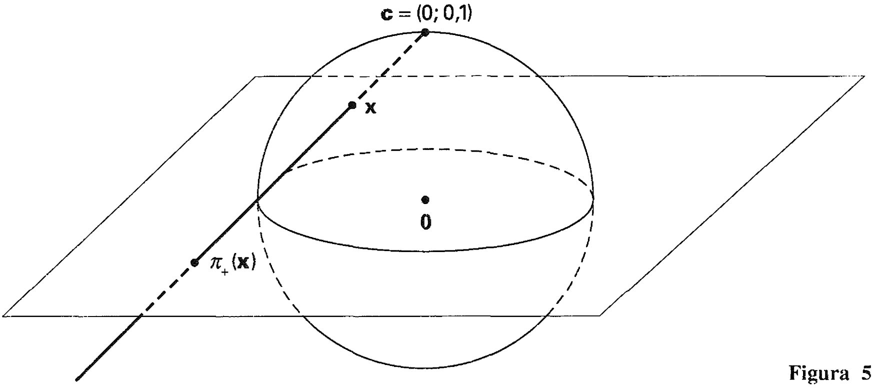


Figura 5.6

è data da

$$\pi_{\mathbf{c},H}(\mathbf{x}) = (x_1/(1-x_3),\ x_2/(1-x_3)),$$

ed è evidentemente continua.

La restrizione di $\pi_{\mathbf{c},H}$ (con $\mathbf{c}$ e H come qui sopra) a $\mathbf{S}^2\backslash\{\mathbf{c}\}$ si denota π_+ e si chiama *proiezione stereografica* di $\mathbf{S}^2\backslash\{\mathbf{c}\}$ su R^2 (fig. 5.6). Questa applicazione è un omeomorfismo di $\mathbf{S}^2\backslash\{\mathbf{c}\}$ su R^2. Infatti è dotata di inversa continua definita da

$$\pi_+^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2+y_2^2+1},\ \frac{2y_2}{y_1^2+y_2^2+1},\ \frac{y_1^2+y_2^2-1}{y_1^2+y_2^2+1}\right).$$

Si noti che la restrizione della proiezione stereografica alla semisfera chiusa $\mathbf{S}^2_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 : x_3 \leq 0\}$ è un omeomorfismo di $\mathbf{S}^2_-$ su $\mathbf{D}^2$.

È evidente che cambiando opportunamente $\mathbf{c} \in \mathbf{S}^2$ e H è possibile definire in più modi un omeomorfismo di $\mathbf{S}^2$, privata di un punto qualsiasi, su R^2. L'unica condizione che $\mathbf{c}$ e H devono soddisfare (oltre a $c \notin H$) è che $H_\mathbf{c}$ incontri $\mathbf{S}^2$ solo in $\mathbf{c}$.

16. L'esempio 15 può facilmente generalizzarsi a R^n, $n \geq 2$. Sia $\mathbf{c} \in \mathsf{R}^n$, H un iperpiano di R^n non contenente $\mathbf{c}$, e $H_\mathbf{c}$ l'iperpiano parallelo a H passante per $\mathbf{c}$. *La proiezione di* R^n *su* H *di centro* $\mathbf{c}$ (il *centro di proiezione*) si definisce come l'applicazione

$$\pi_{\mathbf{c},H} : \mathsf{R}^n\backslash H_\mathbf{c} \to H$$

data da

$$\pi_{\mathbf{c},H}(\mathbf{x}) = H \cap r(\mathbf{c},\mathbf{x}).$$

Se $\mathbf{c} = (0,\dots,0,1)$ e H ha equazione $x_n = 0$, si ha

$$\pi_{\mathbf{c},H}(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{1-x_n},\ \frac{x_2}{1-x_n},\dots,\frac{x_{n-1}}{1-x_n}\right).$$

La restrizione di $\pi_{\mathbf{c},H}$ a $\mathbf{S}^{n-1}\backslash\{\mathbf{c}\}$ è un omeomorfismo di $\mathbf{S}^{n-1}\backslash\{\mathbf{c}\}$ su R^{n-1} che si denota π_+ e si chiama *proiezione stereografica.*

Nel caso particolare $n = 2$ si ottiene un omeomorfismo di $\mathbf{S}^1\backslash\{(0,1)\}$ su R, come illustrato nella figura 5.7.

17. Il gruppo lineare generale reale

$$\mathrm{GL}_n(\mathsf{R}) = \{a \in M_n(\mathsf{R}) : \det(A) \neq 0\} \quad (n \text{ intero} \geq 1)$$

è un sottospazio aperto di $M_n(\mathsf{R})$. Denotiamo con $\mathbf{I}_n \in M_n(\mathsf{R})$ la matrice identità. I sottogruppi di $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$:

$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathsf{R}) : {}^tAA = \mathbf{I}_n\}$: gruppo ortogonale

$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det(A) = 1\}$: gruppo ortogonale speciale;

$\mathrm{SL}_n(\mathsf{R}) = \{A \in M_n(\mathsf{R}) : \det(A) = 1\}$: gruppo lineare speciale reale,

sono sottospazi chiusi di $M_n(\mathsf{R})$.

Sia g un intero ≥ 1 e

$$J_g = \begin{pmatrix} O_g & \mathbf{I}_g \\ -\mathbf{I}_g & O_g \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathsf{R})$$

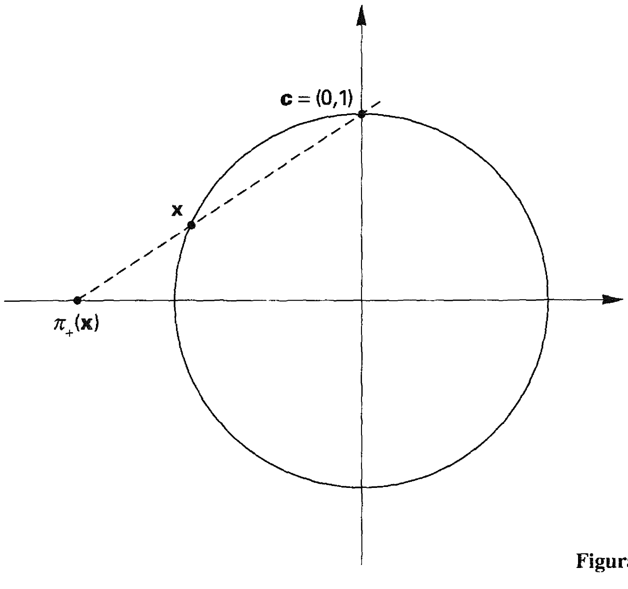


Figura 5.7

dove $O_g \in M_g(\mathsf{R})$ denota la matrice nulla. Il sottogruppo di $\mathrm{GL}_{2g}(\mathsf{R})$

$$\mathrm{Sp}(g,\mathsf{R}) = \{A \in M_{2g}(\mathsf{R}) : {}^tAJ_gA = J_g\} : \quad \begin{matrix}\text{gruppo simplettico}\\ \text{reale di grado } g\end{matrix}$$

è un sottospazio chiuso di $M_{2g}(\mathsf{R})$.

Le verifiche di questi fatti sono lasciate al lettore.

18. Similmente al caso reale (esempio 17), $\mathrm{GL}_n(\mathsf{C})$ è un sottospazio aperto di $M_n(\mathsf{C})$, mentre i suoi sottogruppi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{U}(n) = \{A \in M_n(\mathsf{C}) : {}^t\overline{A}A = \mathbf{I}_n\} : && \text{gruppo unitario,}\\
&\mathrm{SU}(n) = \{A \in U_n(\mathsf{C}) : \det(A) = 1\} : && \text{gruppo unitario speciale,}\\
&\mathrm{SL}_n(\mathsf{C}) = \{A \in M_n(\mathsf{C}) : \det(A) = 1\} : && \text{gruppo lineare speciale complesso.}
\end{aligned}$$

sono chiusi in $M_n(\mathsf{C})$.

È anche chiuso in $M_{2g}(\mathsf{C})$ il gruppo simplettico complesso di grado g:

$$\mathrm{Sp}(g,\mathsf{C}) = \{A \in M_{2g}(\mathsf{C}) : {}^tAJ_gA = J_g\}.$$

Esercizi

1. Dimostrare che un sottospazio topologico di uno spazio soddisfacente il primo (risp. il secondo) assioma di numerabilità soddisfa anch'esso il primo (risp. il secondo) assioma di numerabilità.
2. Siano a, b numeri reali non nulli e $C \subset \mathsf{R}^2$ l'ellisse di equazione

   $$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1.$$

   Con un metodo simile a quello dell'esempio 9 si dimostri che l'inviluppo convesso $K(C)$ è una 2-cella (fig. 5.8).
3. Per ogni $n \geq 3$ dimostrare che $\mathbf{I}^n$ è una n-cella.
4. Sia $S = \{(x_1,x_2) \in \mathsf{R}^2 : -1 \leq x_1,x_2 < 1\}$.
   Trovare un sottospazio X di R^2 contenente S nel quale S sia, rispetto alla topologia relativa di X,

   (a) aperto e chiuso,

   oppure

   (b) chiuso ma non aperto,

   oppure

   (c) aperto ma non chiuso.
5. Esercizio come il precedente, ma con

   $$S = \{(x_1,x_2) \in \mathsf{R}^2 : -1 \leq x_1,x_2 \leq 1\}\backslash\{(0,0)\}.$$

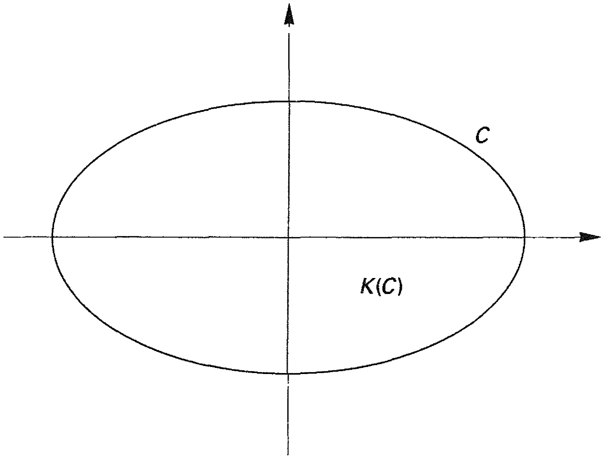


Figura 5.8

6. Far vedere con un esempio che la conclusione della proposizione 5.3 non è vera se nell'ipotesi (b) non si suppone finito il ricoprimento $\mathcal{F}$.

7. Descrivere analiticamente l'inversa della proiezione stereografica π_+ di $\mathbf{S}^{n-1}\backslash\{(0,\ldots,0,1)\}$ sull'R^{n-1} di equazione $x_n = 0$.

8. Un sottoinsieme E di uno spazio topologico X si dice *discreto* se la topologia relativa di E in X è la topologia discreta. Dimostrare che:

   (a) $E \subset X$ è discreto se e solo se ogni $e \in E$ possiede un intorno U_e in X tale che $U_e \cap E = \{e\}$;

   (b) Z, $\{1/n : n \in \mathsf{N}^+\}$ sono sottoinsiemi discreti di R, mentre Q, $\{1/n : n \in \mathsf{N}^+\} \cup \{0\}$ non sono discreti.

9. Un'applicazione continua $f : X \to Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se ogni $x \in X$ possiede un intorno aperto che viene mandato da f omeomorficamente su un aperto di Y.

   Ogni omeomorfismo è un omeomorfismo locale, ma non vale il viceversa: ad esempio ogni applicazione di spazi discreti è un omeomorfismo locale, ma non è un omeomorfismo se non è biettiva. Vari esempi di omeomorfismi locali verranno dati nei capitoli seguenti. Si dimostri che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

   Dimostrare inoltre che un'inclusione continua $f : X \to Y$ è un omeomorfismo locale se e solo se è un'applicazione aperta.

10. Dimostrare che $\mathbf{S}^n_+ \approx \mathbf{S}^n_-$ per ogni $n \geq 1$.

11. Sia $X = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 > 0,\ \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di R^2:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 > 0,\ \|\mathbf{x}\| = 1\}; \quad B = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 \geq 1/2,\ \|\mathbf{x}\| < 1\};$$
$$C = \{(0,t) \in \mathsf{R}^2 : 0 < t < 1\}; \quad D = \{(t,t) : 0 < t \leq \sqrt{2}/2\}.$$

12. Sia $X = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : |x_3| \leq 1,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono aperti in X con la topologia di sottospazio di R^3:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : 0 < x_3 \leq 1,\ x_1^2 + x_2^2 < 1/2\};$$

$$B = \{\mathbf{x} = (0, 0, t) : 0 < t < 1\};$$

$$C = \{\mathbf{x} = (0, 0, t) : 0 < t \leq 1\};$$

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1/2,\ |x_3| \leq 1\};$$

$$E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, 1/2) : x_1^2 + x_2^2 < 1/2\}.$$

13. Sia $X = \{(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 : x_2 \geq x_1 > 0\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono aperti in X con la topologia di sottospazio di R^2:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : 0 < x_1 \leq x_2 < 1\}; \quad B = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : 1 < x_1 \leq x_2\};$$

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : 1 \leq x_1 < x_2\}; \quad D = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_1 < x_2,\ x_1 = 1/n,\ n \geq 1 \text{ intero}\}.$$

14. Sia $X = \{(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di R^2:

$$A = \{(1, x_2) : x_2 > 0\};$$

$$B = \{(1/n, 1) : n \geq 1 \text{ intero}\};$$

$$C = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathsf{R}^2 : x_1 + x_2 = 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\};$$

$$D = \{(1, 1/n) : n \geq 1 \text{ intero}\}.$$

15. Sia $X = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : \|x\| < 1\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_1 = 0\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di R^2:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}; \quad B = A \cup \{(0, 1)\};$$

$$C = B \cup \{(0, -1)\}; \quad D = \{(x_1, 0) : -1 < x_1 < 1\}.$$

6 Prodotti

In questo capitolo studieremo un procedimento per costruire nuovi spazi topologici a partire da spazi assegnati, che consiste nel considerare il loro prodotto cartesiano e su di esso definire un'opportuna topologia.

Descriveremo il procedimento inizialmente nel caso di due spazi X_1 e X_2 con topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ rispettivamente. Nel prodotto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ dei sottoinsiemi che sono il prodotto di un aperto di X_1 per un aperto di X_2, cioè

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1,\ A_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

La famiglia $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X perché $X = X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$. Inoltre se $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}$, allora

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{B}$$

perché $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{T}_1$ ed $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{T}_2$. Ciò prova che la famiglia $\mathcal{B}$ soddisfa le condizioni della proposizione 2.2 ed è quindi base di un'unica topologia $\mathcal{T}$ su X; $\mathcal{T}$ si chiama *topologia prodotto su* X (delle topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$); con la topologia $\mathcal{T}$ X si chiama *spazio topologico prodotto* (oppure *prodotto topologico*) *di* X_1 *per* X_2.

Per definizione gli aperti di X sono i sottoinsiemi che si possono ottenere come unione di insiemi appartenenti a $\mathcal{B}$. Segue subito che un sottoinsieme N di X è un intorno del punto $(x_1, x_2) \in X$ se e solo se esistono un intorno N_1 di $x_1 \in X_1$ ed un intorno N_2 di $x_2 \in X_2$ tali che $N_1 \times N_2 \subset N$.

Un esempio importante è R^2, che è il prodotto topologico di R per se stesso. Per vederlo occorre ricordare che la famiglia dei rettangoli aperti

$$\{R(a,b;c,d) : a < b,\ \ c < d\}$$

è una base per la topologia euclidea di R^2 (cfr. esempio 2.4(2)). Tali rettangoli sono particolari elementi della base $\mathcal{B}$ che definisce la topologia prodotto, quindi questa topologia è più fine della topologia euclidea. Per concludere che di fatto le due topologie coincidono è sufficiente verificare che il prodotto di due aperti di R, cioè un elemento di $\mathcal{B}$, è un aperto nella topologia euclidea; la verifica è immediata e si fa con lo stesso procedimento usato per dimostrare la seguente proposizione, che generalizza quest'esempio.

6.1 PROPOSIZIONE *Siano* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *basi degli spazi topologici* X_1 *ed* X_2 *rispettivamente. La famiglia di sottoinsiemi*

$$\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1,\ \ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base per la topologia prodotto di $X_1 \times X_2$.

Dimostrazione. Poiché gli elementi di $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ sono aperti nella topologia prodotto, è sufficiente verificare che gli insiemi della forma $A_1 \times A_2$, A_i aperto in X_i, $i = 1, 2$, sono unione di elementi di $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$.

Si ha

$$A_1 = \bigcup_{j \in J} B_1^j, \quad A_2 = \bigcup_{h \in H} B_2^h$$

per opportuni $B_1^j \in \mathcal{B}_1$, $B_2^h \in \mathcal{B}_2$, e quindi

$$A_1 \times A_2 = \left(\bigcup_{j \in J} B_1^j \right) \times \left(\bigcup_{h \in H} B_2^h \right) = \bigcup_{\substack{j \in J \\ h \in H}} (B_1^j \times B_2^h). \ \blacksquare$$

Il prossimo risultato ci dice che l'operazione di prodotto topologico è compatibile con quella di considerare sottospazi.

6.2 PROPOSIZIONE *Siano S_1 ed S_2 sottospazi degli spazi topologici X_1 ed X_2 rispettivamente. La topologia indotta da $X_1 \times X_2$ su $S_1 \times S_2$ coincide con la topologia prodotto delle topologie di S_1 e di S_2.*

Dimostrazione. Se $V \subset S_1 \times S_2$ è un aperto nella topologia indotta da $X_1 \times X_2$, esiste un aperto U di $X_1 \times X_2$ tale che

$$V = (S_1 \times S_2) \cap U.$$

Per definizione di topologia prodotto $U = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j$ per opportuni aperti A_j di X_1 e B_j di X_2. Quindi

$$V = (S_1 \times S_2) \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j \times B_j \right) = \bigcup_{j \in J} (S_1 \times S_2) \cap (A_j \times B_j) =$$

$$= \bigcup_{j \in J} (S_1 \cap A_j) \times (S_2 \cap B_j)$$

e questo prova che V è aperto nella topologia prodotto. Il viceversa si dimostra leggendo le stesse uguaglianze in senso inverso. ■

Un caso banale di prodotto topologico si ha quando uno dei due spazi possiede un solo punto. Se X è uno spazio topologico e $\{*\}$ è uno spazio con un solo punto $*$, allora $\{*\} \times X$ ed $X \times \{*\}$ sono omeomorfi ad X stesso; gli omeomorfismi sono quelli ovvi:

$$\begin{array}{ll} X \to \{*\} \times X & X \to X \times \{*\} \\ x \mapsto (*, x) & x \mapsto (x, *). \end{array}$$

Combinando la proposizione precedente con questa osservazione si ottiene il seguente

6.3 COROLLARIO *Nel prodotto topologico $X_1 \times X_2$ dei due spazi X_1 ed X_2, per ogni $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ i sottospazi $\{x_1\} \times X_2$ e $X_1 \times \{x_2\}$ sono omeomorfi a X_2 e a X_1 rispettivamente.*

Dati due insiemi non vuoti X_1 ed X_2, le applicazioni

$$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$$

$$p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

definite da $p_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$, si chiamano *proiezioni.* Per ogni sottoinsieme A_1 di X_1 si ha $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$; analogamente $p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$ se $A_2 \subset X_2$. È chiaro quindi che se X_1 e X_2 sono spazi topologici e $X_1 \times X_2$ ha la topologia prodotto, le proiezioni sono applicazioni continue. Più precisamente abbiamo la seguente

6.4 PROPOSIZIONE *Siano X_1 e X_2 spazi topologici. La topologia prodotto su $X_1 \times X_2$ è la meno fine tra tutte le topologie rispetto alle quali le proiezioni p_1 e p_2 sono continue.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ le topologie di X_1 e di X_2 rispettivamente. La topologia meno fine tra quelle che rendono continue p_1 e p_2 è generata dalla famiglia

$$p_1^{-1}(\mathcal{T}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{T}_2)$$

dove

$$p_1^{-1}(\mathcal{T}_1) = \{p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1\},$$

$$p_2^{-1}(\mathcal{T}_2) = \{p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2 : A_2 \in \mathcal{T}_2\},$$

e quindi ha per base la famiglia di tutte le intersezioni finite di elementi di $p_1^{-1}(\mathcal{T}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{T}_2)$. Ma poiché, come è evidente, $p_1^{-1}(\mathcal{T}_1)$ e $p_2^{-1}(\mathcal{T}_2)$ sono due topologie, un'intersezione finita del tipo suddetto si riduce all'intersezione di un elemento di $p_1^{-1}(\mathcal{T}_1)$ con uno di $p_2^{-1}(\mathcal{T}_2)$; quindi la topologia generata da $p_1^{-1}(\mathcal{T}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{T}_2)$ ha per base la famiglia

$$\{(A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) = A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1,\ A_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

che è la base che definisce la topologia prodotto. ■

Si noti che la proposizione 6.4 fornisce una definizione alternativa della topologia prodotto. Un'altra proprietà delle proiezioni è la seguente:

6.5 PROPOSIZIONE *Se X_1 e X_2 sono due spazi topologici, le proiezioni $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, sono aperte.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X_1 \times X_2$ aperto; allora

$$A = \bigcup_{j \in J} (A_1^j \times A_2^j),$$

dove gli A_1^j e gli A_2^j sono aperti di X_1 e di X_2 rispettivamente. Si ha

$$p_1(A) = \bigcup_{j \in J} p_1(A_1^j \times A_2^j) = \bigcup_j A_1^j,$$

$$p_2(A) = \bigcup_{j \in J} p_2(A_1^j \times A_2^j) = \bigcup_j A_2^j,$$

che sono aperti. ■

Avevamo già verificato che le proiezioni sono aperte nel caso di $X_1 \times X_2 = \mathbb{R}^2$ (cfr. esempio 4.4(1)).

Se $f_1 : Y \to X_1$ e $f_2 : Y \to X_2$ sono applicazioni di insiemi non vuoti, possiamo definire un'applicazione

$$f : Y \to X_1 \times X_2$$

ponendo $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$ per ogni $y \in Y$. È evidente che f è l'unica applicazione di Y in $X_1 \times X_2$ tale che $p_1 \cdot f = f_1$, $p_2 \cdot f = f_2$; f si chiama *applicazione prodotto* di f_1 e f_2 e si denota talvolta con $f_1 \times f_2$. La seguente proposizione esprime la cosiddetta *proprietà universale del prodotto topologico* (vedi anche esempio 4.3(3)).

6.6 PROPOSIZIONE *Siano Y, X_1, X_2 spazi topologici. Un'applicazione f : $Y \to X_1 \times X_2$ è continua in $y \in Y$ se e solo se le applicazioni*

$$f_1 = p_1 \cdot f : Y \to X_1,$$

$$f_2 = p_2 \cdot f : Y \to X_2$$

sono continue in y.

Dimostrazione. Se f è continua in $y \in Y$, allora f_1 e f_2 sono continue in y perché lo sono anche p_1 e p_2.

Supponiamo viceversa che f_1 e f_2 siano continue in $y \in Y$, e siano $x_1 = f_1(y)$, $x_2 = f_2(y)$. Scegliamo un intorno aperto A di $f(y) = (x_1, x_2)$, e siano A_1 e A_2 intorni aperti di x_1 e di x_2 rispettivamente tali che $A \supset A_1 \times A_2$. Per la continuità di f_1 in y esiste un intorno aperto U_1 di y tale che $f_1(U_1) \subset A_1$; analogamente esiste un intorno aperto U_2 di y tale che $f_2(U_2) \subset A_2$. Allora $U_1 \cap U_2$ è un intorno aperto di y tale che

$$f(U_1 \cap U_2) \subset f_1(U_1 \cap U_2) \times f_2(U_1 \cap U_2) \subset A_1 \times A_2 \subset A$$

e quindi f è continua in y. ∎

La seguente proposizione è di dimostrazione immediata.

6.7 PROPOSIZIONE *Siano Y, X_1, X_2 spazi topologici. Un'applicazione g : $X_1 \times X_2 \to Y$ è continua in un punto $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ se e solo se per ogni intorno N di $g(x_1, x_2) \in Y$ esistono un intorno N_1 di $x_1 \in X_1$ e un intorno N_2 di $x_2 \in X_2$ tali che $g(N_1 \times N_2) \subset N$.*

La generalizzazione della definizione di prodotto topologico dal caso di due spazi a quello di un numero finito qualunque è molto semplice.

Se $X_1, \dots, X_m$ sono spazi topologici con topologie $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m$ rispettivamente, la *topologia prodotto* su $X_1 \times \dots \times X_m = X$ (delle topologie $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m$) si definisce come la topologia che ha per base la famiglia di sottoinsiemi di X

$$\{A_1 \times \dots \times A_m : A_i \in \mathcal{T}_i, \ i = 1, \dots, m\}.$$

Che questa famiglia ha le proprietà caratteristiche di una base (proposizione 2.2) si verifica come nel caso $m = 2$. X, con la topologia prodotto, si chiama *prodotto topologico* (o *spazio topologico prodotto*) degli spazi $X_1, \dots, X_m$.

La definizione di topologia prodotto su X può anche darsi in modo equivalente per induzione su $m \geq 2$, scrivendo

$$X_1 \times \dots \times X_m = X_1 \times (X_2 \times \dots \times X_m).$$

È facile verificare che le due definizioni sono equivalenti. I risultati dimostrati per il prodotto di due spazi si possono estendere in modo ovvio al caso di un numero finito qualsiasi di spazi. Ne lasciamo le dimostrazioni al lettore come esercizio.

6.8 *Esempi*

1. Per ogni $n \geq 2$ R^n, con la topologia euclidea, è il prodotto topologico di R per se stesso n volte. Ciò segue dal fatto che la famiglia

$$\{R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : a_j < b_j, \ j = 1, \dots, n\}$$

che genera la topologia prodotto, è una base della topologia euclidea (cfr. esercizio 2.6). Dalla proposizione 6.2 segue che l'n-cubo $\mathbf{I}^n$ è il prodotto topologico di $\mathbf{I}$ per se stesso n volte.

2. Poiché $\mathsf{C} \approx \mathsf{R}^2$, il prodotto topologico C^n di C per se stesso n volte ($n \geq 2$) è omeomorfo a R^{2n}.

3. Se X è un sottospazio di R^m e $n > m$, il prodotto topologico $X \times \mathsf{R}^{n-m}$ è un sottospazio di R^n che si chiama *cilindro di base* X.

L'esempio elementare del sottospazio Y di R^3 definito dall'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

è il caso particolare del cilindro di R^3 di base $\mathbf{S}^1 \subset \mathsf{R}^2$; cioè in questo caso $Y = \mathbf{S}^1 \times \mathsf{R}$ (fig. 6.1).

4. Il prodotto di n copie della circonferenza $\mathbf{S}^1$ per se stessa si chiama *toro n-dimensionale*, o *n-toro*, e si denota T^n. Poiché $\mathbf{S}^1 \subset \mathsf{R}^2$, T^n è omeomorfo a un sottospazio di $\mathsf{R}^{2n} = \mathsf{R}^2 \times \dots \times \mathsf{R}^2$.

Il 2-toro T^2 è omeomorfo al sottospazio di R^4

$$T' = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1^2 + y_2^2 = 1 = y_3^2 + y_4^2\}.$$

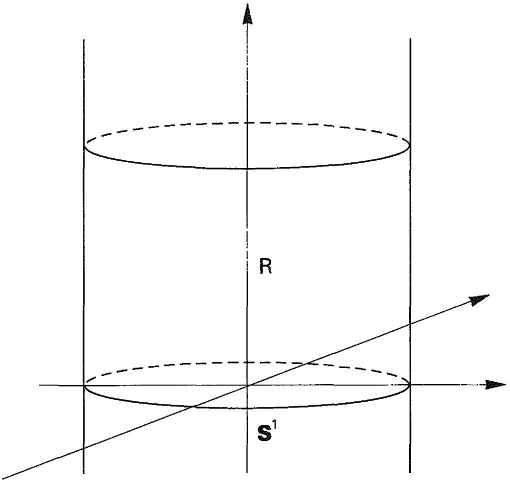


Figura 6.1

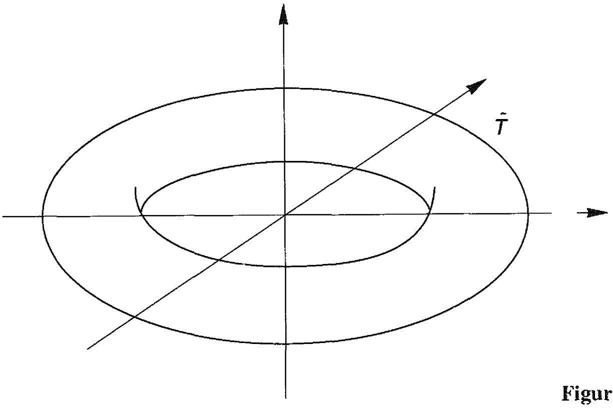


Figura 6.2

L'applicazione continua $h : \mathsf{R}^4 \to \mathsf{R}^3$ definita da

$$h(y_1, \ldots, y_4) = ((y_1 + 2)y_3, (y_1 + 2)y_4, y_2)$$

manda T' omeomorficamente sul sottospazio di R^3 (vedi fig. 6.2)

$$\tilde{T} = \{(x_1, x_2, x_3) : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Infatti evidentemente $h(T') \subset \tilde{T}$; inoltre l'applicazione $k : \tilde{T} \to \mathsf{R}^4$ così definita:

$$k(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2,\ x_3,\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$$

è continua e soddisfa

$$k(\tilde{T}) \subset T',$$

$$h_{|T'} \cdot k = 1_{\tilde{T}},$$

$$k \cdot h_{|T'} = 1_{T'}.$$

Quindi $h_{|T'}$ e k sono omeomorfismi inversi uno dell'altro.

5. Se $\mathbf{n} = (0,0,1)$, $\mathbf{s} = (0,0,-1)$, lo spazio $\mathbf{S}^2 \setminus \{\mathbf{n},\mathbf{s}\}$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^1 \times \mathsf{R}$.

Identifichiamo $\mathbf{S}^1 \times \mathsf{R}$ al cilindro $Y \subset \mathsf{R}^3$ di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (cfr. esempio 3). Un omeomorfismo $h : \mathbf{S}^2 \setminus \{\mathbf{n},\mathbf{s}\} \to Y$ si ottiene per proiezione da $\mathbf{0}$, cioè ponendo (vedi fig. 6.3)

$$h(\mathbf{x}) = Y \cap (\text{semiretta per } \mathbf{x} \text{ di origine } \mathbf{0}) =$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right).$$

La verifica che h è un omeomorfismo è lasciata al lettore come esercizio.

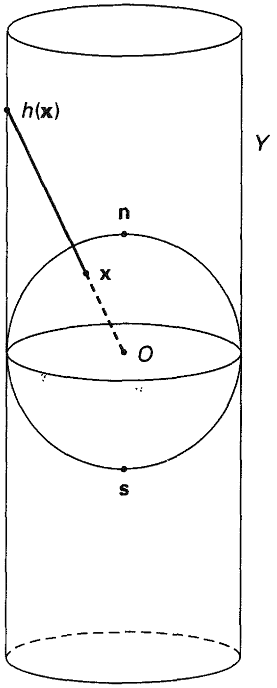


Figura 6.3

Consideriamo una famiglia qualsiasi $\{X_s\}_{s\in S}$ di spazi topologici con topologie $\mathcal{T}_s$, $s \in S$, e il prodotto cartesiano

$$X = \prod_{s\in S} X_s = \left\{ f : S \to \bigcup_{s\in S} X_s : f(s) \in X_s, \ \ s \in S \right\}.$$

Se $t \in S$ e $f \in X$, $f(t) \in X_t$ si chiama *t-esima coordinata di* f. L'applicazione

$$p_t : X \to X_t$$

definita da $p_t(f) = f(t)$ si chiama *t-esima proiezione.*

Definiamo su X una topologia nel modo seguente. Consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di tutte le intersezioni finite di insiemi $p_s^{-1}(U_s)$, al variare di $s \in S$ e di $U_s \in \mathcal{T}_s$. La famiglia $\mathcal{B}$ è ovviamente un ricoprimento di X ($= p_s^{-1}(X_s)$ per un qualsiasi $s \in S$), e l'intersezione di due qualsiasi elementi di $\mathcal{B}$ è ancora un elemento della famiglia $\mathcal{B}$. Quindi $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su X che si chiama *topologia prodotto* delle topologie $\mathcal{T}_s$, $s \in S$. Con la topologia $\mathcal{T}$, X si chiama *spazio topologico prodotto* (o *prodotto topologico*) della famiglia $\{X_s\}_{s\in S}$.

Dalla definizione segue che rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ tutte le proiezioni sono continue e che $\mathcal{T}$ è la meno fine tra le topologie su X che rendono continue tutte le p_s. Quindi, per la proposizione 6.4 e per la sua generalizzazione al prodotto di un numero finito qualsiasi di spazi, la definizione di topologia prodotto data ora coincide con quella data precedentemente nel caso di una famiglia finita di spazi topologici.

Un caso particolare importante di prodotto topologico si ha quando tutti i fattori X_s coincidono con uno spazio fissato Y. In questo caso

$$\prod_{s\in S} X_s = Y^S$$

è l'insieme delle applicazioni di S in Y.

Se ad esempio $S = \mathsf{N}^+$ (i numeri naturali positivi), si ottiene come prodotto l'insieme delle successioni di elementi di Y.

Per $S = \mathsf{N}$ ed $\mathbf{I} = [0, 1]$, il prodotto topologico $\mathbf{I}^{\mathsf{N}}$ si chiama *cubo di Hilbert.*

Un altro esempio notevole si ottiene prendendo $S = (a, b)$, un intervallo aperto di R, e $Y = \mathsf{R}$. In questo caso $X = \mathsf{R}^{(a,b)}$ è l'insieme delle funzioni a valori reali definite in (a, b). La topologia prodotto in $\mathsf{R}^{(a,b)}$ si chiama *topologia della convergenza puntuale.* Questo nome è dovuto al fatto che una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathsf{N}^+} \subset \mathsf{R}^{(a,b)}$ ha un limite nella topologia prodotto $\mathcal{T}$ se e solo se per ogni $x \in (a, b)$ la successione di numeri reali $\{f_n(x)\}_{n\in\mathsf{N}^+}$ ha un limite. Se infatti $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ allora per ogni $x \in (a, b)$ e $r > 0$ deve esistere un n_r tale che per ogni $n \geq n_r$

$$f_n \in p_x^{-1}((f(x) - r, \ f(x) + r)),$$

cioè

$$|f_n(x) - f(x)| < r,$$

e quindi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Se viceversa per ogni $x \in (a, b)$ esiste il $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, allora ponendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

si definisce un elemento $f \in \mathsf{R}^{(a,b)}$; scelti $x_1, \ldots, x_k \in (a, b)$ e $r_1, \ldots, r_k > 0$, siano $n_1, \ldots, n_k$ interi positivi tali che per $i = 1, \ldots, k$ si abbia

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < r_i \quad \text{per ogni } n \geq n_i.$$

Allora per $n \geq \max(n_1, \ldots, n_k)$ si ha

$$f_n \in p_{x_1}^{-1}((f(x_1) - r_1,\ f(x_1) + r_1)) \cap \ldots \cap p_{x_k}^{-1}((f(x_k) - r_k,\ f(x_k) + r_k))$$

e questo prova che $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Diamo ora la generalizzazione di due risultati già dimostrati nel caso del prodotto di due spazi.

6.9 PROPOSIZIONE *Sia* $X = \prod_{s\in S} X_s$. *Allora:*

(a) *Per ogni* $s \in S$ *la proiezione* $p_s : X \to X_s$ *è aperta.*

(b) *Un'applicazione* $g : Y \to X$ *di uno spazio* Y *in* X *è continua se e solo se sono continue tutte le composizioni*

$$g_s = p_s \cdot g : Y \to X_s.$$

Dimostrazione

(a) Sia U un aperto di X e $s \in S$. Scelto comunque $a \in p_s(U)$ sia $f \in U$ tale che $p_s(f) = a$. Poiché U è aperto, esistono $s_1, \ldots, s_k \in S$ ed aperti $U_1 \subset X_{s_1}, \ldots, U_k \subset X_{s_k}$ tali che, posto

$$V = p_{s_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{s_k}^{-1}(U_k),$$

si abbia $f \in V \subset U$. Ma allora $a \in p_s(V) \subset p_s(U)$ e

$$p_s(V) = \begin{cases} X_s & \text{se } s \notin \{s_1, \ldots, s_k\} \\ U_s & \text{se } s \in \{s_1, \ldots, s_k\}, \end{cases}$$

è un aperto. Ne segue che a è interno a $p_s(U)$, il quale quindi è aperto.

(b) Se g è continua è ovvio che le composizioni g_s sono tutte continue, stante la continuità delle p_s. Supponiamo viceversa che tutte le g_s siano continue. Per dimostrare che g è continua sarà sufficiente dimostrare che, per ogni $s \in S$ ed ogni aperto U_s di X_s, $g^{-1}(p_s^{-1}(U_s))$ è aperto (perché gli insiemi $p_s^{-1}(U_s)$ formano una sottobase di X). Ma

$$g^{-1}(p_s^{-1}(U_s)) = (p_s \cdot g)^{-1}(U_s) = g_s^{-1}(U_s)$$

è aperto perché g_s è continua. ■

Esercizi

1. Dimostrare che se X_1 e X_2 sono spazi topologici l'applicazione

   $$\sigma : X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$$

   definita da $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ è un omeomorfismo.

2. Dimostrare che se $X_1, \dots, X_m$ sono spazi topologici discreti (risp. banali) il prodotto topologico $X_1 \times \dots \times X_m$ è discreto (risp. banale).

3. Dare un esempio di spazio X tale che $X \approx X \times X$.

4. Sia X uno spazio metrizzabile. Dimostrare che la distanza $d : X \times X \to \mathrm{R}$ è un'applicazione continua rispetto alla topologia prodotto.

5. Siano S_1 e S_2 sottoinsiemi degli spazi topologici X_1 e X_2 rispettivamente. Dimostrare che nel prodotto topologico $X_1 \times X_2$ si ha:

   $$\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S}_1 \times \overline{S}_2,$$

   $$\mathrm{Int}(S_1 \times S_2) = \mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2),$$

   $$\mathrm{Fr}(S_1 \times S_2) = (\mathrm{Fr}(S_1) \times \overline{S}_2) \cup (\overline{S}_1 \times \mathrm{Fr}(S_2)).$$

6. Dimostrare che se $0 < a < b$ sono numeri reali, la corona circolare

   $$C_{a,b} = \{z \in \mathrm{C} : a \leq |z| \leq b\} \subset \mathrm{C}$$

   è omeomorfa a $\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1$.

7. Dimostrare che $\mathrm{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^n \times \mathrm{R}$.
   (*Suggerimento.* Usare $f : \mathbf{S}^n \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ definita da $f(\mathbf{x}, t) = e^t \mathbf{x}$).

8. Dimostrare che se X, Y, Z sono spazi topologici ed $X \approx Y$, allora $X \times Z \approx Y \times Z$.

9. Siano X' e X'' due spazi topologici metrizzabili con distanze d' e d'' rispettivamente. Dimostrare che il prodotto topologico $X' \times X''$ è metrizzabile.
   (*Suggerimento.* Dimostrare che

   $$d((x', x''), (y', y'')) = \max\{d'(x', y'), d''(x'', y'')\}$$

   è una distanza su $X' \times X''$ che induce la topologia prodotto).

10. Sia X uno spazio topologico discreto ed Y uno spazio qualsiasi. Dimostrare che la proiezione

$$X \times Y \to Y$$

è un omeomorfismo locale.

11. Dimostrare che in K^2 (K un campo infinito) la topologia di Zariski è strettamente più fine della topologia prodotto della topologia di Zariski su K per se stessa.

7 Quozienti

Considereremo ora un altro procedimento per costruire spazi topologici, che è quello del passaggio al quoziente. Esso consiste nel costruire un nuovo spazio topologico a partire da uno spazio dato mediante "incollamenti" o "identificazioni" ottenuti introducendo una relazione di equivalenza nell'insieme supporto dello spazio.

Sia X uno spazio topologico, Y un insieme e $p : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. La *topologia quoziente* su Y rispetto a p è

$$\mathcal{T}_p = \{U \subset Y : p^{-1}(U) \text{ è aperto in } X\}.$$

Con la terminologia dell'esercizio 4.4 $\mathcal{T}_p$ è la topologia indotta da p su Y. È ovvio che se Y ha la topologia quoziente, p è un'applicazione continua; inoltre $\mathcal{T}_p$ è più fine di ogni altra topologia che renda p continua. Segue subito dalla definizione che un sottoinsieme C di Y è chiuso rispetto a $\mathcal{T}_p$ se e solo se $p^{-1}(C)$ è chiuso in X.

Un'applicazione continua e suriettiva $p : X \to Y$ di spazi topologici si dice una *identificazione* se Y ha la topologia quoziente rispetto a p. Dalla definizione segue immediatamente che un'identificazione biunivoca è un'applicazione aperta e quindi è un omeomorfismo. È chiaro che vale anche il viceversa: ogni omeomorfismo è un'identificazione.

Daremo ora un criterio per verificare se una data applicazione di spazi topologici è un'identificazione. Premettiamo che, data un'applicazione suriettiva di insiemi $f : S \to T$, un *sottoinsieme* A di S si dice *saturo* (rispetto a f) se $A = f^{-1}(f(A))$; equivalentemente, se ogni $s \in S$ tale che $f(s) \in f(A)$ appartiene ad A. Se A è un qualsiasi sottoinsieme di S, la *saturazione di* A (rispetto a f) è $f^{-1}(f(A))$, cioè è il più piccolo sottoinsieme saturo di S contenente A.

7.1 LEMMA

(a) *Sia* $p : X \to Y$ *un'identificazione. C'è una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi aperti (risp. chiusi) saturi di* X *e i sottoinsiemi aperti (risp. chiusi) di* Y, *che si ottiene associando ad* $A \subset X$ *il sottoinsieme* $p(A) \subset Y$.

(b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione continua e suriettiva* $p : X \to Y$ *sia un'identificazione è che* $p(A)$ *sia aperto in* Y *per ogni aperto saturo* A *di* X.

Dimostrazione

(a) Se A è un aperto saturo, $p(A)$ è aperto, perché $p^{-1}(p(A)) = A$ è aperto in X e p è un'identificazione. Ogni aperto B di Y si ottiene in questo modo perché $B = p(p^{-1}(B))$ e $p^{-1}(B)$ è un aperto saturo. Se poi A_1 e A_2 sono aperti saturi tali che $p(A_1) = p(A_2)$, allora $A_1 = p^{-1}(p(A_1)) = p^{-1}(p(A_2)) = A_2$.

L'affermazione riguardante i chiusi si ottiene osservando che $A \subset X$ è un chiuso saturo se e solo se $X \setminus A$ è un aperto saturo, e che in tal caso $p(A) = Y \setminus p(X \setminus A)$.

(b) La necessità è stata appena dimostrata. Supponiamo viceversa che $p : X \to Y$ sia continua e suriettiva e che la condizione dell'enunciato sia soddisfatta. Se B in Y è tale che $p^{-1}(B)$ sia aperto allora $B = p(p^{-1}(B))$ è aperto perché $p^{-1}(B)$ è un aperto saturo. Ne segue, tenuto anche conto della continuità di p, che gli aperti di Y sono i sottoinsiemi B tali che $p^{-1}(B)$ sia aperto. ■

Un esempio di identificazione è dato dall'applicazione (fig. 7.1)

$$E : [0, 1] \to \mathbf{S}^1$$

definita da

$$E(\alpha) = (\cos(2\pi\alpha),\ \sin(2\pi\alpha)) \quad (= e^{2\pi i\alpha} \text{ se si considera } \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C})$$

E è continua e suriettiva. Un aperto $A \subset \mathbf{I}$ è saturo precisamente se non contiene né 0 né 1 oppure se li contiene entrambi. Nel primo caso A è unione di intervalli aperti contenuti in $\mathbf{I}$ ed $E(A)$ è unione dei corrispondenti archi aperti di $\mathbf{S}^1$, quindi è aperto; nel secondo caso A è unione di intervalli aperti contenuti

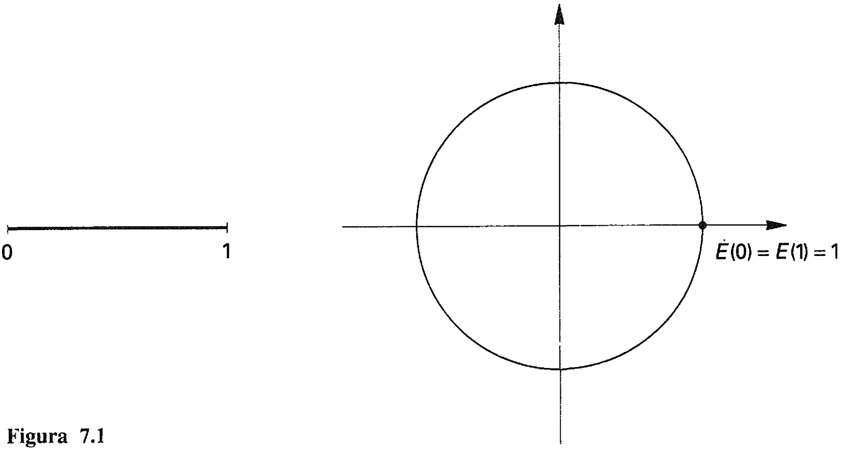


Figura 7.1

in $\mathbf{I}$ e di $[0, r) \cup (1 - r, 1]$ per qualche $r > 0$. Anche in questo caso $E(A)$ è unione di archi aperti e quindi è aperto. Dal lemma precedente segue che E è un'identificazione.

Si noti che la restrizione di E all'intervallo $(0, 1]$ è continua e biunivoca ma non è un omeomorfismo, perché non è un'identificazione: infatti $A = (1/2, 1]$ è un aperto saturo di $(0, 1]$, ma $E(A)$ non è aperto in $\mathbf{S}^1$.

Se in un insieme X è definita una relazione di equivalenza ρ possiamo considerare l'insieme quoziente X/ρ i cui elementi sono le classi di ρ-equivalenza. Chiameremo l'applicazione suriettiva $p : X \to X/\rho$, che a ogni $x \in X$ associa la sua classe di equivalenza, *proiezione naturale* (o *proiezione canonica*). Un *sottoinsieme* S di X si dirà *saturo rispetto a* ρ (o ρ-*saturo*) se è saturo rispetto a p, cioè se contiene l'intera classe di equivalenza di ogni suo elemento.

Supponiamo che l'insieme X su cui è definita la relazione di equivalenza ρ abbia una struttura di spazio topologico. X/ρ, con la topologia quoziente rispetto alla proiezione canonica p si chiama *spazio quoziente di* X *rispetto* a ρ.

Si osservi che ogni applicazione suriettiva di insiemi $f : X \to Y$ può vedersi come la proiezione naturale rispetto a una opportuna relazione di equivalenza. Infatti si ha una biezione $Y \to X/\rho(f)$, dove $\rho(f)$ è la relazione di equivalenza su X così definita:

$$x_1 \rho(f) x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

7.2 PROPOSIZIONE *Supponiamo che* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *siano identificazioni. Allora* $g \cdot f : X \to Z$ *è un'identificazione.*

Dimostrazione. Chiaramente $g \cdot f$ è continua e suriettiva. Se $A \subset X$ è un aperto saturo rispetto a $g \cdot f$ allora A è saturo rispetto a f e quindi $f(A)$ è aperto in Y. Poiché $f(A)$ è anche saturo rispetto a g, $g(f(A)) = (g \cdot f)(A)$ è aperto in Z; quindi $g \cdot f$ è un'identificazione per il lemma 7.1. ∎

7.3 PROPOSIZIONE *Sia* $p : X \to Y$ *un'applicazione continua e suriettiva. Se* p *è aperta oppure chiusa* p *è un'identificazione.*

Dimostrazione. Se p è aperta allora in particolare per ogni aperto saturo $A \subset X$ $p(A)$ è aperto; quindi p è un'identificazione per il lemma 7.1.

Se p è chiusa e A è un aperto saturo di X, allora $p(A) = Y \backslash p(X \backslash A)$ è aperto; la conclusione segue ancora dal lemma 7.1. ∎

Dalle proposizioni 7.3 e 6.9 segue che, se $X = \prod_{s \in S} X_s$ è il prodotto topologico di una famiglia $\{X_s\}_{s \in S}$ di spazi topologici, le proiezioni $p_s : X \to X_s$ sono identificazioni. È facile dare esempi di identificazioni che non sono né aperte né chiuse (cfr. esempio 7.6(5)).

7.4 PROPOSIZIONE *Sia $p : X \to Y$ un'identificazione e Z uno spazio topologico. Un'applicazione $g : Y \to Z$ è continua se e solo se $g \cdot p : X \to Z$ è continua. Inoltre g è un omeomorfismo se e solo se è biettiva e $g \cdot p$ è un'identificazione.*

Dimostrazione. È ovvio che $g \cdot p$ è continua se g lo è. Supponiamo viceversa che $g \cdot p$ sia continua, e sia U un aperto di Z. Allora

$$p^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \cdot p)^{-1}(U)$$

è un aperto di X e quindi $g^{-1}(U)$ è aperto in Y perché p è un'identificazione. Quindi g è continua.

Se g è biunivoca e $g \cdot p$ è un'identificazione allora g è continua; inoltre per ogni aperto A di Y

$$g(A) = (g \cdot p)(p^{-1}(A))$$

è aperto perché $p^{-1}(A)$ è un aperto saturo di X; quindi g è anche aperta, cioè è un omeomorfismo. Il viceversa è ovvio. ■

Se ρ è una relazione di equivalenza in un insieme X e Z è un insieme, un'applicazione $G : X \to Z$ si dice *compatibile con* ρ se $G(x_1) = G(x_2)$ ogni volta che $x_1 \rho x_2$. Il seguente corollario è immediato.

7.5 COROLLARIO *Se ρ è una relazione di equivalenza nello spazio topologico X e Z è uno spazio topologico, sussiste una corrispondenza biunivoca*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{applicazioni continue} \\ g : X/\rho \to Z \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{applicazioni continue} \\ G : X \to Z \\ \text{compatibili con } \rho \end{array} \right\}$$

data da

$$g \mapsto g \cdot p$$

dove $p : X \to X/\rho$ è la proiezione naturale, e la cui inversa è

$$G_* \leftarrow G,$$

dove

$$G_*(p(x)) = G(x) \quad \textit{per ogni } p(x) \in X/\rho.$$

7.6 *Esempi*

1. Se $n > m$ e $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$, la proiezione

$$p_{i_1,\ldots,i_m} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$$

è un'identificazione perché è suriettiva, continua e aperta.

2. L'identificazione $E : [0,1] \to \mathbf{S}^1$ considerata a pagina 73 è la restrizione dell'applicazione continua

$$E : \mathsf{R} \to \mathbf{S}^1$$

$$E(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}.$$

Anche quest'applicazione è un'identificazione perché, come è facile verificare, è aperta. È anche facile vedere che E è un omeomorfismo locale.

3. Sia X uno spazio topologico e S un suo sottoinsieme. Denotiamo con ρ_S la relazione di equivalenza in X così definita:

$$x_1 \rho_S x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ oppure } x_1, x_2 \in S.$$

Le classi di equivalenza sono S e i punti di $X \backslash S$. Per questo si dice che lo spazio quoziente X/ρ_S è *lo spazio ottenuto da X identificando S a un punto.*

4. Un caso particolare dell'esempio 3 si ha prendendo $X = [0,1]$, $S = \{0,1\}$; in questo caso $X/\rho_S \approx \mathbf{S}^1$, e l'omeomorfismo è indotto dall'identificazione $E : \mathbf{I} \to \mathbf{S}^1$ considerata prima.

Più in generale si prenda $X = \mathbf{D}^n$ e $S = \mathbf{S}^{n-1}$. Allora lo spazio X/ρ_S è omeomorfo a $\mathbf{S}^n$.

Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$, costruendo un'identificazione $p : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^2$ a cui sia associata la relazione di equivalenza $\rho_{\mathbf{S}^1}$ (cioè $\rho_{\mathbf{S}^1} = \rho(p)$). L'applicazione p è definita nel modo seguente:

$$p(u,v) = \left(2u\sqrt{1-u^2-v^2},\ 2v\sqrt{1-u^2-v^2},\ 2(u^2+v^2)-1\right),\ (u,v) \in \mathbf{D}^2.$$

È facile verificare che p è suriettiva, che $p\ {}^{1}((0,0,1)) = \mathbf{S}^1$ e che la restrizione

$$p_{|\mathbf{D}^2 \backslash \mathbf{S}^1} : \mathbf{D}^2 \backslash \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$$

è biettiva. Chiaramente p è continua. La verifica che p è un'identificazione sarà facile dopo che l'avremo interpretata geometricamente.

Sia

$$F = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 + (x_3-1)^2 = 1\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : x_3 \le 1\}$$

l'emisfero inferiore della sfera di centro $(0,0,1)$ e raggio 1, e

$$\sum = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1/2)^2 = 1/4\}$$

la sfera di centro $(0,0,1/2)$ e raggio $1/2$ (vedi fig. 7.2).

Denotiamo con $\xi : F \to \mathsf{R}^2$ la restrizione a F della proiezione $p_{1,2} : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^2$. ξ induce un omeomorfismo di F su $\mathbf{D}^2$ che verrà denotato con lo stesso simbolo.

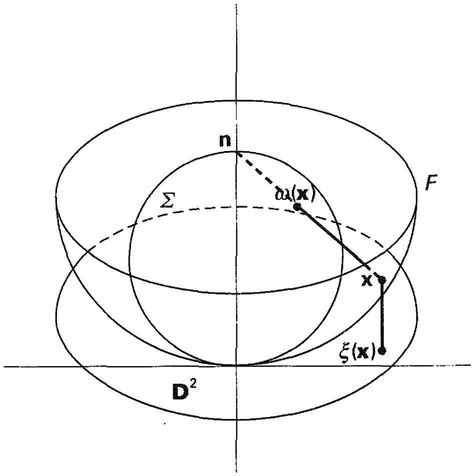


Figura 7.2

Sia $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ e definiamo un'applicazione

$$\omega : F \to \sum$$

nel modo seguente:

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{n}, & \text{se } x_3 = 1 \\ \left(\sum \setminus \{\mathbf{n}\}\right) \cap r(\mathbf{x}, \mathbf{n}), & \text{se } x_3 \neq 1 \end{cases}$$

dove $r(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ denota la retta passante per $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in F$ e per $\mathbf{n}$. Sia infine $\tau : \sum \to \mathbf{S}^2$ l'omeomorfismo

$$\tau(s_1, s_2, s_3) = (2s_1, 2s_2, 2(s_3 - 1/2)).$$

Allora l'applicazione p è la composizione

$$p = \tau \cdot \omega \cdot \xi^{-1}$$

(la verifica è un esercizio). Poiché τ e ξ^{-1} sono omeomorfismi, e quindi identificazioni, per verificare che p è un'identificazione sarà sufficiente verificare che ω lo è.

Poniamo $K = \omega^{-1}(\mathbf{n})$ e sia A un aperto saturo di F. Poiché

$$\omega_{|F \setminus K} : F \setminus K \to \sum \setminus \{\mathbf{n}\}$$

è un omeomorfismo, se $A \cap K = \emptyset$ $\omega(A)$ è aperto in $\sum \setminus \{\mathbf{n}\}$ e quindi in $\sum$. Se invece $A \cap K \neq \emptyset$, allora $K \subset A$ perché A è saturo e K è una classe di equivalenza. Ma allora $A \setminus K$ è aperto e $\omega(A \setminus K)$ è ancora aperto per quel che abbiamo appena detto. Per verificare che

$$\omega(A) = \omega(A \setminus K) \cup \{\mathbf{n}\}$$

è aperto basta verificare che $\mathbf{n}$ è interno a $\omega(A)$. Poiché A è aperto e contiene K esiste $r > 0$ tale che A contenga

$$F \cap \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 1 - r\};$$

denotiamo con F_r quest'insieme. Allora $\omega(A)$ contiene $\omega(F_r)$, che è un disco sferico aperto centrato in $\mathbf{n}$; ne segue l'asserto (vedi fig. 7.3).

In generale per ogni $n \geq 2$ si definisce un'identificazione $p : \mathbf{D}^n \to \mathbf{S}^n$ che induce un omeomorfismo $\mathbf{D}^n/\rho_{\mathbf{S}^{n-1}} \approx \mathbf{S}^n$ ponendo

$$p(u_1, \ldots, u_n) = \left(2u_1\sqrt{1 - \sum u_i^2}, \ldots, 2u_n\sqrt{1 - \sum u_i^2},\ 2\sum u_i^2 - 1\right).$$

La verifica è simile a quella fatta nel caso $n = 2$.

5. Un'identificazione non è in generale né aperta né chiusa. Un esempio è dato dallo spazio Y ottenuto da R identificando ad un punto l'intervallo $[0, 1)$ e dalla proiezione canonica. $p : \mathsf{R} \to Y$. Il punto $p([0, 1))$ non è né aperto né chiuso e

$$p([0, 1)) = p((0, 1)) = p([0, 1/2]).$$

6. In $\mathbf{I}^2$ sia k la relazione di equivalenza che identifica il punto $(0, t)$ con il punto $(1, t)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$, e lascia ogni altro punto equivalente solo a se stesso. Il quoziente $K = \mathbf{I}^2/k$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$.

Per verificarlo identifichiamo $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$ al sottospazio di R^3

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

e definiamo un'applicazione

$$f : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$$

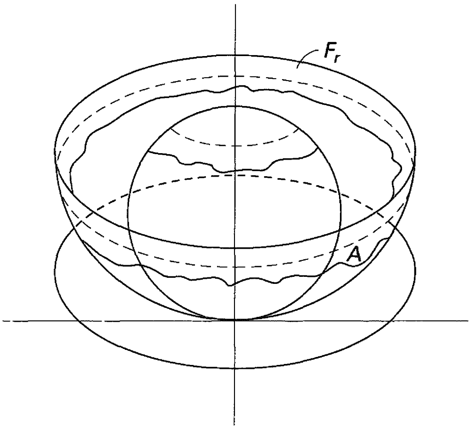


Figura 7.3

ponendo

$$f(s,t) = (\cos(2\pi s),\ \sin(2\pi s),\ t).$$

f è chiaramente continua e suriettiva, e $\rho(f) = k$.

Per verificare che f è un'identificazione consideriamo un aperto saturo $A \subset \mathbf{I}^2$. Sia

$$S = \{0,1\} \times \mathbf{I} = (\{0\} \times \mathbf{I}) \cup (\{1\} \times \mathbf{I}).$$

La restrizione

$$f_{|\mathbf{I}^2\setminus S} : \mathbf{I}^2\setminus S \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{I}^2\setminus S$ sulla sua immagine (perché f è invertibile su $f(\mathbf{I}^2\setminus S)$) che è aperta in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$. Quindi se $A \subset \mathbf{I}^2\setminus S$ $f(A)$ è aperto (cfr. fig. 7.4).

Se invece esiste $\mathbf{x} \in A \cap S$, allora $\mathbf{x} = (0,t)$ oppure $\mathbf{x} = (1,t)$ per qualche $t \in \mathbf{I}$ e la classe di equivalenza di $\mathbf{x}$ è $\{(0,t),(1,t)\}$. Poiché A è un aperto saturo, esiste $r > 0$ tale che

$$U_r = ([0,r) \times (t-r, t+r)) \cup ((1-r, 1] \times (t-r, t+r)) \subset A.$$

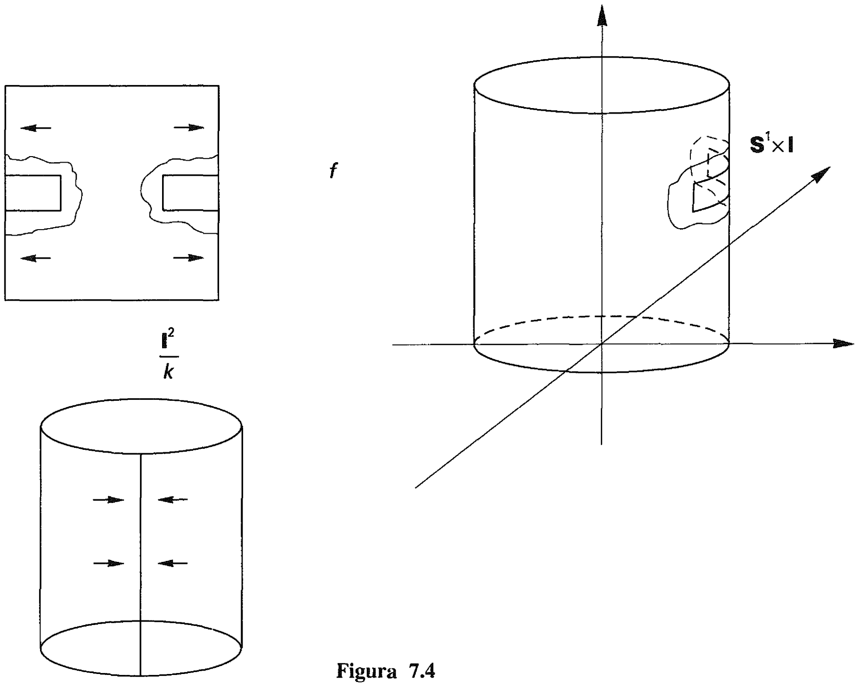


Figura 7.4

Ma allora $f(U_r)$ è un intorno di $f(\mathbf{x})$ contenuto in $f(A)$, cioè $f(\mathbf{x})$ è interno a $f(A)$. Questo prova che

$$f(A) = f(A \cap S) \cup f(A \backslash A \cap S)$$

è aperto perché $f(A \backslash (A \cap S))$ è aperto e ogni punto di $f(A \cap S)$ è interno a $f(A)$. Quindi f è un'identificazione.

7. Ancora in $\mathbf{I}^2$ consideriamo la relazione di equivalenza μ che identifica il punto $(0,t)$ con il punto $(1, 1-t)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$ e lascia ogni altro punto equivalente solo a se stesso. Il quoziente $M = \mathbf{I}^2/\mu$ si chiama *nastro di Moebius* (fig. 7.5).

Con una verifica simile a quella dell'esempio 6 si dimostra che l'applicazione $g : \mathbf{I}^2 \to \mathsf{R}^3$ definita da

$$g(s,t) = (\cos(2\pi s) + (t - 1/2)\sin(\pi s)\cos(2\pi s),\ \ \sin(2\pi s)+$$
$$+ (t - 1/2)\sin(\pi s)\sin(2\pi s),\ \ (t - 1/2)\cos(\pi s))$$

induce un'inclusione continua di M in R^3. L'aperto $M^0 = \dfrac{\mathbf{I} \times (0,1)}{\mu}$ di M si chiama *nastro di Moebius aperto.*

8. Sia τ la relazione di equivalenza in $\mathbf{I}^2$ che identifica il punto $(0,t)$ con il punto $(1,t)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$, il punto $(s,0)$ con $(s,1)$ per ogni $s \in \mathbf{I}$, e lascia ogni altro punto equivalente solo a se stesso. Il quoziente $\mathbf{I}^2/\tau$ è omeomorfo al toro $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. L'omeomorfismo è indotto dall'applicazione $h : \mathbf{I}^2 \to \mathsf{R}^3$ definita da

$$h(s,t) = ((2 + \cos(2\pi s))\cos(2\pi t),\ \ (2 + \cos(2\pi s))\sin(2\pi t),\ \ \sin(2\pi s)).$$

la cui immagine è $\tilde{T}$. La verifica è simile a quella dell'esempio 6.

9. Un *gruppo topologico* è un insieme G che è contemporaneamente un gruppo e uno spazio topologico in modo che l'operazione gruppale e la struttura topologica

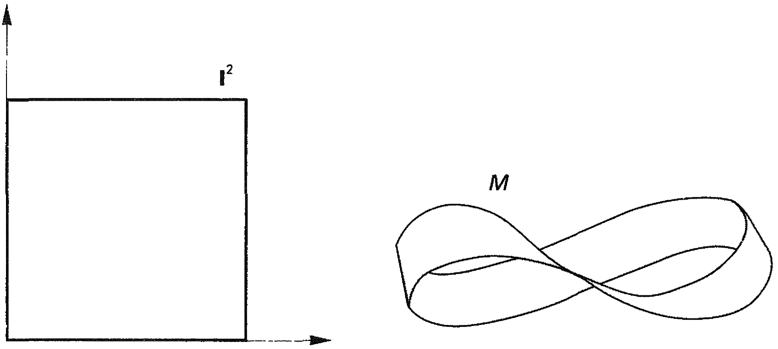


Figura 7.5

siano legate dalla seguente condizione:

l'applicazione $G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ è continua.

R e C, con l'operazione di somma e la topologia euclidea, sono gruppi topologici. Ogni gruppo astratto munito della topologia discreta è un gruppo topologico; lo è anche se munito della topologia banale.

$\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, con la topologia di sottospazi di R^{n^2}, sono gruppi topologici. Lo stesso è vero per i gruppi di matrici complesse $\mathrm{GL}_n(\mathsf{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, con la topologia indotta da C^{n^2}. Più in generale, ogni sottogruppo di un gruppo topologico (e quindi ogni sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ e di $\mathrm{GL}_n(\mathsf{C})$, cioè ogni *gruppo lineare*), con la topologia di sottospazio, è un gruppo topologico.

Se H è un sottogruppo del gruppo topologico G, l'insieme G/H delle classi laterali destre è uno spazio topologico con la topologia quoziente; è facile verificare che la proiezione $p : G \to G/H$ è aperta. Lo stesso vale per l'insieme delle classi laterali sinistre. Se il sottogruppo H è normale, G/H è un gruppo topologico.

Ad esempio la circonferenza $\mathbf{S}^1 \approx \mathsf{R}/\mathsf{Z}$ è un gruppo topologico; analogamente il toro $T^n \approx \mathsf{R}^n/\mathsf{Z}^n$.

10. Sia X un insieme e G un gruppo. Diremo che G *agisce*, o *opera*, su X (a sinistra), oppure che X è un *G-insieme* (sinistro), se è definita un'applicazione

$$a : G \times X \to X$$

tale che, denotata con $gx \in X$ l'immagine $a(g, x)$ di $(g, x) \in G \times X$, si abbia:

$$(gg')x = g(g'x), \quad \text{per ogni } g,\ g' \in G,\ x \in X,$$
$$ex = x, \quad \text{per ogni } x \in X,$$

dove e è l'identità di G. L'applicazione a si dice un'*azione* (sinistra) di G su X. Dalla definizione segue che per ogni $g \in G$ l'applicazione indotta $g : X \to X$, $g(x) = gx$, è una biiezione.

L'azione di G su X si dice *libera* se per ogni $g \neq e$ e per ogni $x \in X$ si ha $gx \neq x$.

a si dice *transitiva* se, dati comunque x, $x' \in X$, esiste $g \in G$ tale che $gx = x'$.

Se $x \in X$, l'*orbita* di x è $Gx = \{gx \in X : g \in G\}$; lo *stabilizzatore* di x è il sottogruppo $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Per definizione G agisce liberamente (risp. transitivamente) su X se e solo se $G_x = \{e\}$ per ogni $x \in X$ (risp. se e solo se $Gx = X$ per ogni $x \in X$).

Ogni gruppo G agisce transitivamente per moltiplicazione sinistra sull'insieme G/H delle classi laterali sinistre rispetto a un qualsiasi sottogruppo H:

$$G \times G/H \to G/H$$
$$(g, \overline{h}) \mapsto \overline{gh}.$$

In particolare G agisce transitivamente su se stesso per moltiplicazione a sinistra.

Se X è uno spazio topologico, ogni sottogruppo di Omeo(X) opera su X come un gruppo di trasformazioni di X.

Se un gruppo G agisce su uno spazio topologico X in modo che per ogni $g \in G$ l'applicazione $g : X \to X$ sia un omeomorfismo, X si dice un *G-spazio*. Se l'azione è transitiva, X si dice un *G-spazio omogeneo*; se l'azione è libera, X è detto *G-spazio principale*.

R^n è esso stesso un gruppo topologico. Un R^n-spazio principale omogeneo è uno spazio affine n-dimensionale.

Se X è un G-insieme, due distinte G-orbite sono disgiunte; quindi G definisce una relazione di equivalenza in X in cui le G-orbite coincidono con le classi di equivalenza; se X è uno spazio topologico lo spazio quoziente si denota X/G e si chiama *spazio quoziente di X rispetto all'azione di G*. Si verifica facilmente che la proiezione naturale $p : X \to X/G$ è aperta.

Infatti la saturazione rispetto a p di un sottoinsieme A di X è $\bigcup_{g \in G} gA$; se A è aperto quest'insieme è aperto.

11. Sia $n \geq 0$; in $\mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ consideriamo la seguente relazione di equivalenza $\sim$:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \mathsf{R},\ \lambda \neq 0, \text{ tale che } y_i = \lambda x_i,\ i = 0, \dots, n.$$

Quindi due punti sono equivalenti se e solo se appartengono alla stessa retta per l'origine. Lo spazio quoziente $\mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\} / \sim$ si chiama *spazio proiettivo reale di dimensione n*, e si denota con $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$, o semplicemente $\mathbf{P}^n$. $\mathbf{P}^1$ e $\mathbf{P}^2$ si chiamano rispettivamente *retta proiettiva reale* e *piano proiettivo reale*. $\mathbf{P}^0$ consiste di un solo punto.

Per definizione $\mathbf{P}^n$ può essere identificato con l'insieme delle rette di R^{n+1} passanti per l'origine; un insieme saturo è un sottoinsieme di $\mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ che è unione di rette passanti per l'origine, private di $\mathbf{0}$. Denoteremo con

$$\pi : \mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{P}^n$$

la proiezione canonica. Se $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$, denoteremo con $[x_0, \dots, x_n]$ il punto $\pi(\mathbf{x}) \in \mathbf{P}^n$; $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ si dirà una *$(n+1)$-upla di coordinate omogenee del punto* $\pi(\mathbf{x})$. È chiaro dalla definizione che le coordinate omogenee di un punto di $\mathbf{P}^n$ sono individuate dal punto stesso solo a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo.

Per ogni $i = 0, \dots, n$ sia

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbf{P}^n : x_i \neq 0\}.$$

Evidentemente $U_0, \dots, U_n$ sono aperti in $\mathbf{P}^n$ e costituiscono un ricoprimento (ogni punto di $\mathbf{P}^n$ ha una almeno delle sue coordinate omogenee diversa da zero). Se si pone

$$\mathsf{R}_i^{n+1} = \pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\} : x_i \neq 0\},$$

la restrizione di π

$$\pi_i : \mathsf{R}_i^{n+1} \to U_i$$

è un'identificazione (cfr. esercizio 4). Da ciò segue che l'applicazione continua

$$\phi_i : \mathsf{R}_i^{n+1} \to \mathsf{R}^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i,\ x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i),$$

essendo compatibile con π_i, induce un'applicazione continua

$$\varphi_i : U_i \to \mathsf{R}^n.$$

La φ_i è biunivoca; la sua inversa è

$$\varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = [y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

ed è anch'essa continua, perché è la composizione dell'inclusione continua

$$\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$$

$$(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \mapsto [y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

con π_i. Quindi ognuno degli aperti $U_i \subset \mathbf{P}^n$ è omeomorfo a R^n. Il complementare $H_i = \mathbf{P}^n \backslash U_i$ si chiama *iperpiano all'infinito* (o *improprio*) rispetto a U_i. È facile verificare che $H_i \approx \mathbf{P}^{n-1}$ e che U_i è denso in $\mathbf{P}^n$.

12. $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ può anche essere definito nel modo seguente. In $\mathbf{S}^n$ si consideri la relazione di equivalenza così definita:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \pm\mathbf{x},$$

che identifica ogni punto $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^n$ con il suo antipodale $-\mathbf{x}$. Si noti che $\mathbf{S}^n \subset \mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ e che la relazione $\sim$ su $\mathbf{S}^n$ è la restrizione della relazione $\sim$ su $\mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$.

Lo spazio quoziente $\mathbf{S}^n/\sim$ è omeomorfo a $\mathbf{P}^n$. Per dimostrarlo osserviamo preliminarmente che *la proiezione naturale* $\tau : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n/\sim$ *è aperta e chiusa.*

Infatti, se $A \subset \mathbf{S}^n$ è aperto, l'insieme saturato di A è

$$\tau^{-1}((A)) = A \cup (-A),$$

dove $-A = \{-\mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$ è l'immagine di A attraverso l'omeomorfismo $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ che manda $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$, e quindi è aperto. Allora $\tau(A) = \tau(A \cup (-A))$ è l'immagine di un aperto saturo e quindi è aperto. Nello stesso modo si dimostra che τ è chiusa.

Definiamo un'applicazione continua

$$\tilde{\mu} : \mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\} \to \mathbf{S}^n$$

ponendo

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|.$$

La composizione

$$\mu = \tau \cdot \tilde{\mu} : \mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\} \to S^n/\sim$$

induce un'applicazione continua e biunivoca

$$\overline{\mu} : \mathbf{P}^n \to S^n/\sim .$$

Quest'applicazione è un omeomorfismo se è aperta. Sia $A \subset \mathbf{P}^n$ un aperto. Allora

$$\overline{\mu}(A) = \mu(\pi^{-1}(A)) = \tau(\tilde{\mu}(\pi^{-1}(A))) = \tau(S^n \cap \pi^{-1}(A))$$

è aperto in $S^n/\sim$ perché τ è aperta. Quindi $\overline{\mu}$ è un omeomorfismo.

13. $\mathbf{P}^1$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^1$. Per definire un omeomorfismo consideriamo la circonferenza $S \subset \mathsf{R}^2$ di centro $(0, -1/2)$ e raggio $1/2$. Definiamo un'applicazione continua $\gamma : \mathbf{S}^1 \to S$ ponendo

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{x} = (\pm 1, 0), \\ (S\backslash\{\mathbf{0}\}) \cap r(\mathbf{x}, \mathbf{0}) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

(dove $r(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ denota come al solito la retta contenente $\mathbf{x}$ e $\mathbf{0}$; vedi fig. 7.6).

Analiticamente

$$\gamma(\mathbf{x}) = (-x_1x_2/\|\mathbf{x}\|^2, \ -x_2^2/\|\mathbf{x}\|^2).$$

Chiaramente γ è continua ed aperta. Poiché $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{y})$ se e solo se $\mathbf{y} = \pm\mathbf{x}$, γ induce un omeomorfismo $\mathbf{P}^1 \to S$. Ma $S \approx \mathbf{S}^1$, quindi $\mathbf{P}^1 \approx \mathbf{S}^1$.

14. Sia $n \geq 0$ un intero. È possibile definire lo *spazio proiettivo complesso di dimensione* n, denotato $\mathbf{P}^n(\mathsf{C})$, in modo simile a come è stato definito $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$, come il quoziente di $\mathsf{C}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \mathsf{C}, \ \lambda \neq 0, \ \text{tale che } y_i = \lambda x_i, \ i = 0, \ldots, n$$

(dove, come nel caso reale, $\mathsf{C}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ si intende munito della topologia euclidea indotta da C^{n+1}).

$\mathbf{P}^1(\mathsf{C})$ e $\mathbf{P}^2(\mathsf{C})$ si dicono *retta proiettiva complessa* e *piano proiettivo complesso* rispettivamente. Denoteremo con

$$\pi : \mathsf{C}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\} \to \mathbf{P}^n(\mathsf{C})$$

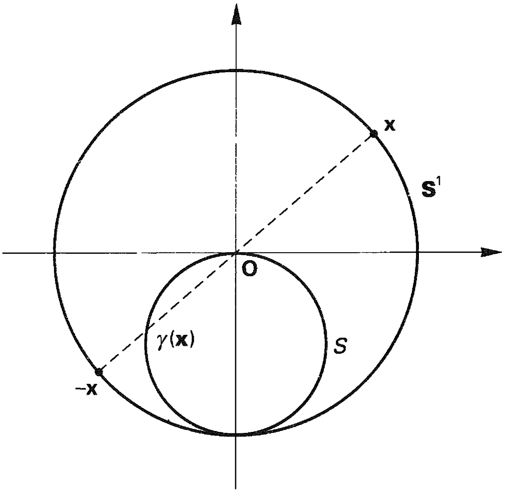


Figura 7.6

la proiezione naturale; per ogni $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathrm{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, il punto $\pi(\mathbf{z}) \in \mathbf{P}^n(\mathrm{C})$ si denoterà anche $[z_0, \dots, z_n]$, e $(z_0, \dots, z_n)$ si dirà una $(n+1)$-*upla di coordinate omogenee di* $\pi(\mathbf{z})$.

Ponendo

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbf{P}^n(\mathrm{C}) : z_i \neq 0\} \quad i = 0, \dots, n,$$

si ottiene un ricoprimento aperto $\{U_0, \dots, U_n\}$ di $\mathbf{P}^n(\mathrm{C})$ in cui ogni U_i è omeomorfo a C^n tramite l'omeomorfismo

$$[z_0 \dots z_n] \mapsto (z_0/z_i, \dots, z_n/z_i).$$

Il complementare

$$H_i = \mathbf{P}^n(\mathrm{C}) \setminus U_i$$

si chiama *iperpiano all'infinito* (o *improprio*) rispetto a U_i.

Le dimostrazioni di questi fatti si estendono parola per parola dal caso reale a quello complesso.

È facile dimostrare che $\mathbf{P}^1(\mathrm{C})$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^2$; esso viene spesso chiamato *sfera di Riemann* (cfr. Sernesi 1989, p. 306).

Esercizi

1. Sia ρ la relazione di equivalenza su R così definita:

$$x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Dimostrare che R/ρ è omeomorfo alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$.

2. Siano ρ_1, ρ_2 e ρ le seguenti relazioni di equivalenza in R^2:

$$(x_1,x_2)\rho_1(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_2 = y_2 \text{ e } |x_1| = |y_1|.$$

$$(x_1,x_2)\rho_2(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ e } |x_2| = |y_2|.$$

$$(x_1,x_2)\rho(y_1,y_2) \Leftrightarrow |x_1| = |y_1|,\ |x_2| = |y_2|.$$

Dimostrare che R^2/ρ_1 e R^2/ρ_2 sono entrambi omeomorfi a un semipiano chiuso, e che R^2/ρ è omeomorfo al quadrante chiuso

$$\{(x_1,x_2) : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\} \subset \mathsf{R}^2.$$

3. Dimostrare la seguente proposizione:
Siano X_1 e X_2 spazi topologici con relazioni di equivalenza ρ_1 e ρ_2 rispettivamente. Supponiamo che le proiezioni canoniche $p_i : X_i \to X_i/\rho_i$, $i = 1,2$, siano entrambe aperte. Nello spazio topologico prodotto $X = X_1 \times X_2$ sia ρ la relazione di equivalenza

$$(x_1,x_2)\rho(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1\rho_1 y_1,\ x_2\rho_2 y_2$$

e sia $p : X \to X/\rho$ la proiezione naturale. Allora l'applicazione

$$\tilde{q} : X \to X_1/\rho_1 \times X_2/\rho_2$$

$$\tilde{q}(x_1,x_2) = (p_1(x_1), p_2(x_2))$$

induce un omeomorfismo

$$q : X/\rho \to X_1/\rho_1 \times X_2/\rho_2.$$

4. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, $B \subset Y$ un sottospazio aperto (risp. chiuso) e $A = f^{-1}(B) \subset X$. Dimostrare che l'applicazione

$$g : A \to B$$

indotta da f è un'identificazione.

5. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, $A \subset X$ un sottospazio, $B = f(A) \subset Y$ e $g : A \to B$ l'applicazione indotta da f. Consideriamo in B le due topologie

$\mathcal{T}_1 =$ topologia indotta da Y;

$\mathcal{T}_2 =$ topologia quoziente rispetto a g.

Dimostrare che $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ e dare un esempio in cui $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$. Dimostrare che se A è aperto e f è aperta, oppure A è chiuso e f è chiusa, allora $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

6. In $\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$:

$$\begin{aligned}(t,s) \sim (t',s') \Leftrightarrow (t,s) &= (t',s') \quad \text{oppure}\\ t = t' &= 0 \quad \text{oppure}\\ t = t' &= 1.\end{aligned}$$

Dimostrare che $\mathbf{I} \times \mathbf{S}^1/\sim$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^2$.

7. Sia $p : X \to Y$ un'identificazione. Dimostrare che se D è un sottoinsieme denso di X, $p(D)$ è denso in Y.

8. Interpretare $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ come spazio quoziente rispetto a un'azione di $\mathsf{R}^* := \mathsf{R}\backslash\{0\}$ su $\mathsf{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$.

9. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio separabile è separabile.

10. Dimostrare che $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ è omeomorfo al quoziente della semisfera $\mathbf{S}^n_+$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti dell'equatore $\{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^n : x_{n+1} = 0\} \approx \mathbf{S}^{n-1}$ che sono diametralmente opposti.
(*Suggerimento*. Si utilizzi l'esercizio 5 e il fatto che la proiezione $\mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ è chiusa).

11. Dimostrare che se G è un gruppo topologico e H è un sottogruppo discreto di G, la proiezione $G \to G/H$ è un omeomorfismo locale (in particolare $\mathsf{R}^n \to T^n$ è un omeomorfismo locale).

12. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione. Dimostrare che se X soddisfa il primo (risp. il secondo) assioma di numerabilità allora Y soddisfa il primo (risp. il secondo) assioma di numerabilità.

Capitolo 3

Proprietà topologiche

8 Proprietà di separazione

In questo paragrafo studieremo una classe di proprietà topologiche, dette *proprietà di separazione.*

Uno *spazio di Hausdorff* (o *spazio* T_2) è uno spazio topologico X che soddisfa il seguente assioma:

ASSIOMA DI SEPARAZIONE DI HAUSDORFF *Dati comunque* u, $v \in X$ *distinti, esistono due aperti* U, V *di* X *tali che* $u \in U$, $v \in V$ *e* $U \cap V = \emptyset$.

Gli esempi più importanti di spazi di Hausdorff sono gli spazi metrizzabili (in particolare R^n): se $u \neq v$ sono punti dello spazio metrizzabile X, allora $d(u,v) = r > 0$ e gli aperti $U = D_{r/3}(u)$, $V = D_{r/3}(v)$ soddisfano ovviamente $u \in U$, $v \in V$; inoltre $U \cap V = \emptyset$. Infatti, se per assurdo esistesse $w \in U \cap V$, si avrebbe

$$r = d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) < r/3 + r/3 = 2r/3.$$

Ogni spazio discreto è di Hausdorff; uno spazio topologico banale con almeno due punti non è di Hausdorff. Ogni insieme infinito con la topologia cofinita non è uno spazio di Hausdorff.

8.1 PROPOSIZIONE *Ogni sottospazio* Y *di uno spazio di Hausdorff* X *è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Se u, v sono due punti distinti di Y, esistono aperti U, V di X tali che $u \in U$, $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Allora $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ sono aperti di Y tali che $u \in U'$, $v \in V'$, e $U' \cap V' = \emptyset$. ■

8.2 PROPOSIZIONE *Il prodotto topologico* X *di una famiglia* $\{X_s\}_{s \in S}$ *di spazi di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano u, v due punti distinti qualsiasi di X. Poiché $u \neq v$, esiste un indice $s \in S$ tale che $u(s) \neq v(s)$ in X_s; e poiché X_s è di Hausdorff, esistono aperti U_s, V_s in X_s tali che $u(s) \in U_s$, $v(s) \in V_s$, e $U_s \cap V_s = \emptyset$.

Siano U e V gli aperti di X definiti da

$$U = p_s^{\ 1}(U_s) = \{x \in X : x(s) \in U_s\};$$

$$V = p_s^{\ 1}(V_s) = \{x \in X : x(s) \in V_s\}.$$

Chiaramente $u \in U$, $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Quindi X è uno spazio di Hausdorff. ■

La seguente proposizione descrive una proprietà degli spazi T_2 che abbiamo già osservato negli spazi metrizzabili.

8.3 PROPOSIZIONE *In uno spazio di Hausdorff X ogni punto è un sottoinsieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $u \in X$. Per ogni $v \in X$, $v \neq u$, esistono aperti U, V tali che $u \in U$, $v \in V$ ed $U \cap V = \emptyset$; in particolare $v \in V \subset X \setminus \{u\}$. Dunque $X \setminus \{u\}$ è un intorno di v, e quindi è aperto, cioè u è chiuso. ■

Uno spazio topologico i cui punti sono sottoinsiemi chiusi si dice *spazio* T_1. La proposizione 8.3 afferma che ogni spazio di Hausdorff è anche uno spazio T_1. Il viceversa non è vero, cioè ci sono spazi T_1 che non sono T_2. Un esempio è dato dalla topologia cofinita in un insieme infinito. Uno spazio banale con almeno due punti è un esempio di spazio topologico che non è uno spazio T_1.

8.4 PROPOSIZIONE *Uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se e solo se per ogni coppia di punti distinti u, $v \in X$ esistono aperti U, V tali che $u \in U$, $v \notin U$, e $v \in V$, $u \notin V$.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia uno spazio T_1. Presi u, $v \in X$ distinti, i sottoinsiemi $U = X \setminus \{v\}$, $V = X \setminus \{u\}$ sono aperti e soddisfano le condizioni richieste.

Supponiamo viceversa che X soddisfi le condizioni dell'enunciato, e sia $u \in X$ un punto qualsiasi. Per ogni $v \in X \setminus \{u\}$ esiste per ipotesi un aperto V tale che $u \notin V$, $v \in V$; quindi $v \in V \subset X \setminus \{u\}$, cioè $X \setminus \{u\}$ è un intorno di v. Poiché ciò è vero per ogni $v \in X \setminus \{u\}$, $X \setminus \{u\}$ è aperto, cioè $\{u\}$ è chiuso. ■

Le proprietà delle successioni in uno spazio T_1 o in uno spazio di Hausdorff sono simili a quelle delle successioni negli spazi metrizzabili.

8.5 PROPOSIZIONE *Se una successione in uno spazio di Hausdorff X converge, il suo limite è unico.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ una successione in X, e supponiamo per assurdo che x, $x' \in X$ siano distinti e tali che

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = x'. \qquad [8.1]$$

Poiché X è di Hausdorff esistono U, $V \subset X$ aperti tali che $x \in U$, $x' \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Per la prima delle [8.1] esiste $N > 0$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq N$. D'altra parte la seconda delle [8.1] implica l'esistenza di $N' > 0$ tale che $x_n \in V$ per ogni $n \geq N'$, e questa è una contraddizione. ∎

La proposizione 8.5 si applica in particolare agli spazi metrizzabili, ma non è vera per gli spazi T_1. Infatti se ad esempio X è uno spazio infinito con la topologia cofinita, allora X è T_1 ed ogni sua successione costituita da infiniti punti converge a ogni punto dello spazio.

Una proprietà abbastanza sottile riguarda i punti di accumulazione di una successione (cfr. esempio 3.5(1)). Il seguente risultato è utile in molti casi.

8.6 PROPOSIZIONE *Sia $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ una successione in uno spazio T_1 soddisfacente il primo assioma di numerabilità, e sia $x \in X$ un punto di accumulazione di $\{x_n\}$. Allora $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente ad x.*

Dimostrazione. Poiché X è T_1 ogni sottoinsieme finito di $\{x_n\}$ è discreto e quindi x è punto di accumulazione di $\{x_n : n > N\}$ per ogni $N \geq 0$. Sia $\{U_k\}_{k\geq 1}$ un sistema fondamentale di intorni di x tale che $U_{k+1} \subset U_k$ per ogni $k \geq 1$. Poiché $x \in D(\{x_n\})$ esiste $n_1 > 0$ tale che $x_{n_1} \in U_1$. Poiché $x \in D(\{x_n : n > n_1\})$ esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in U_2$. Procedendo induttivamente possiamo trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k} : k = 1, 2, \dots\}$ tale che $x_{n_k} \in U_k$ per ogni $k \geq 1$. È chiaro che $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. ∎

La proposizione precedente si applica agli spazi metrizzabili e agli spazi T_1 a base numerabile.

Uno *spazio regolare* è uno spazio topologico X che soddisfa le seguenti condizioni:

(R_1) *X è uno spazio T_1.*

(R_2) *Per ogni sottoinsieme chiuso F in X e ogni $x \in X \backslash F$ esistono aperti U, V tali che $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

8.7 PROPOSIZIONE *Ogni spazio regolare è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio regolare e u, $v \in X$ due punti distinti. Poiché X è uno spazio T_1, $\{v\}$ è un insieme chiuso. Prendendo $F = \{v\}$, $x = u$, la proprietà (R_2) assicura l'esistenza di aperti disgiunti U, V tali che $u \in U$, $v \in V$ e quindi X è di Hausdorff. ■

Uno *spazio normale* è uno spazio topologico X che soddisfa alle seguenti condizioni:

(N_1) *X è uno spazio T_1;*

(N_2) *per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi e disgiunti F_1, F_2 di X esistono aperti U_1, U_2 tali che $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

8.8 PROPOSIZIONE *Ogni spazio normale è regolare, e quindi di Hausdorff.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Esistono spazi regolari che non sono normali e spazi di Hausdorff che non sono regolari (cfr. esempi 8.11(1), (3)). Ogni spazio discreto è normale. Un'importante classe di spazi normali è costituita dagli spazi metrizzabili.

8.9 TEOREMA *Ogni spazio metrizzabile X è normale.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che X è uno spazio di Hausdorff e quindi è uno spazio T_1.

Sia $d : X \times X \to \mathsf{R}$ la distanza che induce la topologia di X. Per ogni sottoinsieme non vuoto $F \subset X$, definiamo una funzione

$$d_F : X \to \mathsf{R}$$

ponendo

$$d_F(x) = \inf_{y \in F} \{d(x,y)\}.$$

Per verificare la proprietà (N_2) consideriamo due sottoinsiemi chiusi e disgiunti F_1, F_2 di X, che possiamo supporre entrambi non vuoti (la condizione (N_2) è verificata banalmente se almeno uno dei due insiemi F_1 ed F_2 è vuoto). Consideriamo i sottoinsiemi

$$U_1 = \{x \in X : d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) < 0\},$$

$$U_2 = \{x \in X : d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) > 0\}.$$

Chiaramente $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Sia $x \in F_1$. Allora $d_{F_1}(x) = 0$. D'altra parte $x \notin F_2$ e quindi, poiché F_2 è chiuso, esiste $r > 0$ tale che $d(x,y) > r$ per ogni $y \in F_2$; ne segue che $d_{F_2}(x) > 0$, e quindi che

$$d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) = -d_{F_2}(x) < 0,$$

cioè $x \in U_1$. Quindi $F_1 \subset U_1$. In modo simile si dimostra che $F_2 \subset U_2$.

Facciamo vedere che U_1 è un insieme aperto. Sia $x_1 \in U_1$ e poniamo

$$r = d_{F_2}(x_1) - d_{F_1}(x_1).$$

Si ha $r > 0$; faremo vedere che $D_{r/3}(x_1) \subset U_1$, e questo proverà che U_1 è aperto. Sia dunque $x \in D_{r/3}(x_1)$; dobbiamo far vedere che

$$d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) < 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} &d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) = \\ &= [d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1)] + [d_{F_1}(x_1) - d_{F_2}(x_1)] + [d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x)] = \qquad [8.2] \\ &= [d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1)] - r + [d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x)]. \end{aligned}$$

Inoltre per ogni $y \in F_1$ si ha

$$d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(x_1,y) < r/3 + d(x_1,y)$$

e quindi

$$d_{F_1}(x) = \inf_{y \in F_1} \{d(x,y)\} \leq r/3 + \inf_{y \in F_1} \{d(x_1,y)\} = r/3 + d_{F_1}(x_1),$$

cioè

$$d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1) \leq r/3.$$

Analogamente si trova che per ogni $y \in F_2$

$$d(x_1,y) \leq d(x_1,x) + d(x,y) < r/3 + d(x,y)$$

e quindi che

$$d_{F_2}(x_1) = \inf_{y \in F_2} \{d(x_1,y)\} \leq r/3 + \inf_{y \in F_2} \{d(x,y)\} = r/3 + d_{F_2}(x)$$

cioè

$$d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x) \leq r/3.$$

Sostituendo nelle [8.2] si trova

$$d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) \leq r/3 - r + r/3 < 0$$

e l'asserto è dimostrato. In modo simile si dimostra che U_2 è aperto. ■

Le proprietà di separazione che uno spazio X può avere sono collegate all'esistenza di applicazioni continue su X a valori reali.

Ad esempio su uno spazio topologico banale (che non soddisfa alcuna delle proprietà di separazione considerate sopra) le uniche funzioni continue a valori reali sono le costanti.

D'altra parte, se uno spazio X ha la proprietà che per ogni coppia di punti distinti $u, v \in X$ esiste una funzione continua $f : X \to \mathsf{R}$ tale che $f(u) \neq f(v)$ (cioè una funzione continua che "separa u da v") allora X è uno spazio di Hausdorff: infatti, ponendo $r = d(f(u), f(v))$ e

$$U = f^{-1}((f(u) - r/2,\ f(u) + r/2)),$$

$$V = f^{-1}((f(v) - r/2,\ f(v) + r/2)),$$

U e V sono aperti disgiunti e $u \in U$, $v \in V$.

Ci si può aspettare che gli spazi normali, soddisfacendo alla proprietà di separazione più forte, possiedano funzioni continue a valori reali con proprietà molto forti. Ciò è quanto afferma il seguente

8.10 TEOREMA (Lemma di Urysohn) *Siano A_0 e A_1 due sottoinsiemi chiusi non vuoti e disgiunti di uno spazio normale X. Esiste un'applicazione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } x \in A_0 \\ 1 & \text{per ogni } x \in A_1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Denotiamo con D l'insieme dei numeri razionali diadici non negativi, cioè dei numeri razionali della forma $a/2^q$, dove a e q sono interi non negativi.

Cominciamo col costruire una famiglia

$$\mathcal{F} = \{U_t : t \in D\}$$

di insiemi aperti di X tale che per ogni $s, t \in D$, $s < t$, si abbia

$$\overline{U}_s \subset U_t.$$

Prendiamo

$$U_t = X \quad \text{per ogni } t > 1,\ t \in D,$$

$$U_1 = X \backslash A_1.$$

Per la normalità di X esistono aperti M e N tali che $A_0 \subset M$, $A_1 \subset N$, $M \cap N = \emptyset$. Prendiamo

$$U_0 = M.$$

Si ha

$$\overline{U}_0 \subset X \setminus N \subset X \setminus A_1 = U_1.$$

Sia ora $t \in D$ tale che $0 < t < 1$. Possiamo scrivere in modo unico $t = (2m+1)/2^n$ per qualche m, $n > 0$. Costruiremo U_t per induzione su n. Poniamo

$$\alpha = 2m/2^n = m/2^{n-1}$$

$$\beta = (2m+2)/2^n = (m+1)/2^{n-1}.$$

Se $n = 1$, allora $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $U_\alpha = U_0$, $U_\beta = U_1$ sono già stati costruiti in modo che $\overline{U}_\alpha \subset U_\beta$.

Se $n \geq 2$, allora $\alpha < t < \beta$ e per l'ipotesi induttiva possiamo supporre di aver costruito insiemi aperti U_α e U_β tali che $\overline{U}_\alpha \subset U_\beta$. Allora $\overline{U}_\alpha$ e $X \setminus U_\beta$ sono due insiemi chiusi e disgiunti; per la normalità di X esistono due sottoinsiemi aperti V, W tali che

$$\overline{U}_\alpha \subset V, \;\; X \setminus U_\beta \subset W, \;\; W \cap V = \emptyset.$$

Prendiamo $U_t = V$. Si ha

$$\overline{U}_\alpha \subset U_t, \;\; \overline{U}_t \subset X \setminus W \subset U_\beta.$$

È chiaro che se $t' = (2h+1)/2^n$, $t < t'$, allora U_t e $U_{t'}$ costruiti in questo modo soddisfano $\overline{U}_t \subset U_{t'}$, perché si ha $m < h$ e quindi

$$\overline{U}_\alpha \subset U_t \subset \overline{U}_t \subset U_\beta \subset \overline{U}_\beta \subset \overline{U}_\gamma \subset U_{t'} \subset \overline{U}_{t'} \subset U_\delta,$$

dove $\gamma = h/2^{n-1}$, $\delta = (h+1)/2^{n-1}$. Da ciò segue che la famiglia $\mathcal{F}$ costruita induttivamente ha le proprietà volute.

Definiamo ora l'applicazione $f : X \to [0,1]$ ponendo

$$f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Si noti che la famiglia $\mathcal{F}$ ricopre X; quindi per ogni $x \in X$ l'insieme $\{t \in D : x \in U_t\}$ non è vuoto e il suo estremo inferiore è ben definito. Inoltre da come è stata costruita la famiglia $\mathcal{F}$ segue subito che $f(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in X$, e che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A_0 \\ 1 & \text{se } x \in A_1. \end{cases}$$

Ci resta da verificare che f è continua. A questo scopo sarà sufficiente verificare che per ogni numero reale a tale che $0 < a < 1$ gli insiemi $f^{-1}([0,a))$ e $f^{-1}((a,1])$ sono aperti in X (perché gli intervalli della forma $[0,a)$ ed $(a,1]$ formano una sottobase della topologia di $[0,1]$).

Consideriamo l'insieme

$$f^{-1}([0,a)) = \{x \in X : f(x) < a\}.$$

Per definizione di estremo inferiore quest'insieme consiste degli $x \in X$ tali che $x \in U_t$ per qualche $t < a$. Quindi

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{\substack{t\in D \\ t<a}} U_t$$

è un insieme aperto.

Per dimostrare che l'insieme

$$f^{-1}((a,1]) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

è aperto sarà sufficiente dimostrare che

$$X \backslash f^{-1}((a,1]) = f^{-1}([0,a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

è un insieme chiuso.

Perché si abbia $f(x) \leq a$ deve essere $x \in U_t$ per ogni $t > a$, $t \in D$. Quindi

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} U_t.$$

Faremo vedere che quest'insieme è chiuso mostrando che

$$\bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} U_t = \bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} \overline{U}_t.$$

Ovviamente si ha

$$\bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} U_t \subset \bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} \overline{U}_t.$$

D'altra parte per ogni $t > a$, $t \in D$, esiste $s \in D$ tale che $a < s < t$ perché D è denso in R^+; quindi $\overline{U}_s \subset U_t$. Ne segue che

$$\bigcap_{\substack{s\in D \\ s>a}} \overline{U}_s \subset \bigcap_{\substack{t\in D \\ t>a}} U_t. \blacksquare$$

Si noti che, viceversa, se X è uno spazio topologico tale che per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi non vuoti disgiunti A_0 e A_1 esiste un'applicazione continua $f : X \to [0,1]$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A_0 \\ 1 & \text{se } x \in A_1, \end{cases}$$

allora X è uno spazio che soddisfa (N_2).

Infatti

$$U_0 = f^{-1}([0,1/2)),\quad U_1 = f^{-1}((1/2,1])$$

sono due aperti disgiunti di X tali che $A_0 \subset U_0$, $A_1 \subset U_1$.

8.11 *Esempi*

1. *Spazio di Hausdorff non regolare.*

Sia $X = [0,1] \subset \mathsf{R}$ e S il sottoinsieme $\{1/n : n = 1,2,3,\ldots\}$. Sia $\mathcal{T}$ la topologia meno fine contenente ogni sottoinsieme aperto di $X\backslash\{0\}$ nella topologia di sottospazio di R, e contenente inoltre ogni insieme B_r, $0 < r \leq 1$, definito da

$$B_r = \{x \in X : x < r,\ x \notin S\}.$$

Con la topologia $\mathcal{T}$ così definita X è uno spazio di Hausdorff, ma non è regolare.

Dimostriamo che X è di Hausdorff. Siano u, $v \in X$ distinti, e supponiamo $u < v$. Se $0 \neq u$, sia $\varepsilon = v - u$; $U = (0, u + \varepsilon/2)$, $V = (u + \varepsilon/2, 1]$ sono due aperti di X tali che $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Se $u = 0$, sia $0 < r < v$, e prendiamo $U = B_r$, $V = (v - r, 1]$. U e V sono aperti in X; inoltre $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Quindi X è uno spazio di Hausdorff.

S è un sottoinsieme chiuso di X perché $S = X\backslash B_1$; inoltre $0 \notin S$. Facciamo vedere che non esistono aperti U, V in X tali che $0 \in U$, $S \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Ogni aperto U contenente 0 deve contenere B_r per qualche $0 < r \leq 1$; d'altra parte ogni aperto V contenente S ma non 0 è un aperto di $X\backslash\{0\}$ nella topologia euclidea; ma un V siffatto interseca ogni B_r, $0 < r \leq 1$, quindi la condizione $U \cap V = \emptyset$ non può essere verificata.

Questo dimostra che X non è regolare, perché non soddisfa la condizione (R_2) (si noti che X è T_1 perché è di Hausdorff).

2. Un criterio utile per costruire esempi di spazi non normali è il seguente

LEMMA *Se uno spazio topologico separabile X contiene un sottoinsieme chiuso discreto non numerabile S, X non è normale.*

Dimostrazione. Sia $D \subset X$ un sottoinsieme numerabile e denso (X è separabile) e supponiamo per assurdo che X sia normale. Poiché S è discreto e chiuso in X, ogni sottoinsieme di S è chiuso in X. Quindi per ogni sottoinsieme proprio $A \subsetneq S$ esistono aperti $U(A)$ e $U(S\backslash A)$ in X tali che $A \subset U(A)$, $S\backslash A \subset U(S\backslash A)$, $U(A) \cap U(S\backslash A) = \emptyset$. Poiché D è denso, si ha:

$$U(A) \cap D \neq \emptyset \quad \text{per ogni sottoinsieme non vuoto } A \subsetneq S. \qquad [8.3]$$

Inoltre, se A, $B \subsetneq S$ sono due sottoinsiemi non vuoti ed $A \neq B$, si ha

$$U(A) \cap D \neq U(B) \cap D. \tag{8.4}$$

Infatti, se $A \setminus B \neq \emptyset$, si ha

$$U(B) \cap U(S \setminus B) \cap D = \emptyset$$

mentre

$$U(A) \cap U(S \setminus B) \cap D \neq \emptyset$$

perché $U(A) \cap U(S \setminus B)$ è un intorno aperto di $A \setminus B$ e in particolare non è vuoto; ne consegue che $U(A) \cap D$ e $U(B) \cap D$ sono distinti. Se invece $B \setminus A \neq \emptyset$ si ragiona nello stesso modo.

Dalle [8.3] e [8.4] segue che l'applicazione

$$\mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$$

definita da

$$A \mapsto U(A) \cap D, \quad \text{se } A \subsetneq S,\ A \neq \emptyset,$$
$$S \mapsto D$$
$$\emptyset \mapsto \emptyset$$

è iniettiva. Ciò è assurdo perché $\mathcal{P}(S)$ ha cardinalità maggiore di quella di $\mathcal{P}(D)$. ■

3. Applichiamo il lemma dell'esempio 2 per dare un esempio di *spazio regolare che non è normale*.

Sia S una retta di $\mathbb{R}^2$ e X uno dei due semipiani chiusi individuati da S. Sia $\mathcal{D}$ la famiglia dei dischi aperti di $\mathbb{R}^2$ contenuti in X e $\mathcal{H}$ la famiglia così definita:

$$\mathcal{H} = \{D \cup P : P \in S,\ D \in \mathcal{D},\ D \text{ tangente a } S \text{ in } P\}.$$

È immediato verificare che la famiglia $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ soddisfa le condizioni della proposizione 2.2 ed è quindi base di una topologia $\mathcal{T}$ su X. Si noti che S è chiuso in $(X, \mathcal{T})$ e che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su $X \setminus S$ è la topologia euclidea, mentre quella indotta su S è la topologia discreta. Inoltre $(X, \mathcal{T})$ è separabile perché $\mathbb{Q}^2 \cap X$ è un sottoinsieme denso. Dal lemma dell'esempio 2 segue che $(X, \mathcal{T})$ non è uno spazio normale.

Ma $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio regolare. Infatti $\mathcal{T}$ è una topologia che soddisfa l'assioma T_1, perché più fine della topologia euclidea (esercizio 8). Inoltre siano F un sottoinsieme chiuso di X e $p \in X \backslash F$. Se $p \notin S$, sia $r > 0$ tale che $D_r(p)$ non intersechi S né il chiuso $(X \backslash S) \cap F$ di $X \backslash S$. Allora $D_r(p) \cap F = \emptyset$ e quindi

$$A = D_{r/2}(p) \quad \text{e} \quad B = X \backslash \overline{D_{r/2}(p)}$$

sono aperti disgiunti tali che $p \in A$, $F \subset B$.

Supponiamo invece $p \in S$. Poiché F è chiuso esiste un aperto $D \cup P$ in $\mathcal{H}$ tale che $(D \cup P) \cap F = \emptyset$. Si scelga allora $D_1 \cup P \in \mathcal{H}$ con $D_1 \subsetneqq D$. Si ha subito che

$$A = D_1 \cup P \text{ e } B = X \backslash \overline{D_1 \cup P}$$

sono due aperti disgiunti, $p \in A$, $F \subset B$.

4. Abbiamo visto (proposizione 8.2) che il prodotto topologico di una famiglia di spazi di Hausdorff è ancora di Hausdorff. Di un'analoga proprietà godono gli spazi T_1 e gli spazi regolari (cfr. esercizi 15 e 16). Ma la proposizione 8.2 non si estende agli spazi normali. Un esempio è dato dal prodotto topologico di (R, j_d) per se stesso. Infatti (R, j_d) è normale (esercizio 12), ma R^2 con la topologia prodotto J_d non è normale.

Per vederlo osserviamo che una base $\mathcal{B}$ di J_d è costituita dai rettangoli della forma $[a, b) \times [c, d)$, $a < b$, $c < d$.

Da ciò segue che Q^2 è denso in R^2 rispetto a J_d, e quindi (R^2, J_d) è uno spazio separabile.

Sia S la retta di equazione $x+y = 0$ (ma le stesse considerazioni si applicano ad ogni retta di coefficiente angolare < 0). Per ogni $P = (a, -a) \in S$ esiste un aperto $A \in \mathcal{B}$ tale che $A \cap S = \{P\}$; basta prendere ad esempio $A = [a, a+1) \times [-a, -a+1)$ (vedi fig. 8.1). Questo significa che S è un sottoinsieme discreto di (R^2, J_d). Poiché

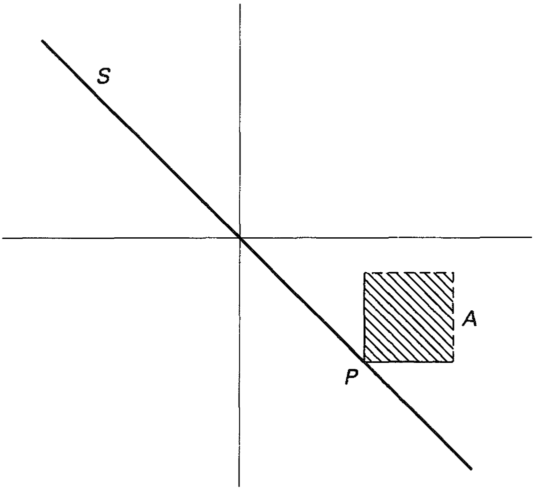


Figura 8.1

evidentemente S è anche chiuso, applicando il lemma dell'esempio 2 si vede che (R^2, J_d) non è normale.

Si noti che lo spazio (R, j_d) è normale ma non metrizzabile (cfr. esempio 3.8(2)). Se X è uno spazio normale metrizzabile, $X \times X$ è normale perché metrizzabile (cfr. esercizio 6.9).

5. È evidente che *ogni sottospazio di uno spazio* T_1 *è uno spazio* T_1. L'analoga proprietà è stata dimostrata per gli spazi T_2 (proposizione 8.1).

È anche vero che *ogni sottospazio* Y *di uno spazio regolare* X *è regolare*.

Sia infatti F un sottoinsieme chiuso di Y e $y \in Y \setminus F$; sia F' un chiuso di X tale che $F = F' \cap Y$. Poiché X è regolare e $y \notin F'$ esistono aperti U', V' in X tali che $y \in U'$, $F' \subset V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$. Allora $U = U' \cap Y$ e $V = V' \cap Y$ sono aperti di Y e $y \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Quindi Y soddisfa la condizione (R_2); poiché inoltre Y è sottospazio di uno spazio T_1 è anche uno spazio T_1 e quindi è regolare.

In modo simile è facile dimostrare che *ogni sottospazio chiuso* Y *di uno spazio normale* X *è normale* (esercizio 17). Ciò non è più vero se si toglie la condizione che Y sia chiuso: esistono esempi di sottospazi (non chiusi) di spazi normali che non sono normali.

6. Una *varietà topologica di dimensione* n (intero ≥ 1) è uno spazio topologico di Hausdorff X che soddisfa il secondo assioma di numerabilità e tale che ogni $x \in X$ possieda un intorno aperto U_x omeomorfo a un aperto di R^n.

Un omeomorfismo φ_U di un aperto U di X su un aperto di R^n si chiama *carta* (o *carta locale*). Una famiglia $\{\varphi_{U_i}\}$ di carte tale che $\{U_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento aperto di X si dice *atlante*. È evidente che per dimostrare che uno spazio di Hausdorff X è una varietà topologica è sufficiente trovare un atlante.

Ogni aperto di R^n, in particolare R^n stesso, $n \geq 1$, è un esempio di varietà topologica di dimensione n.

Per ogni $n \geq 1$, $\mathbf{S}^n$ è una varietà topologica di dimensione n. Infatti $\mathbf{S}^n$ è evidentemente uno spazio di Hausdorff a base numerabile; un atlante costituito da due sole carte si può ottenere in più modi considerando le proiezioni stereografiche di centro due punti distinti.

Il prodotto $X \times Y$ di due varietà topologiche X e Y di dimensioni n e m rispettivamente, è una varietà topologica di dimensione $n + m$ (esercizio). In particolare per ogni $n \geq 2$ l'n-toro T^n è una varietà topologica di dimensione n.

Lo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$, $n \geq 1$, è una varietà topologica di dimensione n (cfr. esercizio 18 ed esempio 7.6(11)).

Nella definizione di varietà topologica la condizione di essere spazio topologico di Hausdorff non è ridondante. In altre parole esistono spazi topologici non di Hausdorff tali che ogni loro punto possieda un intorno aperto omeomorfo a un aperto di R^n per qualche $n \geq 1$ (indipendente dal punto). Un esempio è il seguente.

Sia $X = (-1,2] \subset \mathsf{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ così definita: $U \in \mathcal{T}$ se e solo se $U = \emptyset$, X, oppure se è unione di insiemi della forma

$$\begin{aligned} (a,b), &\quad -1 \leq a < b \leq 2, \\ (a,0) \cup (b,2], &\quad -1 \leq a < 0,\ 0 \leq b < 2. \end{aligned}$$

È facile verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia e che $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia indotta da R (gli insiemi $(b,2]$ non sono aperti in $\mathcal{T}$).

X non è di Hausdorff perché ogni intorno di 2 interseca ogni intorno di 0. D'altra parte ogni punto $x \in X$ ha un intorno omeomorfo a un aperto di R. Ciò è evidente se $x \neq 2$. Se $x = 2$, allora

$$U = (-1/2, 0) \cup (3/2, 2]$$

è un intorno di 2; è facile verificare che l'applicazione

$$f : U \to (-1,1)$$

definita da

$$f(u) = \begin{cases} 2u & \text{se } -1/2 < u < 0 \\ 4 - 2u & \text{se } 3/2 < u \leq 2 \end{cases}$$

è biunivoca, continua, con inversa $g : (-1,1) \to U$ continua definita da

$$g(t) = \begin{cases} t/2 & \text{se } -1 < t < 0 \\ 2 - t/2 & \text{se } 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Esercizi

1. Dimostrare che l'essere T_1 (rispettivamente T_2, regolare, normale) è una proprietà topologica per uno spazio X.

2. Dimostrare che un insieme infinito con la topologia cofinita non è metrizzabile.

3. Dimostrare che uno spazio banale con almeno due punti non è metrizzabile.

4. Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x consiste del solo punto x.

5. Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

è chiusa in $X \times X$.

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di insiemi; il *grafico di f* è

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Dimostrare che se X e Y sono spazi topologici, Y di Hausdorff, e f è continua, il grafico Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

7. Siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue, con Y di Hausdorff. Dimostrare che se esiste un sottoinsieme denso $D \subset X$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$, allora $f = g$.

8. Dimostrare che se $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ sono due topologie sull'insieme non vuoto X e $\mathcal{T}$ è T_1 (risp. T_2) allora $\mathcal{U}$ è T_1 (risp. T_2).

9. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio T_1 se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

10. Sia X uno spazio normale e S un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente ottenuto da X identificando S a un punto è normale.

11. Sia E un sottoinsieme di uno spazio T_1 e p un suo punto di accumulazione. Dimostrare che ogni intorno di p contiene infiniti punti di E.

12. Dimostrare che (R, j_d) (risp. (R, j_s)) è uno spazio normale.

13. Dimostrare che uno spazio T_1 X è regolare se e solo se per ogni $p \in X$ e ogni aperto U contenente p esiste un aperto V tale che

$$p \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

14. Dimostrare che uno spazio T_1 X è normale se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso $F \subset X$ e ogni aperto U contenente F esiste un aperto V tale che

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

15. Dimostrare che il prodotto topologico di una famiglia di spazi T_1 è uno spazio T_1.

16. Dimostrare che il prodotto topologico di una famiglia di spazi regolari è regolare.

17. Dimostrare che ogni sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale.

18. Dimostrare che lo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ è uno spazio di Hausdorff. (*Suggerimento.* Si usi la rappresentazione di $\mathbf{P}^n$ come quoziente di $\mathbf{S}^n$).

9 Compattezza

Uno *spazio topologico* si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento costituito da insiemi aperti (brevemente, se ogni *ricoprimento aperto*) possiede un sottoricoprimento finito, cioè possiede una sottofamiglia costituita da un numero finito di insiemi che è ancora un ricoprimento dello spazio.

Un *sottoinsieme* K di uno spazio topologico X si dice *compatto* se con la topologia relativa K è uno spazio compatto; equivalentemente K si dice compatto se ogni ricoprimento di K con insiemi aperti di X possiede un sottoricoprimento finito.

Ogni spazio banale è compatto, come è anche compatto ogni spazio finito ed ogni spazio con la topologia cofinita.

Se X è uno spazio discreto, la famiglia $\{x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X tale che ogni sua sottofamiglia non è un ricoprimento (cioè $\{x\}_{x \in X}$ non possiede sottoricoprimenti propri); quindi se è infinito e discreto X non è compatto.

R non è compatto, perché ad esempio il ricoprimento aperto $\{(-n,n)\}_{n\geq 1}$ non possiede un sottoricoprimento finito.

Ogni intervallo aperto (a,b) di R non è compatto. Infatti la famiglia di intervalli aperti $\mathcal{U} = \left\{(a+\varepsilon, b-\varepsilon) : 0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}\right\}$ costituisce un ricoprimento di (a,b); ma ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ ha come unione un intervallo ancora appartenente ad $\mathcal{U}$, e quindi diverso da (a,b). Abbiamo il seguente risultato classico:

9.1 Teorema (di Heine-Borel) *Ogni intervallo chiuso e limitato* $[a,b] \subset \mathsf{R}$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di $[a,b]$ con aperti di R. Consideriamo il sottoinsieme

$$X = \{x \in [a,b] : [a,x] \text{ è ricoperto da un numero finito di aperti di } \mathcal{U}\}.$$

È sufficiente far vedere che $X = [a,b]$. Innanzitutto $X \neq \emptyset$: infatti $a \in U$ per qualche $U \in \mathcal{U}$, e quindi $a \in X$. È anche evidente che X è un intervallo contenuto in $[a,b]$.

X è aperto in $[a,b]$. Se infatti $x \in X$ e $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ sono tali che $[a,x] \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$, allora, poiché $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ è aperto, esiste $r > 0$ tale che:

$$[a,b] \cap (x-r, x+r) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

e quindi anche $[a,b] \cap (x-r,x+r) \subset X$.

Sia $z = \sup X$. Poiché $X \subset [a,b]$ e $[a,b]$ è chiuso e limitato, $z \in [a,b]$ e quindi esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $z \in V$. Sia $s > 0$ tale che $(z-s,z] \subset V \cap [a,b]$. Allora $z-s \in X$ e quindi esistono $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{U}$ tali che $[a,z-s] \subset V_1 \cup \ldots \cup V_m$. Ma allora

$$[a,z] \subset V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup V$$

e quindi $z \in X$; pertanto X è anche chiuso in $[a,b]$. Ma l'unico intervallo simultaneamente aperto e chiuso in $[a,b]$ è $[a,b]$ stesso; dunque $X = [a,b]$. ■

Non tutti i sottospazi di uno spazio compatto sono compatti. Ad esempio un intervallo aperto e limitato (a,b) non è compatto, ma è un sottospazio di $[a,b]$, che è compatto. Abbiamo però il seguente risultato:

9.2 Proposizione

(a) *Ogni sottoinsieme chiuso* K *di uno spazio compatto* X *è compatto.*

(b) *Ogni sottoinsieme compatto* K *di uno spazio di Hausdorff* X *è chiuso.*

Dimostrazione

(a) Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di K con aperti di X. Poiché $X \backslash K$ è aperto la famiglia $\mathcal{U} \cup \{X\backslash K\}$ è un ricoprimento aperto di X. Ma X è compatto e quindi questo ricoprimento possiede un sottoricoprimento finito, cioè esistono $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tali che:

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \cup (X \backslash K) = X.$$

Segue che $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$, cioè $\{U_1, \dots, U_n\}$ è un sottoricoprimento finito di K e quindi K è compatto.

(b) Sia $p \in X \backslash K$. Poiché X è di Hausdorff per ogni $x \in K$ esistono aperti U_x e V_x tali che $x \in U_x$, $p \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$. La famiglia $\{U_x\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K e quindi, per la compattezza di K, possiede un sottoricoprimento finito. Quindi esistono $x_1, \dots, x_n \in K$ tali che $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. L'aperto $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ soddisfa

$$p \in V \subset X \backslash K$$

e quindi p è esterno a K. Poiché p è arbitrario in $X \backslash K$ segue che K è chiuso. ∎

Si noti che ogni sottoinsieme proprio non vuoto di uno spazio banale è compatto ma non è chiuso: quindi nella proposizione 9.2(b) l'ipotesi che X sia di Hausdorff è necessaria.

Come conseguenza della proposizione 9.2 abbiamo la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di R.

9.3 COROLLARIO *Un sottoinsieme K di R è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che K sia chiuso e limitato. Poiché è limitato, K è contenuto in un intervallo chiuso e limitato $\mathbf{J}$. Poiché è chiuso in R, K è chiuso in $\mathbf{J}$. Ma allora K è compatto per la proposizione 9.2(a) e per la compattezza di $\mathbf{J}$.

Supponiamo che K sia compatto. Poiché R è di Hausdorff K è chiuso per la proposizione 9.2(b). Inoltre K deve essere limitato. Se non lo fosse $\{(-n, n)\}_{n \geq 1}$ sarebbe un ricoprimento di K che non possiede un sottoricoprimento finito: infatti, per ogni sottofamiglia finita

$$\{(-n_1, n_1), \dots, (-n_k, n_k)\},$$

si ha

$$(-n_1, n_1) \cup \dots \cup (-n_k, n_k) = (-n, n)$$

dove $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, che è un intervallo limitato e quindi non contiene K. ∎

Abbiamo la seguente importante:

9.4 PROPOSIZIONE

(a) *Ogni sottoinsieme infinito Z di uno spazio compatto X possiede un punto di accumulazione in X.*

(b) *Ogni successione di punti di uno spazio compatto T_1 che soddisfa il primo assioma di numerabilità possiede una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione

(a) Supponiamo per assurdo che Z non possieda punti di accumulazione: allora Z è chiuso in X e quindi compatto. Inoltre la topologia relativa su Z è la topologia discreta: quindi Z è uno spazio topologico discreto infinito e pertanto non è compatto. Abbiamo una contraddizione.

(b) Se infiniti termini della successione coincidono essi formano una sottosuccessione convergente. Se la successione contiene infiniti punti distinti essa, per la prima parte della dimostrazione, possiede un punto di accumulazione ed in questo caso la conclusione segue dalla proposizione 8.6. ■

Una conseguenza importante della proposizione 9.4 è il seguente risultato classico:

9.5 TEOREMA (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di numeri reali possiede una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Poiché $\{x_n\}$ è una successione limitata, esiste un $N > 0$ tale che $\{x_n\} \subset [-N, N]$. Ma $[-N, N]$ è compatto, e quindi per la proposizione 9.4(b) $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente. ■

È possibile caratterizzare la compattezza mediante una proprietà delle famiglie di insiemi chiusi. Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di un insieme X si dice avere la *proprietà dell'intersezione finita* se ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota.

9.6 PROPOSIZIONE *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico X sia compatto è che ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi chiusi di X che ha la proprietà dell'intersezione finita abbia intersezione non vuota.*

Dimostrazione

Necessità. Supponiamo X compatto e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi di X: è sufficiente dimostrare che, se $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$, allora $\mathcal{F}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Consideriamo la famiglia di insiemi aperti di X:

$$\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}.$$

Poiché

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus F = X \setminus \left[\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \right] = X,$$

$\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X esistono

$$U_1 = X \setminus F_1, \ldots, U_n = X \setminus F_n \in \mathcal{U}$$

tali che

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n = (X \setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n) = X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n).$$

Da queste uguaglianze segue che $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$, e quindi $\mathcal{F}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita.

Sufficienza. Supponiamo soddisfatta la condizione dell'enunciato e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$$

di sottoinsiemi chiusi di X. Poiché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X la famiglia $\mathcal{F}$ ha intersezione vuota: infatti

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = X \setminus \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right) = \emptyset.$$

Quindi la famiglia $\mathcal{F}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Segue che esiste una sottofamiglia finita:

$$\{F_1 = X \setminus U_1, \ldots, F_n = X \setminus U_n\} \subset \mathcal{F}$$

la cui intersezione è vuota, cioè tale che

$$\emptyset = (X \setminus U_1) \cap \ldots \cap (X \setminus U_n) = X \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_n).$$

Da quest'uguaglianza segue che $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ e quindi $\mathcal{U}$ possiede un sottoricoprimento finito. ■

Un'altra importante proprietà della compattezza è il suo comportamento rispetto alle applicazioni continue.

9.7 PROPOSIZIONE *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è compatto, $f(X)$ è compatto in Y.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. La famiglia di sottoinsiemi di X

$$\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X esistono $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tali che $X = f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Si ha quindi

$$f(X) = f(f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

cioè $\{U_1, \ldots, U_n\}$ è un ricoprimento di $f(X)$. Quindi $f(X)$ è compatto. ■

9.8 COROLLARIO *Sia X uno spazio topologico e $f : X \to \mathsf{R}$ un'applicazione continua. Se X è compatto f assume un valore massimo ed un valore minimo su X.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 9.7 segue che $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di R, e quindi è chiuso e limitato. Ne segue che $f(X)$ contiene il suo estremo superiore ed il suo estremo inferiore. ■

9.9 COROLLARIO

(a) *La compattezza è una proprietà topologica.*

(b) *Uno spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Il semplice risultato seguente viene utilizzato spesso.

9.10 PROPOSIZIONE *Sia X uno spazio compatto ed Y uno spazio di Hausdorff. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua allora f è chiusa. Se f è continua e biunivoca allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $C \subset X$ chiuso. Allora C è compatto per la proposizione 9.2(a), e quindi $f(C)$ è compatto. Dalla proposizione 9.2(b) segue che $f(C)$ è chiuso in Y; quindi f è un'applicazione chiusa. L'ultima asserzione segue dalla prima perché un'applicazione biunivoca, continua e chiusa è un omeomorfismo. ■

Dimostreremo ora un importante risultato che afferma che il prodotto di una famiglia di spazi compatti è uno spazio topologico compatto. La dimostrazione di questo fatto è molto più facile nel caso del prodotto di un numero finito di spazi che nel caso generale. Per completezza daremo le dimostrazioni separatamente nei due casi, anche se *la seconda dimostrazione è indipendente dalla prima.*

9.11 TEOREMA (di Tychonoff) *Il prodotto topologico di una famiglia di spazi compatti è compatto.*

Dimostrazione. Diamo per prima la dimostrazione nel caso del prodotto topologico $X \times Y$ di due spazi compatti X e Y. Sia $\{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$ e, per ogni $j \in J$, sia

$$U_j = \bigcup_{h \in h(j)} V_h \times W_h$$

per opportuni aperti $V_h \subset X$, $W_h \subset Y$. La famiglia

$$\mathcal{F} = \{V_h \times W_h : h \in H\}$$

dove $H = \bigcup_{j \in J} h(j)$, è un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Sia $x \in X$; $\{x\} \times Y$ è un sottospazio compatto di $X \times Y$ perché omeomorfo ad Y, e quindi esiste un sottoinsieme finito $h(x) \subset H$ tale che:

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{h \in h(x)} V_h \times W_h$$

e tale che ogni V_h contiene x. Per ogni $x \in X$ definiamo un intorno aperto $V(x)$ di x ponendo:

$$V(x) = \bigcap_{h \in h(x)} V_h.$$

La famiglia $\mathcal{V} = \{V(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto dello spazio compatto X, e quindi possiede un sottoricoprimento finito; pertanto esistono $x_1, \dots, x_s \in X$ tali che

$$X = V(x_1) \cup \dots \cup V(x_s).$$

La famiglia finita di aperti:

$$\{V(x_1) \times W_h : h \in h(x_1)\} \cup \dots \cup \{V(x_s) \times W_h : h \in h(x_s)\}$$

è un ricoprimento di $X \times Y$. Inoltre per ogni $i = 1, \dots, s$ ed ogni $h \in h(x_i)$ l'aperto $V(x_i) \times W_h$ è contenuto in $U_{j(i,h)}$ per qualche $j(i,h) \in J$. Ne deduciamo che la famiglia

$$\{U_{j(i,h)} : i = 1, \dots, s, h \in h(x_i)\}$$

è un sottoricoprimento finito di $\{U_j\}_{j \in J}$ e quindi $X \times Y$ è compatto.

Questa dimostrazione si generalizza facilmente al caso del prodotto di un numero finito qualunque di spazi compatti.

Dimostriamo il teorema nel caso generale.

Supponiamo che $\{X_\mu\}_{\mu\in M}$ sia una famiglia di spazi compatti e sia $X = \prod_{\mu\in M} X_\mu$. Consideriamo una famiglia qualsiasi $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X avente la proprietà dell'intersezione finita; dimostreremo che

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} \neq \emptyset \tag{9.1}$$

e da ciò seguirà la compattezza di X per la proposizione 9.6.

Per dimostrare la [9.1] consideriamo la classe $\mathcal{I}$ di tutte le famiglie di sottoinsiemi di X che hanno la proprietà dell'intersezione finita. La classe $\mathcal{I}$ è parzialmente ordinata rispetto all'inclusione; se Σ è una catena in $\mathcal{I}$ la famiglia $F_\Sigma = \bigcup_{F\in\Sigma} F$ appartiene a $\mathcal{I}$ ed è un estremo superiore per Σ. Dal lemma di Zorn segue che $\mathcal{I}$ possiede un elemento massimale. È evidente che per dimostrare la [9.1] non è restrittivo supporre che $\mathcal{B}$ sia proprio l'elemento massimale di $\mathcal{I}$. Da quest'ipotesi segue che:

(a) ogni sottoinsieme di X che sia l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$ appartiene a $\mathcal{B}$;

(b) se un sottoinsieme di X ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathcal{B}$ appartiene a $\mathcal{B}$.

Sia $\mu \in M$, $p_\mu : X \to X_\mu$ la proiezione e consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di X_μ

$$\mathcal{B}_\mu = \{p_\mu(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

La famiglia $\mathcal{B}_\mu$ ha la proprietà dell'intersezione finita e, poiché X_μ è compatto,

$$I_\mu := \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{p_\mu(B)} \neq \emptyset.$$

Scegliamo un punto $x_\mu \in I_\mu$ per ogni indice $\mu \in M$, e sia $x \in X$ il punto definito da

$$x(\mu) = x_\mu, \quad \mu \in M.$$

Dimostreremo che $x \in \overline{B}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$: da ciò seguirà la [9.1] e il teorema.

Scegliamo arbitrariamente $\mu \in M$ ed un aperto $U_\mu \subset X_\mu$ contenente x_μ. Poiché $x_\mu \in \overline{p_\mu(B)}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, si ha

$$U_\mu \cap p_\mu(B) \neq \emptyset \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{B}$$

e quindi

$$p_\mu^{-1}(U_\mu) \cap B \neq \emptyset \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{B}. \qquad [9.2]$$

Dalla (b) segue che $p_\mu^{-1}(U_\mu) \in \mathcal{B}$. Dalla (a) segue inoltre che ogni intersezione U^* di un numero finito di insiemi $p_\mu^{-1}(U_\mu)$ sta in $\mathcal{B}$. Poiché tutti questi insiemi contengono x, dalla definizione di topologia prodotto segue che gli aperti U^* costituiscono un sistema fondamentale di intorni di x; inoltre dalla [9.2] segue che ognuno degli U^* interseca ogni $B \in \mathcal{B}$. Di conseguenza ogni intorno di x interseca ogni $B \in \mathcal{B}$, cioè $x \in \overline{B}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. ■

9.12 COROLLARIO *Un qualsiasi prodotto topologico di intervalli chiusi e limitati di* R *è uno spazio compatto di Hausdorff.*

Dimostrazione. Il corollario è immediata conseguenza della proposizione 8.2 e del teorema di Tychonoff. ■

9.13 COROLLARIO *Un sottoinsieme* K *dello spazio euclideo* R^n *è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo K chiuso e limitato. Allora K è contenuto in un prodotto di intervalli chiusi e limitati $P = \mathbf{I}_1 \times \ldots \times \mathbf{I}_n$, che è compatto; essendo inoltre chiuso in R^n, e quindi in P, K è compatto. Supponiamo viceversa K compatto. K è chiuso perché R^n è di Hausdorff (proposizione 9.2(b)). Se K non fosse limitato la famiglia dei dischi aperti di centro l'origine sarebbe un ricoprimento di K che non possiede un sottoricoprimento finito, il che è una contraddizione. ■

9.14 *Esempi, osservazioni e complementi*

1. Dal corollario 9.3 segue che in R gli unici intervalli compatti sono gli intervalli chiusi e limitati. Sappiamo che due intervalli chiusi e limitati qualsiasi sono omeomorfi (esempio 5.4(7)); quindi, poiché la compattezza è una proprietà topologica, se $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}'$ sono due intervalli omeomorfi e $\mathbf{J}$ è compatto, anche $\mathbf{J}'$ è compatto. Questo dimostra che la classe (β) dell'esempio 5.4(7) è disgiunta dalle classi (α) e (γ).

2. Se $n \geq 1$ segue dal corollario 9.13 che un disco aperto $D_r(\mathbf{x}) \subset \mathsf{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$, $r > 0$, non è compatto perché non è chiuso. Un ricoprimento aperto di $D_r(\mathbf{x})$ da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito è ad esempio:

$$\{D_\rho(\mathbf{x}) : 0 < \rho < r\}.$$

La n-cella $\mathbf{D}^n$ è compatta e quindi non omeomorfa ad alcun disco aperto.
Il semispazio aperto

$$\Sigma_n = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n > 0\}$$

non è compatto perché non è né chiuso né limitato; il ricoprimento aperto di Σ_n

$$\left\{\Sigma_{n,r} : r > 0 \text{ reale}\right\}$$

dove

$$\Sigma_{n,r} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n > r\},$$

non possiede un sottoricoprimento finito.

3. La sfera $\mathbf{S}^n$, $n \geq 1$, è compatta perché chiusa e limitata in R^{n+1}. Lo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ è compatto perché esiste un'applicazione continua e suriettiva $\mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ (proposizione 9.7). Il toro n-dimensionale $T^n = \mathbf{S}^1 \times \ldots \times \mathbf{S}^1$ (n volte) è compatto per il teorema di Tychonoff.

4. Il gruppo ortogonale $\mathrm{O}(n)$ è compatto. Infatti la condizione che definisce le matrici $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$ è ${}^tAA = \mathbf{I}_n$, cioè:

$$\sum_h a_{hi}a_{hj} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,\ j \leq n.$$

In particolare si ha:

$$\sum_h a_{hi}^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

ovvero:

$$\sum_{h,i} a_{hi}^2 = n.$$

Quindi $\mathrm{O}(n)$ si identifica ad un sottoinsieme chiuso di R^{n^2} contenuto nel disco chiuso $\overline{D_0(\sqrt{n})}$. Pertanto $\mathrm{O}(n)$ è chiuso e limitato, cioè compatto. In modo simile si dimostra che $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ sono compatti.

5. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice *relativamente compatto* in X se $\overline{A}$ è compatto. Ogni sottoinsieme limitato di R^n è relativamente compatto. Ogni sottoinsieme di uno spazio compatto è relativamente compatto (proposizione 9.2(a)). Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è relativamente compatto perché è chiuso (proposizione 9.2(b)).

Si osservi che uno spazio topologico A può essere relativamente compatto come sottospazio di uno spazio X ma non esserlo come sottospazio di un altro spazio Y: ad esempio un intervallo aperto limitato (a, b) è relativamente compatto in R ma non lo è in se stesso.

6. *Ogni spazio compatto di Hausdorff X è normale.* Siano infatti A e B due sottoinsiemi chiusi e disgiunti di X. Per la proposizione 9.2(a) A e B sono

compatti. Sia $b \in B$. Poiché X è di Hausdorff per ogni $a \in A$ esistono intorni aperti U_a di a e V_a di b tali che $a \in U_a$, $b \in V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$. La famiglia $\{U_a\}_{a \in A}$ è un ricoprimento aperto di A, e quindi possiede un sottoricoprimento finito; pertanto esistono $a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che $A \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Gli aperti $U_b := U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$ e $V_b := V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n}$ soddisfano:

$$A \subset U_b, \quad b \in V_b, \quad U_b \cap V_b = \emptyset.$$

La famiglia $\{V_b\}_{b \in B}$ costituisce un ricoprimento aperto di B e quindi possiede un sottoricoprimento finito. Pertanto esistono $b_1, \ldots, b_m \in B$ tali che B sia contenuto nell'aperto $V := V_{b_1} \cup \ldots \cup V_{b_m}$. L'aperto $U := U_{b_1} \cap \ldots \cap U_{b_m}$ contiene A e $U \cap V = \emptyset$. Quindi X è normale.

7. Un'*applicazione* continua $f : X \to Y$ si dice *propria* se per ogni sottoinsieme compatto $K \subset Y$ l'insieme $f^{-1}(K)$ è compatto. Un esempio banale di applicazione propria è l'identità di uno spazio X in sé. Se Z è uno spazio compatto e Y è uno spazio qualsiasi, la proiezione $Z \times Y \to Y$ è propria.

È propria ogni applicazione continua $f : X \to Y$ di uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y: infatti ogni compatto $K \subset Y$ è chiuso e quindi $f^{-1}(K)$, essendo chiuso in X, è compatto.

8. Daremo ora una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra che utilizza la nozione di compattezza e la proposizione 9.8.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi* $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$ *possiede una radice in* $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. L'applicazione:

$$|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$|P|(z) = |P(z)|$$

è continua. Facciamo vedere che $|P|$ possiede un minimo assoluto, cioè che esiste $u \in \mathbb{C}$ tale che $|P(u)| \leq |P(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Scrivendo:

$$P(Z) = a_n Z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n Z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n Z^n}\right)$$

abbiamo per ogni $z \neq 0$:

$$|P(z)| = |a_n z^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|$$

e da quest'uguaglianza segue facilmente che per ogni costante reale $C > 0$ esiste $r(C) > 0$ tale che $|P(z)| > C$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| > r(C)$. Inoltre per ogni $r > 0$ la restrizione di $|P|$ al disco chiuso $D_r = \overline{D_r(0)}$ ammette un massimo e un minimo perché D_r è compatto (proposizione 9.8). Ma allora, scelto $C > 0$

arbitrario e $w \in D_{r(C)}$, posto

$$R = \max\{r(C), r(|P(w)|)\}$$

un punto $u \in D_R$ in cui $|P|_{|D_R}$ ammette un minimo soddisfa

$$|P(u)| \leq |P(z)| \quad \text{per ogni } z \in D_R. \tag{9.3}$$

In particolare

$$|P(u)| \leq |P(w)|$$

perché $w \in D_R$; quindi, essendo $|P(w)| \leq |P(z)|$ per ogni $z \notin D_R$, si ha anche:

$$|P(u)| \leq |P(z)| \quad \text{per ogni } z \notin D_R. \tag{9.4}$$

Le [9.3] e [9.4] insieme ci dicono che u è un punto di minimo assoluto per $|P|$.

Per concludere la dimostrazione dobbiamo far vedere che $|P(u)| = 0$. Supponiamo per assurdo $|P(u)| > 0$. Ponendo $z - u = h$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ possiamo scrivere:

$$P(z) = P(u+h) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n$$

per opportuni $A_i \in \mathbb{C}$. Sia m il più piccolo intero positivo tale che $A_m \neq 0$: m esiste perché $A_n \neq 0$. Osservando che $A_0 = P(u)$, e dividendo per $P(u)$ primo e secondo membro, otteniamo l'identità:

$$\frac{P(u+h)}{P(u)} = 1 + B_m h^m + \ldots + B_n h^n, \tag{9.5}$$

dove abbiamo posto $B_i = \dfrac{A_i}{A_0}$. Poiché $B_m \neq 0$, possiamo esprimerlo come:

$$B_m = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi))$$

dove $r = |B_m| > 0$. Analogamente scriviamo:

$$h = \rho(\cos(\psi) + \mathrm{i}\,\sin(\psi)).$$

Pertanto si ha:

$$B_m h^m = r\rho^m(\cos(\varphi + m\psi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi + m\psi)).$$

Scegliendo ψ in modo che si abbia $\varphi + m\psi = \pi$ si ottiene:

$$B_m h^m = -r\rho^m.$$

Con questa scelta di h la [9.5] diventa:

$$\frac{P(u+h)}{P(u)} = 1 - r\rho^m + h^m[B_{m+1}h + \ldots + B_n h^{n-m}] \qquad [9.6]$$

Scegliendo inoltre $\rho > 0$ tale che $0 < r\rho^m < 1$, cioè

$$0 < \rho < \sqrt[m]{\frac{1}{r}},$$

si ottiene:

$$0 < 1 + B_m h^m = 1 - r\rho^m < 1.$$

Pertanto dalla [9.6] deduciamo:

$$\left|\frac{P(u+h)}{P(u)}\right| \leq 1 - r\rho^m + \rho^m|B_{m+1}h + \ldots + B_n h^{n-m}|. \qquad [9.7]$$

L'espressione:

$$B_{m+1}h + \ldots + B_n h^{n-m}$$

è una funzione di h che tende a 0 al tendere di h a 0; quindi è possibile scegliere $\rho = |h|$ sufficientemente piccolo perché si abbia:

$$|B_{m+1}h + \ldots + B_n h^{n-m}| < r.$$

Ma allora dalla [9.7] segue:

$$\left|\frac{P(u+h)}{P(u)}\right| < 1,$$

il che contraddice l'ipotesi che $|P(u)|$ sia un minimo assoluto per $|P|$. ■

Esercizi

1. Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio compatto è finito. (*Suggerimento.* Utilizzare la proposizione 9.2(a)).
2. Sia X uno spazio topologico e siano $K_1, \ldots, K_s$ sottoinsiemi di X. Dimostrare che se $K_1, \ldots, K_s$ sono compatti allora $K_1 \cup \ldots \cup K_s$ è compatto.
3. I seguenti sottoinsiemi di R^n, $n \geq 2$, non sono compatti:

$$\mathbf{D}^n \backslash \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{S}^{n-1} \backslash \{(1,0,\ldots,0)\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n = 0\}, \quad \mathrm{Int}(\mathbf{I}^n).$$

Di ognuno di essi trovare un ricoprimento aperto che non possiede un sottoricoprimento finito.

4. Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che $X = [a, b] \cap \mathsf{Q}$ non è compatto trovandone un ricoprimento aperto che non possiede un sottoricoprimento finito.

5. Dimostrare che l'unione delle circonferenze di centro $\mathbf{0}$ e raggio $r \in [0, 1] \cap \mathsf{Q}$ è un sottoinsieme non compatto di R^2 trovandone un ricoprimento aperto che non possiede un sottoricoprimento finito.

6. Dimostrare che ognuno dei seguenti spazi topologici:

$$\mathbf{I}^n, \ \mathbf{S}^{n-1}, \ \Delta^n, \ \mathbf{D}^n, \quad n \geq 1$$

non è omeomorfo ad alcuno dei seguenti:

$$\mathsf{R}^n, \ \mathsf{R}^n \backslash \mathbf{I}^n, \ \mathsf{R}^n \backslash \Delta^n, \ \mathsf{R}^n \backslash \mathbf{S}^{n-1}, \ \mathrm{Int}(\mathbf{I}^n), \ \mathrm{Int}(\Delta^n), \ n \geq 1.$$

7. Sia X un insieme e σ un numero reale non nullo. Un'*applicazione* $f : \mathsf{R} \to X$ si dice *periodica di periodo* σ se per ogni $x \in \mathsf{R}$ si ha:

$$f(x + \sigma) = f(x).$$

Ogni applicazione costante è periodica di periodo σ per ogni $\sigma \in \mathsf{R} \backslash \{0\}$. Esempi non banali di applicazioni periodiche sono le funzioni trigonometriche sin, cos : $\mathsf{R} \to \mathsf{R}$, che hanno periodo 2π. Dimostrare che se X è uno spazio topologico e $f : \mathsf{R} \to X$ è un'applicazione continua e periodica, $f(\mathsf{R})$ è compatto in X.

8. Dimostrare che $\mathbf{P}^n(\mathsf{C})$ è compatto per ogni $n \geq 1$.

9. Dimostrare la proposizione 9.4 utilizzando la 9.6.

10. Sia

$$\mathbf{I}_n = [a_n, b_n], \ n = 1, 2, \ldots$$

una successione di intervalli chiusi e limitati di R tali che $\mathbf{I}_{n+1} \subset \mathbf{I}_n$ per ogni n. Dimostrare che, se $\lim_n |b_n - a_n| = 0$, allora $\bigcap_n \mathbf{I}_n$ è non vuoto e consiste di un solo punto.

11. Sia X uno spazio metrizzabile con distanza d, e siano A, B sottoinsiemi chiusi non vuoti di X. Poniamo:

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

Dimostrare che se A oppure B è compatto allora

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Dare un esempio in cui $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.

10 Generalizzazioni della compattezza

10.1 DEFINIZIONE *Uno spazio topologico X si dice* localmente compatto *se ogni punto $p \in X$ possiede un intorno compatto.*

Sono esempi di spazi localmente compatti gli spazi compatti, lo spazio euclideo R^n, i chiusi di R^n, gli aperti di R^n e più in generale le varietà topologiche, gli spazi discreti.

Q, e più in generale Q^n, sono esempi di spazi non localmente compatti.

10.2 PROPOSIZIONE

(a) *Ogni sottospazio chiuso C di uno spazio localmente compatto X è localmente compatto.*

(b) *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff. Ogni punto di X possiede un sistema fondamentale di intorni relativamente compatti.*

Dimostrazione

(a) Sia $p \in C$ e sia K un intorno compatto di p in X. Allora $C \cap K$ è un intorno di p in C che è chiuso in K e quindi è compatto.

(b) Sia $p \in X$ e sia U un aperto contenente p. Poiché X è localmente compatto, p possiede un intorno compatto K. Allora $V := \mathrm{Int}(K) \cap U$ è un intorno aperto di p contenuto in U. Inoltre $\overline{V} \subset \overline{K} = K$, perché K è chiuso essendo compatto in uno spazio di Hausdorff (proposizione 9.2(b)). Ma allora $\overline{V}$ è compatto perché chiuso nel compatto K. ■

10.3 PROPOSIZIONE *Sia X uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff che soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Allora X è unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi compatti $\{K_i : i = 1, 2, \ldots\}$ tali che $K_i \subset \mathrm{Int}(K_{i+1})$ per ogni i.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i : i = 1, 2, \ldots\}$ una base numerabile di X. Sia U un aperto di X e sia $x \in U$. Poiché X è localmente compatto, x possiede un intorno compatto K, ed esiste i tale che $x \in U_i \subset \mathrm{Int}(K) \cap U$; come nella dimostrazione della 10.2(b) si vede che U_i è relativamente compatto. Quindi per ogni aperto U ed $x \in U$ esiste U_i relativamente compatto tale che $x \in U_i \subset U$. Pertanto gli U_i che sono relativamente compatti costituiscono a loro volta una base numerabile di X. Possiamo perciò supporre che $\{U_i : i = 1, 2, \ldots\}$ sia una base numerabile di aperti relativamente compatti di X. Per ogni i la chiusura $\overline{U_i}$ può essere ricoperta da un numero finito di aperti U_j, la cui unione ha chiusura compatta H_i, essendo gli U_j relativamente compatti. Pertanto si ha, per ogni i:

$$\overline{U_i} \subset \mathrm{Int}(H_i)$$

e quindi

$$X = \bigcup_i \mathrm{Int}(H_i).$$

Poniamo $K_1 = H_1$ e induttivamente definiamo $K_{i+1} = \bigcup_{j \in J(i)} H_j$, dove $J(i) \subset \mathsf{N}^+$ è un sottoinsieme finito tale che

$$K_i \subset \bigcup_{j \in J(i)} \mathrm{Int}(H_j).$$

La famiglia $\{K_i\}$ ha le proprietà volute. ■

La proposizione 10.3 si applica alle varietà topologiche e ad ogni sottospazio X di R^n che sia aperto oppure chiuso in R^n.

L'esistenza di una famiglia numerabile di sottoinsiemi compatti $\{K_i : i = 1, 2, \ldots\}$ con le proprietà dell'enunciato nel caso di aperti o di chiusi di R^n si può dimostrare direttamente. Se X è chiuso basta prendere ad esempio $K_i = X \cap \overline{D_i(p)}$ dove p è un fissato punto di X. Se X è aperto si prenda

$$K_i = \left\{ x \in X : \|\mathbf{x}\| \leq i, \ d(\mathbf{x}, \mathsf{R}^n \setminus X) \geq \frac{1}{i} \right\},$$

dove per un qualsiasi sottoinsieme F di R^n si pone:

$$d(\mathbf{x}, F) := \inf\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in F\}.$$

Sia X uno spazio topologico e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X. Diremo che $\mathcal{V}$ è un *raffinamento* di $\mathcal{U}$, oppure che $\mathcal{V}$ è *più fine* di $\mathcal{U}$, se ogni $V \in \mathcal{V}$ è contenuto in qualche aperto di $\mathcal{U}$.

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X si dice *localmente finita* se ogni punto $p \in X$ possiede un intorno U_p che interseca solo un numero finito di insiemi della famiglia $\mathcal{F}$.

10.4 DEFINIZIONE *Uno spazio topologico X si dice* paracompatto *se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X possiede un raffinamento $\mathcal{V}$ localmente finito.*

Ogni spazio compatto X è paracompatto: se infatti $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X, e $\mathcal{V}$ è un suo sottoricoprimento finito, allora $\mathcal{V}$ è un raffinamento localmente finito di $\mathcal{U}$. È facile verificare che ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.

La nozione di paracompattezza viene utilizzata nello studio delle varietà differenziabili. È utile avere criteri per stabilire se uno spazio topologico è paracompatto. La seguente proposizione dà un criterio che utilizza nozioni più facili da verificare della paracompattezza.

10.5 PROPOSIZIONE *Sia X uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff che soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X possiede un raffinamento localmente finito $\mathcal{V}$ costituito al più da un'infinità numerabile di aperti. In particolare X è paracompatto.*

Dimostrazione. Per la proposizione 10.3 esiste un ricoprimento numerabile di X costituito da sottoinsiemi compatti $\{K_i : i = 1, 2, \ldots\}$ tali che $K_i \subset \mathrm{Int}(K_{i+1})$ per ogni i. Per ogni $i \geq 0$ la famiglia

$$\mathcal{V}_i = \{[\mathrm{Int}(K_{i+2}) \backslash K_{i-1}] \cap U : U \in \mathcal{U}\}$$

(dove si pone $K_j = \emptyset$ se $j \leq 0$) costituisce un ricoprimento aperto di $K_{i+1} \backslash \mathrm{Int}(K_i)$, che è chiuso in K_{i+1} e quindi compatto. Pertanto $\mathcal{V}_i$ possiede un sottoricoprimento finito $\{V_{i1}, \ldots, V_{i\alpha(i)}\}$ di $K_{i+1} \backslash \mathrm{Int}(K_i)$. Poiché

$$\bigcup_{i \geq 0} [K_{i+1} \backslash \mathrm{Int}(K_i)] = X,$$

la famiglia

$$\mathcal{V} = \{V_{ih} : i = 0, 1, \ldots, 1 \leq h \leq \alpha(i)\}$$

costituisce un ricoprimento aperto di X parametrizzato da un insieme numerabile. Inoltre $\mathcal{V}$ è più fine di $\mathcal{U}$ per come sono stati definiti i ricoprimenti $\mathcal{V}_i$. Sia $x \in X$; esiste $i \geq 1$ tale che $x \in K_i$. L'aperto $\mathrm{Int}(K_{i+1})$ è un intorno di x tale che

$$\mathrm{Int}(K_{i+1}) \cap V_{jh} = \emptyset \quad \text{per ogni } j \geq i + 2$$

e quindi interseca solo un numero finito di aperti del ricoprimento $\mathcal{V}$. Pertanto $\mathcal{V}$ è un raffinamento localmente finito di $\mathcal{U}$. ■

10.6 COROLLARIO

(a) *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$. Se X è chiuso oppure aperto, allora X è paracompatto.*

(b) *Se X è una varietà topologica allora X è uno spazio paracompatto.*

Dimostrazione. Immediata. ■

Altre generalizzazioni della nozione di compattezza sono le seguenti.

10.7 DEFINIZIONE *Uno spazio topologico X si dice* numerabilmente compatto *se ogni sottoinsieme infinito $Z \subset X$ possiede un punto di accumulazione. Uno spazio topologico X si dice* compatto per successioni *se ogni successione di elementi di X possiede una sottosuccessione convergente.*

Dalla proposizione 9.4(a) segue che ogni spazio topologico compatto è numerabilmente compatto. D'altra parte ogni spazio compatto per successioni è numerabilmente compatto; infatti ogni suo sottoinsieme infinito Z contiene una successione a elementi tutti distinti e questa, dovendo contenere una sottosuccessione convergente, possiede qualche punto di accumulazione. Quindi valgono le seguenti implicazioni:

$$X \text{ compatto} \Rightarrow X \text{ numerabilmente compatto} \Leftarrow X \text{ compatto per successioni}$$

Nessuna delle implicazioni precedenti è un'equivalenza (cfr. esercizio 8). Dimostreremo tra poco che le tre nozioni di compattezza coincidono negli spazi metrizzabili.

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di uno spazio metrizzabile X. Supponiamo che esista un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che il ricoprimento $\mathcal{V}_\varepsilon$ costituito dai dischi aperti di raggio ε sia un raffinamento di $\mathcal{U}$. Il numero $\varepsilon > 0$ si dice un *numero di Lebesgue* del ricoprimento $\mathcal{U}$.

Abbiamo il seguente utile risultato.

10.8 PROPOSIZIONE *Sia X uno spazio metrizzabile compatto per successioni. Ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X possiede un numero di Lebesgue.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$, sia $\varepsilon(x) > 0$ l'estremo superiore dei numeri $\delta > 0$ tali che il disco $D_\delta(x)$ sia contenuto in un aperto del ricoprimento $\mathcal{U}$. Poniamo

$$\varepsilon_0 = \inf_{x \in X} \varepsilon(x).$$

Se $\varepsilon_0 > 0$, prendendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ si ottiene l'asserto. Supponiamo per assurdo che $\varepsilon_0 = 0$; allora esiste una successione $\{x_n\}$ di punti di X tale che

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(x_n) = 0.$$

Poiché X è compatto per successioni, a meno di sostituire $\{x_n\}$ con una sua sottosuccessione, possiamo supporre che esista $x_0 \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sia n_0 tale che $d(x_0, x_n) < \frac{1}{4}\varepsilon(x_0)$ per ogni $n \geq n_0$. Allora si ha

$$D_{\varepsilon(x_0)/4}(x_n) \subset D_{\varepsilon(x_0)/2}(x_0) \quad \text{per ogni } n \geq n_0$$

e quindi $\varepsilon(x_n) \geq \frac{\varepsilon(x_0)}{4}$ per ogni $n \geq n_0$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(x_n) \geq \frac{\varepsilon(x_0)}{4} > 0,$$

una contraddizione. ■

Possiamo ora dimostrare il seguente:

10.9 TEOREMA *Sia X uno spazio metrizzabile. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *X è compatto.*

(b) *X è numerabilmente compatto.*

(c) *X è compatto per successioni.*

Dimostrazione

(a) $\Rightarrow$ (b) è la proposizione 9.4(a).

(b) $\Rightarrow$ (c). Sia $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ una successione in X. Se infiniti termini della successione coincidono essi formano una sottosuccessione convergente. Se $\{x_n\}$ contiene infiniti punti distinti essa possiede un punto di accumulazione perché X è numerabilmente compatto; in questo caso, poiché X è uno spazio metrico, per la proposizione 8.6 $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X e sia $\varepsilon > 0$ un numero di Lebesgue di $\mathcal{U}$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{U}$ non possieda un sottoricoprimento finito. Allora neanche il ricoprimento $\mathcal{V}_\varepsilon$ costituito dai dischi aperti di raggio ε possiede un sottoricoprimento finito. Pertanto, scelto arbitrariamente un punto $x_1 \in X$, esiste $x_2 \notin D_\varepsilon(x_1)$. Procedendo per induzione supponiamo di aver trovato $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tali che $x_k \notin D_\varepsilon(x_h)$ per ogni $1 \leq h < k \leq n$. Poiché $\{D_\varepsilon(x_1), \ldots, D_\varepsilon(x_k)\}$ non è un ricoprimento di X esiste $x_{n+1} \notin D_\varepsilon(x_h)$ per ogni $h = 1, \ldots, n$. Pertanto è possibile costruire una successione $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ di punti di X tali che $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ per ogni $i \neq j$. D'altra parte la compattezza per successioni di X implica l'esistenza di una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k} : k = 1, 2, \ldots\}$. Sia $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$. Sia $k_0 > 0$ tale che

$$d(x_0, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } k \geq k_0.$$

Allora, per ogni h, $l \geq k_0$, si ha:

$$d(x_{n_h}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_h}, x_0) + d(x_0, x_{n_l}) < \varepsilon,$$

una contraddizione. Ciò conclude la dimostrazione. ■

Originariamente la nozione di compattezza è stata introdotta negli spazi metrici sotto forma di compattezza per successioni. Solo successivamente si è passati alla definizione utilizzata oggi.

Un'altra caratterizzazione della compattezza negli spazi metrizzabili viene data attraverso la nozione di "completezza".

10.10 DEFINIZIONE *Sia X uno spazio metrico con distanza d. Una* successione di Cauchy *in X è una successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di elementi di X tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon > 0$ tale che $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$ per ogni n, $n' > N_\varepsilon$.*

Se $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è una successione convergente allora è di Cauchy.

Sia infatti $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e sia $\varepsilon > 0$. Poiché la successione converge esiste N_ε tale che $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n > N_\varepsilon$. Pertanto, se n, $n' > N_\varepsilon$, si ha:

$$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, x) + d(x, x_{n'}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Viceversa non è sempre vero che una successione di Cauchy converge. Ad esempio la successione di numeri reali $\left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$ converge a 0 e quindi è di Cauchy; questa stessa successione, considerata nello spazio metrico $(0, 1]$, è ancora di Cauchy ma non converge.

10.11 DEFINIZIONE *Uno* spazio metrico *X si dice* completo *se ogni successione di Cauchy in X converge.*

Dai corsi di Analisi Matematica è ben noto al lettore che R, e più in generale R^n, sono spazi metrici completi, mentre Q non è completo. Ogni sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è ancora completo: la dimostrazione di questo fatto è lasciata al lettore.

Si osservi che la completezza, a differenza di tutte le altre proprietà studiate fin qui, non è una proprietà topologica. In altre parole due spazi metrizzabili omeomorfi possono essere l'uno completo e l'altro no. Ad esempio l'intervallo $(0, 1)$ ed R sono due spazi metrizzabili omeomorfi, ma R è completo mentre $(0, 1)$ non lo è.

10.12 DEFINIZIONE *Uno spazio metrico X si dice* totalmente limitato *se per ogni $\varepsilon > 0$ esso possiede un ricoprimento finito costituito da dischi chiusi di raggio ε.*

La totale limitatezza è equivalente all'esistenza, per ogni $\varepsilon > 0$, di un numero finito di punti tali che ogni $p \in X$ abbia distanza al più ε da uno di essi. Ogni spazio metrico totalmente limitato è limitato perché l'unione di un numero finito di sottonsiemi limitati è limitato. Il viceversa non è vero: esistono spazi metrici limitati che non sono totalmente limitati (cfr. esercizio 7). Neanche la totale limitatezza è una proprietà topologica degli spazi metrici. Un esempio è nuovamente fornito dall'intervallo $(0, 1)$ e da R.

Abbiamo la seguente caratterizzazione degli spazi metrizzabili compatti.

10.13 TEOREMA *Uno spazio metrizzabile X è compatto se e solo se come spazio metrico è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo X compatto. Allora X è totalmente limitato perché per ogni $\varepsilon > 0$ il ricoprimento costituito dai dischi aperti di raggio ε possiede un sottoricoprimento finito.

Inoltre X è completo. Sia infatti $\{x_n\}$ una successione di Cauchy e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia N' tale che $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni n, $m > N'$. Per la compattezza è possibile trovare una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$. Sia $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ e sia $k \gg 0$ tale che $n_k > N'$ e $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora, per ogni $n > N'$ si ha:

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon$$

e quindi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; pertanto $\{x_n\}$ converge e quindi X è completo.

Supponiamo viceversa X completo e totalmente limitato. Sarà sufficiente dimostrare che X è compatto per successioni. Sia dunque $\{x_n\}$ una successione in X. Possiamo supporre che contenga infiniti termini distinti, altrimenti essa certamente possiede una sottosuccessione convergente. Consideriamo un ricoprimento di X con un numero finito di dischi chiusi di raggio 1. Poiché $\{x_n\}$ è un insieme infinito, almeno uno di tali dischi, diciamo B_1, contiene infiniti termini distinti della successione, corrispondenti a un insieme infinito di indici $I_1 \subset \mathrm{N}^+$. Consideriamo ora un ricoprimento di X con un numero finito di dischi chiusi di raggio $\frac{1}{2}$. Poiché la sottosuccessione $\{x_n : n \in I_1\}$ contiene infiniti termini distinti, uno di tali dischi, diciamo B_2, contiene infiniti termini distinti della sottosuccessione, corrispondenti ad un insieme infinito di indici $I_2 \subset I_1$. Proseguendo in questo modo possiamo costruire induttivamente per ogni intero $k \geq 1$ un insieme infinito I_k di numeri naturali tale che $I_{k+1} \subset I_k$ e tutti i termini x_n per $n \in I_k$ siano contenuti in un disco di raggio $\frac{1}{k}$. Ora costruiamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ scegliendo $n_1 < n_2 < \ldots$ tali che $n_k \in I_k$ per ogni k. Per ogni i, $j > k$ si ha:

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \frac{2}{k}$$

perché x_{n_i} e x_{n_j} sono entrambi contenuti in un disco di raggio $\frac{1}{k}$; quindi $\{x_{n_k}\}$ è una successione di Cauchy. Poiché X è completo questa successione è convergente e quindi $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente: dunque X è compatto per successioni. ∎

È interessante notare che il teorema precedente caratterizza una proprietà topologica degli spazi metrizzabili, la compattezza, mediante due proprietà non topologiche.

10.14 TEOREMA *Sia X uno spazio metrico completo. Per ogni successione $\{D_n = \overline{D_{r_n}(x_n)}\}_{n\geq 1}$ di dischi chiusi in X tali che $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ e $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, si ha:*

$$\bigcap_n D_n \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. La successione $\{x_n\}$ dei centri dei dischi D_n è una successione di Cauchy perché se $\varepsilon > 0$ e N è tale che $r_N < \frac{\varepsilon}{2}$, allora per ogni n, $m > N$ si ha x_n, $x_m \in D_N$ e quindi

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_N < \varepsilon.$$

Sia $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Facciamo vedere che $x \in \bigcap\limits_n D_n$. Per ogni $n \geq 1$ il disco D_n contiene i termini x_n, x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots$ della successione. Il punto x, essendo punto di accumulazione di $\{x_n\}$, lo è anche dell'insieme $\{x_m : m \geq n\}$: pertanto x appartiene a D_n perché quest'insieme è chiuso. ∎

Per un caso particolare di questo risultato si veda l'esercizio 9.10. Vedremo tra poco una conseguenza interessante del teorema 10.14.

10.15 DEFINIZIONE *Uno spazio topologico X si dice* di prima categoria *se è unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi aventi interno vuoto. Altrimenti X si dice* di seconda categoria *o* di Baire.

10.16 TEOREMA (di Baire) *Ogni spazio metrico completo è di seconda categoria.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia uno spazio metrico completo e che $\{C_n\}_{n\geq 1}$ sia una famiglia numerabile di insiemi chiusi aventi interno vuoto. Sia D_1 un disco chiuso di raggio 1. Poiché C_1 ha interno vuoto, anche $C_1 \cap D_1$ ha interno vuoto e quindi esiste un disco chiuso D_2 di raggio minore di $1/2$ contenuto in D_1 e tale che $D_2 \cap C_1 = \emptyset$. Similmente $C_2 \cap D_2$ è un chiuso avente interno vuoto, e quindi esiste un disco chiuso D_3 di raggio minore di $1/3$ contenuto in D_2 tale che $D_3 \cap C_2 = \emptyset$. Continuando in questo modo possiamo costruire induttivamente una successione di dischi chiusi $\{D_n\}_{n\geq 1}$ tali che $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, $D_n \cap (C_{n-1} \cup \ldots \cup C_1) = \emptyset$ e tali che D_n abbia raggio $r_n < 1/n$ per ogni n. Per il teorema 10.14 esiste $x \in \bigcap\limits_n D_n$. Per costruzione $x \notin \bigcup\limits_n C_n$ e quindi $\bigcup\limits_n C_n \neq X$. ∎

Dal teorema di Baire segue che R^n è uno spazio di seconda categoria. Invece Q, e più in generale Q^n, è di prima categoria perché è numerabile e i suoi punti sono chiusi a interno vuoto. Uno spazio discreto è banalmente di seconda categoria perché non possiede sottoinsiemi chiusi non vuoti ad interno vuoto. Un'altra classe di spazi di seconda categoria costituita dagli spazi compatti di Hausdorff, come ora dimostreremo.

10.17 TEOREMA *Ogni spazio compatto di Hausdorff X è di seconda categoria.*

Dimostrazione. Sia $\{C_n\}_{n\geq 1}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi di X a interno vuoto. Poiché X è normale (cfr. esempio 9.14(6)) e poiché $X\backslash C_1 \neq \emptyset$ è possibile trovare un aperto non vuoto $U_1 \subset X\backslash C_1$ tale che $\overline{U_1} \cap C_1 = \emptyset$. Similmente, poiché $\overline{U_1}$ è compatto di Hausdorff, e quindi normale, e poiché $\overline{U_1} \cap C_2$ è un chiuso a interno vuoto, possiamo trovare un aperto non vuoto $U_2 \subset U_1$ tale che $\overline{U_2} \subset U_1$ e $\overline{U_2} \cap C_2 = \emptyset$. Procedendo induttivamente si costruisce una successione di aperti $\{U_n\}_{n\geq 1}$ tali che $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ e $\overline{U}_n \cap (C_n \cup \ldots \cup C_1) = \emptyset$. La famiglia di chiusi $\{\overline{U}_n\}_{n\geq 1}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e quindi, per la compattezza di X, esiste $x \in \bigcap\limits_n \overline{U}_n$. Per costruzione $x \notin \bigcup\limits_n C_n$ e pertanto $\bigcup\limits_n C_n \neq X$. ■

Terminiamo il paragrafo con alcuni risultati riguardanti gli spazi di funzioni. Siano X un insieme e $(Y, \overline{d})$ uno spazio metrico. Nell'insieme Y^X delle applicazioni di X in Y definiamo una distanza ponendo per ogni f, $g \in Y^X$:

$$\delta(f, g) = \sup_{x\in X} \{\overline{d}(f(x), g(x))\}.$$

È immediato verificare che δ è una distanza, che è chiamata *distanza del sup* o *distanza della convergenza uniforme*. La topologia definita da δ in Y^X si chiama *topologia della convergenza uniforme*.

10.18 PROPOSIZIONE *Se $(Y, \overline{d})$ è uno spazio metrico completo allora (Y^X, δ) è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in Y^X. Poiché, per ogni n, m e $x \in X$,

$$\overline{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \delta(f_n, f_m),$$

la successione $\{f_n(x)\}$ di elementi di Y è di Cauchy per ogni $x \in X$. Poiché Y è completo, per ogni $x \in X$ esiste $y_x \in Y$ tale che $y_x = \lim f_n(x)$. Definiamo $f : X \to Y$ ponendo, per ogni $x \in X$,

$$f(x) = y_x.$$

Facciamo vedere che $f = \lim f_n$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N > 0$ tale che $\delta(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

per ogni n, $m > N$. Allora, per ogni $x \in X$ e $n > N$, si ha:

$$\overline{d}(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} \overline{d}(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e quindi $\delta(f_n, f) < \varepsilon$ per ogni $n > N$. ■

Il caso più importante della proposizione 10.18 si ha quando X è uno spazio topologico. In questo caso possiamo considerare il sottoinsieme $C(X,Y)$ di Y^X costituito dalle applicazioni continue. Si ha il seguente risultato.

10.19 TEOREMA *Siano X uno spazio topologico e $(Y, \overline{d})$ uno spazio metrico. Allora $C(X,Y)$ è chiuso in Y^X rispetto alla topologia della convergenza uniforme. In particolare, se Y è completo anche $C(X,Y)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $f \in Y^X$ un elemento appartenente alla chiusura di $C(X,Y)$ e sia $\{f_n\}$ una successione di elementi di $C(X,Y)$ convergente a f. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n > 0$ tale che $\delta(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Sia $x \in X$. Per la continuità di f_n esiste un intorno U di x tale che, per ogni $x' \in U$

$$\overline{d}(f_n(x'), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pertanto si ha:

$$\overline{d}(f(x'), f(x)) \leq \overline{d}(f(x'), f_n(x')) + \overline{d}(f_n(x'), f_n(x)) + \overline{d}(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e quindi f è continua in x. Segue che f è continua in ogni punto, e quindi è continua.

L'ultima affermazione dell'enunciato segue dalla proposizione 10.18 e dal fatto che $C(X,Y)$ è chiuso in Y^X. ■

Il teorema 10.19 generalizza il ben noto risultato dell'Analisi Matematica secondo il quale se una successione di funzioni continue a valori reali definite in un intervallo **J** converge uniformemente, allora il suo limite è una funzione continua su **J**.

Esercizi

1. Dimostrare che Q è uno spazio paracompatto, ma non localmente compatto.
2. Dimostrare che il prodotto di una famiglia di spazi localmente compatti è localmente compatto.
3. Dimostrare che la compattezza locale, la paracompattezza e la compattezza per successioni sono proprietà topologiche.
4. Dimostrare che uno spazio metrico completo è separabile.

5. Sia X uno spazio metrico non compatto. Dimostrare che esiste una funzione continua e non limitata $f : X \to \mathsf{R}$.

6. Dimostrare che in uno spazio metrizzabile X un sottoinsieme Y è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.

7. Sia l_2 l'insieme costituito dalle successioni $\{x_n : n = 1, 2 \ldots\}$ di numeri reali tali che la serie $\sum_n x_n^2$ sia convergente, cioè tali che $\sum_n x_n^2 < \infty$. Si dimostri che ponendo

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}$$

si definisce in l_2 una struttura di spazio metrico. Si dimostri che la sfera unitaria $\mathrm{S}_1(\mathbf{0}) \subset l_2$ di centro la successione $\mathbf{0}$ a valori costanti uguali a 0, con la metrica indotta da l_2, è uno spazio metrico limitato ma non totalmente limitato.
(*Suggerimento.* Gli infiniti punti $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1, 0, \ldots\}$, $\ldots$ di $\mathrm{S}_1(\mathbf{0})$ hanno tra loro distanza $\sqrt{2}$).

8. In N si consideri la topologia $\mathcal{I}$ generata dagli insiemi $\{2n-1, 2n\}$, $n \geq 1$. Dimostrare che $(\mathsf{N}, \mathcal{I})$ è numerabilmente compatto ma non è compatto né compatto per successioni.

9. Dimostrare che uno spazio metrico completo privo di punti isolati non è numerabile.

10. Dimostrare che uno spazio topologico X è di seconda categoria se e solo se l'intersezione di una qualsiasi famiglia numerabile di insiemi aperti densi è non vuota.

11 Connessione

Uno *spazio topologico* X si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi di X che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$. Altrimenti X si dice *sconnesso*; quindi X è sconnesso se esiste un sottoinsieme aperto e chiuso A di X non vuoto e diverso da X.

Un *sottoinsieme* Y di uno spazio X si dice *connesso* (risp. *sconnesso*) se con la topologia di sottospazio Y è uno spazio connesso (risp. sconnesso).

11.1 PROPOSIZIONE *Le condizioni seguenti per uno spazio topologico X sono equivalenti:*

(a) *X è sconnesso.*

(b) *X è unione di due sottoinsiemi aperti non vuoti e disgiunti.*

(c) *X è unione di due sottoinsiemi chiusi non vuoti e disgiunti.*

Dimostrazione. (a) $\Leftrightarrow$ (b). X è sconnesso se e solo se esiste $A \neq \emptyset, X$ aperto e chiuso in X; in tal caso A e $B = X \setminus A$ sono entrambi aperti, disgiunti e non vuoti e $X = A \cup B$. Viceversa, se $X = A \cup B$ con A e B aperti non vuoti e disgiunti, allora A e B sono ciascuno sia aperto che chiuso e diversi da $\emptyset$ e da X; quindi X è sconnesso.

L'equivalenza (a) $\Leftrightarrow$ (c) si dimostra nello stesso modo. ■

Sono sconnessi gli spazi discreti con almeno due punti perché ogni loro sottoinsieme è aperto e chiuso. Ogni spazio banale è connesso. Un qualsiasi punto di uno spazio topologico è un sottoinsieme connesso.

Per ogni $x \in \mathsf{R}$, $\mathsf{R}\backslash\{x\}$ è sconnesso perché unione dei due aperti $(-\infty, x)$ e $(x, +\infty)$. Analogamente, se $\mathbf{J}$ è un intervallo aperto di R e $x \in \mathbf{J}$, $\mathbf{J}\backslash\{x\}$ è sconnesso.

Se r è la retta di R^2 di equazione $L(\mathbf{x}) = 0$, dove $L(\mathbf{x}) = ax_1 + bx_2 + c$, $\mathsf{R}^2\backslash r$ è unione dei due aperti

$$U \ \ = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : L(\mathbf{x}) < 0\}, \quad U^+ = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : L(\mathbf{x}) > 0\},$$

e quindi è sconnesso.

11.2 TEOREMA *Gli intervalli di* R, *in particolare* R *stesso, sono connessi.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{J}$ sia un intervallo sconnesso; dunque esistono due chiusi A, B di R tali che $\mathbf{J} \subset A \cup B$, e $A \cap \mathbf{J}$ e $B \cap \mathbf{J}$ siano non vuoti e disgiunti.

Siano $a \in A \cap \mathbf{J}$ e $b \in B \cap \mathbf{J}$, e supponiamo $a < b$. Poiché $\mathbf{J}$ è un intervallo, $[a, b] \subset \mathbf{J}$. L'insieme $A \cap [a, b]$ è un chiuso di R, quindi contiene il suo estremo superiore, che chiamiamo z. Poiché $z \in A \cap [a, b]$ e $b \in B$, si ha $z < b$; e poiché $z = \sup\{A \cap [a, b]\}$ l'intervallo (z, b) è contenuto in B. Ma B è chiuso e perciò $z \in B$, e questa è una contraddizione. ■

Vale anche un teorema inverso, e cioè

11.3 TEOREMA *Ogni sottoinsieme connesso di* R *è un intervallo.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente è sufficiente dimostrare che un sottoinsieme Y di R che non è un intervallo è sconnesso se contiene almeno due punti. Siano dunque $a \neq b$ due punti di Y; poiché Y non è un intervallo possiamo sceglierli in modo che esista $c \in \mathsf{R}\backslash Y$ tale che $a < c < b$. Poniamo $A = (-\infty, c)$. Allora

$$A \cap Y = \overline{A} \cap Y;$$

quindi $A \cap Y$ è un sottoinsieme di Y non vuoto e diverso da Y, aperto e chiuso in Y. ■

Dimostreremo ora alcune proprietà degli insiemi e degli spazi connessi.

11.4 PROPOSIZIONE *Siano Y, Z sottoinsiemi dello spazio topologico X tali che $Y \subset Z \subset \overline{Y}$. Se Y è connesso anche Z è connesso.*

Dimostrazione. Sia $F \subset Z$ un sottoinsieme aperto e chiuso in Z. Esistono un aperto A e un chiuso C di X tali che $F = Z \cap A = Z \cap C$. Poiché Y è connesso e $F \cap Y$ è aperto e chiuso in Y si ha

$$F \cap Y = \emptyset \quad \text{oppure} \quad F \cap Y = Y.$$

Nel primo caso

$$\emptyset = F \cap Y = A \cap Y = A \cap \overline{Y}$$

perché A è aperto e quindi anche $F = A \cap Z = \emptyset$.

Nel secondo caso

$$Y = F \cap Y = C \cap Y, \quad \text{cioè } Y \subset C,$$

quindi $\overline{Y} \subset C$, perché C è chiuso. Segue che $F = Z \cap C = Z$. ■

11.5 PROPOSIZIONE *Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e se Z è un sottoinsieme connesso di X, $f(Z)$ è un sottoinsieme connesso di Y.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, se $f : X \to Y$ è continua e suriettiva e X è connesso, allora anche Y è connesso.

Supponiamo per assurdo che A sia un sottoinsieme aperto e chiuso di Y, diverso da Y e da $\emptyset$. Per la continuità di f, $f^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di X; poiché f è suriettiva $f^{-1}(A)$ non è vuoto e è diverso da X; questo contraddice la connessione di X. ■

11.6 COROLLARIO

(a) *La connessione è una proprietà topologica.*

(b) *Uno spazio quoziente di uno spazio connesso è connesso.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

11.7 PROPOSIZIONE *Se due sottoinsiemi connessi Y e Z di uno spazio topologico X hanno un punto in comune, $Y \cup Z$ è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un sottoinsieme aperto e chiuso di $Y \cup Z$. Se $A \neq \emptyset$ sarà ad esempio $A \cap Y \neq \emptyset$. Poiché $A \cap Y$ è aperto e chiuso in Y connesso, si ha $Y = A \cap Y$. Poiché per ipotesi $Y \cap Z \neq \emptyset$, anche $A \cap Z \neq \emptyset$; dalla connessione di Z segue che $A \cap Z = Z$ e quindi $A = Y \cup Z$. ■

Due punti dello spazio topologico X si dicono *connessi in* X se esiste un sottoinsieme connesso di X che li contiene entrambi.

11.8 PROPOSIZIONE *Se scelti comunque due punti dello spazio topologico X, questi sono connessi in X, lo spazio è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un sottoinsieme non vuoto, simultaneamente aperto e chiuso di X, e facciamo vedere che $A = X$.

Poiché $A \neq \emptyset$ esiste $p \in A$. Sia q un qualsiasi altro punto di X; per ipotesi esiste un sottoinsieme connesso $Y \subset X$ tale che $p, q \in Y$. $A \cap Y$ è aperto e chiuso e non vuoto in Y, quindi $A \cap Y = Y$; ne segue che $q \in A$. Quindi $A = X$. ∎

Combinando le proposizioni 11.7 e 11.8 si dimostra il seguente

11.9 COROLLARIO *L'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico X aventi un punto in comune è connessa.*

Dimostrazione. Sia $Y = \bigcup_{i \in I} K_i$, K_i sottoinsiemi connessi di X tali che $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, e sia $y_0 \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Siano y_1, $y_2 \in Y$ due punti arbitrari; siano i_1, $i_2 \in I$ tali che $y_1 \in K_{i_1}$ e $y_2 \in K_{i_2}$. Allora $K_{i_1} \cup K_{i_2}$ è connesso per la proposizione 11.7, perché $y_0 \in K_{i_1} \cap K_{i_2}$. Quindi y_1 e y_2 sono connessi in Y; dalla proposizione 11.8 segue che Y è connesso. ∎

In uno spazio topologico X possiamo introdurre una relazione binaria ρ ponendo

$$p \rho q \Leftrightarrow p \text{ e } q \text{ sono connessi in } X.$$

È facile verificare che ρ è una relazione di equivalenza (per la transitività si utilizzi la proposizione 11.7). Le classi di ρ-equivalenza si chiamano *componenti connesse* di X; per ogni $p \in X$ denoteremo con $C(p)$ la componente connessa che lo contiene, e la chiameremo *la componente connessa di p*. Per la proposizione 11.8 X è connesso se e solo se possiede un'unica componente connessa.

11.10 PROPOSIZIONE *Per ogni $p \in X$, $C(p)$ è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente p.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia un sottoinsieme connesso di X contenente p. Se $q \in Y$ allora per definizione p e q sono connessi in X, cioè $q \in C(p)$; quindi $Y \subset C(p)$.

D'altra parte $C(p)$ è connesso. Infatti per ogni $x \in C(p)$ esiste un sottoinsieme connesso $Y(x) \subset X$ tale che $p, x \in Y(x)$; come abbiamo appena dimostrato

$Y(x) \subset C(p)$. Si ha quindi

$$C(p) = \bigcup_{x \in C(p)} Y(x)$$

e poiché

$$p \in \bigcap_{x \in C(p)} Y(x),$$

per il corollario 11.9 $C(p)$ è connesso. ■

11.11 COROLLARIO *Per ogni punto p dello spazio X, la componente connessa di p è un sottoinsieme chiuso di X.*

Dimostrazione. Poiché $C(p)$ è connesso, anche $\overline{C(p)}$ è connesso per la proposizione 11.4. Dalla proposizione 11.10 segue che $\overline{C(p)} \subset C(p)$, e quindi vale l'uguaglianza. ■

11.12 TEOREMA *Il prodotto topologico di una qualsiasi famiglia di spazi connessi è uno spazio connesso.*

Dimostrazione. Diamo prima la dimostrazione nel caso del prodotto $X \times Y$ di due spazi connessi X e Y.

Siano (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$. I sottospazi $X \times \{y_2\}$ e $\{x_1\} \times Y$ di $X \times Y$ sono omeomorfi a X e a Y rispettivamente e quindi sono connessi. Ne segue che in $X \times Y$

$$(x_1, y_1)\rho(x_1, y_2)$$

$$(x_1, y_2)\rho(x_2, y_2).$$

Per la transitività

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2),$$

quindi $X \times Y$ è connesso per la proposizione 11.8.

Per induzione si dimostra facilmente che il prodotto topologico $X_1 \times \ldots \times X_m$ di un numero finito di spazi connessi $X_1, \ldots, X_m$ è connesso.

Dimostriamo ora il teorema nel caso generale.

Sia $X = \prod_{\mu \in M} X_\mu$ il prodotto topologico di una famiglia $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ di spazi connessi, e sia $p \in X$ un suo qualsiasi punto. Consideriamo un arbitrario aperto B della base che definisce la topologia prodotto. Per definizione esistono un numero finito di indici $\mu_1, \ldots, \mu_k \in M$ e aperti non vuoti $A_1 \subset X_{\mu_1}, \ldots, A_k \subset X_{\mu_k}$ tali che

$$B = \{x \in X : x(\mu_i) \in A_i, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Fissiamo $a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k$; denotiamo con q il punto di B così definito:

$$q(\mu) = \begin{cases} a_i & \text{se } \mu = \mu_i \text{ per qualche } i = 1, \dots, k; \\ p(\mu) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo il sottoinsieme di X

$$G = \{x \in X : x(\mu) = p(\mu) \quad \text{per ogni } \mu \neq \mu_1, \dots, \mu_k\}.$$

G è connesso perché omeomorfo a $X_{\mu_1} \times \dots \times X_{\mu_k}$ e contiene i punti p e q. Quindi $q \in C(p)$; ne segue che $C(p) \cap B \neq \emptyset$.

Poiché B è un arbitrario aperto di una base di X, $C(p)$ è denso in X; ma $C(p)$ è anche chiuso; quindi $C(p) = X$, cioè X è connesso. ■

11.13 COROLLARIO *Per ogni $n \geq 1$, R^n, $\mathbf{I}^n$, $\mathbf{S}^n$ e $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ sono connessi.*

Dimostrazione. La connessione di R^n e di $\mathbf{I}^n$ segue dal teorema precedente applicato a n copie di R e di $\mathbf{I} = [0, 1]$, che sono connessi per il teorema 11.2.

La connessione di $\mathbf{S}^n$ segue dal fatto che per un qualsiasi $p \in \mathbf{S}^n$ si ha

$$\mathbf{S}^n = \overline{\mathbf{S}^n \setminus \{p\}}$$

e $\mathbf{S}^n \setminus \{p\}$ è omeomorfo a R^n, quindi è connesso.

$\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$ è connesso perché è un quoziente di $\mathbf{S}^n$ che è connesso. ■

11.14 *Esempi e applicazioni*

1. Sia $\mathbf{J}$ un intervallo aperto (limitato o no) di R. Un intervallo $\mathbf{J}'$ è omeomorfo a $\mathbf{J}$ se e solo se $\mathbf{J}'$ è aperto.

Se infatti $\mathbf{J}'$ è aperto allora è omeomorfo a $\mathbf{J}$, come abbiamo già dimostrato (esempi 5.4(5), (6)). Se invece $\mathbf{J}'$ è chiuso e limitato, è compatto e quindi non isomorfo a $\mathbf{J}$, che non è compatto.

Supponiamo poi che $\mathbf{J}' = (a, b]$ sia un intervallo aperto a sinistra, e che esista un omeomorfismo $f : \mathbf{J}' \to \mathbf{J}$. Poiché f è un'applicazione biunivoca si ha

$$f(\mathbf{J}' \setminus \{b\}) = \mathbf{J} \setminus \{f(b)\}.$$

$\mathbf{J}' \setminus \{b\} = (a, b)$ è connesso e, poiché f è continua, $f(\mathbf{J}' \setminus \{b\})$ è connesso. Ma questo è assurdo perché $\mathbf{J}$ è un intervallo aperto e quindi $\mathbf{J} \setminus \{f(b)\}$ è sconnesso. Analogamente si dimostra che un intervallo della forma $\mathbf{J}' = [a, b)$ non può essere omeomorfo a $\mathbf{J}$.

Tenuto conto dell'esempio 9.14(1), questo dimostra che le 3 classi (α), (β), (γ) dell'esempio 5.4(7) sono disgiunte.

2. Generalizzando il ragionamento dell'esempio 1 è facile dimostrare che $\mathbf{I}$ e $\mathbf{S}^1$ non sono omeomorfi.

Supponiamo infatti per assurdo che esista un omeomorfismo

$$f : \mathbf{I} \to \mathbf{S}^1.$$

Poiché f è biunivoca si ha

$$f((0,1)) = \mathbf{S}^1 \setminus \{f(0), f(1)\}.$$

Dalla continuità di f segue che questo sottoinsieme di $\mathbf{S}^1$ è connesso, perché $(0,1)$ è connesso. Ma

$$\mathbf{S}^1 \setminus \{f(0)\} \approx \mathsf{R}$$

e, poiché $f(0) \neq f(1)$,

$$\mathbf{S}^1 \setminus \{f(0), f(1)\} \approx \mathsf{R} \setminus \{\text{un punto}\}$$

che è sconnesso; questa è una contraddizione.

Si noti che $\mathbf{I}$ e $\mathbf{S}^1$ sono entrambi compatti e connessi.

3. Le componenti connesse di uno spazio topologico sono chiuse (corollario 11.11) ma in generale non sono aperte.

Si consideri ad esempio il sottospazio T di R così definito:

$$T = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1 \text{ intero}\}.$$

Allora $C(0) = \{0\}$ non è aperto in T, perché $0 \in D(T)$.

4. Siano $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$ due spazi topologici. La loro *somma topologica* si definisce come lo spazio $(X_1 \coprod X_2, \mathcal{T})$ dove $X_1 \coprod X_2$ è l'unione disgiunta di X_1 e X_2, e la topologia $\mathcal{T}$ è definita nel modo seguente:

$$A \in \mathcal{T} \text{ se e solo se } A \cap X_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ e } A \cap X_2 \in \mathcal{T}_2.$$

Si noti che X_1 e X_2 sono sottospazi di $X_1 \coprod X_2$ simultaneamente aperti e chiusi. Quindi $X_1 \coprod X_2$ è sconnesso.

In modo simile si definisce la somma topologica di una famiglia qualsiasi di spazi topologici.

Esercizi

1. Dimostrare che l'insieme dei numeri razionali $\mathsf{Q} \subset \mathsf{R}$ è sconnesso.

2. Riconoscere quali dei seguenti sottoinsiemi di R^2 sono sconnessi:

$A = \mathsf{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq 0\}$.

$B = P \setminus \{(0,y) : y \text{ irrazionale}\}$, dove $P = \{(x,y) : -1 \leq x,\ y \leq 1\}$

$C = D_1(1,0) \cup D_1(-1,0)$

$D = \overline{C}$

$E = C \cup \{(0,0)\}$.

3. Dimostrare che R con la topologia j_d (rispettivamente j_s) è sconnesso.

4. Sia S un sottoinsieme dello spazio topologico connesso X. Diremo che *S sconnette X* se $X \backslash S$ è sconnesso. Dimostrare che un iperpiano sconnette R^n e che un sottospazio affine di dimensione $m \leq n-2$ non sconnette R^n, $n \geq 2$.

5. Dimostrare che R non è omeomorfo a R^n per ogni $n \geq 2$.
(*Suggerimento.* Usare il fatto che un punto sconnette R mentre nessun punto sconnette R^n).

6. Dimostrare che l'unione delle circonferenze di centro $(0,0)$ e di raggio razionale ≤ 1 è un sottoinsieme sconnesso di R^2.

7. Sia $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ un'applicazione continua e biunivoca tale che $f(\mathbf{S}^{n\ 1}) = \mathbf{S}^{n-1}$. Dimostrare che $f(D_1(\mathbf{0})) = D_1(\mathbf{0})$.

8. Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se per ogni $x \in X$ $C(x) = \{x\}$. Dimostrare che ogni spazio metrizzabile numerabile con almeno due punti è totalmente sconnesso (in particolare Q è totalmente sconnesso).

9. Dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA DEL PUNTO FISSO *Ogni applicazione continua*

$$f : [a,b] \to [a,b]$$

di un'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, $a < b$, *in se stesso ha un punto fisso, cioè esiste* $x \in [a,b]$ *tale che* $f(x) = x$.

10. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso in un punto* $p \in X$ se ogni intorno di p contiene un intorno connesso di p. X si dice *localmente connesso* se è localmente connesso in ogni suo punto.
Ogni spazio discreto è localmente connesso pur essendo totalmente sconnesso.
Il sottospazio di R

$$T = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1 \text{ intero}\}$$

è localmente connesso in tutti i suoi punti eccetto che in $\{0\}$; si noti che T è totalmente sconnesso.
Uno spazio connesso non è necessariamente localmente connesso (cfr. esempio 12.6(2)).
Dimostrare che:

(a) se uno spazio X è localmente connesso nel punto p, allora p è un punto interno di $C(p)$;

(b) ogni sottospazio aperto di uno spazio localmente connesso è localmente connesso;

(c) per ogni punto p di uno spazio localmente connesso X $C(p)$ è un sottoinsieme aperto di X;

(d) la connessione locale è una proprietà topologica.

11. Dimostrare che per ogni $t \in \mathsf{R}$ il sottospazio di R^2

$$X_t = \{(x,y) : xy = t\}$$

non è omeomorfo ad R.

12. Sia $X \subset \mathsf{R}^2$ l'unione di due circonferenze di raggio 1 e centri $(1,0)$ e $(-1,0)$ rispettivamente, tangenti nell'origine (fig. 11.1).
Dimostrare che:

(a) X non è omeomorfo a $\mathbf{S}^1$;

(b) X non è omeomorfo a $\mathbf{I}$.

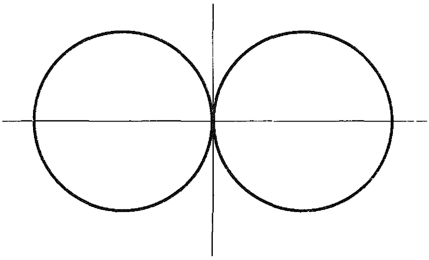


Figura 11.1

13. Si consideri la somma topologica $X_n = \mathbf{S}^1 \amalg \ldots \amalg \mathbf{S}^1$ di $n \geq 1$ copie di $\mathbf{S}^1$, e sia F_n lo spazio quoziente di X_n ottenuto identificando a un punto il sottoinsieme

$$\{(1,0)_1, \ldots, (1,0)_n\},$$

dove $(1,0)_j$ è il punto $(1,0)$ della j-esima copia di $\mathbf{S}^1$. F_n si chiama *fiore ad n petali* (se $n = 1$, $F_1 = \mathbf{S}^1$).
Per ogni intero $n \geq 1$ si consideri poi il sottospazio di R^2

$$Y_n = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

dove C_j è la circonferenza di centro il punto $(j,0)$ e raggio j (fig. 11.2).
Dimostrare che:

(a) per ogni $n \geq 1$, $F_n \approx Y_n$;

(b) se $n \neq m$. $F_n \not\approx F_m$.

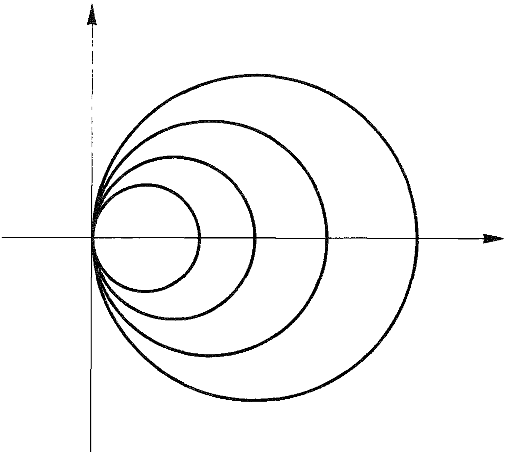


Figura 11.2

14. Sia $Y \subset \mathsf{R}^3$ il cilindro di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

e Z il cono di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Dimostrare che Y e Z non sono omeomorfi.

15. Dimostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ e $\mathrm{O}(n)$ sono sconnessi.

16. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^3 sono connessi:

$$A = \{(1,0,t) : 0 \le t \le 1\} \cup \{(x_1,x_2,0) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1,x_2,1) : x_1^2 + x_2^2 = 1\};$$

$$B = A \setminus \{(1,0,1)\};$$

$$C = A \setminus \{(0,1,0)\};$$

$$D = \{(1,0,t) : 0 < t < 1\} \cup \{(x_1,x_2,1) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

17. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^2 sono connessi:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 = nx_1,\ \ x_1 > 0,\ \ x_2 > 0,\ \ n \text{ intero tale che } 1 \le n \le 3\};$$

$$B = A \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 = 1\};$$

$$C = A \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 = 0\};$$

$$D = A \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_1 \le 0,\ \ x_2 < 0\}.$$

18. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^3 sono connessi:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1,\ \ (x_1,x_2) \neq (0,0)\};$$

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1,\ \ x_1 + x_2 + x_3 \neq 0\};$$

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : 1/2 < \|\mathbf{x}\| < 1,\ \ x_1 \neq 0\};$$

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1,\ \ (x_1,x_2) \neq (0,0) \neq (x_1,x_3),\ \ (x_2,x_3) \neq (0,0)\}.$$

19. Siano $Z_1 = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : \|\mathbf{x} - (1,0)\| < 1\}$,

$$Z_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : \|\mathbf{x} - (-1,0)\| < 1\};$$

dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^2 sono connessi:

$$A = Z_1 \cup Z_{-1};$$

$$B = A \cup \{(0,0)\};$$

$$C = A \cup \{(-2,0), (2,0)\};$$

$$D = A \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 = 1\};$$

$$E = A \cup \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

12 Connessione per archi

Un *arco*, in uno spazio topologico X, è un'applicazione continua a: $\mathbf{I} \to X$ dell'intervallo chiuso e limitato $\mathbf{I} = [0, 1]$ in X. I punti $a(0)$, $a(1) \in X$ si dicono *gli estremi di a*, e rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale di a.*

Se per ogni p, $q \in X$ esiste un arco a tale che $a(0) = p$ e $a(1) = q$, X si dice *connesso per archi* (fig. 12.1).

Un *sottoinsieme* Y di uno spazio X si dice *connesso per archi* se come sottospazio è connesso per archi.

Per ogni $n \geq 1$ R^n è connesso per archi. Infatti, se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathsf{R}^n$,

$$a(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

è un arco in R^n di estremi $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ (è il segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$). Analogamente sono connessi per archi i sottoinsiemi convessi di R^n; in particolare i dischi aperti, $\mathbf{D}^n$, $\mathbf{I}^n$, Δ^n sono connessi per archi.

La connessione per archi è una proprietà più forte della connessione:

12.1 PROPOSIZIONE *Uno spazio connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Siano x, $y \in X$. Per ipotesi, esiste un arco $\alpha : \mathbf{I} \to X$ tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Gli elementi x e y appartengono al sottoinsieme connesso $\alpha(\mathbf{I})$ di X: dunque x e y sono connessi in X. Ne segue, per la proposizione 11.8, che X è connesso. ∎

La proposizione 12.1 non si può invertire: esistono spazi connessi che non sono connessi per archi (cfr. esempio 12.6(1)). Dalla proposizione 12.1 segue che uno spazio sconnesso non è connesso per archi.

Un'altra proprietà importante è data dalla seguente proposizione (si noti l'analogìa con la proposizione 11.5):

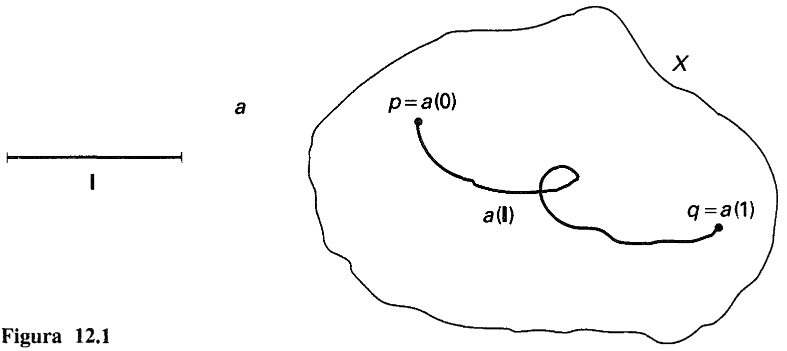


Figura 12.1

12.2 PROPOSIZIONE *Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e se Z è un sottoinsieme connesso per archi di X, $f(Z)$ è un sottoinsieme connesso per archi di Y.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, se $f : X \to Y$ è continua e suriettiva e X è connesso per archi, allora Y è connesso per archi.

Siano y_1, y_2 due punti qualsiasi di Y; per la suriettività di f esistono $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Sia $a : \mathbf{I} \to X$ un arco in X di estremi x_1 e x_2. Allora $f \cdot a : \mathbf{I} \to Y$ è un arco in Y e

$$(f \cdot a)(0) = y_1, \quad (f \cdot a)(1) = y_2. \ \blacksquare$$

12.3 COROLLARIO

(a) *La connessione per archi è una proprietà topologica.*

(b) *Uno spazio quoziente di uno spazio connesso per archi è connesso per archi.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

L'analogia tra connessione per archi e connessione si ha anche per il concetto di "componenti connesse per archi" di uno spazio, che ora definiremo.

Sia dato uno spazio topologico X; introduciamo in X una relazione binaria ε ponendo $x\varepsilon y$ se esiste un arco a in X tale che $a(0) = x$, $a(1) = y$.

È facile verificare che ε è una relazione di equivalenza. La riflessività $x\varepsilon x$ per ogni $x \in X$ segue dal fatto che l'applicazione costante $a : \mathbf{I} \to X$, $a(t) = x$ per ogni $t \in \mathbf{I}$, è un arco. Se $x\varepsilon y$, cioè esiste un arco a tale che $a(0) = x$, $a(1) = y$, allora $y\varepsilon x$ perché $b : \mathbf{I} \to X$ definito da $b(t) = a(1-t)$ è un arco tale che $b(0) = a(1) = y$, $b(1) = a(0) = x$; quindi ε è simmetrica. La transitività: se $x\varepsilon y$, $y\varepsilon z$, allora esistono archi a, b in X tali che

$$a(0) = x, \quad a(1) = y = b(0), \quad b(1) = z.$$

Definiamo $c : \mathbf{I} \to X$ ponendo

$$c(t) = \begin{cases} a(2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ b(2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

c è un arco, e $c(0) = x$, $c(1) = z$, quindi $x\varepsilon z$.

Le classi di ε-equivalenza si chiamano *componenti connesse per archi di X*; la componente connessa per archi contenente un punto $p \in X$ si denota $C_a(p)$. X è connesso per archi se e solo se possiede un'unica componente connessa per archi. Si ha la seguente

12.4 PROPOSIZIONE *Per ogni punto p di uno spazio topologico X, $C_a(p)$ è il più grande sottoinsieme connesso per archi di X contenente p.*

Dimostrazione. Se Y è un sottoinsieme di X connesso per archi contenente p, e $q \in Y$, per definizione esiste un arco a in Y tale che $a(0) = p$, $a(1) = q$. La composizione di a con l'inclusione di Y in X è un arco in X di estremi p e q; quindi $p \varepsilon q$, cioè $q \in C_a(p)$. Ne segue che $Y \subset C_a(p)$.

D'altra parte $C_a(p)$ è connesso per archi. Infatti se $q \in C_a(p)$ esiste un arco a in X tale che $a(0) = p$, $a(1) = q$; per concludere è sufficiente far vedere che a è un arco in $C_a(p)$, cioè che $a(\mathbf{I}) \subset C_a(p)$. Sia $s \in \mathbf{I}$. Definiamo $b_s : \mathbf{I} \to X$ ponendo

$$b_s(t) = a(ts), \quad t \in \mathbf{I}.$$

b_s è un arco in X di estremi p ed $a(s)$; quindi $a(s) \in C_a(p)$; poiché ciò è vero per ogni $s \in \mathbf{I}$ si ha $a(\mathbf{I}) \subset C_a(p)$. ■

Vale anche il seguente

12.5 TEOREMA *Il prodotto topologico di una famiglia qualsiasi di spazi connessi per archi è uno spazio connesso per archi.*

Dimostrazione. Sia $X = \prod_{\mu \in M} X_\mu$, X_μ connesso per archi per ogni $\mu \in M$. Siano $p, q \in X$. Per ogni $\mu \in M$ esiste un arco a_μ in X_μ di estremi $p(\mu)$ e $q(\mu)$, perché X_μ è connesso per archi. Definiamo $a : I \to X$ ponendo

$$a(t)(\mu) = a_\mu(t).$$

Per le proprietà della topologia prodotto, a è un arco in X; inoltre

$$a(0)(\mu) = a_\mu(0) = p(\mu),$$

cioè $a(0) = p$; analogamente $a(1) = q$, quindi X è connesso per archi. ■

12.6 *Esempi*

1. In R^2 consideriamo il sottoinsieme

$$C = \{(1/n, y) : 0 \le y \le 1, \ n \ge 1 \text{ intero}\},$$

e l'intervallo unitario dell'asse x

$$\mathbf{I}_x = \{(x, 0) : 0 \le x \le 1\}.$$

È facile vedere che $\mathbf{I}_x \cup C$ è connesso per archi, e quindi connesso. Si osservi infatti che

$$\mathbf{I}_x \cup C = \bigcup_{n \geq 1} (\mathbf{I}_x \cup C_n),$$

dove

$$C_n = \{(1/n, y) : 0 \leq y \leq 1\}.$$

Poiché ognuno degli insiemi $\mathbf{I}_x \cup C_n$ è connesso per archi e

$$\bigcap_{n \geq 1} (\mathbf{I}_x \cup C_n) = \mathbf{I}_x \cup \left(\bigcap_n C_n \right) = \mathbf{I}_x,$$

dall'esercizio 1 segue l'asserto.

Sia $\mathbf{p} = (0, 1)$. L'insieme

$$X = \{\mathbf{p}\} \cup \mathbf{I}_x \cup C$$

è connesso perché

$$\mathbf{p} \in \overline{\mathbf{I}_x \cup C}$$

(chiaramente $\mathbf{p} \in D(\mathbf{I}_x \cup C)$). D'altra parte X non è connesso per archi; per dimostrarlo sarà sufficiente far vedere che se $a : \mathbf{I} \to X$ è un arco tale che $a(0) = \mathbf{p}$, allora $a(t) = \mathbf{p}$ per ogni $t \in I$.

Il sottoinsieme

$$G = a^{-1}(\mathbf{p}) \subset \mathbf{I}$$

è chiuso perché a è continua. Sia $t_0 \in G$ e $D = D_{1/2}(\mathbf{p})$; per la continuità di a esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$a((t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon)) \subset D \cap X.$$

Ma $a((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon))$ è connesso e contiene $\mathbf{p}$, quindi coincide con $\mathbf{p}$ perché ogni sottoinsieme di $D \cap X$ contenente $\mathbf{p}$ è sconnesso se contiene altri punti. Quindi

$$(t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon) \subset G;$$

ne segue che G è aperto e chiuso in $\mathbf{I}$; dunque $G = \mathbf{I}$ perché $\mathbf{I}$ è connesso.

2. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi in un punto* $p \in X$ se possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi di p. Ciò equivale a dire che per ogni intorno U di p esiste un intorno $V \subset U$ di p tale che

per ogni $q \in V$ esista un arco

$$a_q : \mathbf{I} \to V$$

tale che $a_q(0) = p$, $a_q(1) = q$.

È evidente che se X è localmente connesso per archi in p allora X è localmente connesso in p (cfr. esercizio 11.10)).

X si dice *localmente connesso per archi* se è localmente connesso per archi in ogni suo punto.

Ogni aperto di R^n è localmente connesso per archi, perché i dischi aperti di R^n sono connessi per archi. Ogni varietà topologica è localmente connessa per archi.

Uno spazio discreto con almeno due punti è localmente connesso per archi, ma non è connesso per archi.

Viceversa uno spazio connesso per archi non è necessariamente anche localmente connesso per archi.

Ad esempio si consideri il sottoinsieme $\mathbf{I}_x \cup C \subset \mathsf{R}^2$ dell'esempio 1, e si prenda

$$Y = \overline{\mathbf{I}_x \cup C} = \mathbf{I}_x \cup C \cup \mathbf{I}_y,$$

dove

$$\mathbf{I}_y = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}.$$

Y è connesso per archi perché

$$Y = \bigcup_{n \geq 1} (\mathbf{I}_x \cup C_n) \cup (\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_y),$$

ognuno degli insiemi $\mathbf{I}_x \cup C_n$ e $\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_y$ è connesso per archi e

$$(\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_y) \cap \left[\bigcap_{n \geq 1} (\mathbf{I}_x \cup C_n)\right] = \mathbf{I}_x \neq \emptyset$$

(cfr. esercizio 1).

D'altra parte Y non è localmente connesso in $\mathbf{p} = (0, 1)$ (e quindi non è localmente connesso per archi in $\mathbf{p}$). Infatti ogni intorno di $\mathbf{p}$ della forma

$$D_r(\mathbf{p}) \cap Y, \quad 0 < r < 1$$

non contiene intorni connessi di $\mathbf{p}$ (fig. 12.2).

3. Le componenti connesse per archi di uno spazio topologico non sono chiuse in generale, a differenza di quel che accade per le componenti connesse.

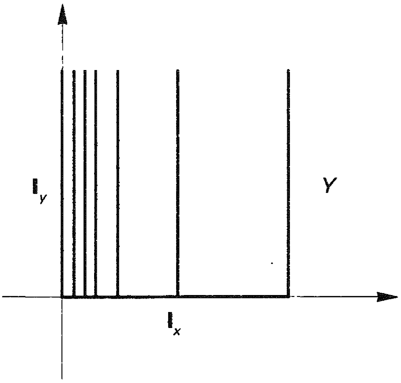


Figura 12.2

Ad esempio lo spazio X dell'esempio 1 si decompone in due componenti connesse per archi:

$$X = \{\mathbf{p}\} \cup (\mathbf{I}_x \cup C).$$

La componente $\{\mathbf{p}\}$ è chiusa, mentre la componente $\mathbf{I}_x \cup C$ non è chiusa perché $\mathbf{p}$ è aderente a $\mathbf{I}_x \cup C$.

Esercizi

1. Dimostrare che l'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi per archi di uno spazio topologico X aventi un punto in comune è connessa per archi.

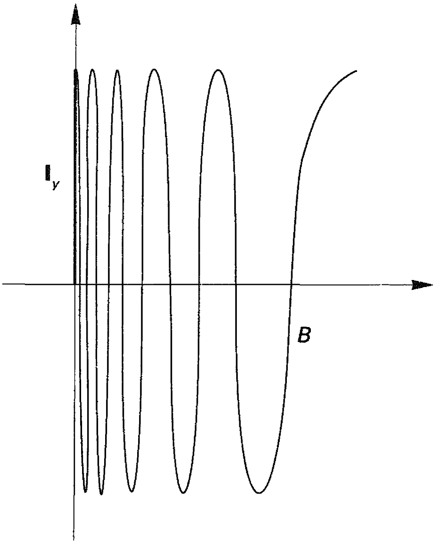


Figura 12.3

2. Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di R^n, $n \geq 2$, sono connessi per archi:

$$\{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n > 0\}; \ \mathbf{S}^{n-1}; \ \{\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n : x_n \neq 0\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

3. Dimostrare che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi X è connesso per archi.
4. Dimostrare che ogni aperto connesso di R^n è connesso per archi.
5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di R^2:

$$\mathbf{I}_y = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}, \ B = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, \ y = \cos(\pi/x)\}.$$

Si dimostri che $X = \mathbf{I}_y \cup B$ è connesso ma non connesso per archi (vedi fig. 12.3).

Capitolo 4

Omotopia, gruppo fondamentale e rivestimenti

13 Omotopia di applicazioni continue

In questo capitolo studieremo l'omotopia, che è una relazione di equivalenza tra applicazioni continue di importanza fondamentale in topologia, e ne daremo diverse applicazioni. Denoteremo come al solito con $\mathbf{I}$ l'intervallo chiuso $[0,1]$ di R.

Siano X e Y due spazi topologici e $f_0, f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue; una *omotopia tra* f_0 *e* f_1 è un'applicazione continua:

$$F : X \times \mathbf{I} \to Y$$

tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$. Se un'omotopia F esiste diciamo che f_0 *è omotopa a* f_1 e scriviamo $F : f_0 \simeq f_1$, o più semplicemente $f_0 \simeq f_1$.

Nella pratica risulta essere più utile la seguente nozione più generale. Siano A un sottoinsieme di X e $f_0, f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue tali che $f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in A$; una *omotopia tra* f_0 *e* f_1 *relativa ad* A è un'omotopia $F : f_0 \simeq f_1$ tale che

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a)$$

per ogni $a \in A$, $t \in \mathbf{I}$. Se F esiste diciamo che f_0 *è omotopa a* f_1 *relativamente ad* A e scriviamo $F : f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\, A} f_1$, o più semplicemente $f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\, A} f_1$. Ovviamente prendendo $A = \emptyset$ si riottiene la nozione di omotopia.

13.1 LEMMA *Siano X e Y due spazi topologici e A un sottoinsieme di X. Nell'insieme delle applicazioni continue di X in Y la relazione $\simeq_{\mathrm{rel}\, A}$ è di equivalenza. In particolare l'omotopia è un relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. La riflessività si dimostra prendendo $F(x,t) = f(x)$ per ogni $f : X \to Y$. Se $F : f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\, A} f_1$ allora $G : f_1 \simeq_{\mathrm{rel}\, A} f_0$, dove $G(x,t) = F(x, 1-t)$:

quindi la relazione è simmetrica. Per dimostrare la transitività supponiamo $F : f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\,A} f_1$ e $G : f_1 \simeq_{\mathrm{rel}\,A} f_2$; allora:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \qquad x \in X$$

definisce un'omotopia tra f_0 e f_2 relativa ad A. ∎

Se $f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\,A} f_1$ diremo che *f_0 e f_1 sono omotope relativamente ad A* (oppure che *sono omotope* se $A = \emptyset$). Intuitivamente f_0 e f_1 sono omotope se è possibile deformare con continuità f_0 in f_1: infatti un'omotopia è essenzialmente una famiglia di applicazioni continue $F_t : X \to Y$, $t \in \mathbf{I}$, dove $F_t(x) = F(x,t)$ per ogni $x \in X$.

13.2 *Esempi*

1. Siano f, $g : X \to \mathsf{R}^m$ due applicazioni continue da uno spazio X in R^m. Ponendo

$$F(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x))$$

si definisce un'omotopia tra f e g. In particolare $F(\mathbf{x},t) = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ definisce un'omotopia $F : \mathsf{R}^n \times \mathbf{I} \to \mathsf{R}^n$ tra l'applicazione costante $c_{\mathbf{y}}$ (dove $\mathbf{y} \in \mathsf{R}^n$ è un punto fissato) e l'identità 1_{R^n}.

2. Sia Y uno spazio topologico. Un'applicazione continua $f : \mathbf{S}^1 \to Y$ è omotopa a un'applicazione costante se e solo se f si estende a un'applicazione continua $g : \mathbf{D}^2 \to Y$. Supponiamo infatti che g esista: allora ponendo $F(\mathbf{x},t) = g(t\mathbf{x})$ si ottiene un'omotopia $F : c_{g(0)} \simeq f$. Se viceversa esiste un'omotopia $F : c_p \simeq f$ per qualche $p \in Y$ l'applicazione $g : \mathbf{D}^2 \to Y$ definita da

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} F\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\|\right) & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ p & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

è continua e estende f.

Due spazi topologici X e Y si dicono *omotopicamente equivalenti* (oppure *dello stesso tipo di omotopia*) se esistono applicazioni continue $f : X \to Y$, $f' : Y \to X$ tali che

$$f' \cdot f \simeq 1_X, \quad f \cdot f' \simeq 1_Y.$$

Le applicazioni f e f' si dicono *equivalenze omotopiche tra X e Y una inversa dell'altra.*

13.3 LEMMA *L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza tra spazi topologici.*

Dimostrazione. La riflessività e la simmetria sono ovvie per definizione. Dimostriamo la transitività. Siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ equivalenze omotopiche, di inverse omotopiche $g' : Z \to Y$ e $f' : Y \to X$. Quindi esistono omotopie:

$$F : f' \cdot f \simeq 1_X, \quad F' : f \cdot f' \simeq 1_Y$$

$$G : g' \cdot g \simeq 1_Y, \quad G' : g \cdot g' \simeq 1_Z.$$

Si ottiene un'omotopia $H : (f' \cdot g') \cdot (g \cdot f) \simeq 1_X$ ponendo

$$H(x,t) = \begin{cases} f'(G(f(x), 2t)) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(x, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Un'omotopia $H' : (g \cdot f) \cdot (f' \cdot g') \simeq 1_Z$ è invece data da:

$$H'(z,t) = \begin{cases} g(F'(g'(z), 2t)) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G'(z, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \blacksquare \end{cases}$$

Ovviamente se X e Y sono omeomorfi allora X e Y sono anche omotopicamente equivalenti, ma non vale il viceversa. Ad esempio R^n, $n \geq 1$, non è omeomorfo a un punto $\{\mathbf{p}\}$ ma è omotopicamente equivalente a $\{\mathbf{p}\}$. Definiamo infatti

$$f : \{\mathbf{p}\} \to \mathsf{R}^n$$

ponendo $f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, e sia $g : \mathsf{R}^n \to \{\mathbf{p}\}$. Allora $g \cdot f = 1_{\{\mathbf{p}\}}$ mentre un'omotopia $F : f \cdot g \simeq 1_{\mathsf{R}^n}$ è data da $F(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x}$. Quindi f e g sono equivalenze omotopiche.

Uno *spazio topologico* si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente a un punto. Dalla verifica precedente segue che R^n è contraibile.

13.4 *Esempio*

$\mathbf{S}^{n-1}$ e $\mathsf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ sono omotopicamente equivalenti per ogni $n \geq 2$. Infatti l'inclusione $\iota : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathsf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ e l'applicazione $\sigma : \mathsf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{S}^{n-1}$ definita da $\sigma(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ sono equivalenze omotopiche: un'omotopia $F : \iota \cdot \sigma \simeq 1_{\mathsf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}}$ è data da $F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} e^{(t-1)\ln\|\mathbf{x}\|}$.

Esercizi

1. Siano x, y punti di uno spazio topologico X. Dimostrare che le applicazioni costanti c_x, $c_y : \mathbf{I} \to X$ sono omotope se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.

2. Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'applicazione 1_X è omotopa a un'applicazione costante di X in se stesso.
3. Dimostrare che un sottospazio convesso di R^n è contraibile. In particolare $\mathbf{D}^n$, $\mathbf{I}^n$, Δ^n sono contraibili.
4. Dimostrare che uno spazio contraibile è connesso per archi.

14 Il gruppo fondamentale

In questo paragrafo vedremo come, utilizzando la nozione di omotopia, sia possibile associare ad ogni spazio topologico un gruppo. Le proprietà algebriche di questo gruppo riflettono le proprietà topologiche dello spazio.

Siano X uno spazio topologico e f, $g : \mathbf{I} \to X$ due archi tali che $f(1) = g(0)$. La *composizione*, o *prodotto di f per g*, è l'arco $f * g$ così definito:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Due *archi* f, $g : \mathbf{I} \to X$ si dicono *equivalenti*, e si scrive $f \sim g$, se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. In particolare se $f \sim g$ allora $f(0) = g(0)$ ed $f(1) = g(1)$ (fig. 14.1).

14.1 LEMMA *Siano f_0, g_0, f_1, $g_1 : \mathbf{I} \to X$ archi tali che $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$. Se $f_0(1) = g_0(0)$, allora $f_1(1) = g_1(0)$ e $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Dimostrazione. L'affermazione $f_1(1) = g_1(0)$ è ovvia. Siano

$$F : f_0 \simeq_{\text{rel}\,\{0,1\}} f_1, \quad G : g_0 \simeq_{\text{rel}\,\{0,1\}} g_1.$$

Allora:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, t) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotopia $f_0 * g_0 \simeq_{\text{rel}\,\{0,1\}} f_1 * g_1$ (fig. 14.2). ■

Fissiamo un punto $x_0 \in X$. Chiameremo *cappi di base* x_0 gli archi chiusi di punto iniziale e finale x_0. Denotiamo con $\pi_1(X, x_0)$ l'*insieme delle classi di equivalenza di cappi di base* x_0. Se f è un cappio di base x_0 denoteremo con $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ la sua classe di equivalenza.

Si noti che, dati f, g cappi di base x_0, la composizione $f * g$ è definita ed è ancora un cappio di base x_0. Pertanto, dati $[f]$, $[g] \in \pi_1(X, x_0)$, definiamo il loro *prodotto* nel modo seguente:

$$[f][g] = [f * g].$$

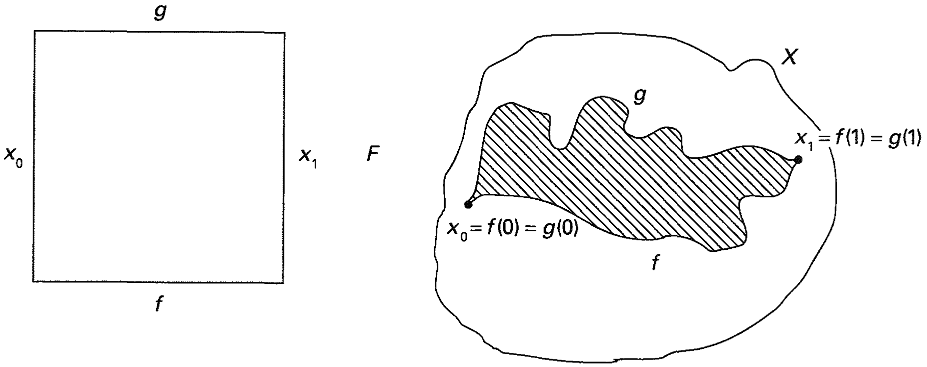

g
x_0
x_1
f
F
X
g
$x_1 = f(1) = g(1)$
$x_0 = f(0) = g(0)$
f

Figura 14.1

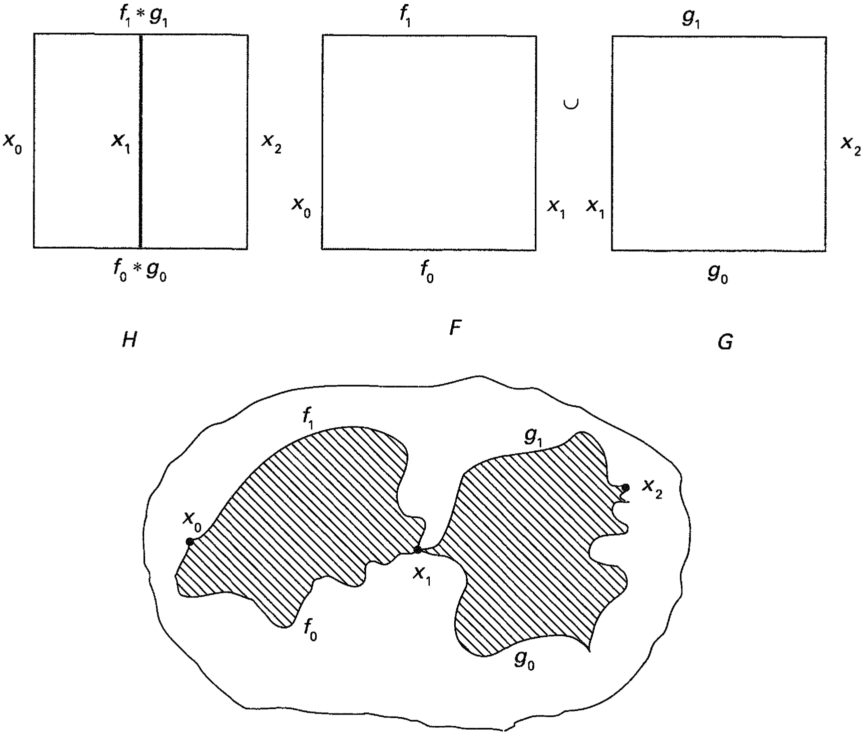

$f_1 * g_1$
x_0
x_1
x_2
$f_0 * g_0$
H
f_1
x_0
x_1
f_0
F
∪
g_1
x_1
x_2
g_0
G
f_1
g_1
x_0
x_2
x_1
f_0
g_0

Figura 14.2

Per il lemma precedente quest'operazione è ben definita.

14.2 PROPOSIZIONE *Sia $c_{x_0} : \mathbf{I} \to X$ il cappio costante di base x_0 ed f, g, h cappi di base x_0. Allora:*

(a) $(f * g) * h \sim f * (g * h)$;

(b) $c_{x_0} * f \sim f \sim f * c_{x_0}$;

(c) $f * f^0 \sim c_{x_0} \sim f^0 * f$, *dove $f^0 : \mathbf{I} \to X$ è il cappio di base x_0 così definito:*

$$f^0(s) = f(1 - s), \quad s \in \mathbf{I}.$$

Dimostrazione

(a) Per definizione

$$[(f * g) * h](s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq 1/4 \\ g(4s - 1) & 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ h(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$[f * (g * h)](s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(4s - 2) & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ h(4s - 3) & 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Un'omotopia $F : (f * g) * h \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} f * (g * h)$ è data da:

$$F(s,t) = \begin{cases} \dfrac{f(4s)}{1 + t} & 0 \leq s \leq \dfrac{1 + t}{4} \\ g(4s - t - 1) & \dfrac{1 + t}{4} \leq s \leq \dfrac{2 + t}{4} \\ \dfrac{h(4s - t - 2)}{2 - t} & \dfrac{2 + t}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Quest'omotopia è illustrata dalla figura 14.3.

(b) Dimostreremo che $c_{x_0} * f \sim f$ lasciando al lettore il compito di dimostrare in modo simile che $f \sim f * c_{x_0}$. Definiamo:

$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq s \leq \dfrac{1 - t}{2} \\ \dfrac{f(2s + t - 1)}{1 + t} & \dfrac{1 - t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Otteniamo così un'omotopia $F : c_{x_0} * f \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} f$ che è illustrata dalla figura 14.4.

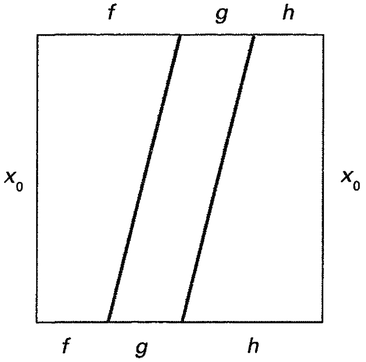


Figura 14.3

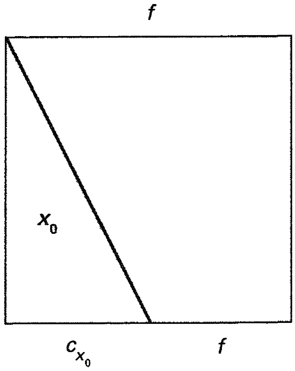


Figura 14.4

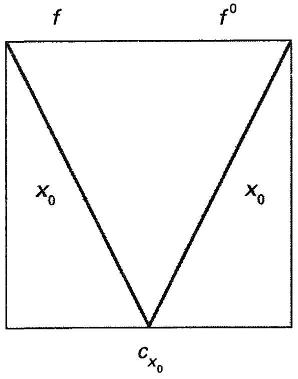


Figura 14.5

(c) Poiché $(f^0)^0 = f$ è sufficiente dimostrare una delle due affermazioni. Dimostreremo che $c_{x_0} \sim f * f^0$. Per definizione

$$(f * f^0)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ f(2-2s) & 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

L'applicazione

$$F(s,t) = \begin{cases} f(2st) & 0 \le s \le 1/2 \\ f((2-2s)t) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

è un'omotopia $c_{x_0} \simeq_{\text{rel}\{0,1\}} f * f^0$ (fig. 14.5). ■

14.3 COROLLARIO *Rispetto al prodotto, $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo il cui elemento neutro è $[c_{x_0}]$ e in cui $[f]^{-1} = [f^0]$ per ogni $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata della proposizione 14.2. ■

$\pi_1(X, x_0)$ si chiama *gruppo fondamentale*, o *primo gruppo di omotopia, di X con punto base* x_0.

Se X è dotato della topologia discreta, in particolare se $X = \{x_0\}$ consiste di un solo punto, allora $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ è ridotto al solo elemento neutro. Più in generale segue subito dalla definizione che

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C_a(x_0), x_0)$$

($C_a(x_0)$ è la componente connessa per archi di x_0).

Se x_0 e x_1 sono due punti di X, che relazione c'è tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$? Se x_0 e x_1 appartengono a componenti connesse per archi distinte allora non c'è alcuna relazione tra i due gruppi fondamentali perché, come già osservato, essi dipendono solo dalle rispettive componenti connesse per archi. Nel caso in cui invece x_0 e x_1 siano estremi di uno stesso arco i due gruppi sono isomorfi, come ora dimostreremo.

14.4 PROPOSIZIONE *Siano x_0, $x_1 \in X$ e supponiamo che esista un arco $\alpha : \mathbf{I} \to X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ ed $\alpha(1) = x_1$. Allora l'applicazione:*

$$\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

definita da:

$$\pi_\alpha([f]) = [\alpha^0 * f * \alpha]$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Lasciamo al lettore il compito di dimostrare che π_α è ben definita utilizzando il lemma 14.1. Se $[f]$, $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ si ha:

$$\pi_\alpha([f][g]) = \pi_\alpha([f * g]) = [\alpha^0 * f * g * \alpha] =$$
$$= [\alpha^0 * f * \alpha * \alpha^0 * g * \alpha] = [\alpha^0 * f * \alpha][\alpha^0 * g * \alpha] = \pi_\alpha([f])\pi_\alpha([g])$$

e quindi π_α è un omomorfismo di gruppi. Inoltre si verifica immediatamente che l'omomorfismo

$$\pi_{\alpha^0} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

soddisfa

$$(\pi_{\alpha^0} \cdot \pi_\alpha)([f]) = [f] \quad \text{per ogni } [f] \in \pi_1(X, x_0)$$
$$(\pi_\alpha \cdot \pi_{\alpha^0})[g] = [g] \quad \text{per ogni } [g] \in \pi_1(X, x_1)$$

e quindi π_α e π_{α^0} sono isomorfismi uno inverso dell'altro. ■

Una conseguenza immediata della proposizione 14.4 è che se X è uno spazio connesso per archi allora $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ sono gruppi isomorfi per ogni x_0, $x_1 \in X$; quindi, a meno di isomorfismo, si può parlare del *gruppo fondamentale di* X senza far riferimento a un punto base. Va osservato che l'isomorfismo π_α definito dalla proposizione precedente non è canonicamente definito ma dipende dall'arco α (cfr. esercizio 4). Se però $\pi_1(X, x_0)$ è commutativo allora l'isomorfismo π_α è indipendente da α (cfr. esercizio 6).

Uno *spazio topologico* X si dice *semplicemente connesso* se X è connesso per archi e ha gruppo fondamentale ridotto al solo elemento neutro. Il più ovvio esempio di spazio semplicemente connesso è uno spazio costituito da un solo punto. Vedremo nel prossimo paragrafo che ogni spazio contraibile è semplicemente connesso; in particolare lo sono R^n e $\mathbf{D}^n$.

Esercizi

1. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che dati due archi f, $g : \mathbf{I} \to X$ tali che $f(0) = x_0 = g(0)$, $f(1) = g(1)$ si ha $f \sim g$ se e solo se $f * g^0 \sim c_{x_0}$, dove $g^0(s) = g(1-s)$, $s \in \mathbf{I}$.

2. Sia X uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ un'applicazione continua tale che $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$. Dimostrare che per ogni arco $f : \mathbf{I} \to X$ si ha $f^0 \sim f \circ \varphi$.

3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se f, g, $h : \mathbf{I} \to X$ sono tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$ allora $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

4. Sia X uno spazio topologico, x_0, $x_1 \in X$ e α, $\beta : \mathbf{I} \to X$ due archi tali che $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$, $\alpha(1) = x_1 = \beta(1)$. Dimostrare che

$$\pi_{\beta^0} \cdot \pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

coincide con l'automorfismo interno

$$[f] \to [\alpha * \beta^0]\ ^{1}[f][\alpha * \beta^0].$$

5. Sia X uno spazio topologico e siano x_0, $x_1 \in X$ e α, $\beta : \mathbf{I} \to X$ come nell'esercizio precedente. Dimostrare che se $\alpha \sim \beta$ allora $\pi_\alpha = \pi_\beta$.

6. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se x_0, $x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo

$$\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

è indipendente dall'arco $\alpha : \mathbf{I} \to X$ di estremi x_0 ed x_1 se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.

7. Dimostrare che un sottospazio convesso $V \subset \mathsf{R}^n$ è semplicemente connesso. (*Suggerimento.* Se f, $g : \mathbf{I} \to V$ sono cappi di base $\mathbf{v} \in V$ si definisca $F : f \simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}} g$ ponendo $F(s,t) = f(s) + t(g(s) - f(s))$).

15 Proprietà funtoriali del gruppo fondamentale

Il gruppo fondamentale non sarebbe di alcuna utilità se non avesse la proprietà di essere compatibile con le applicazioni continue, nel senso che ora spiegheremo.

Consideriamo due spazi X, Y e un'applicazione continua $\psi : X \to Y$. Sia $x_0 \in X$; definiamo un'applicazione:

$$\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$$

ponendo

$$\psi_*([f]) = [\psi \cdot f].$$

È facile verificare che l'applicazione ψ_* è ben definita (la verifica è lasciata al lettore).

15.1 TEOREMA *Siano X, Y e Z spazi topologici e $x_0 \in X$.*

(a) *Per ogni $\psi : X \to Y$ continua l'applicazione*

$$\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$$

è un omomorfismo di gruppi.

(b) *Siano $\psi : X \to Y$, $\varphi : Y \to Z$ applicazioni continue. Si ha:*

$$(\varphi \cdot \psi)_* = \varphi_* \cdot \psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, (\varphi \cdot \psi)(x_0))$$

dove $\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ e $\varphi_* : \pi_1(Y, \psi(x_0)) \to \pi_1(Z, (\varphi \cdot \psi)(x_0))$.

(c) $(1_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *è l'omomorfismo identità.*

Dimostrazione

(a) $\psi_*([f][g]) = \psi_*([f * g]) = [\psi \cdot (f * g)] = [(\psi \cdot f) * (\psi \cdot g)] = [\psi \cdot f][\psi \cdot g] = = \psi_*([f])\psi_*([g])$.

Le proprietà (b) e (c) sono ovvie. ■

Le (a), (b) e (c) del teorema 15.1 si dicono *proprietà funtoriali del gruppo fondamentale*. Se $\psi : X \to Y$ è un'applicazione continua e $x_0 \in X$ chiameremo $\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ *l'omomorfismo indotto da* ψ.

15.2 COROLLARIO *Se $\psi : X \to Y$ è un omeomorfismo e $x_0 \in X$, l'omomorfismo indotto $\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \psi(x_0))$ è un isomorfismo. In particolare, due spazi connessi per archi aventi gruppi fondamentali non isomorfi non sono omeomorfi.*

Dimostrazione. Dalle (b) e (c) del teorema 15.1 segue che

$$(\psi^{-1})_* \cdot \psi_* = (1_X)_* = 1_{\pi_1(X.x_0)}$$

$$\psi_* \cdot (\psi^{-1})_* = (1_Y)_* = 1_{\pi_1(Y,\psi(x_0))}$$

e quindi ψ_* e $(\psi^{-1})_*$ sono isomorfismi uno inverso dell'altro. ■

L'ultima asserzione del corollario è particolarmente importante. Essa fornisce infatti un criterio sufficiente affinché due spazi siano omeomorfi. Purtroppo il gruppo fondamentale è in generale difficile da calcolare e quindi il corollario 15.2 in molti casi non può essere applicato.

Cercheremo di aggirare questa difficoltà studiando la relazione tra gruppo fondamentale e omotopia di applicazioni continue. Utilizzeremo il seguente lemma.

15.3 LEMMA *Sia X uno spazio topologico e $E : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ un'applicazione continua. Poniamo $f(t) = E(0,t)$, $g(t) = E(1,t)$, $h(s) = E(s,0)$, $k(s) = E(s,1)$. Allora:*

$$f^0 * h * g \simeq_{\text{rel}\,\{0,1\}} k$$

Dimostrazione. Poniamo $x_0 = k(0)$, $x_1 = k(1)$ e definiamo $G : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ nel modo seguente:

$$G(s,t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq s \leq t/3 \\ f(1+t-3s) & t/3 \leq s \leq 1/3 \\ E(3s-1,t) & 1/3 \leq s \leq 2/3 \\ g(t+3s) & 1/3 \geq 1-s \geq t/3 \\ x_1 & 1-s \leq t/3. \end{cases}$$

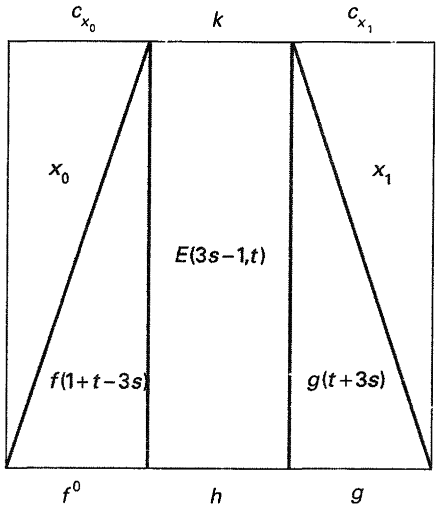


Figura 15.1

È immediato verificare che $G : f^0 * h * g \simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}} k$. L'omotopia G è illustrata dalla figura 15.1. ■

15.4 PROPOSIZIONE *Siano X, Y spazi topologici, φ, $\psi : X \to Y$ applicazioni continue e $F : X \times \mathbf{I} \to Y$ un'omotopia tra φ e ψ. Siano $x_0 \in X$ e $\alpha : \mathbf{I} \to Y$ l'arco di estremi $\varphi(x_0)$ e $\psi(x_0)$ definito da $\alpha(t) = F(x_0, t)$, $t \in \mathbf{I}$. Si ha un diagramma commutativo di omomorfismi:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
& \pi_1(Y, \psi(x_0))
\end{tikzcd}$$

In particolare φ_* è un isomorfismo (rispettivamente iniettiva, suriettiva) se e solo se ψ_* è un isomorfismo (rispettivamente iniettiva, suriettiva).

Dimostrazione. Sia $f : \mathbf{I} \to X$ un cappio di base x_0 e sia $E : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ l'applicazione continua definita da: $E(s,t) = F(f(s),t)$. Si ha:

$$E(s,0) = (\varphi \cdot f)(s), \quad E(s,1) = (\psi \cdot f)(s)$$

$$E(0,t) = \alpha(t) = E(1,t).$$

Per il lemma 15.3

$$\psi_*([f]) = [\psi \cdot f] = [\alpha^0 * (\varphi \cdot f) * \alpha] = \pi_\alpha(\varphi_*([f])). \ ■$$

15.5 COROLLARIO *Siano X, Y spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo per ogni $x_0 \in X$.*

Dimostrazione. Sia $\psi : Y \to X$ un'inversa omotopica di φ. Dalla proposizione 15.4 applicata a $\psi \cdot \varphi$ e 1_X si deduce che

$$(\psi \cdot \varphi)_* = \psi_* \cdot \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(X_0))),$$

dove $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(X, \psi(\varphi(X_0)))$ è un isomorfismo: pertanto φ_* è iniettiva e ψ_* è suriettiva. Applicando ancora la proposizione 15.4 a $\varphi \cdot \psi$ e 1_Y si deduce che

$$(\varphi \cdot \psi)_* = \varphi_* \cdot \psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(X_0)))),$$

dove ora $\varphi_* : \pi_1(X, \psi(\varphi(X_0))) \to \pi_1(Y, \varphi(\psi(\varphi(X_0))))$ è un isomorfismo. In particolare ψ_* è iniettiva. Segue che ψ_* è un isomorfismo. Ma allora anche

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

dev'essere un isomorfismo. ■

Quindi il gruppo fondamentale di uno spazio topologico è invariante per equivalenza omotopica oltre che per omeomorfismo. In particolare abbiamo:

15.6 COROLLARIO *Ogni spazio contraibile è semplicemente connesso.*

Un'altra utile conseguenza della proposizione 15.4 è il seguente

15.7 COROLLARIO *Supponiamo che* $\varphi : X \to Y$ *sia un'applicazione continua omotopa a un'applicazione costante. Allora* $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ *è l'omomorfismo nullo per ogni* $x_0 \in X$.

Dimostrazione. Immediata. ∎

16 Esempi ed applicazioni

Fino a ora gli unici spazi di cui abbiamo calcolato il gruppo fondamentale sono quelli contraibili, che abbiamo visto essere semplicemente connessi.

Il primo esempio di spazio non semplicemente connesso di cui calcoleremo il gruppo fondamentale è $\mathbf{S}^1$. Consideriamo l'applicazione continua

$$E : \mathsf{R} \to \mathbf{S}^1$$

data da $E(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathsf{R}$, dove abbiamo identificato $\mathbf{S}^1$ all'insieme dei numeri complessi di modulo 1. E è anche un omomorfismo di gruppi. Inoltre E è aperta ed è un omeomorfismo locale. Più precisamente per ogni $x \in \mathsf{R}$ l'intervallo aperto $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ viene mandato da E omeomorficamente su $\mathbf{S}^1 \backslash \{-E(x)\}$. Denoteremo con

$$\xi_x : \mathbf{S}^1 \backslash \{-E(x)\} \to \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$$

l'omeomorfismo inverso.

Utilizzeremo i seguenti due lemmi.

16.1 LEMMA (di sollevamento) *Se* α *è un arco in* $\mathbf{S}^1$ *di punto iniziale* 1, *esiste un unico arco* α' *in* R *di punto iniziale* 0 *tale che* $E \cdot \alpha' = \alpha$. α' *è chiamato* sollevamento di α a R.

Dimostrazione

Esistenza. Poiché $\mathbf{I}$ è compatto e α è continua, possiamo suddividere $\mathbf{I}$ in sottointervalli $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che si abbia

$|\alpha(t)-\alpha(t')| < 1$ per ogni t, $t' \in [t_{i-1}, t_i]$, e quindi tali che $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ sia contenuto in $\mathbf{S}^1 \backslash \{-\alpha(t_{i-1})\}$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. In particolare $\alpha([0, t_1])$ è contenuto in $\mathbf{S}^1 \backslash \{-1\}$ e possiamo quindi definire un'applicazione continua $\alpha_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathsf{R}$ come la composizione di $\alpha_{|[0,t_1]}$ con $\xi_0 : \mathbf{S}^1 \backslash \{-1\} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; evidentemente $\alpha_1(0) = 0$ e $E \cdot \alpha_1 = \alpha_{|[0,t_1]}$. Procediamo per induzione su i: supponiamo di aver definito $\alpha_i : [0, t_i] \rightarrow \mathsf{R}$ continua tale che $\alpha_i(0) = 0$ e $E \cdot \alpha_i = \alpha_{|[0,t_i]}$. Se $i \leq n-1$ possiamo definire $\alpha_{i+1} : [0, t_{i+1}] \rightarrow \mathsf{R}$ continua come l'incollamento di α_i con la composizione di $\alpha_{|[t_i,t_{i+1}]}$ con

$$\xi_{\alpha_i(t_i)} : \mathbf{S}^1 \backslash \{-\alpha(t_i)\} \rightarrow \left(\alpha_i(t_i) - \frac{1}{2},\ \alpha_i(t_i) + \frac{1}{2}\right).$$

Evidentemente $\alpha_{i+1}(0) = 0$ e $E \cdot \alpha_{i+1} = \alpha_{|[0,t_{i+1}]}$. L'arco $\alpha' = \alpha_n$ ha le proprietà volute.

Unicità. Supponiamo che α' e α'' siano due archi in R tali che $\alpha'(0) = \alpha''(0) = 0$ e $E \cdot \alpha' = E \cdot \alpha'' = \alpha$. L'arco $\alpha' - \alpha'' : \mathbf{I} \rightarrow \mathsf{R}$ soddisfa $E \cdot (\alpha' - \alpha'')(t) = 1$ per ogni t, e pertanto si ha $(\alpha' - \alpha'')(\mathbf{I}) \subset \mathsf{Z}$. Ma poiché $\mathbf{I}$ è connesso $\alpha' - \alpha''$ dev'essere costante, e da $\alpha'(0) = \alpha''(0)$ segue $\alpha' = \alpha''$. ■

16.2 LEMMA (di sollevamento dell'omotopia) *Se α e β sono due archi in $\mathbf{S}^1$ di punto iniziale* 1 *tali che esista un'omotopia*

$$F : \alpha \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} \beta$$

allora esiste un'unica omotopia $F' : \alpha' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} \beta'$ tale che $E \cdot F' = F$.

Dimostrazione

Esistenza. Sia $F_t : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}^1$ la restrizione di $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}^1$ a $\mathbf{I} \times \{t\}$. F_t è un arco in $\mathbf{S}^1$ di punto iniziale 1, e quindi, per il lemma 16.1, possiede un unico sollevamento a un arco $F_t' : \mathbf{I} \rightarrow \mathsf{R}$ di punto iniziale 0. Definiamo $F' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathsf{R}$ ponendo $F'(s,t) = F_t'(s)$. Si ha $E \cdot F' = F$.

Resta da dimostrare che F' è continua. Poiché F è continua e $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ è compatto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|F(y) - F(y')| < 1$ per ogni y, $y' \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ tali che $|y - y'| < \varepsilon$. Da ciò segue che esistono $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che per ogni $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, si abbia

$$F([s_{j-1}, s_j] \times [t_{i-1}, t_i]) \subset \mathbf{S}^1 \backslash \{-F(s_{j-1}, t_{i-1})\}.$$

Per ogni $i = 1, \ldots, n$ l'insieme $F'([0, s_1] \times [t_{i-1}, t_i])$ è connesso perché gli insiemi $F'([0, s_1] \times \{t\}) = F_t'([0, s_1])$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, sono connessi e contengono $F'(0, t) = 0$; ma allora

$$F'([0, s_1] \times [t_{i-1}, t_i]) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

e quindi la restrizione di F' a $[0, s_1] \times [t_{i-1}, t_i]$ coincide con la composizione $\xi_0 \cdot F_{|[0,s_1]\times[t_{i-1},t_i]}$, che è continua. Per incollamento segue che $F'_{|[0,s_1]\times \mathbf{I}}$ è continua. Procediamo per induzione: supponiamo di aver dimostrato che $F'_{|[0,s_j]\times \mathbf{I}}$ è continua per qualche $1 \leq j \leq m-1$. Per ogni $i = 1, \dots, n$ $F'([s_j, s_{j+1}] \times [t_{i-1}, t_i])$ è un sottoinsieme connesso di R perché gli insiemi $F'([s_j, s_{j+1}] \times \{t\}) = F'_t([s_j, s_{j+1}])$ sono connessi e intersecano $F'(\{s_j\} \times [t_{i-1}, t_i])$ che è connesso per l'ipotesi induttiva. Ma allora

$$F'([s_j, s_{j+1}] \times [t_{i-1}, t_i]) \subset \left(F'(s_j, t_{i-1}) - \frac{1}{2},\ F'(s_j, t_{i-1}) + \frac{1}{2}\right)$$

e quindi, come nel caso precedente, segue che la restrizione $F'_{|[s_j,s_{j+1}]\times[t_{i-1},t_i]}$ è continua; per incollamento deduciamo che $F'_{|[0,s_{j+1}]\times \mathbf{I}}$ è continua e il passo induttivo è dimostrato. Quindi F' è continua. F' è un'omotopia tra α' e β' perché $F'(s, 0) = F'_0(s) = \alpha'(s)$, $F'(s, 1) = F'_1(s) = \beta(s)$; per definizione $F'(0, t) = 0$ per ogni $t \in \mathbf{I}$; inoltre $F'(1, t)$ è contenuto in $E^{-1}(\alpha(1))$ perché $F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$, e dalla connessione di $\{1\} \times \mathbf{I}$ segue che F' è costante su $\{1\} \times \mathbf{I}$: quindi $F' : \alpha' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} \beta'$.

Unicità. Sia $F'' : \alpha' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} \beta'$ un'altra omotopia tale che $E \cdot F'' = F$. Per ogni $t \in \mathbf{I}$ la restrizione di F'' a $\mathbf{I} \times \{t\}$ deve coincidere con il sollevamento F'_t di F_t, e quindi $F'' = F'$. ∎

Dalla dimostrazione del lemma 16.2 segue immediatamente il seguente:

16.3 COROLLARIO *Per ogni arco α in $\mathbf{S}^1$, il punto finale $\alpha'(1)$ del sollevamento α' dipende solo dalla classe di omotopia relativa a $\{0, 1\}$ di α.*

16.4 TEOREMA $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \cong \mathsf{Z}$.

Dimostrazione. Definiamo un'applicazione

$$\delta : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \mathsf{Z}$$

ponendo $\delta([f]) = f'(1)$. Per il corollario 16.3 δ è ben definita. Inoltre δ è un omomorfismo: se $[f]$, $[g] \in \pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$, sia $g'' : \mathbf{I} \to \mathsf{R}$ l'arco definito da $g''(t) = f'(1) + g'(t)$, $t \in \mathbf{I}$. Si ha $E \cdot g'' = g$, e quindi l'arco $f' * g''$ è il sollevamento di $f * g$ e

$$\delta([f][g]) = \delta([f * g]) = (f' * g'')(1) = f'(1) + g'(1) = \delta([f]) + \delta([g]).$$

δ è suriettiva: per ogni $n \in \mathsf{Z}$ sia $\sigma'_n : \mathbf{I} \to \mathsf{R}$ definito da $\sigma'_n(t) = nt$. Allora $\sigma_n := E \cdot \sigma'_n$ soddisfa $\delta([\sigma_n]) = n$.

δ è iniettiva: se $\delta([f]) = 0$, allora f' è un cappio in R. Poiché R è semplicemente connesso $f' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} c_0$, e quindi $f \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} c_1$, cioè $[f] = [c_1]$. ∎

In particolare vediamo che $\mathbf{S}^1$ non è semplicemente connessa. Poiché $\mathbf{S}^1$ è omotopicamente equivalente a $\mathsf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, si ha anche:

$$\pi_1(\mathsf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, (1,0)) \cong \mathsf{Z}.$$

Per calcolare il gruppo fondamentale di altri spazi topologici è utile la seguente proposizione:

16.5 PROPOSIZIONE *Siano X, Y spazi topologici e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Si ha un isomorfismo:*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Dimostrazione. Le proiezioni $p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$ inducono omomorfismi:

$$p_{X_*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$$

$$p_{Y_*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$

che definiscono un omomorfismo:

$$(p_{X_*}, p_{Y_*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Per dimostrare che questo è un isomorfismo verifichiamo che possiede un inverso. Per ogni $([f], [g]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ definiamo un cappio $f \times g$ in $X \times Y$ di base (x_0, y_0) ponendo $(f \times g)(s) = (f(s), g(s))$, $s \in \mathbf{I}$. È facile verificare che l'applicazione:

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

che manda $([f], [g])$ in $[f \times g]$ è ben definita ed è l'inversa di (p_{X_*}, p_{Y_*}). ∎

Abbiamo il seguente immediato

16.6 COROLLARIO

(a) *Il gruppo fondamentale del toro $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ è isomorfo a Z^2.*

(b) *Il gruppo fondamentale del cilindro $\mathsf{R} \times \mathbf{S}^1$ è isomorfo a Z.*

In particolare il toro ed il cilindro non sono semplicemente connessi e non sono omeomorfi tra loro.

Un sottospazio X dello spazio Y si dice un *ritratto* di Y se esiste un'applicazione continua $\rho : Y \to X$ la cui restrizione a X sia l'identità, cioè sia tale che $\rho \cdot \iota = 1_X$, dove $\iota : X \to Y$ è l'inclusione; un'applicazione ρ siffatta si dice una *retrazione* di Y su X.

16.7 TEOREMA $\mathbf{S}^1$ *non è un ritratto di* $\mathbf{D}^2$.

Dimostrazione. Sia $\iota : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{D}^2$ l'inclusione. Se esistesse una retrazione $\rho : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ si avrebbe:

$$\rho_* \cdot \iota_* = (1_{\mathbf{S}^1})_* = 1_{\pi_1(\mathbf{S}^1, 1)} : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbf{D}^2, 1) \to \pi_1(\mathbf{S}^1, 1).$$

Ma ciò è impossibile perché $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \cong \mathsf{Z}$, mentre $\pi_1(\mathbf{D}^2, 1)$ è banale essendo $\mathbf{D}^2$ semplicemente connesso. ■

16.8 COROLLARIO (Teorema del punto fisso di Brouwer) *Ogni applicazione continua* $f : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ *ha almeno un punto fisso, cioè soddisfa* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *per qualche* $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^2$.

Dimostrazione. Se esistesse una $f : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ priva di punti fissi sarebbe possibile definire una retrazione $g : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{S}^1$ ponendo $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, dove $\mathbf{y}$ è il punto di intersezione di $\mathbf{S}^1$ con la retta $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle$ più vicino ad $\mathbf{x}$ (fig. 16.1). ■

Il teorema precedente si estende a $\mathbf{D}^n$ per ogni $n \geq 1$, cioè si dimostra che ogni applicazione continua $f : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$ possiede un punto fisso. Una versione differenziabile di questo teorema sarà dimostrata nel paragrafo 45 (teorema 45.4). Questi risultati sono a loro volta casi particolari di altri "teoremi di punto fisso" (quali ad esempio il teorema del punto fisso di Lefschetz; cfr. Guillemin e Pollack 1974) i quali affermano che, sotto opportune ipotesi, un'applicazione continua di uno spazio in se stesso possiede un punto fisso.

I teoremi del punto fisso sono interessanti perché hanno svariate applicazioni in matematica. Il seguente risultato ne è un esempio.

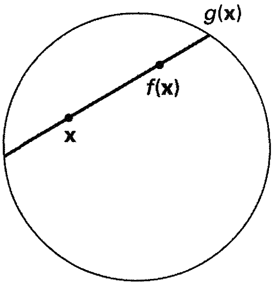


Figura 16.1

16.9 TEOREMA *Sia A una matrice 3×3 ad elementi numeri reali positivi. Allora A possiede un autovalore reale positivo.*

Dimostrazione. Sia $D = \mathbf{S}^2 \cap \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0\}$. D è omeomorfo a $\mathbf{D}^2$ e quindi, per il teorema di Brouwer, ogni applicazione continua di D in sé ha un punto fisso. Sia $F : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A. Se $\mathbf{x} \in D$ allora $F(\mathbf{x})$ ha tutte le coordinate positive per l'ipotesi su A e perché le coordinate di $\mathbf{x}$ sono tutte non negative. Quindi ponendo $f(\mathbf{x}) = \dfrac{F(\mathbf{x})}{\|F(\mathbf{x})\|}$ si definisce un'applicazione continua $f : D \to D$. Sia $\mathbf{v} \in D$ un punto fisso di f; si ha:

$$\|F(\mathbf{v})\|\mathbf{v} = F(\mathbf{v})$$

e quindi $\mathbf{v}$ è un autovettore di F con autovalore $\|F(\mathbf{v})\| > 0$. ■

Il prossimo risultato che dimostreremo è utile per calcolare il gruppo fondamentale in molti casi. Esso è un caso particolare del teorema di Van Kampen, il quale esprime il gruppo fondamentale di uno spazio della forma $X = U \cup V$, con U, V aperti, in termini dei gruppi fondamentali di U, V e $U \cap V$. La dimostrazione del teorema di Van Kampen va però al di là degli scopi di questo testo; il lettore interessato può consultare Greenberg (1967).

16.10 TEOREMA *Sia $X = U \cup V$, con U, V aperti semplicemente connessi e tali che $U \cap V$ sia connesso per archi. Allora X è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in U \cap V$ e sia $f : \mathbf{I} \to X$ un cappio di base x_0. Sarà sufficiente dimostrare che f è equivalente a un cappio interamente contenuto in U. Per la compattezza di $\mathbf{I}$ esistono $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $f([t_{i-1}, t_i])$ sia contenuto in U o in V. Scegliamo una suddivisione siffatta tale che il numero n sia il minimo possibile.

Allora $f(t_i) \in U \cap V$ per ogni i. Supponiamo infatti che ad esempio $f(t_i) \notin U$: allora $f([t_{i-1}, t_i])$ e $f([t_i, t_{i+1}])$ sono contenuti in V, e quindi anche $f([t_{i-1}, t_{i+1}]) \subset V$; ma allora possiamo omettere t_i dalla suddivisione, e ciò contraddice la minimalità di n.

Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $f_i : \mathbf{I} \to X$ l'arco ottenuto riparametrizzando la restrizione di f a $[t_{i-1}, t_i]$, cioè definito come $f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i)$. Per costruzione f_i è un arco interamente contenuto in U oppure in V. Facciamo vedere che se f_i non è contenuto in U allora è equivalente ad un arco contenuto in U.

Poiché gli estremi di f_i appartengono a $U \cap V$, per la connessione per archi di $U \cap V$ esistono archi a, b in $U \cap V$ tali che $a(0) = x_0$, $a(1) = f_i(0)$, e $b(0) = x_0$, $b(1) = f_i(1)$ (fig. 16.2).

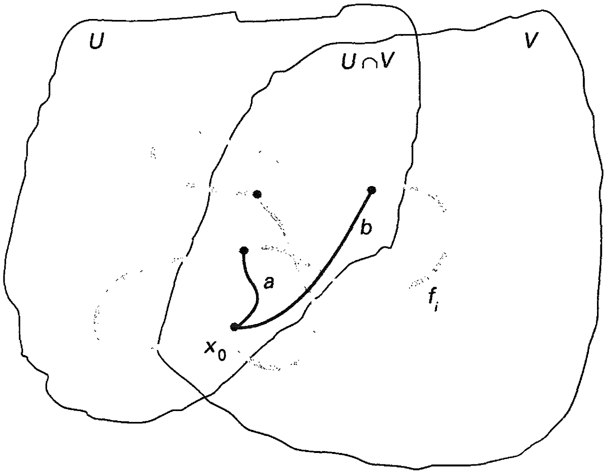


Figura 16.2

La composizione $a * f_i * b^0$ è un cappio in V di base x_0; per la semplice connessione di V questo cappio è equivalente in V, e quindi anche in X, al cappio costante c_{x_0}; pertanto f_i è equivalente in X all'arco $a^0 * b$, che è interamente contenuto in U, essendo addirittura contenuto in $U \cap V$. Sia $F_i : f_i \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} a^0 * b$ un'omotopia che realizza l'equivalenza. Riparametrizzando e incollando le F_i otteniamo un'applicazione $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ così definita:

$$F(s,t) = F_i\left(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}},\ t\right) \qquad s \in [t_{i-1}, t_i].$$

Per costruzione F è un'omotopia rel $\{0,1\}$ tale che $F(s,0) = f(s)$, e $F(s,1) \in U$ per ogni $s \in \mathbf{I}$. ■

16.11 COROLLARIO *La sfera $\mathbf{S}^n$ è semplicemente connessa per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Sia $0 < \varepsilon \leq 1$, e siano

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^n : x_{n+1} > -\varepsilon\}, \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^n : x_{n+1} < \varepsilon\}.$$

U e V sono aperti di $\mathbf{S}^n$ semplicemente connessi perché omeomorfi a $\mathbf{D}^n$, e $U \cap V$ è connesso per archi. Dal teorema 16.10 segue che $\mathbf{S}^n$ è semplicemente connessa. ■

Terminiamo questo paragrafo con una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra che utilizza l'omotopia.

16.12 TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$ possiede una radice in* $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $a_n = 1$, cioè che $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + Z^n$ sia monico di grado effettivo $n \geq 1$. Sia:

$$Q(T) = \frac{a_0}{c^n} + \frac{a_1}{c^{n-1}} T + \ldots + \frac{a_{n-1}}{c} T^{n-1} + T^n$$

dove $c \in \mathrm{C}$ è una costante non nulla. Per ogni $t \in \mathrm{C}$ si ha:

$$P(ct) = c^n Q(t)$$

e quindi un numero complesso t è radice di $Q(T)$ se e solo se ct è radice di $P(Z)$. Pertanto ai fini della dimostrazione del teorema non è restrittivo sostituire $P(Z)$ con il polinomio $Q(T)$; inoltre se scegliamo c in modo che $|c| \gg 0$ i coefficienti di $Q(T)$ soddisfano:

$$\left|\frac{a_0}{c^n}\right| + \left|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right| + \ldots + \left|\frac{a_{n-1}}{c}\right| < 1.$$

Pertanto, salvo sostituire $P(Z)$ con $Q(T)$ per un opportuno c, possiamo supporre che $P(Z)$ soddisfi la condizione:

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| < 1.$$

Faremo vedere che $P(Z)$ possiede una radice nel disco unitario $\mathbf{D}^2$. Supponiamo per assurdo che $P(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{D}^2$. Allora P definisce un'applicazione continua

$$p : \mathbf{D}^2 \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$$

la cui restrizione a $\mathbf{S}^1$

$$q : \mathbf{S}^1 \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$$

è omotopa a una costante (cfr. esempio 13.2(2)). Per ogni $(z, t) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$ poniamo:

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0).$$

Si ha

$$|F(z,t)| \geq |z^n| - |t(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0)| \geq$$

$$\geq 1 - t(|a_{n-1} z^{n-1}| + \ldots + |a_0|) =$$

$$= 1 - t(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|) > 0.$$

Pertanto $F : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{I} \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$ definisce un'omotopia tra l'applicazione $z^n : \mathbf{S}^1 \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$ e q, e quindi z^n è omotopa a una costante. D'altra parte $z^n : \mathbf{S}^1 \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$ è la composizione di $z^n : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ con l'inclusione $\mathbf{S}^1 \to \mathrm{C} \backslash \{0\}$: la prima applicazione induce l'omomorfismo

$$\pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbf{S}^1, 1),$$

"moltiplicazione per n", che è diverso da zero, mentre l'inclusione $\mathbf{S}^1 \to \mathsf{C}\setminus\{0\}$ induce un isomorfismo di gruppi fondamentali perché è un'equivalenza omotopica; quindi

$$(z^n)_* : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathsf{C}\setminus\{0\}, 1)$$

è non nullo e z^n non è omotopa ad una costante. Abbiamo ottenuto una contraddizione e il teorema è dimostrato. ■

17 Rivestimenti

Un'applicazione continua di spazi topologici $p : R \to X$ è un *rivestimento* se è suriettiva e se ogni $x \in X$ possiede un intorno aperto U_x tale che $p^{-1}(U_x)$ sia unione disgiunta di aperti ognuno dei quali viene mandato da p omeomorficamente su U_x. Un aperto U_x con tale proprietà si dice *ben ricoperto.*

È ovvio che ogni rivestimento è un omeomorfismo locale. Il viceversa è falso perché un omeomorfismo locale non è in generale suriettivo: ad esempio un'immersione aperta $A \subset X$ è un omeomorfismo locale ma non è un rivestimento se $A \neq X$. L'applicazione $E : \mathsf{R} \to \mathbf{S}^1$, $E(x) = e^{2\pi i x}$, è un rivestimento; la sua restrizione a un qualsiasi aperto proprio di R è un omeomorfismo locale ma non è un rivestimento.

Un altro esempio di rivestimento è la proiezione naturale $\tau : \mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$.

Il lemma seguente descrive alcune proprietà generali dei rivestimenti.

17.1 LEMMA *Sia $p : R \to X$ un rivestimento.*

(a) *Per ogni aperto $U \subset X$, la restrizione $p_U : p^{-1}(U) \to U$ è un rivestimento.*

(b) *Se Y è una componente connessa di R e X è connesso e localmente connesso, la restrizione $q : Y \to X$ è un rivestimento.*

(c) *Per ogni $x \in X$ $p^{-1}(x)$ è un sottospazio discreto di R.*

(d) *Se X è connesso e localmente connesso e se per qualche $x \in X$ $p^{-1}(x)$ è un insieme finito costituito da n punti, ciò è vero per ogni altro punto $x' \in X$. Il numero n si dice* grado *del rivestimento p.*

Dimostrazione

(a) è lasciata al lettore.

(b) Dalla definizione di rivestimento segue che anche R è localmente connesso.

Poiché Y è aperto in R (cfr. esercizio 11.10) e p è aperta, $p(Y)$ è aperto in X. D'altra parte, sia $x \in \overline{p(Y)}$ e sia U_x un intorno connesso di x ben ricoperto. Si ha $p^{-1}(U_x) \cap Y \neq \emptyset$ perché $U_x \cap p(Y) \neq \emptyset$ e quindi Y contiene qualche componente connessa di $p^{-1}(U_x)$ che viene mandata da p omeomorficamente su U_x. In particolare $x \in p(Y)$, cioè $p(Y)$ è anche chiuso. Poiché X è connesso, $p(Y) = X$, cioè q è suriettiva. L'esistenza di intorni ben ricoperti di ogni punto si verifica subito.

(c) Sia $U \subset X$ un aperto ben ricoperto contenente x. Ogni $r \in p^{-1}(x)$ è contenuto in un aperto V_r mandato da p omeomorficamente su U, e quindi non contenente alcun altro $r' \in p^{-1}(x)$.

(d) Sia $Z \subset X$ il sottoinsieme costituito dai punti $z \in X$ tali che $p^{-1}(z)$ consiste di n punti. $Z \neq \emptyset$ perché $x \in Z$. Sia $z \in Z$ e U_z un intorno connesso di z ben ricoperto. Poiché $p^{-1}(z)$ consiste di n punti, $p^{-1}(U_z)$ possiede n componenti connesse, e quindi $p^{-1}(z')$ consiste di n punti per ogni $z' \in U_z$ cioè $U_z \subset Z$: pertanto Z è aperto. D'altra parte, se $t \in \overline{Z}$, e se U_t è un intorno connesso di t ben ricoperto, $U_t \cap Z \neq \emptyset$ e quindi, ragionando come prima, si deduce che $U_t \subset Z$: in particolare $t \in Z$ e quindi Z è anche chiuso. Poiché X è connesso, si ha $Z = X$, cioè l'asserto. ∎

Per comodità, nel seguito di questo paragrafo considereremo coppie (X, x_0) costituite da uno spazio topologico X e da un suo punto x_0; chiameremo una coppia siffatta *spazio topologico puntato* (o *con punto base*); *un'applicazione continua* (un *omeomorfismo*, un *rivestimento*, ecc.) *di spazi topologici puntati* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'applicazione continua (un omeomorfismo, un rivestimento, ecc.) $f : X \to Y$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Dimostreremo una serie di risultati che mettono in relazione il gruppo fondamentale di uno spazio con i suoi rivestimenti. La teoria che svilupperemo è basata su opportune generalizzazioni dei lemmi 16.1 e 16.2.

17.2 TEOREMA (di unicità del sollevamento) *Siano* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento e* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *un'applicazione continua di spazi topologici puntati con* Y *connesso. Se esiste un'applicazione continua* $f' : (Y, y_0) \to (R, r_0)$ *tale che* $p \cdot f' = f$ *(cioè un* sollevamento *di* f*), essa è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f'' : (Y, y_0) \to (R, r_0)$ sia un altro sollevamento di f. Siano

$$A = \{y \in Y : f'(y) = f''(y)\}$$

$$B = \{y \in Y : f'(y) \neq f''(y)\}.$$

Si ha $Y = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, e $A \neq \emptyset$ essendo $y_0 \in A$. Dimostreremo che sia A che B sono aperti: da ciò seguirà che $B = \emptyset$ e che $A = Y$ perché Y è connesso.

Sia $\bar{y} \in Y$ e sia $U \subset X$ un intorno aperto di $f(\bar{y})$ ben ricoperto. Se $\bar{y} \in A$ il punto $f'(\bar{y}) = f''(\bar{y})$ appartiene a un aperto V di R mandato da p omeomorficamente su U; sia $q : U \to V$ l'omeomorfismo inverso. Allora $f'^{-1}(V) \cap f''^{-1}(V)$ è un intorno aperto di $\bar{y}$ contenuto in A perché per ogni $y \in f'^{-1}(V) \cap f''^{-1}(V)$ si ha:

$$f'(y) = q(f(y)) = f''(y);$$

pertanto A è aperto.

Se $\bar{y} \in B$ allora i punti $f'(\bar{y})$ ed $f''(\bar{y})$ di R appartengono ad aperti disgiunti V' e V'' rispettivamente, mandati da p omeomorficamente su U. Allora $f'^{-1}(V') \cap f''^{-1}(V'')$ è un intorno aperto di $\bar{y}$ contenuto in B, e quindi B è aperto. ■

17.3 TEOREMA (di sollevamento degli archi) *Siano* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento e* α *un arco in* X *di punto iniziale* x_0. *Esiste un unico arco* α'_{r_0} *in* R *di punto iniziale* r_0 *tale che* $p \cdot \alpha'_{r_0} = \alpha$; α'_{r_0} *si dice* sollevamento *di* α.

Dimostrazione

Esistenza. Supponiamo dapprima che X sia ben ricoperto; sia $V \subset R$ un aperto contenente r_0 mandato da p omeomorficamente su X e sia $q : X \to V$ l'omeomorfismo inverso. Allora $\alpha' = q \cdot \alpha$ è un sollevamento di α.

Passiamo al caso generale. Poiché $\mathbf{I}$ è compatto ed α è continua, possiamo suddividere $\mathbf{I}$ in sottointervalli $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tali che $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ sia contenuto in un intorno ben ricoperto di $\alpha(t_{i-1})$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ragionando come nella prima parte della dimostrazione vediamo che esiste $\alpha_1 : [t_0, t_1] \to R$ continua tale che $\alpha_1(0) = r_0$ e $p \cdot \alpha_1 = \alpha_{|[0,t_1]}$. Procediamo per induzione su i: supponiamo di aver definito $\alpha_i : [0, t_i] \to R$ continua tale che $\alpha_i(0) = r_0$ e $p \cdot \alpha_i = \alpha_{|[0,t_i]}$. Nuovamente, ragionando come nella prima parte della dimostrazione possiamo sollevare $\alpha_{|[t_i,t_{i+1}]}$ a un'applicazione continua $\sigma_i : [t_i, t_{i+1}] \to R$ tale che $\sigma_i(t_i) = \alpha_i(t_i)$ e $p \cdot \sigma_i = \alpha_{|[t_i,t_{i+1}]}$. Incollando α_i con σ_i otteniamo $\alpha_{i+1} : [0, t_{i+1}] \to R$ continua tale che $\alpha_{i+1}(0) = r_0$ e $p \cdot \alpha_{i+1} = \alpha_{|[0,t_{i+1}]}$. Allora l'arco $\alpha' = \alpha_n$ è un sollevamento di α.

Unicità. Segue dal teorema 17.2. ■

Ovviamente il sollevamento α'_{r_0} dipende dal punto iniziale r_0. Per ogni altra scelta di $r \in p^{-1}(x_0)$ il teorema fornisce un diverso sollevamento α'_r di α di punto iniziale r.

17.4 TEOREMA (di sollevamento dell'omotopia) *Siano* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento,* α *un arco in* X *di punto iniziale* x_0 *ed* $\alpha' = \alpha'_{r_0}$ *il sollevamento di* α. *Per ogni omotopia* $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to X$ *tale che* $F(s, 0) = \alpha(s)$ *per ogni* $s \in \mathbf{I}$ *esiste un'unica omotopia* $F' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to R$ *tale che* $p \cdot F' = F$ *e* $F'(s, 0) = \alpha'(s)$ *per ogni* $s \in \mathbf{I}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella del lemma 16.2. Per ogni $s\in\mathbf{I}$ sia $F_s:\mathbf{I}\to X$ l'arco di punto iniziale $\alpha(s)$ definito da $F_s(t)=F(s,t)$. Per il teorema 17.3 esiste un unico sollevamento $F'_s:\mathbf{I}\to R$ di F_s tale che $F'_s(0)=\alpha'(s)$. Definiamo $F':\mathbf{I}\times\mathbf{I}\to R$ ponendo $F'(s,t)=F'_s(t)$ per ogni $(s,t)\in\mathbf{I}\times\mathbf{I}$. L'applicazione F' soddisfa $p\cdot F'=F$ e $F'(s,0)=\alpha'(s)$ per ogni $s\in\mathbf{I}$; inoltre F' è unica con queste proprietà, per l'unicità dei sollevamenti F'_s. Resta da verificare che F' è continua.

Poiché $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ è compatto e F è continua, anche $F(\mathbf{I}\times\mathbf{I})$ è compatto; gli aperti ben ricoperti di X costituiscono una base, e quindi esiste una famiglia finita di aperti ben ricoperti $\{U_1,\dots,U_N\}$ che ricopre $F(\mathbf{I}\times\mathbf{I})$. Gli aperti $F^{-1}(U_1),\dots,F^{-1}(U_N)$ ricoprono $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$. Siano $0=s_0<s_1<\dots<s_m=1$ e $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ tali che per ogni $j=1,\dots,m$, $i=1,\dots,n$ si abbia $[s_{j-1},s_j]\times[t_{i-1},t_i]\subset F^{-1}(U_k)$ per qualche k.

Per ogni $j=1,\dots,m$, $F'([s_{j-1},s_j]\times[0,t_1])$ è un sottoinsieme connesso di R perché gli insiemi $F'(\{s\}\times[0,t_1])=F'_s([0,t_1])$, $s\in[s_{j-1},s_j]$, sono connessi e intersecano l'insieme connesso $F'([s_{j-1},s_j]\times\{0\})=\alpha'([s_{j-1},s_j])$. Quindi, avendosi:

$$p(F'([s_{j-1},s_j]\times[0,t_1]))=F([s_{j-1},s_j]\times[0,t_1])\subset U_k$$

per qualche k, $F'([s_{j-1},s_j]\times[0,t_1])$ è contenuto in un aperto V_k mandato da p omeomorficamente su U_k; pertanto:

$$F'_{|[s_{j-1},s_j]\times[0,t_1]}=(p_{|V_k})^{-1}\cdot F_{|[s_{j-1},s_j]\times[0,t_1]}$$

è continua. Per incollamento segue che $F'_{|\mathbf{I}\times[0,t_1]}$ è continua. Per induzione supponiamo di aver dimostrato che $F'_{|\mathbf{I}\times[0,t_i]}$ è continua per qualche $1\le i\le n-1$. Per ogni $j=1,\dots,m$, $F'([s_{j-1},s_j]\times[t_i,t_{i+1}])$ è un sottoinsieme connesso di R perché i sottoinsiemi

$$F'(\{s\}\times[t_i,t_{i+1}])=F'_s([t_i,t_{i+1}]),\qquad s\in[s_{j-1},s_j],$$

sono connessi e intersecano $F'([s_{j-1},s_j]\times\{t_i\})$, anch'esso connesso per l'ipotesi induttiva. Da ciò segue come prima che $F'_{|[s_{j-1},s_j]\times[t_i,t_{i+1}]}$ è continua, e per incollamento anche $F'_{|\mathbf{I}\times[t_i,t_{i+1}]}$ lo è. Di nuovo per incollamento deduciamo che $F'_{|\mathbf{I}\times[0,t_{i+1}]}$ è continua, e quindi F' è continua. ■

17.5 COROLLARIO *Siano $p:(R,r_0)\to(X,x_0)$ un rivestimento e α, β due archi in X di punto iniziale x_0. Se $\alpha\simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}}\beta$ allora i loro sollevamenti soddisfano $\alpha'_{r_0}\simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}}\beta'_{r_0}$. In particolare $\alpha'_{r_0}(1)=\beta'_{r_0}(1)$.*

Dimostrazione. Sia $F:\alpha\simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}}\beta$ un'omotopia relativa e sia $F':\mathbf{I}\times\mathbf{I}\to R$ il suo sollevamento. Si ha $F'(s,0)=\alpha'(s)$ per ogni $s\in\mathbf{I}$; inoltre $F'(0,t)=r_0$ per ogni $t \in \mathbf{I}$ perché $F'_0 : \mathbf{I} \to R$ è il sollevamento dell'arco costante $F_0 : \mathbf{I} \to X$, $F_0(t) = F(0,t) = x_0$; similmente $F'(1,t) = \alpha'_{r_0}(1)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$ perché $F'_1 : \mathbf{I} \to R$ è il sollevamento dell'arco costante $F_1 : \mathbf{I} \to X$, $F_1(t) = F(1,t) = \alpha(1)$. Quindi F' è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$. Inoltre $F'(s,1) = \beta'_{r_0}(s)$ per ogni $s \in \mathbf{I}$ perché $F'(0,1) = r_0$ e $F(s,1) = \beta(s)$. Quindi $F' : \alpha'_{r_0} \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} \beta'_{r_0}$. ■

17.6 COROLLARIO *Se $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento, l'omomorfismo indotto $p_* : \pi_1(R, r_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Se f' è un cappio in R di base r_0 tale che $p \cdot f' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} c_{x_0}$, cioè tale che $p_*([f']) = [c_{x_0}]$, allora segue dal corollario 17.5 che $f' \simeq_{\mathrm{rel}\,\{0,1\}} c_{r_0}$, cioè $[f'] = [c_{r_0}]$. ■

Consideriamo un rivestimento $p : R \to X$ e un cappio $\alpha : \mathbf{I} \to X$ di base un punto $x_0 \in X$. Per ogni $r \in p^{-1}(x_0)$ il sollevamento $\alpha'_r : \mathbf{I} \to R$ è un arco di punto iniziale r il cui punto finale $\alpha'_r(1)$ dipende solo da r e da $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, per il corollario 17.5, e appartiene a $p^{-1}(x_0)$. Si ottiene in questo modo un'applicazione:

$$\begin{aligned} &p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0) \\ &(r, [\alpha]) \mapsto \alpha'_r(1). \end{aligned} \qquad [17.1]$$

17.7 PROPOSIZIONE *Sia $p : R \to X$ un rivestimento e $x_0 \in X$. La [17.1] definisce un'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$:*

$$r[\alpha] = \alpha'_r(1)$$

in cui lo stabilizzatore di un punto $r_0 \in p^{-1}(x_0)$ coincide con il sottogruppo $p_*(\pi_1(R, r_0))$ di $\pi_1(X, x_0)$. L'azione è transitiva se e solo se $p^{-1}(x_0)$ è contenuto in una componente connessa per archi di R.

Dimostrazione. La proprietà $r[c_{x_0}] = r$ per ogni $r \in p^{-1}(x_0)$ è ovvia. La verifica del fatto che $r([\alpha][\beta]) = (r[\alpha])[\beta]$ per ogni $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ e $r \in p^{-1}(x_0)$ è lasciata al lettore.

Affinché $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ stabilizzi il punto $r_0 \in p^{-1}(x_0)$ è necessario e sufficiente che si abbia $\alpha'_{r_0}(1) = r_0$, cioè che α'_{r_0} sia un cappio di base r_0; poiché $\alpha = p \cdot \alpha'_{r_0}$, ciò significa che $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r_0))$. L'ultima asserzione è conseguenza del fatto che ogni arco di estremi due punti $r_0, r_1 \in p^{-1}(x_0)$ è della forma α'_{r_0} per qualche cappio $\alpha : \mathbf{I} \to X$ di base x_0 (la sua proiezione). ■

L'azione descritta dalla proposizione precedente è chiamata *monodromia* del rivestimento p sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. La monodromia associa ad ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ una biezione dell'insieme $p^{-1}(x_0)$ in sé stesso, cioè una permutazione di $p^{-1}(x_0)$.

L'insieme delle permutazioni di $p^{-1}(x_0)$ così ottenute costituisce un sottogruppo del gruppo di tutte le permutazioni di $p^{-1}(x_0)$, che si chiama *gruppo di monodromia del rivestimento* p nel punto x_0.

17.8 COROLLARIO

(a) *Sia* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento di spazi topologici puntati, con* R *connesso per archi. C'è una corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme* $p^{-1}(x_0)$ *e l'insieme delle classi laterali destre di* $p_*(\pi_1(R, r_0))$ *in* $\pi_1(X, x_0)$. *Quindi se* $p^{-1}(x_0)$ *è finito la sua cardinalità è uguale all'indice di* $p_*(\pi_1(R, r_0))$ *in* $\pi_1(X, x_0)$.

(b) *Sia* $p : R \to X$ *un rivestimento tale che* R *sia connesso per archi. Allora tutte le fibre* $p^{-1}(x)$ *hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione

(a) La corrispondenza è indotta dall'azione [17.1] e associa a una classe laterale $p_*(\pi_1(R, r_0))[\alpha]$ l'elemento $r_0[\alpha] = \alpha'_{r_0}(1)$. La biunivocità segue dalla proposizione 17.7.

(b) Siano x_0, $x_1 \in X$, $r_0 \in p^{-1}(x_0)$, $r_1 \in p^{-1}(x_1)$, sia $\alpha' : \mathbf{I} \to R$ un arco tale che $\alpha'(0) = r_0$, $\alpha'(1) = r_1$, e sia $\alpha = p \cdot \alpha' : \mathbf{I} \to X$. È immediato verificare che il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{\alpha'} : \pi_1(R, r_0) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(R, r_1) \arrow[d, "p_*"'] \\
\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_1)
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Pertanto l'isomorfismo π_α manda il sottogruppo $p_*(\pi_1(R, r_0))$ sul sottogruppo $p_*(\pi_1(R, r_1))$, e quindi induce una biezione dell'insieme delle classi laterali destre di $p_*(\pi_1(R, r_0))$ su quello delle classi laterali destre di $p_*(\pi_1(R, r_1))$. ■

Esercizio

1. Siano $p : R \to X$, $q : S \to Y$ rivestimenti. Dimostrare che l'applicazione $p \times q : R \times S \to X \times Y$, $(p \times q)(r, s) = (p(r), q(s))$, è un rivestimento.

18 Rivestimenti universali

Uno spazio topologico T si dice *localmente connesso per archi* se ogni punto $t \in T$ possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi.

In questo paragrafo tutti gli spazi che considereremo si supporranno implicitamente connessi per archi e localmente connessi per archi.

18.1 DEFINIZIONE *Un rivestimento $p : R \to X$ in cui R è semplicemente connesso è detto un* rivestimento universale di X.

Un esempio di rivestimento universale è l'applicazione

$$E : \mathsf{R} \to \mathbf{S}^1, \quad E(x) = e^{2\pi i x}$$

che abbiamo studiato nel paragrafo 16.

18.2 PROPOSIZIONE *Sia $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento universale di spazi topologici puntati. C'è una corrispondenza biunivoca naturale tra $p^{-1}(x_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$.*

Dimostrazione. È un caso particolare del corollario 17.8. ∎

18.3 *Esempio*

Sia $\mathbf{P}^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione $n \geq 2$, e sia $\tau : \mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ la proiezione naturale. τ è un rivestimento e, poiché $\mathbf{S}^n$ è semplicemente connessa, τ è un rivestimento universale. Per ogni $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^n$ la fibra $\tau^{-1}(\mathbf{p})$ consiste di due elementi: segue dalla proposizione 18.2 che $\pi_1(\mathbf{P}^n)$ è un gruppo costituito da due elementi. Quindi $\pi_1(\mathbf{P}^n) \cong \mathsf{Z}/2$. Invece $\mathbf{P}^1$ è omeomorfo a $\mathbf{S}^1$ e quindi $\pi_1(\mathbf{P}^1) \cong \mathsf{Z}$. In particolare $\mathbf{P}^n$ non è semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$.

La proposizione 18.2 mette in evidenza una proprietà importante dei rivestimenti universali. Anche il prossimo risultato ha conseguenze importanti nel caso particolare dei rivestimenti universali.

18.4 TEOREMA *Sia*

$$\begin{tikzcd} & (R, r_0) \arrow[d, "p"] \\ f : (Y, y_0) \arrow[r] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad [18.1]$$

un diagramma di applicazioni continue tra spazi topologici puntati, con p un rivestimento. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) *esiste un sollevamento $g : (Y, y_0) \to (R, r_0)$ di f;*

(b) $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(R, r_0))$.

Dimostrazione

(a) ⇒ (b) Segue dalle proprietà funtoriali del gruppo fondamentale.

(b) ⇒ (a) Definiamo g nel modo seguente. Per ogni $y \in Y$ sia $\alpha : \mathbf{I} \to Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y$; l'arco $f \cdot \alpha : \mathbf{I} \to X$ soddisfa $(f \cdot \alpha)(0) = x_0$, $(f \cdot \alpha)(1) = f(y)$; sia $(f \cdot \alpha)'_{r_0} : \mathbf{I} \to R$ il suo sollevamento di punto iniziale r_0. Poniamo $g(y) = (f \cdot \alpha)'_{r_0}(1)$.

Verifichiamo che g è ben definita. Se $\beta : \mathbf{I} \to Y$ è un altro arco tale che $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y$ allora $\alpha * \beta^0$ è un cappio di base y_0 e $f(\alpha * \beta^0)$ è un cappio in X di base x_0. Per ipotesi $[f(\alpha * \beta^0)] \in p_*(\pi_1(R, r_0))$ e quindi $f(\alpha * \beta^0)$ si solleva a un cappio di base r_0 (proposizione 17.7). Ciò significa che i sollevamenti di $f \cdot \alpha$ e di $f \cdot \beta$ hanno lo stesso punto finale, cioè che $(f \cdot \alpha)'_{r_0}(1) = (f \cdot \beta)'_{r_0}(1)$, e quindi g è ben definita.

g è continua. Sia infatti $y \in Y$, e sia, come nella prima parte della dimostrazione, $\alpha : \mathbf{I} \to Y$ un arco tale che $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y$; sia $U \subset R$ un intorno aperto di $g(y)$, che possiamo supporre essere mandato da p omeomorficamente sull'aperto $p(U)$, e sia $V \subset Y$ un intorno aperto di y connesso per archi tale che $f(V) \subset p(U)$. Per ogni $y' \in V$ esiste un arco $\sigma : \mathbf{I} \to V$ tale che $\sigma(0) = y$, $\sigma(1) = y'$: poiché $\alpha * \sigma$ è un arco di punto iniziale y_0 e finale y', si ha $g(y') = (f(\alpha * \sigma))'_{r_0}(1) = (f \cdot \sigma)'_{g(y)}(1)$, e questo punto appartiene a U perché $f \cdot \sigma$ è contenuto in $p(U)$ e $(f \cdot \sigma)'_{g(y)}(0) \in U$. Quindi $g(V) \subset U$, e pertanto g è continua in y; per l'arbitrarietà di $y \in Y$ ciò dimostra che g è continua. ∎

18.5 COROLLARIO

(a) *Sia dato un diagramma* [18.1] *di applicazioni continue tra spazi topologici puntati, con* p *un rivestimento. Se* Y *è semplicemente connesso allora un sollevamento* g *di* f *esiste.*

(b) *Se* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$, $q : (T, t_0) \to (X, x_0)$ *sono due rivestimenti universali di* X*, esiste un unico omeomorfismo* $\Phi : (R, r_0) \to (T, t_0)$ *tale che* $q \cdot \Phi = p$.

Dimostrazione. La (a) è evidente. Dimostriamo la (b). Il teorema 18.4 applicato prima al rivestimento q e poi al rivestimento p implica l'esistenza di $\Phi : (R, r_0) \to (T, t_0)$ e di $\Psi : (T, t_0) \to (R, r_0)$ tali che $q \cdot \Phi = p$ e $p \cdot \Psi = q$, e quindi tali che $q \cdot \Phi \cdot \Psi = q$, $p \cdot \Psi \cdot \Phi = p$. Per l'unicità del sollevamento (teorema 17.4) applicata ai diagrammi

$$\begin{tikzcd} & (T, t_0) \arrow[d, "q"] \\ q : (T, t_0) \arrow[r] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} & (R, r_0) \arrow[d, "p"] \\ p : (R, r_0) \arrow[r] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

rispettivamente, si ha $\Phi \cdot \Psi = 1_T$, $\Psi \cdot \Phi = 1_R$, e quindi Φ e Ψ sono omeomorfismi inversi uno dell'altro. L'unicità di Φ segue ancora dal teorema 17.4. ■

Dal corollario 18.5(b) segue dunque che un rivestimento universale di uno spazio X, se esiste, è unico a meno di omeomorfismo. Un caso particolare della (a) del corollario 18.5 è la seguente:

18.6 PROPOSIZIONE (Proprietà universale dei rivestimenti universali) *Sia* $p : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento universale. Per ogni rivestimento* $q : (Y, y_0) \to$ $\to (X, x_0)$ *esiste un'unica applicazione continua* $g : (R, r_0) \to (Y, y_0)$ *tale che* $q \cdot g = p$, *e* g *è un rivestimento.*

Dimostrazione. Resta solo da dimostrare che g è un rivestimento; la verifica è un semplice esercizio che lasciamo al lettore. ■

Un caso particolare della proposizione 18.6 è il seguente:

18.7 COROLLARIO *Se* $g : (R, r_0) \to (X, x_0)$ *è un rivestimento, con* X *semplicemente connesso, allora* g *è un omeomorfismo.*

Vogliamo ora occuparci del problema dell'esistenza del rivestimento universale di un dato spazio topologico X.

Osserviamo innanzitutto che se $p : R \to X$ è un rivestimento universale e $V \subset X$ è un aperto ben ricoperto, allora per ogni cappio $\alpha : \mathbf{I} \to V$ esiste un'omotopia rel $\{0, 1\}$ in X tra α e un cappio costante: infatti α si solleva a un cappio α' in R il quale, per la semplice connessione di R, è omotopo rel $\{0, 1\}$ ad un cappio costante e l'omotopia induce un'omotopia in X tra α e un cappio costante. Pertanto X soddisfa la seguente condizione:

Ogni punto $x \in X$ è contenuto in un aperto V tale che ogni cappio di base x contenuto in V è omotopo rel $\{0, 1\}$ in X al cappio costante c_x.

Uno spazio X soddisfacente questa condizione si dice *localmente semplicemente connesso*. Quindi una condizione necessaria affinché X possieda un rivestimento universale è che X sia localmente semplicemente connesso.

18.8 *Esempio*

Sia $X = \bigcup_n C_n \subset \mathbb{R}^2$, dove $C_n \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza di centro il punto $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{n}$ (fig. 18.1). Questo spazio è connesso per archi e localmente connesso per archi, ma non è localmente semplicemente connesso perché la condizione della definizione non è soddisfatta nell'origine. Quindi X non possiede un rivestimento universale.

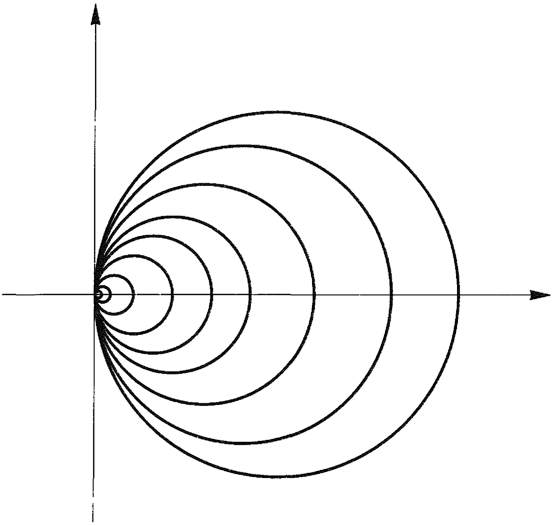


Figura 18.1

Dimostreremo ora un teorema di esistenza per i rivestimenti.

18.9 TEOREMA *Se X è uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso allora X possiede un rivestimento universale.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in X$. Sia $A(X;x_0)$ l'insieme degli archi in X aventi per punto iniziale x_0 e sia "$\sim$" la relazione di equivalenza, già introdotta nel paragrafo 14: $\alpha \sim \beta$ se α e β sono omotopi relativamente a $\{0,1\}$. In particolare se $\alpha \sim \beta$ allora $\alpha(1) = \beta(1)$. Sia $R = \dfrac{A(X;x_0)}{\sim}$ l'insieme quoziente e per ogni $\alpha \in A(X;x_0)$ sia $[\alpha] \in R$ la classe di equivalenza di α. Definiamo $p : R \to X$ ponendo $p([\alpha]) = \alpha(1)$. Introduciamo una topologia in R assegnandone una base nel modo seguente. Per ogni $[\alpha] \in R$ e per ogni aperto $V \subset X$ contenente $p([\alpha])$ sia

$$[\alpha, V] = \{[\alpha * \beta] : \beta \text{ arco in } V \text{ di punto iniziale } \alpha(1)\} \subset R.$$

Ovviamente $\alpha \in [\alpha, V]$ e gli insiemi $[\alpha, V]$ ricoprono R. Inoltre, se $[\beta] \in [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$ allora $[\beta] \in [\beta, V_1 \cap V_2] \subset [\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$; quindi $[\alpha_1, V_1] \cap [\alpha_2, V_2]$ è unione di insiemi $[\alpha, V]$. Pertanto la famiglia di insiemi $\{[\alpha, V]\}$ è base di un'unica topologia su R.

p è continua: sia $U \subset X$ un aperto e sia $\alpha \in p^{-1}(U)$. Allora $[\alpha, U]$ è un aperto di R contenente α e $p([\alpha, U]) \subset U$; dunque p è continua.

p è aperta: infatti $p([\alpha, V])$ è la componente connessa per archi di V contenente $p(\alpha)$: pertanto $p([\alpha, V])$ è aperto in V e quindi in X perché V, come X, è localmente connesso per archi.

p è un rivestimento: sia $x \in X$ e sia U un aperto contenente x, connesso per archi e tale che ogni cappio in U di base x sia omotopo rel $\{0,1\}$ al cappio costante c_x. Per ogni $\alpha \in p^{-1}(U)$ si ha $p([\alpha, U]) = U$. Inoltre se $[\alpha * \beta]$, $[\alpha * \beta'] \in [\alpha, U]$ sono tali che $p([\alpha * \beta]) = p([\alpha * \beta'])$ allora $\beta(1) = \beta'(1)$ e, per la scelta di U, $\beta \simeq_{\mathrm{rel}\{0,1\}} \beta'$; quindi $[\alpha * \beta] = [\alpha * \beta']$. Pertanto la restrizione di p a $[\alpha, U]$ è biunivoca su U oltre che continua ed aperta. Dunque p manda $[\alpha, U]$ omeomorficamente su U. Pertanto, poiché $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta degli aperti $[\alpha, U]$, U è ben ricoperto e quindi p è un rivestimento.

R è connesso per archi. Sia $[c_{x_0}] \in R$ la classe del cappio costante in x_0. È sufficiente costruire, per ogni $[\alpha] \in R$, un arco in R di punto iniziale $[c_{x_0}]$ e punto finale $[\alpha]$. Poniamo $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ per ogni s, $t \in \mathbf{I}$. L'applicazione $\phi_\alpha : \mathbf{I} \to R$, $\phi_\alpha(s) = [\alpha_s]$, soddisfa $\phi_\alpha(0) = [c_{x_0}]$, $\phi_\alpha(1) = [\alpha]$, $p \cdot \phi_\alpha = \alpha$. Inoltre ϕ_α è continua: per ogni $s \in \mathbf{I}$ e per ogni intorno aperto V di $\alpha(s) = p(\phi_\alpha(s))$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha((s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subset V$; si verifica subito che $\phi_\alpha((s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subset [\phi_\alpha(s), V] = [\alpha_s, V]$, e quindi ϕ_α è continua.

R è semplicemente connesso. Sia $\phi : \mathbf{I} \to R$ un cappio di base $[c_{x_0}]$ e sia $\alpha = p \cdot \phi$. Per l'unicità del sollevamento si ha $\phi = \phi_\alpha$. Quindi $[\alpha] = \phi(1) = [c_{x_0}]$ perché ϕ è un cappio. Ne discende che $\alpha \sim c_{x_0}$ e quindi anche ϕ è omotopicamente equivalente al cappio costante di base $[c_{x_0}]$ per l'iniettività di $p_* : \pi_1(R, [c_{x_0}]) \to \pi_1(X, x_0)$. ■

Le ipotesi del teorema 18.8 sono in particolare soddisfatte dalle varietà topologiche connesse. Quindi deduciamo il seguente

18.9 TEOREMA *Ogni varietà topologica connessa possiede un rivestimento universale.*

Ad esempio il toro $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ possiede il rivestimento universale:

$$p : \mathsf{R}^2 \to T^2$$

$$p(x,y) = (E(x), E(y)) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

(cfr. esercizio 17.1).

La sfera $\mathbf{S}^n$, $n \geq 2$, essendo semplicemente connessa, è rivestimento universale di se stessa, cioè ha come rivestimento universale l'identità $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$.

Capitolo 5
Varietà differenziabili

In questo capitolo abbandoneremo la generalità della topologia per passare a considerare le varietà differenziabili studiandone le principali proprietà. La nozione di varietà differenziabile è una delle più importanti di tutta la matematica. Molti degli spazi topologici che abbiamo considerato nei capitoli precedenti sono esempi di varietà differenziabili, e ora li tratteremo in modo diverso utilizzando strumenti del calcolo differenziale di più variabili.

19 Funzioni e applicazioni differenziabili - Varietà

In questo paragrafo introdurremo alcune nozioni di calcolo differenziale di più variabili reali che vengono utilizzate nello studio delle varietà differenziabili. Ci limiteremo ad alcuni richiami che hanno soprattutto lo scopo di fissare notazioni e terminologia. Per maggiori dettagli rinvieremo il lettore ai testi di Analisi Matematica, nei quali questi argomenti vengono sviluppati in modo sistematico e approfondito.

Denoteremo con $u_1, \ldots, u_n$ le funzioni coordinate in R^n. Sia U un aperto di R^n, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, $\mathbf{v} \in \mathsf{R}^n$ e sia $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione. La funzione composta:

$$t \mapsto \mathbf{a} + t\mathbf{v} \mapsto F(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

è definita in un intorno di $0 \in \mathsf{R}$. La sua derivata in 0, cioè il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{a})}{t}$$

se esiste, si dice *derivata direzionale di F in* **a** *nella direzione* **v**, o *rispetto a* **v**, e si denota $\mathbf{v}(F)_\mathbf{a}$.

Se $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, il j-esimo vettore della base canonica, la derivata direzionale $\mathbf{e}_j(F)_{\mathbf{a}}$ si dice *j-esima derivata parziale di F in* $\mathbf{a}$, o anche *derivata parziale di F in* $\mathbf{a}$ *rispetto ad u_j*, e si denota anche $\frac{\partial F}{\partial u_j}(\mathbf{a})$.

19.1 PROPOSIZIONE *Siano $U \subset \mathsf{R}^n$ un aperto, $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathsf{R}^n$, F, $G : U \to \mathsf{R}$ funzioni, e a, $b \in \mathsf{R}$. Valgono le seguenti identità ogni volta che primo e secondo membro esistono:*

$$\begin{aligned} &(a\mathbf{v} + b\mathbf{w})(F)_{\mathbf{a}} = a\mathbf{v}(F)_{\mathbf{a}} + b\mathbf{w}(F)_{\mathbf{a}} \\ &\mathbf{v}(aF + bG)_{\mathbf{a}} = a\mathbf{v}(F)_{\mathbf{a}} + b\mathbf{v}(G)_{\mathbf{a}} \\ &\mathbf{v}(FG)_{\mathbf{a}} = \mathbf{v}(F)_{\mathbf{a}}G(\mathbf{a}) + F(\mathbf{a})\mathbf{v}(G)_{\mathbf{a}} \end{aligned} \tag{19.1}$$

La dimostrazione è lasciata al lettore.

Una funzione $F : U \to \mathsf{R}$ sarà detta *di classe* $\mathrm{C}^{(0)}$ in U se è continua in U, *di classe* $\mathrm{C}^{(1)}$ se è continua e tutte le sue derivate parziali prime esistono in ogni punto di U e sono funzioni continue in U. Le derivate parziali seconde, terze ecc. di F si definiscono induttivamente. F sarà detta *di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$, $k \geq 0$, *in U* se è di classe $\mathrm{C}^{(0)}$ e tutte le sue derivate parziali di ogni ordine minore o uguale a k esistono in ogni punto di U e sono funzioni continue in U. F è *di classe* $\mathrm{C}^{(\infty)}$ se è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ per ogni $k \geq 0$.

Ovviamente, se F è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ in U, F è anche di classe $\mathrm{C}^{(h)}$ in U per ogni $0 \leq h \leq k$.

Se F è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$, $k \geq 2$, la sua derivata parziale di ordine $h \leq k$ eseguita rispetto alle variabili $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_h}$ nel punto $\mathbf{a} \in U$ si denota

$$\frac{\partial^h F}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \ldots \partial u_{i_h}}(\mathbf{a}).$$

Per funzioni di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ le derivate parziali successive sono indipendenti dall'ordine in cui vengono eseguite; cosicché ad esempio, se $k \geq 2$ si ha:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(\mathbf{a})$$

per ogni $i \neq j$ e $\mathbf{a} \in U$.

Se $U \subset \mathsf{R}^n$ è un aperto e $F : U \to \mathsf{R}^m$ è un'applicazione, per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha:

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_m(\mathbf{x}))$$

dove $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathsf{R}$ sono le *funzioni coordinate* (o *componenti*) di F. Diremo *F di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ in U se le funzioni $F_1, \ldots, F_m$ sono di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ in U; similmente diremo *F di classe* $\mathrm{C}^{(\infty)}$ *in U* se $F_1, \ldots, F_m$ sono di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ in U.

Un fatto evidente, che va però sottolineato, è che la restrizione di un'applicazione $F : U \to \mathsf{R}^m$ di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$) a un aperto $V \subset U$ è ancora un'applicazione di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$). Inoltre l'identità di R^n in sé è un'applicazione di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$, e quindi l'inclusione $U \subset \mathsf{R}^n$ è di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$.

Le applicazioni di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ o $\mathrm{C}^{(\infty)}$ si possono comporre. Precisamente, se $U \subset \mathsf{R}^n$ e $V \subset \mathsf{R}^m$ sono aperti, $F : U \to \mathsf{R}^m$ e $G : V \to \mathsf{R}^p$ sono applicazioni di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) tali che $F(U) \subset V$, allora la composizione $G \cdot F : U \to \mathsf{R}^p$ è una funzione di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$).

Se U, V sono due aperti di R^n, una biezione $F : U \to V$ si dice un *diffeomorfismo di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) se le composizioni $F : U \to V \subset \mathsf{R}^n$ e $F^{-1} : V \to U \subset \mathsf{R}^n$ sono entrambe applicazioni di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$). Se un diffeomorfismo $F : U \to V$ esiste, anche F^{-1} è un diffeomorfismo e U e V si dicono *diffeomorfi di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$).

È utile estendere le nozioni di applicazione di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ o $\mathrm{C}^{(\infty)}$, a insiemi di definizione qualsiasi, nel seguente modo.

Sia $X \subset \mathsf{R}^n$ un sottoinsieme, e sia $F : X \to \mathsf{R}^m$ un'applicazione. Diremo *F di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) *in X* se per ogni $\mathbf{x} \in X$ esiste un intorno aperto $U_{\mathbf{x}}$ di $\mathbf{x}$ in R^n ed un'applicazione $\overline{F} : U_{\mathbf{x}} \to \mathsf{R}^m$ di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) tale che:

$$\overline{F}_{|X \cap U_{\mathbf{x}}} = F_{|X \cap U_{\mathbf{x}}}.$$

Se $X \subset \mathsf{R}^n$ ed $Y \subset \mathsf{R}^m$, un'applicazione $F : X \to Y$ si dirà *di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) se la composizione $F : X \to Y \subset \mathsf{R}^m$ è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) in X. F si dirà un *diffeomorfismo di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) se è biettiva e anche F^{-1} è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$); se una tale F esiste diremo X e Y *diffeomorfi di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$).

La composizione di applicazioni di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ o $\mathrm{C}^{(\infty)}$ definite su insiemi qualsiasi è ancora di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ o $\mathrm{C}^{(\infty)}$, come segue subito dalla definizione. Inoltre, la restrizione di un'applicazione $F : X \to Y$ a un sottoinsieme $X' \subset X$ è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$) in X' se F è di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (risp. $\mathrm{C}^{(\infty)}$).

19.2 DEFINIZIONE *Sia X uno spazio topologico. Una coppia (U, φ_U) dove $U \subset X$ è un aperto e φ_U è un omeomorfismo di U su un aperto di R^n si dice una n-*carta locale, *oppure un n-*sistema di coordinate locali, *in X. Due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) in X si dicono* $\mathrm{C}^{(k)}$-compatibili, *oppure* differenziabilmente compatibili di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ *($k \geq 0$ oppure $k = \infty$) se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione:*

$$\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V) \qquad [19.2]$$

è un diffeomorfismo di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (vedi fig. 19.1).

Se (U, φ_U) è una n-carta locale in X, con abuso di notazione diremo talvolta che l'applicazione $\varphi_U : U \to \mathsf{R}^n$ è una *n-carta ocale in X relativa all'aperto U.*

Scriveremo

$$\varphi_U(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$$

dove $x_1, \dots, x_n : U \to \mathsf{R}$ sono le funzioni componenti dell'applicazione $\varphi_U : U \to \mathsf{R}^n$, che chiameremo *coordinate locali* in U definite da φ_U. Chiameremo talvolta U un *aperto coordinatizzato* di X. Un aperto contenuto in U è ancora un aperto coordinatizzato perché la restrizione di una carta locale ad un aperto più piccolo è ancora una carta locale.

Nel caso $k = 0$ la condizione [19.2] è automaticamente soddisfatta perché $\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1}$ è composizione di omeomorfismi e quindi è un omeomorfismo. Quindi due n-carte locali in uno spazio X sono sempre $C^{(0)}$-compatibili.

In R le coppie (R, t), (R, t^3) sono 1-carte locali che non sono $C^{(1)}$-compatibili perché la funzione $\sqrt[3]{x}$, pur essendo un omeomorfismo di R in sé, non è di classe $C^{(1)}$ in 0.

Si osservi che se due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) in X sono $C^{(k)}$-compatibili allora sono anche $C^{(h)}$-compatibili per ogni $0 \leq h \leq k$.

Siano (U, φ_U), (V, φ_V) due n-carte locali in X tali che $U \cap V \neq \emptyset$, siano $x_1, \dots, x_n : U \to \mathsf{R}$ le coordinate locali definite da φ_U, e $y_1, \dots, y_n : V \to \mathsf{R}$ le coordinate locali definite da φ_V. Le componenti dell'applicazione [19.2] sono funzioni a valori reali sull'aperto $\varphi_U(U \cap V)$ di R^n che si diranno *funzioni di transizione* dalle coordinate $x_1, \dots, x_n$ alle coordinate $y_1, \dots, y_n$.

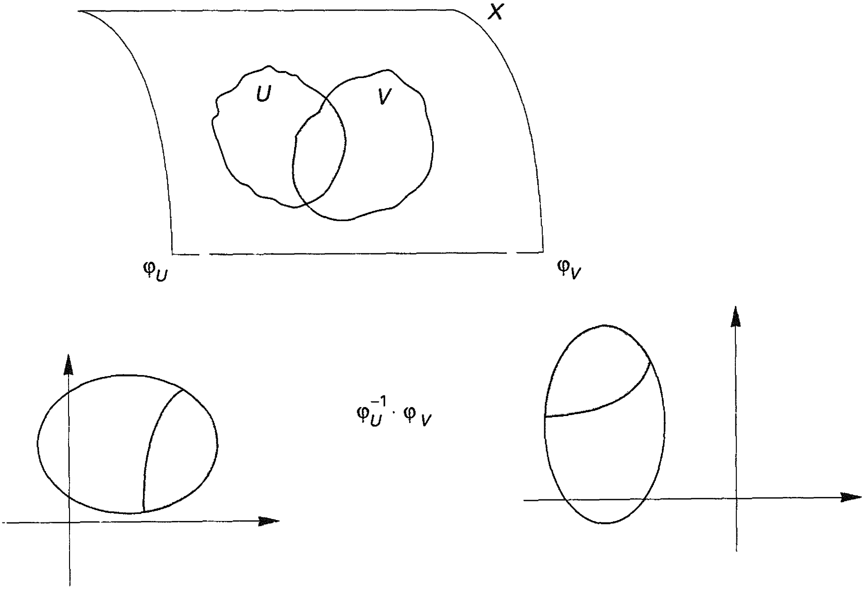


Figura 19.1

19.3 DEFINIZIONE *Un* n-atlante differenziabile *di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ *nello spazio topologico* X *è una famiglia di* n*-carte locali* $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *tale che* $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *sia un ricoprimento di* X *e le carte locali* $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ *siano a due a due* $\mathrm{C}^{(k)}$*-compatibili.*

Uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile in cui sia assegnato un n*-atlante differenziabile di classe* $\mathrm{C}^{(k)}$ *per qualche intero* $n \geq 0$ *si dice* varietà differenziabile di classe $\mathrm{C}^{(k)}$, *se* $k \geq 1$ *oppure* $k = \infty$, *e si dice* varietà topologica *(o di classe* $\mathrm{C}^{(0)}$*) se* $k = 0$ *(cfr. anche esempio* 8.11(6)*). L'intero* n *è la* dimensione della varietà X.

Diremo anche che l'atlante $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *definisce in* X *una* struttura di varietà differenziabile di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ (se $k \geq 1$, o $k = \infty$) *oppure una* struttura di varietà topologica (se $k = 0$). *Scriveremo* $\dim(X) = n$ *se la varietà* X *ha dimensione* n.

È evidente che una varietà di classe $\mathrm{C}^{(k)}$ è anche una varietà di classe $\mathrm{C}^{(h)}$ per ogni $0 \leq h \leq k$. In particolare ogni varietà differenziabile è una varietà topologica. *D'ora in poi*, per semplificare la trattazione, *quando parleremo di diffeomorfismi senz'altro specificare, sottintenderemo che si tratti di diffeomorfismi di classe* $\mathrm{C}^{(\infty)}$, *mentre parlando di varietà e di applicazioni differenziabili sottintenderemo che esse siano di classe* $\mathrm{C}^{(\infty)}$. Molte delle cose che diremo si estendono dal caso $\mathrm{C}^{(\infty)}$ al caso $\mathrm{C}^{(k)}$, per un qualsiasi $k \geq 1$.

Le condizioni che lo spazio topologico X sia di Hausdorff e soddisfi il secondo assioma di numerabilità non sono ridondanti (cfr. esempio 8.11(6)). Molte proprietà locali delle varietà differenziabili si mantengono senza tali ipotesi, le quali hanno però lo scopo di escludere esempi patologici assicurando che le varietà differenziabili non siano oggetti troppo generali (si veda a questo proposito il successivo § 29).

Diremo che due diversi *n-atlanti differenziabili*

$$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}, \quad \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu\in M}$$

sono *equivalenti*, oppure *definiscono la stessa struttura di varietà differenziabile* su X se e solo se la loro unione

$$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda),\ (V_\mu, \psi_\mu) : \lambda \in \Lambda,\ \mu \in M\}$$

è ancora un atlante differenziabile. Ciò equivale a dire che ogni carta locale $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ è differenziabilmente compatibile con ogni carta locale (V_μ, ψ_μ).

Da questa definizione segue che per una data struttura di varietà differenziabile su X esiste un *atlante differenziabile massimale*, ottenuto prendendo l'unione di tutti gli atlanti che definiscono quella struttura. In pratica tutti gli esempi di varietà differenziabili vengono assegnati mediante un particolare atlante differenziabile, spesso costituito da un numero finito di carte locali; la nozione di atlante differenziabile massimale è però utile nel trattare questioni generali e nelle dimostrazioni. Nel considerare una varietà differenziabile sottintenderemo che le carte locali considerate siano elementi di un dato atlante differenziabile. Lasceremo al lettore di verificare di volta in volta che una data condizione soddisfatta in un dato atlante è soddisfatta anche in ogni altro ad esso equivalente.

L'esempio più semplice di varietà differenziabile di dimensione n è lo spazio R^n, in cui la struttura di varietà può essere definita da un atlante costituito un'unica carta locale: $\{(\mathsf{R}^n, 1_{\mathsf{R}^n})\}$.

Ogni aperto U di R^n è un esempio di varietà differenziabile di dimensione n in cui un atlante è costituito da una sola carta locale $\{(U, \iota)\}$, dove $\iota : U \to \mathsf{R}^n$ è l'inclusione.

Più in generale ogni aperto A di una varietà differenziabile X è ancora una varietà differenziabile della stessa dimensione che si dice una *sottovarietà aperta* di X. Infatti se $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ è un n-atlante differenziabile in X, allora la famiglia $\{(U_\lambda \cap A, \varphi_{\lambda|(U_\lambda\cap A)})\}_{\lambda\in\Lambda^*}$, dove $\Lambda^* \subset \Lambda$ è il sottoinsieme costituito dagli indici λ tali che $U_\lambda \cap A \neq \emptyset$, è un n-atlante differenziabile in A.

Ogni spazio discreto X è una varietà differenziabile di dimensione 0, in cui le applicazioni $\{\mathbf{p}\} \to \mathsf{R}^0 = \{0\}$, $\mathbf{p} \in X$, sono carte locali che costituiscono un atlante differenziabile.

Una varietà differenziabile (topologica) di dimensione 2 è detta *superficie differenziabile* (*topologica*).

L'importanza delle varietà differenziabili sta nel fatto che ad esse è possibile applicare gli strumenti ed i risultati del calcolo infinitesimale in più variabili utilizzando le carte locali per ricondursi allo spazio euclideo. Ad esempio, una *funzione*

$$F : A \to \mathsf{R}$$

definita su un aperto A della varietà differenziabile X si dice *differenziabile* se per ogni carta locale (U, φ_U) tale che $U \cap A \neq \emptyset$ la funzione

$$F \cdot \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap A) \to \mathsf{R}$$

è differenziabile; si osservi che $F \cdot \varphi_U^{-1}$ è una funzione delle coordinate $u_1, \ldots, u_n$ in R^n definita nell'aperto $\varphi_U(U \cap A)$ di R^n.

Siano X ed Y varietà differenziabili, $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$. Un'*applicazione*

$$F : X \to Y$$

si dice *differenziabile*, oppure un *morfismo*, se per ogni carta locale (U, φ_U) in X e per ogni carta locale (V, ψ_V) in Y, la composizione:

$$\psi_V \cdot F \cdot \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \to \mathsf{R}^m$$

è differenziabile come applicazione dell'aperto $\varphi_U(U) \subset \mathsf{R}^n$ in R^m. F si dirà un *diffeomorfismo* se è un omeomorfismo e se F e F^{-1} sono differenziabili.

L'identità di una varietà in se stessa è un esempio di diffeomorfismo. Segue dalla definizione che se $F : X \to Y$ è un diffeomorfismo anche $F^{-1} : Y \to X$ è un diffeomorfismo. È facile verificare che la composizione di morfismi è ancora un morfismo. In particolare la composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo.

Se esiste un diffeomorfismo $F : X \to Y$ diciamo che *X è diffeomorfa ad Y* e le varietà X ed Y si dicono *diffeomorfe*. Lo studio delle varietà differenziabili e delle proprietà che una varietà ha in comune con quelle ad essa diffeomorfe è l'oggetto della *topologia differenziale*.

Per le varietà differenziabili di dimensione 1 non useremo il termine "curva" perché, conformemente alla tradizione, riserveremo questo nome per qualcosa di un po' diverso. Precisamente, sia X una varietà differenziabile; una *curva differenziabile in X* è un'applicazione di classe $C^{(\infty)}$:

$$\alpha : \mathbf{J} \to X$$

dove $\mathbf{J} \subset \mathsf{R}$ è un intervallo (se $\mathbf{J}$ non è aperto ciò significa che l'applicazione è definita e di classe $C^{(\infty)}$ su un'intervallo aperto contenente $\mathbf{J}$). Quindi una curva differenziabile è un'applicazione; due curve differenziabili diverse possono avere la stessa immagine.

Esercizi

1. Dimostrare che un'applicazione lineare $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ è di classe $C^{(\infty)}$, e che è un diffeomorfismo se e solo se è invertibile, cioè $n = m$ e $\det(L) \neq 0$. Dimostrare inoltre che una traslazione è un diffeomorfismo. Dedurre che affinità, isometrie e similitudini sono diffeomorfismi.
2. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, $f(t) = t^3$ è un omeomorfismo di classe $C^{(\infty)}$ ma non è un diffeomorfismo.
3. Dimostrare che i due atlanti (R, t), (R, t^3) su R, pur non essendo equivalenti, definiscono su R due strutture di varietà differenziabili diffeomorfe.
4. Generalizzando l'applicazione f dell'esercizio 2 definire un omeomorfismo di classe $C^{(\infty)}$ $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ che non è un diffeomorfismo.
5. Siano a, $b \in \mathsf{R}$, con $a < b$. Dimostrare che l'applicazione

$$f : R \to R, \ \ f(t) = \frac{b-a}{2}\tanh(t) + \frac{b+a}{2},$$

dove

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

definisce un diffeomorfismo di R sull'intervallo (a, b). In particolare, due intervalli aperti qualsiasi di R sono diffeomorfi. Verificare se l'omeomorfismo $h : (a, b) \to \mathsf{R}$ dell'esempio 5.4(6) è un diffeomorfismo oppure no.

6. Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è di classe $C^{(\infty)}$.

7. Trovare un diffeomorfismo di R^n sull'aperto $(0, 1)^n$.

8. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathsf{R}^n \to \mathbf{D}^n \setminus \mathbf{S}^{n-1}$, $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}}{1 + \|\mathbf{x}\|}$ è un diffeomorfismo.

9. Dimostrare che le seguenti applicazioni di R^2 in sé sono diffeomorfismi e determinarne le inverse:

(a) $F(u, v) = (ve^u, u)$;

(b) $F(u, v) = (u^3, v - u)$;

(c) $F(u, v) = (1 + 2u - 2v,\ 1 - 2u + v)$;

(d) $F(u, v) = (u + e^v,\ 1 + v)$.

10. Dimostrare che

$$f : \mathsf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathsf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)$$

è un diffeomorfismo, e determinarne l'inverso.

11. Verificare che l'applicazione di classe $C^{(\infty)}$:

$$f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$$

$$f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

non è un diffeomorfismo sulla sua immagine.

20 Esempi di varietà differenziabili

Come al solito identificheremo C con R^2, e quindi potremo considerare C e i suoi aperti come delle varietà differenziabili. Una funzione di variabile complessa $f : U \to \mathsf{C}$ definita su un aperto U di C è differenziabile se la parte reale e la parte immaginaria di $f(z) = f(x + iy)$ sono differenziabili come funzioni di (x, y). Tutte le funzioni olomorfe sono differenziabili di classe $C^{(\infty)}$ nell'aperto di definizione. In particolare lo sono i polinomi a coefficienti complessi e le funzioni trascendenti elementari, cioè e^z, le determinazioni di $\ln(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ ecc. e le loro inverse. Il coniugio $z \mapsto \bar{z}$ è un diffeomorfismo di C in sé.

Gli esempi principali di varietà differenziabili sono ottenuti come "sottovarietà di R^N" per qualche N, secondo la seguente definizione.

20.1 DEFINIZIONE *Un sottospazio* X *di* R^N *si dice* sottovarietà differenziabile di dimensione n *se ogni punto* $\mathbf{x} \in X$ *possiede un intorno aperto in* X *che, come sottoinsieme di* R^N, *è diffeomorfo a un aperto di* R^n.

Quindi, in base alle definizioni date nel paragrafo precedente, $X \subset \mathrm{R}^N$ è una sottovarietà se per ogni $\mathbf{x} \in X$ esiste un intorno aperto U di $\mathbf{x}$ in R^N e un'applicazione differenziabile $\overline{F}_{\mathbf{x}} : U \to \mathrm{R}^n$ che induce una biezione $F_{\mathbf{x}}$ di $U \cap X$ su un aperto V di R^n, tale che la biezione inversa $V \to U \cap X$ sia differenziabile come applicazione di V in R^N. Se queste condizioni sono soddisfatte le coppie $(U \cap X,\ F_{\mathbf{x}})$ sono n-carte locali tra loro differenziabilmente compatibili al variare di $\mathbf{x} \in X$, e quindi costituiscono un atlante differenziabile in X; X è pertanto una varietà differenziabile di dimensione n.

Un modo per assegnare sottovarietà di R^N è mediante "parametrizzazioni".

20.2 DEFINIZIONE *Una* parametrizzazione *in* R^N *è un'applicazione differenziabile*

$$f : A \to \mathrm{R}^N$$

definita su un aperto A *di* R^n *che è un diffeomorfismo sull'immagine. In tal caso* $f(A)$ *è una sottovarietà di dimensione* n *di* R^N.

Quindi una parametrizzazione è essenzialmente l'inversa di una carta locale.

Se $\mathbf{p} \in \mathrm{R}^N$ e $\mathbf{v}$ è un vettore non nullo di R^N allora

$$f(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n) \qquad [20.1]$$

è una parametrizzazione $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^N$ della retta r passante per $\mathbf{p}$ e di direzione $\langle \mathbf{v} \rangle$; pertanto r è una sottovarietà di dimensione 1 di R^N. Similmente un sottospazio affine X di dimensione n è un esempio di sottovarietà differenziabile di R^N di dimensione n, ottenuta come immagine di una parametrizzazione di X (Sernesi 1989, p. 101).

Ovviamente non ogni sottovarietà di R^N si può ottenere come immagine di una parametrizzazione, perché non è detto che possegga un atlante costituito da una sola carta locale. Però se X è una sottovarietà di R^N, allora per definizione esistono parametrizzazioni $f_\lambda : A_\lambda \to \mathrm{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$, tali che $\bigcup_\lambda f_\lambda(A_\lambda) = X$ e gli insiemi $f_\lambda(A_\lambda)$ sono aperti coordinatizzati di X.

L'applicazione

$$\begin{aligned} &f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2 \\ &f(t) = (r\cos(t),\ r\sin(t)) \end{aligned} \qquad [20.2]$$

ha per immagine la circonferenza $\mathbf{S}^1(\mathbf{0}, r)$ di centro $\mathbf{0}$ e raggio $r > 0$ che è una sottovarietà di R^2 (vedi oltre) ma f non è una parametrizzazione perché non è biunivoca.

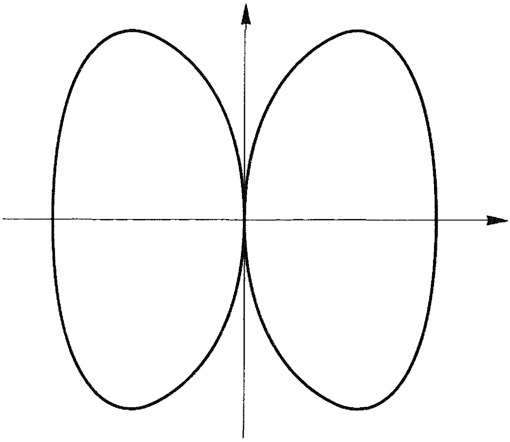


Figura 20.1

Sia $A = (0, \pi/2) \cup (\pi/2, 2\pi) \subset \mathsf{R}$, e sia $\alpha : A \to \mathsf{R}^2$ definita da

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(2\theta)) \tag{20.3}$$

α è differenziabile e biunivoca ma non è una parametrizzazione, perché $\alpha(A)$ è connesso, mentre A è sconnesso (fig. 20.1).

Si osservi che la [20.1] e la [20.2] sono curve differenziabili in R^N. La [20.3] non è una curva differenziabile perché non è definita in un intervallo, ma la sua estensione a R lo è.

Una sottovarietà di dimensione n in R^{n+1} è detta *ipersuperficie differenziabile.* Nel caso $n = 1, 2$ si hanno le *curve piane differenziabili* e le *superfici differenziabili di* R^3 che forniscono esempi classici e ben conosciuti di varietà differenziabili. Per costruire ipersuperfici differenziabili di R^{n+1} si utilizza spesso il seguente

20.3 LEMMA *Sia $U \subset \mathsf{R}^n$ un aperto, e sia $f : U \to \mathsf{R}$ un'applicazione differenziabile. L'applicazione:*

$$\varphi : U \to \mathsf{R}^{n+1}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$$

è una parametrizzazione e quindi ha per immagine una ipersuperficie differenziabile di R^{n+1}.

Dimostrazione. φ è differenziabile perché tali sono le sue componenti; inoltre φ è biunivoca, e la sua inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ è $\varphi^{-1}(\mathbf{x}, y) = \mathbf{x}$, che è differenziabile essendo la restrizione a $\varphi(U)$ della proiezione $\mathsf{R}^{n+1} \to \mathsf{R}^n$ sulle prime n coordinate. ■

La parametrizzazione φ definita nel lemma 20.3 si dice una *parametrizzazione di Monge* (fig. 20.2). La sua immagine è il *grafico della funzione f*. Dal lemma 20.3

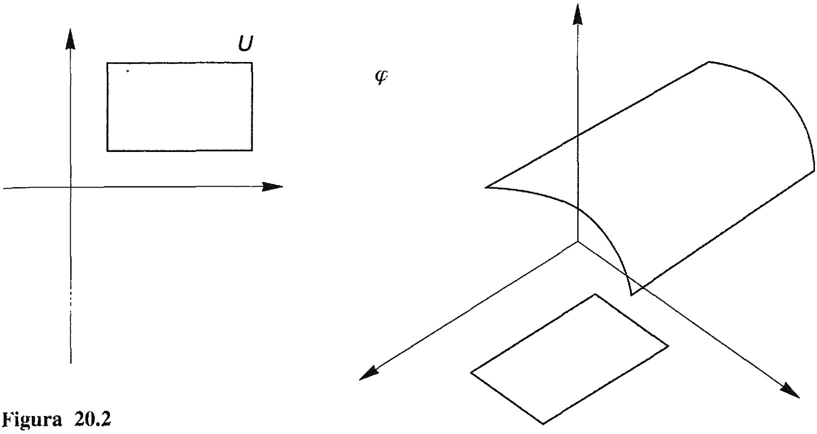


Figura 20.2

segue immediatamente che sono curve piane differenziabili i grafici di funzioni differenziabili $f : U \to \mathsf{R}$ definite in un aperto U di R. Similmente sono esempi di superfici differenziabili di R^3 i grafici di funzioni differenziabili di due variabili reali definite su un aperto U di R^2.

La circonferenza $\mathbf{S}^1 \subset \mathsf{R}^2$

L'applicazione:

$$\varphi : (-1, 1) \to \mathbf{S}^1$$

$$\varphi(x) = (t, \sqrt{1 - t^2})$$

è una parametrizzazione di Monge dell'aperto $V = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 : y > 0\}$; per il lemma 20.3 φ^{-1}, che è la proiezione p_1 sulla prima coordinata, è una carta locale in $\mathbf{S}^1$ relativa all'aperto V.

Similmente l'applicazione:

$$\varphi' : (-1, 1) \to \mathbf{S}^1$$

$$\varphi'(x) = (t, -\sqrt{1 - t^2})$$

è una parametrizzazione di Monge dell'aperto $V' = \{\{(x, y) \in \mathbf{S}^1 : y < 0\}$ e quindi la sua inversa, cioè la proiezione p_1 sulla prima coordinata, è una carta locale in $\mathbf{S}^1$ relativa all'aperto V'. Le due carte locali (V, p_1), (V', p_1) non costituiscono un atlante perché i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ non appartengono a $V \cup V'$. Per ottenere un atlante differenziabile consideriamo anche le altre due parametrizzazioni di Monge

$$\psi : (-1, 1) \to \mathbf{S}^1$$

$$\psi' : (-1, 1) \to \mathbf{S}^1$$

definite da:

$$\psi(t) = (\sqrt{1-t^2}, t), \quad \psi'(t) = (-\sqrt{1-t^2}, t)$$

che hanno per inversa la proiezione p_2 sulla seconda coordinata definita rispettivamente sugli aperti $W = \{(x,y) \in \mathbf{S}^1 : x > 0\}$ e $W' = \{(x,y) \in \mathbf{S}^1 : x < 0\}$. Le quattro carte locali $\{(V, p_1), (V', p_1), (W, p_2), (W', p_2)\}$ sono differenziabilmente compatibili perché $\sqrt{1-t^2}$ è differenziabile in $(-1, 1)$; quindi costituiscono un 1-atlante differenziabile per $\mathbf{S}^1$, e $\mathbf{S}^1$ è una varietà differenziabile di dimensione 1 (fig. 20.3).

Un altro modo di assegnare carte locali nella circonferenza è dato dalle proiezioni stereografiche. La proiezione stereografica

$$\pi_+ : \mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\} \to \mathsf{R}$$

di centro il punto $(0, 1)$, che è definita da:

$$\pi_+(x, y) = \frac{x}{1-y}$$

è di classe $C^{(\infty)}$ ed è dotata di inversa di classe $C^{(\infty)}$:

$$\pi_+^{\ 1} : \mathsf{R} \to \mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}$$

$$\pi_+^{\ 1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

quindi π_+ è una coordinata locale in $\mathbf{S}^1$. L'analoga proiezione stereografica

$$\pi \ : \mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\} \to \mathsf{R}$$

di centro il punto $(0, -1)$, definita da

$$\pi \ (x, y) = \frac{x}{1+y}$$

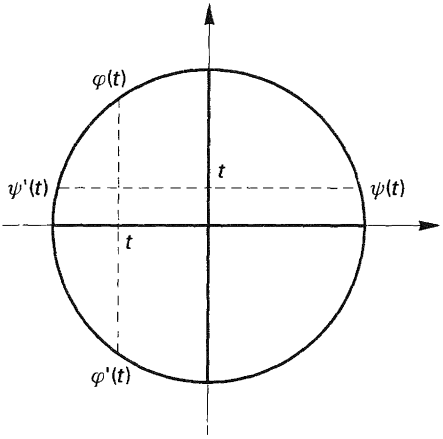


Figura 20.3

fornisce un'altra coordinata locale che insieme alla precedente definisce un atlante differenziabile per $\mathbf{S}^1$, perché si verifica immediatamente che le due carte locali sono differenziabilmente compatibili. Ricordiamo che π_-^{-1} è definita da:

$$\pi_-^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right).$$

Poiché $\mathbf{S}^1$ è compatta non esiste un atlante differenziabile costituito da una sola carta locale: quindi 2 è il minimo numero di carte locali necessarie per ottenere un atlante differenziabile di $\mathbf{S}^1$. Tutto quanto detto per $\mathbf{S}^1$ si trasporta con ovvi cambiamenti ad una circonferenza qualsiasi $\mathbf{S}^1(\mathbf{c}, r) \subset \mathsf{R}^2$, $\mathbf{c} \in \mathsf{R}^2$, $r > 0$.

La sfera $\mathbf{S}^2 \subset \mathsf{R}^3$

Come nel caso di $\mathbf{S}^1$, è possibile costruire un atlante differenziabile per la sfera $\mathbf{S}^2$ in più modi. Ad esempio possiamo utilizzare due proiezioni stereografiche:

$$\pi_+ : \mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathsf{R}^2$$

$$\pi_+(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$

e

$$\pi_- : \mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\} \to \mathsf{R}^2$$

$$\pi_-(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right),$$

le quali definiscono due carte locali sugli aperti $\mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ e $\mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$ rispettivamente che insieme formano un atlante differenziabile (la verifica del fatto che le due carte sono differenziabilmente compatibili è lasciata al lettore). Si osservi che poiché

$$\pi_-^{-1} : \mathsf{R}^2 \to \mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$$

$$\pi_-^{-1}(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2)$$

la composizione $\pi_+ \cdot \pi_-^{-1}$ è definita su $\mathsf{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ e ha la seguente espressione:

$$(\pi_+ \cdot \pi_-^{-1})(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y).$$

Se la si interpreta come un'applicazione di $\mathsf{C} \backslash \{0\}$ in C, si ottiene:

$$(\pi_+ \cdot \pi_-^{-1})(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

In modo simile si verifica che la sfera $\mathbf{S}^n \subset \mathsf{R}^{n+1}$ è una varietà differenziabile di dimensione n per ogni $n \geq 3$ (cfr. esercizio 1). Anche in questi casi è facile estendere le considerazioni precedenti ad una sfera qualsiasi $\mathbf{S}^n(\mathbf{c}, r) \subset \mathsf{R}^{n+1}$, $\mathbf{c} \in \mathsf{R}^{n+1}$, $r > 0$.

20.4 PROPOSIZIONE *Se X ed Y sono varietà differenziabili,* $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, *il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $n+m$ tale che le proiezioni $X \times Y \to X$ e $X \times Y \to Y$ siano morfismi.*

Dimostrazione. Sia (U, φ_U) una carta locale in X e (V, ψ_V) una carta locale in Y. Allora $U \times V \subset X \times Y$ è un aperto. Definiamo:

$$\varphi_U \times \psi_V : U \times V \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$$

ponendo:

$$(\varphi_U \times \psi_V)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\varphi_U(\mathbf{a}), \psi_V(\mathbf{b})).$$

$(U \times V, \varphi_U \times \psi_V)$ è una carta locale in $X \times Y$. È immediato verificare che se $(U', \varphi_{U'})$ e $(V', \psi_{V'})$ sono altre carte locali in X ed in Y rispettivamente, allora $(U \times V, \varphi_U \times \psi_V)$ e $(U' \times V', \varphi_{U'} \times \psi_{V'})$ sono differenziabilmente compatibili. Quindi, al variare di (U, φ_U) in un atlante in X e di (V, ψ_V) in un atlante in Y, la carta locale $(U \times V, \varphi_U \times \psi_V)$ varia in un $(n+m)$-atlante differenziabile in $X \times Y$. Pertanto $X \times Y$ è una varietà differenziabile di dimensione $n+m$. La verifica che le proiezioni sono morfismi è lasciata al lettore. ■

Il cilindro

Segue dalla proposizione 20.4 che il *cilindro* $K = \mathbf{S}^1 \times \mathsf{R} \subset \mathsf{R}^2 \times \mathsf{R} = \mathsf{R}^3$ è una superficie differenziabile e che un atlante differenziabile è costituito ad esempio dalle due carte locali:

$$(\pi_+, 1_{\mathsf{R}}) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}] \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$$

$$(x, y, u) \mapsto \left(\frac{x}{1-y},\ u\right)$$

$$(\pi\ , 1_{\mathsf{R}}) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}] \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$$

$$(x, y, u) \mapsto \left(\frac{x}{1+y},\ u\right)$$

ottenute a partire dalle due proiezioni stereografiche di centro $(0,1)$ e $(0,-1)$ e dall'identità di R. Il lettore verifichi che il cilindro è anche una superficie di R^3.

Il toro

Ancora applicando la proposizione 20.4 deduciamo che il *toro* $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathsf{R}^2 \times \mathsf{R}^2 = \mathsf{R}^4$ è una superficie differenziabile. Un atlante differenziabile costituito da quattro carte locali può essere ottenuto a partire da due proiezioni stereografiche per ciascun fattore $\mathbf{S}^1$ nel modo seguente:

$$\tau_1 = (\pi_+, \pi_+) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}] \times [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}] \to \mathsf{R}^2$$

$$\tau_2 = (\pi_+, \pi_-) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}] \times [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}] \to \mathsf{R}^2$$

$$\tau_3 = (\pi\ \ , \pi_+) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}] \times [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,1)\}] \to \mathsf{R}^2$$

$$\tau_4 = (\pi_-, \pi_-) : [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}] \times [\mathbf{S}^1 \backslash \{(0,-1)\}] \to \mathsf{R}^2.$$

Lo spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$

Sia

$$\pi : \mathsf{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n(\mathsf{R})$$

la proiezione e $[x_0, \dots, x_n] = \pi(x_0, \dots, x_n)$. Per ogni $i = 0, \dots, n$ sia

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] : x_i \neq 0\}$$

e

$$\varphi_i : U_i \to \mathsf{R}^n$$

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

φ_i è un omeomorfismo di U_i su R^n, il cui inverso è

$$\varphi\ \ ^1(u_0, \dots, u_{i\ \ 1}, u_{i+1}, \dots, u_n) = [u_0, \dots, u_{i\ \ 1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n]$$

(cfr. esempio 7.6(11)). Sia $i \neq j$ e per semplicità di notazioni supponiamo $i < j$. Per ogni $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ si ha $u_j \neq 0$ e:

$$(\varphi_j \cdot \varphi_i^{\ \ 1})(\mathbf{u}) = \varphi_j([u_0, \dots, u_{i\ \ 1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n]) =$$

$$= \left(\frac{u_0}{u_j}, \dots, \frac{1}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j} \right)$$

è un'applicazione differenziabile di $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ in R^n. Quindi φ_i e φ_j sono differenziabilmente compatibili e pertanto $\{(U_0, \varphi_0), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$ è un n-atlante differenziabile per $\mathbf{P}^n$. Dunque $\mathbf{P}^n$ è una varietà differenziabile di dimensione n.

Nel caso $n = 1$ sappiamo che $\mathbf{P}^1$ è omeomorfo ad $\mathbf{S}^1$: è facile verificare che con la struttura di varietà differenziabile che abbiamo definito su $\mathbf{P}^1$ e con quella che abbiamo definito su $\mathbf{S}^1$ in precedenza $\mathbf{P}^1$ e $\mathbf{S}^1$ sono diffeomorfe.

La grassmanniana $G_{r,N}$ degli r-sottospazi di R^N

Siano $0 < r \leq N$ interi. Denotiamo con $G_{r,N}$ l'insieme i cui elementi sono i sottospazi vettoriali di dimensione r di R^N; se $V \subset \mathsf{R}^N$ è un tale sottospazio, lo denoteremo con $[V]$ quando lo considereremo come elemento di $G_{r,N}$. $G_{r,N}$ si dice *grassmanniana degli r-sottospazi di* R^N. Per $r = 1$ si ottiene come caso particolare $G_{1,N} = \mathbf{P}^{N-1}(\mathsf{R})$.

Dato $[V] \in G_{r,N}$, sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una base di V dove:

$$\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{iN}).$$

La matrice $r \times N$:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rN} \end{pmatrix}$$

ha rango r. Viceversa, una matrice $r \times N$ di rango r:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \cdots & m_{rN} \end{pmatrix}$$

definisce un elemento di $G_{r,N}$: il sottospazio di R^N generato dalle sue righe. Due matrici M, $M' \in M_{r,N}(\mathsf{R})$ di rango r definiscono lo stesso sottospazio V se e solo se esiste $A \in \mathrm{GL}_r(\mathsf{R})$ tale che $AM = M'$; diremo in tal caso che M e M' sono *equivalenti*. Quindi $G_{r,N}$ si identifica con l'insieme delle classi di equivalenza di matrici di rango r di $M_{r,N}(\mathsf{R})$. In analogia con il caso $r = 1$ gli elementi m_{ij} della matrice M possono essere considerati come *coordinate omogenee generalizzate* di $[V]$. Identifichiamo $M_{r,N}(\mathsf{R})$ con lo spazio euclideo R^{rN}. Poniamo

$$M_{r,N}(\mathsf{R})_{r-1} = \{M \in M_{r,N}(\mathsf{R}) : \mathrm{rg}(M) \leq r - 1\}.$$

$M_{r,N}(\mathsf{R})_{r-1}$ è un chiuso di $M_{r,N}(\mathsf{R})$. Abbiamo un'applicazione:

$$\pi : M_{r,N}(\mathsf{R}) \backslash M_{r,N}(\mathsf{R})_{r-1} \to G_{r,N}$$

che identifica $G_{r,N}$ al quoziente di $M_{r,N}(\mathsf{R}) \backslash M_{r,N}(\mathsf{R})_{r-1}$ rispetto alla relazione di equivalenza definita sopra. Consideriamo $G_{r,N}$ con la topologia quoziente.

Fissiamo r indici distinti $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq N$, e sia $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, N\}$. Detta M_I la sottomatrice $r \times r$ di M costituita dalle colonne i_1, $i_2, \ldots, i_r$, poniamo

$$U_I = \{M \in M_{r,N}(\mathsf{R}) : \det(M_I) \neq 0\}.$$

È evidente che ogni $M \in M_{r,N}(\mathsf{R})$ di rango r appartiene ad U_I per qualche I. Inoltre, se $M \in U_I$ allora ogni M' equivalente a M appartiene a U_I e pertanto U_I è un aperto saturo di $M_{r,N}(\mathsf{R}) \setminus M_{r,N}(\mathsf{R})_{r-1}$. Poiché per ogni $A \in \mathrm{GL}_r(\mathsf{R})$ si ha $(AM)_I = AM_I$, ogni matrice $M \in U_I$ è equivalente a una e una sola matrice N tale che $N_I = \mathbf{I}_r$, la matrice identità $r \times r$: basta prendere $N = (M_I{}^{-1})M$. Quindi i punti di $G_{r,N}$ che hanno coordinate omogenee in U_I corrispondono biunivocamente all'insieme delle matrici $N \in U_I$ tali che $N_I = \mathbf{I}_r$. I restanti $r(N-r)$ elementi di una matrice N siffatta possono considerarsi come coordinate locali in $G_{r,N}$: infatti è immediato verificare che essi definiscono un omeomorfismo dell'aperto $G_I := \pi(U_I)$ di $G_{r,N}$ su $\mathsf{R}^{r(N-r)}$. Non è difficile verificare, in modo analogo al caso dello spazio proiettivo, che se I e J sono due insiemi di r indici distinti compresi tra 1 e N allora le corrispondenti carte locali sono differenziabilmente compatibili. Al variare di I tra tutti gli insiemi di r indici distinti in $\{1, \ldots, N\}$ gli aperti G_I ricoprono $G_{r,N}$. In conclusione le carte locali che abbiamo costruito definiscono un $r(N-r)$-atlante differenziabile in $G_{r,N}$, che quindi è una varietà differenziabile di dimensione $r(N-r)$.

Esercizi

1. Costruire un atlante differenziabile per la sfera $\mathbf{S}^n \subset \mathsf{R}^{n+1}$ utilizzando il lemma 20.3 e generalizzando quanto è stato fatto nel caso $n = 1$.

2. Costruire atlanti differenziabili per il toro e per il cilindro a partire dall'atlante differenziabile $\{(V, p_1), (V', p_1), (W, p_2), (W', p_2)\}$ di $\mathbf{S}^1$.

3. Verificare quali degli omeomorfismi considerati negli esempi 5.4 sono diffeomorfismi tra varietà differenziabili.

4. Sia $\mathbf{p} \in \mathsf{R}^N$ e sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo di R^N. Dimostrare che l'applicazione

$$\gamma : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^N$$

$$\gamma(t) = \mathbf{a} + \mathbf{v}t^3$$

è biunivoca e ha per immagine la retta r passante per $\mathbf{p}$ e di direzione $\langle \mathbf{v} \rangle$ ma non è una parametrizzazione di r.

5. Utilizzare la rappresentazione $\mathbf{P}^n = \dfrac{\mathbf{S}^n}{\sim}$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica punti antipodali, per verificare che $\mathbf{P}^n$ è una varietà differenziabile. Dimostrare che la proiezione $\mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ è un morfismo.

6. Dimostrare che l'unione degli assi coordinati non è una sottovarietà di R^2.

7. In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$ è una parametrizzazione:

(a) $f(u,v) = (u, u+v, u-v)$;

(b) $f(u,v) = (u^2, u^2+v, 2u)$;

(c) $f(u,v) = (u^2+v, u-v^2, v)$;

(d) $f(u,v) = (u^3-v^2, u+1, v)$;

(e) $f(u,v) = (e^{u+v}, uv, e^{u-v})$.

21 Spazi tangenti

La nozione di vettore tangente ad una varietà differenziabile in un suo punto verrà data generalizzando i vettori di R^n interpretati come derivate direzionali. Sappiamo che dato un punto $\mathbf{p} \in \mathsf{R}^n$, ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di R^n si associa la derivata direzionale rispetto a $\mathbf{v}$ in $\mathbf{p}$, che opera sulle funzioni differenziabili in un intorno di $\mathbf{p}$ e che gode delle proprietà [19.1]. In particolare il j-esimo vettore della base canonica $\mathbf{e}_j$ opera come derivata parziale rispetto ad u_j. Dalle [19.1] si deduce che se

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$$

allora si ha

$$\mathbf{v}(F)_\mathbf{p} = v_1 \frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{p}) + \dots + v_n \frac{\partial F}{\partial u_n}(\mathbf{p})$$

per ogni funzione differenziabile F definita in un intorno di $\mathbf{p}$, e quindi $\mathbf{v}$ è individuato dal modo in cui opera sulle funzioni, perché in particolare

$$v_i = \mathbf{v}(u_i)_\mathbf{p}.$$

Questa osservazione permette di introdurre la nozione di vettore tangente ad un punto qualsiasi di una varietà differenziabile definendolo come un operatore sulle funzioni definite in un intorno del punto, che gode di proprietà analoghe alle [19.1].

Sia dunque X una varietà differenziabile e $p \in X$. Denotiamo con $\mathcal{E}(X,p)$ l'insieme i cui elementi sono le funzioni a valori reali che sono definite in qualche intorno di $p \in X$. Si osservi che se F, $G \in \mathcal{E}(X,p)$ le funzioni $F+G$ e FG:

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x), \quad (FG)(x) = F(x)G(x)$$

sono ben definite in un intorno di p, che è l'intersezione degli intorni di definizione di F e G, e quindi sono elementi di $\mathcal{E}(X,p)$.

21.1 DEFINIZIONE *Sia* X *una varietà differenziabile e* $p \in X$. *Un* vettore tangente *a* X *in* p *è un'applicazione*

$$\mathbf{v} : \mathcal{E}(X, p) \to \mathsf{R}$$

tale che:

$$\mathbf{v}(aF + bG) = a\mathbf{v}(F) + b\mathbf{v}(G)$$
$$\mathbf{v}(FG) = \mathbf{v}(F)G(p) + F(p)\mathbf{v}(G) \qquad [21.1]$$

per ogni F, $G \in \mathcal{E}(X, p)$, a, $b \in \mathsf{R}$.

L'insieme di tutti i vettori tangenti a X *in* p *si denota* $T_p(X)$ *e si chiama* spazio tangente *a* X *in* p.

Dimostriamo alcune proprietà che discendono dalla definizione.

21.2 PROPOSIZIONE

(a) *Se* $c : X \to R$ *è una funzione costante, allora* $\mathbf{v}(c) = 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \in T_p(X)$.

(b) *Se* F, $G \in \mathcal{E}(X, p)$ *coincidono in un intorno* U *di* p *allora* $\mathbf{v}(F) = \mathbf{v}(G)$ *per ogni* $\mathbf{v} \in T_p(X)$.

Dimostrazione

(a) Sia $1 : X \to \mathsf{R}$ la funzione costante uguale a 1; si ha:

$$c\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(c1) = \mathbf{v}(c)1 + c\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(c) + c\mathbf{v}(1)$$

e quindi $\mathbf{v}(c) = 0$.

(b) Sia $1_U : U \to \mathsf{R}$ la funzione identicamente uguale a 1 su U. L'ipotesi significa che $1_U F = 1_U G$. Pertanto si ha:

$$\mathbf{v}(1_U F) = \mathbf{v}(1_U)F(p) + \mathbf{v}(F) = \mathbf{v}(1_U G) = \mathbf{v}(1_U)G(p) + \mathbf{v}(G).$$

Poiché $F(p) = G(p)$ si deduce che $\mathbf{v}(F) = \mathbf{v}(G)$. ■

Supponiamo $\dim(X) = n$; sia $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$ una carta locale definita in un intorno U di p e siano $x_1, \dots, x_n$ le funzioni coordinate locali definite da φ. Definiamo i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \in T_p(X)$$

ponendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (F) = \frac{\partial(F \cdot \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)), \quad i = 1, \dots, n,$$

dove $u_1, \dots, u_n$ sono le funzioni coordinate in R^n; scriveremo anche $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p$ invece di $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (F)$. Si osservi che $F \cdot \varphi^{-1}$ è una funzione definita in un aperto di R^n contenuto in $\varphi(U)$ e contenente $\varphi(p)$. È immediato verificare che i $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ soddisfano le condizioni [21.1]. Essi sono le generalizzazioni a X dei vettori tangenti in R^n definiti dalle derivate parziali. Segue subito dalla definizione che

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \delta_{ij}.$$

21.3 LEMMA *Sia* $\dim(X) = n$, $p \in X$, *e siano* $x_1, \dots, x_n$ *coordinate locali in intorno di* p *tali che* $x_i(p) = 0$, $i = 1, \dots, n$. *Per ogni* $F \in \mathcal{E}(X,p)$ *esistono* $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}(X,p)$ *tali che in un intorno di* p *sussista l'identità di funzioni:*

$$F = F(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i \qquad [21.2]$$

dove $F(p)$ *è la funzione costante, con valore* $F(p)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$ la carta locale che definisce le coordinate $x_1, \dots, x_n$, e sia $G := F \cdot \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(\mathsf{R}^n, \mathbf{0})$. Supponiamo di aver dimostrato l'esistenza di n funzioni $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{E}(\mathsf{R}^n, \mathbf{0})$ tali che:

$$G = G(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{n} u_i G_i \qquad [21.3]$$

dove $u_1, \dots, u_n$ sono le funzioni coordinate in R^n. Allora si ha:

$$F = G \cdot \varphi = F(p) + \sum_{i=1}^{n} (u_i \cdot \varphi)(G_i \cdot \varphi).$$

Poiché $x_i = u_i \cdot \varphi$, ponendo $F_i = G_i \cdot \varphi$ si ottiene la [21.2]. Pertanto sarà sufficiente dimostrare la [21.3].

Sia $D \subset \mathsf{R}^n$ un disco aperto di centro $\mathbf{0}$ la cui chiusura sia contenuta nell'aperto di definizione di G. Per ogni $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in D$ e $s \in [0,1]$ si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G(s\mathbf{u}) = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u}) \frac{\mathrm{d}u_i(s\mathbf{u})}{\mathrm{d}s} = \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u}) u_i$$

e quindi:

$$G(\mathbf{u}) = G(\mathbf{0}) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G(s\mathbf{u})\mathrm{d}s = G(\mathbf{0}) + \int_0^1 \sum \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u}) u_i \mathrm{d}s = G(\mathbf{0}) + \sum u_i \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u})\mathrm{d}s.$$

Ponendo $G_i(\mathbf{u}) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u})ds$ si ottiene la [21.3]. Resta da verificare che le funzioni G_i sono differenziabili. Ciò segue facilmente dal fatto che le funzioni $\frac{\partial G}{\partial u_i}(s\mathbf{u})$ sono di classe $C^{(\infty)}$ in $\mathbf{u}$, s e dal seguente risultato di calcolo in più variabili per il quale rinviamo a un testo di Analisi: se una funzione $f(\mathbf{u}, s)$ è di classe $C^{(1)}$ in un aperto $U \times V$ di R^{n+1}, allora la funzione $g(\mathbf{u}) = \int_0^1 f(\mathbf{u}, s)ds$ è di classe $C^{(1)}$ in U e

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, s)ds. \blacksquare$$

21.4 PROPOSIZIONE *Ponendo*

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})(F) = \mathbf{v}(F) + \mathbf{w}(F)$$

$$(\alpha\mathbf{v})(F) = \alpha[\mathbf{v}(F)]$$

per ogni $F \in \mathcal{E}(X,p)$, $\alpha \in \mathsf{R}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in T_p(X)$, *si definisce su* $T_p(X)$ *una struttura di spazio vettoriale reale tale che*

$$\dim(T_p(X)) = \dim(X).$$

Dimostrazione. La verifica del fatto che $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\alpha\mathbf{v}$ sono vettori tangenti è lasciata al lettore. Segue immediatamente che $T_p(X)$ è uno spazio vettoriale. Supponiamo $\dim(X) = n$; sia $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$ una carta locale definita in un intorno U di p e siano $x_1, \ldots, x_n$ le funzioni coordinate locali definite da φ.

Dimostriamo che $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ costituiscono una base di $T_p(X)$. Supporremo $\varphi(p) = \mathbf{0}$, il che non è restrittivo: infatti, se $\mathbf{a} = \varphi(p)$, $\psi(x) = \varphi(x) - \mathbf{a}$ è una carta locale che soddisfa $\psi(p) = \mathbf{0}$ e, dette $y_1, \ldots, y_n$ le coordinate locali definite da ψ, si ha $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Sia $F \in \mathcal{E}(X,p)$. Si ha, utilizzando la [21.2]:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \left(F(p) + \sum_{j=1}^{n} x_j F_j\right) =$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_p F_j(p) + x_j(p) \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_p\right] = F_i(p).$$

Se $\mathbf{v} \in T_p(X)$ si ha:

$$\mathbf{v}(F) = \mathbf{v}\left[F(p) + \sum_{j=1}^{n} x_j F_j\right] =$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{v}(x_j)F_j(p) + x_j(p)\mathbf{v}(F_j)]) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}(x_j)\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_p .$$

Poiché quest'uguaglianza è vera per ogni $F \in \mathcal{E}(X, p)$ deduciamo che

$$\mathbf{v} = \sum \mathbf{v}(x_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \qquad [21.4]$$

e quindi $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ generano $T_p(X)$. Inoltre se

$$\mathbf{v} = \sum a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p ,$$

allora

$$\mathbf{v}(x_i) = \sum_j a_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \sum_j a_j \delta_{ij} = a_i$$

e quindi $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ sono anche linearmente indipendenti. ■

Nel caso $X = \mathsf{R}^n$ gli spazi tangenti $T_{\mathbf{p}}(\mathsf{R}^n)$ si identificano ad R^n mediante la base canonica $\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p$.

Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_n\}$ sono due sistemi di coordinate locali nell'intorno del punto $p \in X$, allora la formula [21.4] applicata a $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$ dà:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \qquad [21.5]$$

Questa formula esprime il passaggio dalla base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$ alla base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right\}$ per mezzo della matrice $\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right)$, che è chiamata *matrice di transizione* dalle coordinate $\{x_1, \dots, x_n\}$ alle $\{y_1, \dots, y_n\}$ nel punto p.

Esercizio

1. Calcolare le matrici di transizione degli atlanti di $\mathbf{S}^1$ e di $\mathbf{S}^2$ considerati nel § 20.

22 Differenziali

Se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà differenziabili e $p \in X$, allora per ogni $F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$ si ha $F \cdot f \in \mathcal{E}(X, p)$. Resta pertanto definita un'applicazione:

$$f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$$

ponendo

$$f_{*p}(\mathbf{v})(F) = \mathbf{v}(F \cdot f)$$

per ogni $F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$.

È immediato verificare che f_{*p} *è un'applicazione lineare,* che chiameremo *differenziale di* f *in* p.

Ovviamente, per ogni $p \in X$, il differenziale $(1_X)_{*p}$ del morfismo identità 1_X è l'identità di $T_p(X)$.

Più in generale, se X è una sottovarietà aperta di una varietà Y e $\iota : X \to Y$ è l'applicazione di inclusione, allora ι_{*p} è un isomorfismo in ogni punto $p \in X$. Infatti un sistema di coordinate $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in un intorno di p in X è anche un sistema di coordinate in Y e $\iota_{*p}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $i = 1, \ldots, n$.

Se $\alpha : \mathbf{J} \to Y$ è una curva differenziabile nella varietà Y, dove $\mathbf{J}$ è un intervallo aperto, e se $t_0 \in \mathbf{J}$, il vettore

$$\alpha_{*t_0}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}(Y)$$

si chiama *vettore velocità* di α in t_0 e si denota con $\alpha'(t_0)$, oppure con $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

Se $Y = \mathrm{R}^N$, e se

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t)),$$

allora l'i-esima coordinata di $\alpha'(t_0)$ rispetto alla base corrispondente alle coordinate $u_1, \ldots, u_N$ è

$$\frac{\mathrm{d}(u_i \cdot \alpha)}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Quindi, identificando $T_{\alpha(t_0)}(\mathrm{R}^N) = \mathrm{R}^N$ si ottiene:

$$\alpha'(t_0) = (\alpha_1'(t_0), \alpha_2'(t_0), \ldots, \alpha_N'(t_0))$$

dove abbiamo denotato $\alpha_i'(t_0) = \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}(t_0)$, $i = 1, \ldots, N$.

22.1 PROPOSIZIONE *Siano X, Y e Z varietà differenziabili e siano*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$$

morfismi. Per ogni punto $p \in X$ si ha:

$$(g \cdot f)_{*p} = g_{*f(p)} \cdot f_{*p} : T_p(X) \to T_{g(f(p))}(Z)$$

dove

$$f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y), \quad g_{*f(p)} : T_{f(p)}(Y) \to T_{g(f(p))}(Z)$$

sono i differenziali di f e di g in p e in $f(p)$ rispettivamente.

Dimostrazione. È lasciata al lettore. ■

22.2 COROLLARIO

(a) *Se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo allora per ogni $p \in X$ il differenziale $f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è un isomorfismo.*

(b) *Se $A \subset \mathsf{R}^n$ è un aperto e $f : A \to X$ è l'inversa di una carta locale allora $f_{*\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}(A) \to T_{f(\mathbf{p})}(X)$ è un isomorfismo per ogni $\mathbf{p} \in A$.*

Dimostrazione

(a) Sia $f^{-1} : Y \to X$ il diffeomorfismo inverso di f. Per la proposizione 22.1 si ha:

$$(1_X)_{*p} = (f^{-1} \cdot f)_{*p} = (f^{-1})_{*f(p)} \cdot f_{*p}$$
$$(1_Y)_{*f(p)} = (f \cdot f^{-1})_{*f(p)} = f_{*p} \cdot (f^{-1})_{*f(p)}$$

e poiché $(1_X)_{*p}$ e $(1_Y)_{*f(p)}$ sono le identità di $T_p(X)$ e di $T_{f(p)}(Y)$ rispettivamente, la conclusione segue.

(b) Sia $\varphi : f(A) \to \mathsf{R}^n$ l'inversa di f. Per la proposizione 22.1 si ha:

$$(\varphi \cdot f)_{*\mathbf{p}} = (\varphi)_{*f(\mathbf{p})} \cdot f_{*\mathbf{p}}$$

e poiché $(\varphi \cdot f)_{*\mathbf{p}}$ è l'identità di $T_{\mathbf{p}}(A) = T_{\mathbf{p}}(\mathsf{R}^n)$, $f_{*\mathbf{p}}$ è iniettiva. ■

Se X è una sottovarietà di R^N di dimensione n, allora per ogni $p \in X$ esiste un aperto $A \subset \mathsf{R}^n$ ed una parametrizzazione $f : A \to \mathsf{R}^N$ la cui immagine è un aperto $U \subset X$ contenente p, e la cui inversa è una carta locale $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$.

Sia $\mathbf{p} \in A$ tale che $f(\mathbf{p}) = p$. Dal corollario 22.2(b) segue che $f_{*\mathbf{p}}$ è iniettiva ed ha per immagine $\iota_{*p}(T_p(X))$ dove $\iota : X \subset \mathsf{R}^N$ è l'inclusione. Quindi ι_{*p}

identifica $T_p(X)$ ad un sottospazio di $T_p(\mathsf{R}^N) = \mathsf{R}^N$. Per questo motivo nel seguito considereremo gli spazi tangenti ad una sottovarietà di R^N come dei sottospazi vettoriali di R^N. Spesso è utile considerare lo *spazio tangente affine* a X in R^N, che è definito come il sottospazio affine $p + T_p(X)$ di R^N (fig. 22.1).

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione differenziabile e $\alpha : \mathbf{J} \to X$ una curva differenziabile. La composizione $f \cdot \alpha : \mathbf{J} \to Y$ è una curva differenziabile in Y. Sia $p = \alpha(t_0)$, e sia $\mathbf{v} = \alpha'(t_0) \in T_p(X)$ il vettore velocità di α. Per la proposizione 22.1 si ha:

$$f_{*p}(\mathbf{v}) = (f \cdot \alpha)'(t_0), \qquad [22.1]$$

cioè il differenziale f_{*p} può essere calcolato sul vettore $\mathbf{v}$ come il vettore velocità della curva $f \cdot \alpha$. Quest'osservazione è utile perché un vettore velocità è facile da calcolare in pratica e perché ogni vettore tangente a una varietà in un suo punto qualsiasi è il vettore velocità di qualche curva differenziabile, come ora dimostreremo. Quindi la [22.1] fornisce un metodo pratico per calcolare il differenziale di un morfismo.

22.3 PROPOSIZIONE *Sia X una varietà differenziabile, $p \in X$ e sia $\mathbf{v} \in T_p(X)$. Esiste una curva differenziabile $\alpha : \mathbf{J} \to X$ definita in un intervallo $\mathbf{J}$ contenente* 0 *tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.*

Dimostrazione. Se $X = \mathsf{R}^n$ possiamo definire $\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^n$ come $\alpha(t) = p + t\mathbf{v}$. Nel caso generale sia $A \subset \mathsf{R}^n$ un aperto e sia $\phi : A \to X$ l'inversa di una carta locale tale che $\phi(\mathbf{u}) = p$ per qualche $\mathbf{u} \in A$. Per la proposizione 22.2(b) il

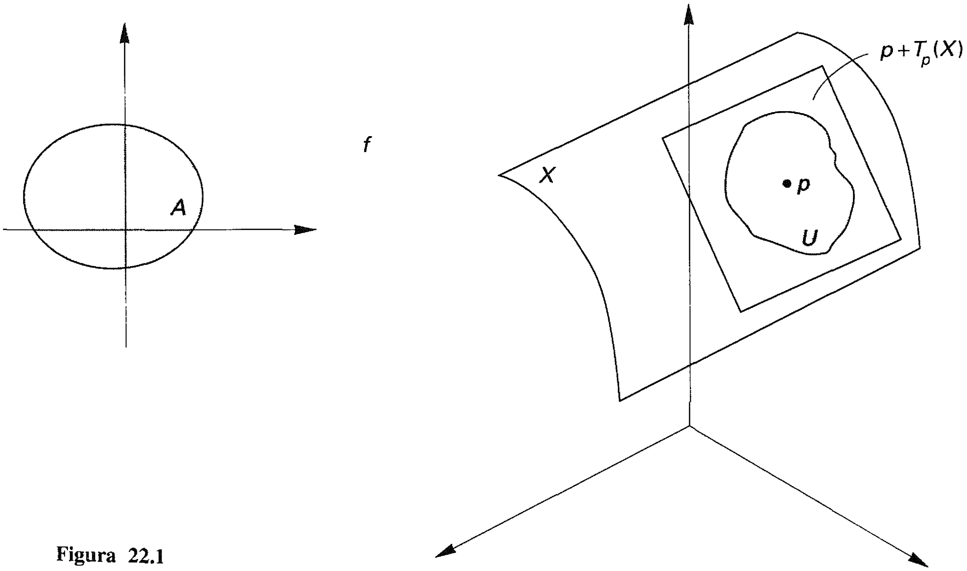


Figura 22.1

differenziale $\phi_{*\mathbf{u}} : T_{\mathbf{u}}(A) \to T_p(X)$ è un isomorfismo. Sia $\mathbf{w} \in \mathrm{R}^n = T_{\mathbf{u}}(A)$ tale che $\mathbf{v} = \phi_{*\mathbf{u}}(\mathbf{w})$. Allora $\alpha(t) = \phi(\mathbf{u} + t\mathbf{w})$ è la curva cercata. ■

Una *curva* α che gode delle proprietà descritte dalla proposizione 22.3 si dice *adattata a* $\mathbf{v}$.

Supponiamo che $f : X \to Y$ sia un morfismo di varietà differenziabili e sia $p \in X$. Consideriamo coordinate locali $\{x_1, \dots, x_n\}$ in un intorno di p e coordinate locali $\{y_1, \dots, y_m\}$ in un intorno di $f(p)$, dove $n = \dim(X)$ e $m = \dim(Y)$. Vogliamo determinare la matrice che rappresenta $f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ rispetto alle basi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \quad \text{di } T_p(X)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{f(p)} \quad \text{di } T_{f(p)}(Y).$$

Si ha

$$f_*\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial(y_i \cdot f)}{\partial x_j}\right)_p\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}.$$

I coefficienti della somma a secondo membro formano la j-esima colonna della matrice cercata, la quale ha pertanto la forma seguente:

$$Jf(p) := \left(\left(\frac{\partial(y_i \cdot f)}{\partial x_j}\right)_p\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(y_1 \cdot f)}{\partial x_1}\right)_p & \left(\frac{\partial(y_1 \cdot f)}{\partial x_2}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial(y_1 \cdot f)}{\partial x_n}\right)_p \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial(y_m \cdot f)}{\partial x_1}\right)_p & \left(\frac{\partial(y_m \cdot f)}{\partial x_2}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial(y_m \cdot f)}{\partial x_n}\right)_p \end{pmatrix}.$$

Questa matrice si chiama *matrice jacobiana* di f in p. Abbiamo dimostrato la seguente

22.4 PROPOSIZIONE *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà differenziabili, $p \in X$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ coordinate locali in un intorno di p e $\{y_1, \dots, y_m\}$ coordinate locali in un intorno di $f(p)$. Il differenziale $f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è rappresentato dalla matrice jacobiana $Jf(p)$ rispetto alle basi*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \quad \text{di } T_p(X)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{f(p)} \quad \text{di } T_{f(p)}(X).$$

Un caso particolare della proposizione precedente si ha quando $f : U \to \mathsf{R}^m$ è un'applicazione differenziabile definita su un aperto U di R^n a valori in R^m. Se $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathsf{R}$ sono le componenti di f si ha in $\mathbf{p} \in U$:

$$Jf(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

cioè la matrice jacobiana è la matrice delle derivate parziali delle componenti di f calcolate in $\mathbf{p}$.

Se f è una parametrizzazione allora, per il corollario 22.2, $Jf(\mathbf{p})$ ha rango massimo in ogni $\mathbf{p} \in U$.

22.5 *Esempi*

1. Se $f : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^m$ è una traslazione allora $f_{*\mathbf{p}} = 1_{\mathsf{R}^m}$ mentre se $g : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $g_{*\mathbf{p}} = g$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathsf{R}^n$. Quindi se $F : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ è un'affinità con parte lineare L, allora $F_{*\mathbf{p}} = L$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathsf{R}^n$. Segue che se X è una sottovarietà di R^n allora la restrizione $F_{|X} : X \to \mathsf{R}^m$ ha per differenziale $(F_{|X})_{*x}$ in ogni $x \in X$ la restrizione di L a $T_x(X)$.

2. Se U è un intervallo aperto di R e $\alpha : U \to \mathsf{R}^N$ è una curva differenziabile, in un punto $t_0 \in U$ la matrice jacobiana è

$$J\alpha(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t_0) \\ \alpha_2'(t_0) \\ \vdots \\ \alpha_N'(t_0) \end{pmatrix}$$

cioè ${}^t(J\alpha(t_0)) = \alpha'(t_0)$ è il vettore velocità di α in t_0. Quindi se è una parametrizzazione α ha vettore velocità non nullo in ogni punto.

Per esempio la curva $\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, ha vettore velocità $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ che si annulla in $t = 0$. Quindi, pur essendo un omeomorfismo, α non è una parametrizzazione.

3. Se $U \subset \mathsf{R}^n$ è un aperto e $\varphi : U \to \mathsf{R}^N$ è un'applicazione differenziabile tale che $\varphi(U) \subset X$, dove X è una sottovarietà di R^N, allora per ogni $\mathbf{u} \in U$

$$\varphi_{*\mathbf{u}}(T_{\mathbf{u}}(U)) \subset T_{\varphi(\mathbf{u})}(X)$$

(proposizione 22.1). In particolare, se $\dim(X) = n$ e $\varphi_{*\mathbf{u}}$ è iniettiva si ha l'uguaglianza; quindi, se la matrice jacobiana $J\varphi(\mathbf{u})$ ha rango n le sue colonne generano $T_{\varphi(\mathbf{u})}(X)$.

Ad esempio, lo spazio tangente ad $S^1(\mathbf{0}, r) \subset \mathsf{R}^2$, $r > 0$, in un suo punto $\mathbf{p} = (x, y)$ è il sottospazio $\langle (y, -x) \rangle$ di R^2. Infatti l'applicazione [20.2], che ha per immagine $S^1(\mathbf{0}, r)$, ha matrice jacobiana

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}$$

per ogni $t \in \mathsf{R}$.

Analogamente, sia $r > 0$ e:

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3 \\ &\varphi(u, v) = (r \cos(u) \cos(v), r \cos(u) \sin(v), r \sin(u)). \end{aligned} \tag{22.2}$$

L'applicazione φ è un morfismo la cui immagine è la sfera $S^2(\mathbf{0}, r)$ di centro l'origine e raggio r in R^3. La matrice jacobiana di φ in un punto $(u, v) \in \mathsf{R}^2$ è:

$$J\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin(u) \cos(v) & -r \cos(u) \sin(v) \\ -r \sin(u) \sin(v) & r \cos(u) \cos(v) \\ r \cos(u) & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango massimo precisamente nei punti in cui $\cos(u) \neq 0$. Pertanto φ_* ha rango massimo ad esempio nell'aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathsf{R}$, la cui immagine è $S^2(\mathbf{0}, r)$ privata dei due poli $(0, 0, \pm r)$. Se $\mathbf{p} \in S^2(\mathbf{0}, r) \backslash \{(0, 0, \pm r)\}$ le colonne di $J\varphi(u, v)$ generano il piano $\mathbf{p}^\perp$. Naturalmente per eseguire lo stesso calcolo si può utilizzare l'atlante costituito dalle proiezioni stereografiche.

Più in generale si può calcolare facilmente che $T_\mathbf{p}(\mathbf{S}^n) = \mathbf{p}^\perp$, cioè che lo spazio tangente a $\mathbf{S}^n$ in un suo punto $\mathbf{p}$ è il sottospazio di R^{n+1} ortogonale e $\mathbf{p}$.

4. Sia U un aperto di C e $f : U \to \mathsf{C}$ un'applicazione di classe $\mathrm{C}^{(1)}$. Sia

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

dove u, $v : U \to \mathsf{R}$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di f. La matrice jacobiana di f nel punto z è:

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix}.$$

Associando a $(dx, dy) \in T_{U,z}$ il numero complesso $dz = dx + \mathrm{i}dy$, lo spazio tangente $T_{U,z}$ si identifica a C. Quindi per ogni $dz = dx + \mathrm{i}dy \in T_{U,z}$ si ha:

$$f_{*z}(dz) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(z)dy\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(z)dy\right).$$

Se f è olomorfa allora:

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Poiché

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

calcolando si trova:

$$f'(z)dz = f_{*z}(dz).$$

Si osservi che se f è olomorfa allora $\det(Jf(z)) = |f'(z)|^2$.

5. *Toro in* R^4. L'applicazione:

$$\begin{gathered}\varphi : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^4 \\ \varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))\end{gathered} \tag{22.3}$$

ha per immagine il toro $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. La matrice jacobiana di φ è:

$$J\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & -\sin(v) \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix}$$

e ha ovunque rango 2. Pertanto il piano tangente a T^2 in $\varphi(u, v)$ è generato dalle colonne di $J\varphi(u, v)$.

Esercizi

1. Dimostrare che se $f : X \to Y$ è un'applicazione costante tra varietà differenziabili allora $f_{*x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ è l'applicazione nulla per ogni $x \in X$.
2. Verificare che per ogni $n \geq 1$ il morfismo

$$\begin{gathered}\varphi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n+1} \\ \varphi(\theta_1, \dots, \theta_n) = (r\cos(\theta_1)\dots\cos(\theta_{n-1})\cos(\theta_n),\ r\cos(\theta_1)\dots\cos(\theta_{n-1})\sin(\theta_n), \\ r\cos(\theta_1)\dots\cos(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1}), \dots, r\sin(\theta_1))\end{gathered} \tag{22.4}$$

ha per immagine la sfera $S^n(\mathbf{0},r)$ di centro l'origine e raggio r in R^{n+1} e che la matrice jacobiana di φ ha rango massimo nei punti dell'aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathsf{R}^{n-1}$, e ha immagine $S^n(\mathbf{0},r)\backslash\{(0,\dots,0,r),(0,\dots,0,-r)\}$.

23 Orientabilità

Le varietà differenziabili sono definite in modo da essere localmente diffeomorfe allo spazio euclideo, cioè in modo che ogni punto abbia un intorno diffeomorfo a un aperto di R^n per qualche n. Ciò significa che la loro geometria non presenta alcuna particolarità da un punto di vista locale, cioè la loro struttura è la stessa nell'intorno di ogni punto. Ciò che distingue tra loro varietà non diffeomorfe della stessa dimensione sono le cosiddette "proprietà globali": trovare un diffeomorfismo $F : X \to Y$ tra due varietà equivale a stabilire che esse sono globalmente identiche dal punto di vista della topologia differenziale, mentre per dimostrare che due varietà non sono diffeomorfe occorre scoprire che hanno qualche diversità globale. La proprietà globale più semplice a definirsi è la "orientabilità".

Sia X una varietà differenziabile, e siano $\{x_1,\dots,x_n\}$ e $\{y_1,\dots,y_n\}$ due sistemi di coordinate locali definiti negli aperti U e V rispettivamente. I due sistemi di coordinate si dicono *orientati concordemente* (*discordemente*) in $p \in U \cap V$ se $\det\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right) > 0$ (< 0), dove $\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right)$ è la matrice di transizione dalle coordinate $\{x_1,\dots,x_n\}$ alle $\{y_1,\dots,y_n\}$ nel punto p. Poiché $\det\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p\right)$ è una funzione di p continua e mai nulla il suo segno è costante sulla componente connessa di p in $U \cap V$. Quindi in tale componente connessa i due sistemi di coordinate sono ovunque concordemente orientati oppure ovunque discordemente orientati.

23.1 DEFINIZIONE *Una* varietà *differenziabile X si dice* orientabile *se possiede un atlante differenziabile $\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ tale che in ogni $p \in U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ i sistemi di coordinate locali definiti da φ_λ e da $\varphi_{\lambda'}$ siano orientati concordemente per ogni coppia di indici λ, $\lambda' \in \Lambda$. Un* atlante *siffatto si dice* orientato. *Se non possiede un atlante orientato X si dice* non orientabile.

Due *atlanti orientati* si dicono *concordemente orientati* (o *concordi*) se la loro unione è un atlante orientato, altrimenti si dicono *discordemente orientati* (o *discordi*). Due atlanti orientati sono discordi se e solo se in ogni punto ogni sistema di coordinate definito dal primo atlante è discordemente orientato da ogni sistema di coordinate definito dal secondo. È evidente che l'essere concordemente orientati è una relazione di equivalenza tra atlanti orientati. Pertanto se X è orientabile l'insieme di tutti gli atlanti orientati è ripartito in due classi disgiunte ognuna costituita da atlanti tra loro concordemente orientati. Queste due classi si dicono le *orientazioni* di X. X possiede due orientazioni, ognuna delle quali è individuata assegnando un atlante orientato che la rappresenta. Se in X è assegnato un atlante orientato la diremo una *varietà orientata*; l'atlante orientato definisce una orientazione in X.

In pratica la scelta di una orientazione di una varietà equivale alla scelta di una orientazione in tutti i suoi spazi tangenti "in modo coerente"; una volta assegnata una orientazione della varietà X si assegna una orientazione in ogni $T_p(X)$ che varia con continuità al variare di p e che è definita dalla base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$, dove $\{x_1, \dots, x_n\}$ sono coordinate locali in un intorno di p definite da una carta locale appartenente ad un atlante orientato che definisce l'orientazione di X.

Dalla definizione segue immediatamente che se X è orientabile ogni sua sottovarietà aperta è orientabile; il viceversa è ovviamente falso, perché ogni varietà, orientabile o no, possiede un aperto diffeomorfo a un aperto di R^n e quindi orientabile (cfr. il successivo esempio 23.2(1)). Quindi per dimostrare che una varietà X non è orientabile è sufficiente trovare una sua sottovarietà aperta che non è orientabile. Se $\dim X = 0$, un'orientazione su X si definisce attribuendo un segno, $+1$ o -1, ad ognuno dei suoi punti.

23.2 *Esempi*

1. Poiché ogni carta locale è concordemente orientata con se stessa, ogni varietà che possiede un atlante consistente di una sola carta locale è orientabile. Quindi sono orientabili gli aperti di R^n (in particolare R^n stesso), e le sottovarietà di R^N che sono immagini di una parametrizzazione.

È pure orientabile ogni varietà che possiede un atlante consistente di due carte locali $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ tali che $U_1 \cap U_2$ sia connesso. Se infatti $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ è un atlante non orientato allora è orientato l'atlante $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \psi_2)\}$, dove ψ_2 è la carta locale definita cambiando di segno la prima componente di φ_2.

In particolare le sfere $\mathbf{S}^n$, $n \geq 2$, sono varietà orientabili perché l'atlante costituito dalle due proiezioni stereografiche π_+ e π soddisfa la condizione.

2. Nella circonferenza $\mathbf{S}^1$ l'atlante $\{\pi_+, \pi_-\}$ costituito da due proiezioni stereografiche non è orientato. Infatti si ha:

$$(\pi_- \cdot \pi_+^{-1})(t) = \frac{1}{t}$$

e la matrice di transizione è $-\frac{1}{t^2}$. Però sostituendo a π la carta locale $-\pi_-$ si ottiene un atlante orientato. Quindi $\mathbf{S}^1$ è orientabile.

3. *Il nastro di Moebius aperto* M^0. Ricordiamo (cfr. esempio 7.6(7)) che M^0 è il quoziente di $\mathbf{I} \times (0, 1)$ rispetto alla relazione di equivalenza μ che identifica tra loro i punti $(0, t)$, $(1, 1 - t) \in \mathbf{I} \times (0, 1)$ per ogni $t \in (0, 1)$.

Sia $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. L'applicazione differenziabile

$$g : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1) \to \mathrm{R}^3$$

definita da

$$g(s,t) = \left(\cos(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\cos(2\pi s),\right.$$

$$\left.\sin(2\pi s) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi s)\sin(2\pi s),\ \left(t - \frac{1}{2}\right)\cos(\pi s)\right)$$

ha immagine omeomorfa a M^0. Inoltre per ogni $s_0 \in \mathbf{I}$ l'aperto $(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)\times(0,1)$ viene mandato da g diffeomorficamente sulla sua immagine, che è un aperto di M^0. Quindi M^0 è una superficie differenziabile. La proiezione

$$\xi : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1) \to M^0$$

è differenziabile e per ogni $\mathbf{x} \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1)$ il differenziale

$$\xi_{*\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}((-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1)) \to T_{\xi(\mathbf{x})}(M^0)$$

è un isomorfismo; ciò segue dal fatto che la restrizione di g a un intorno sufficientemente piccolo di $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione.

Il segmento $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times\left\{\frac{1}{2}\right\} \subset (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times(0,1)$ ha immagine $\xi\left((-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ diffeomorfa a $\mathbf{S}^1$. In ogni punto $\mathbf{x} = \left(s, \frac{1}{2}\right) \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ consideriamo la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $T_{\mathbf{x}}((-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1))$: essa viene trasformata dall'applicazione ξ_* in una base di $T_{\xi(\mathbf{x})}(M)$ che ne definisce una orientazione. Quando $\mathbf{x}$ varia da $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ a $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ il punto $\xi(\mathbf{x})$ descrive interamente $\mathbf{S}^1$ tornando al punto di partenza $y := \xi\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = \xi\left(\left(1, \frac{1}{2}\right)\right)$ ma le basi di $T_y(M^0)$ trasformate della base canonica di

$$T_{(0,\frac{1}{2})}((-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1))$$

e di quella di

$$T_{(1,\frac{1}{2})}((-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (0, 1))$$

sono discordemente orientate (fig. 23.1): quindi le due orientazioni di $T_y(M^0)$ possono essere ottenute una dall'altra con variazione continua di un'orientazione in $T_{y'}(M^0)$ al variare di $y' \in \mathbf{S}^1$. Ciò non avverrebbe se M^0 fosse orientabile. Quindi M^0 è una superficie non orientabile.

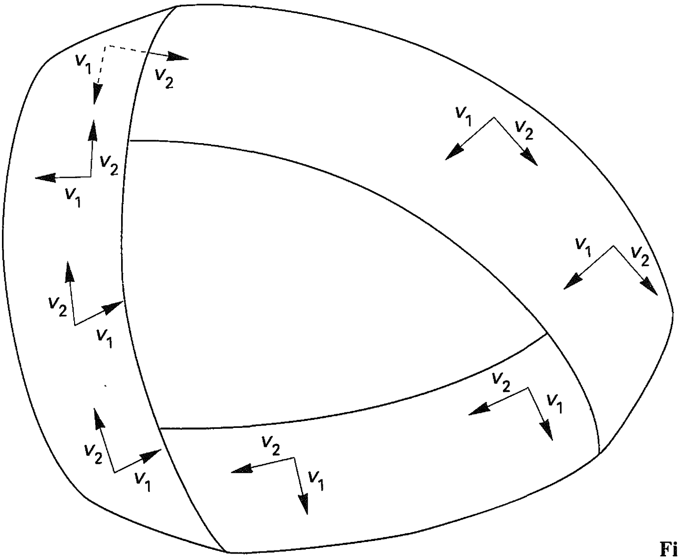


Figura 23.1

4. *Il piano proiettivo reale* $\mathbf{P}^2(\mathsf{R})$ contiene un aperto diffeomorfo al nastro di Moebius aperto e quindi è un esempio di superficie differenziabile compatta non orientabile.

Per verificarlo si consideri la rappresentazione di $\mathbf{P}^2$ come quoziente della sfera $\tau : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{P}^2$. τ è un morfismo la cui restrizione alla semisfera chiusa $\mathbf{S}^2_+ = \{x \in \mathbf{S}^2 : x_3 \geq 0\}$ è un'identificazione

$$\sigma : \mathbf{S}^2_+ \to \mathbf{P}^2$$

che realizza $\mathbf{P}^2$ come quoziente di $\mathbf{S}^2_+$ ottenuto identificando tra loro punti diametralmente opposti della circonferenza $\mathbf{S}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2_+ : x_3 = 0\}$. L'immagine $\sigma(\mathbf{S}^1) = \tau(\mathbf{S}^1)$ è la retta impropria di equazione $X_3 = 0$. Sia $0 < \varepsilon < 1$, e sia

$$\mathbf{S}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 : 0 \leq x_3 < \varepsilon\}.$$

$\sigma(\mathbf{S}_\varepsilon)$ è un aperto di $\mathbf{P}^2$ contenente la retta impropria e diffeomorfo a M^0 (fig. 23.2). La verifica di questo fatto è lasciata al lettore.

Nel capitolo 4 abbiamo verificato che $\mathbf{S}^2$ e $\mathbf{P}^2$ non sono omeomorfi perché hanno gruppi fondamentali non isomorfi (cfr. esempio 18.3). Ne consegue che queste due superfici non sono neanche diffeomorfe. La stessa conclusione discende dal fatto che $\mathbf{S}^2$ è orientabile e $\mathbf{P}^2$ non lo è. Si osservi che $\mathbf{P}^2$ è ottenuto dal piano R^2 con l'aggiunta di una retta proiettiva, cioè di un $\mathbf{S}^1$, di punti all'infinito. Invece $\mathbf{S}^2$ è ottenuta dal piano R^2 con l'aggiunta di un punto all'infinito; in altre parole per ottenere $\mathbf{S}^2$ si devono identificare ad un unico punto tutti i punti della retta impropria di $\mathbf{P}^2$. Questa identificazione ha l'effetto di restituire l'orientabilità.

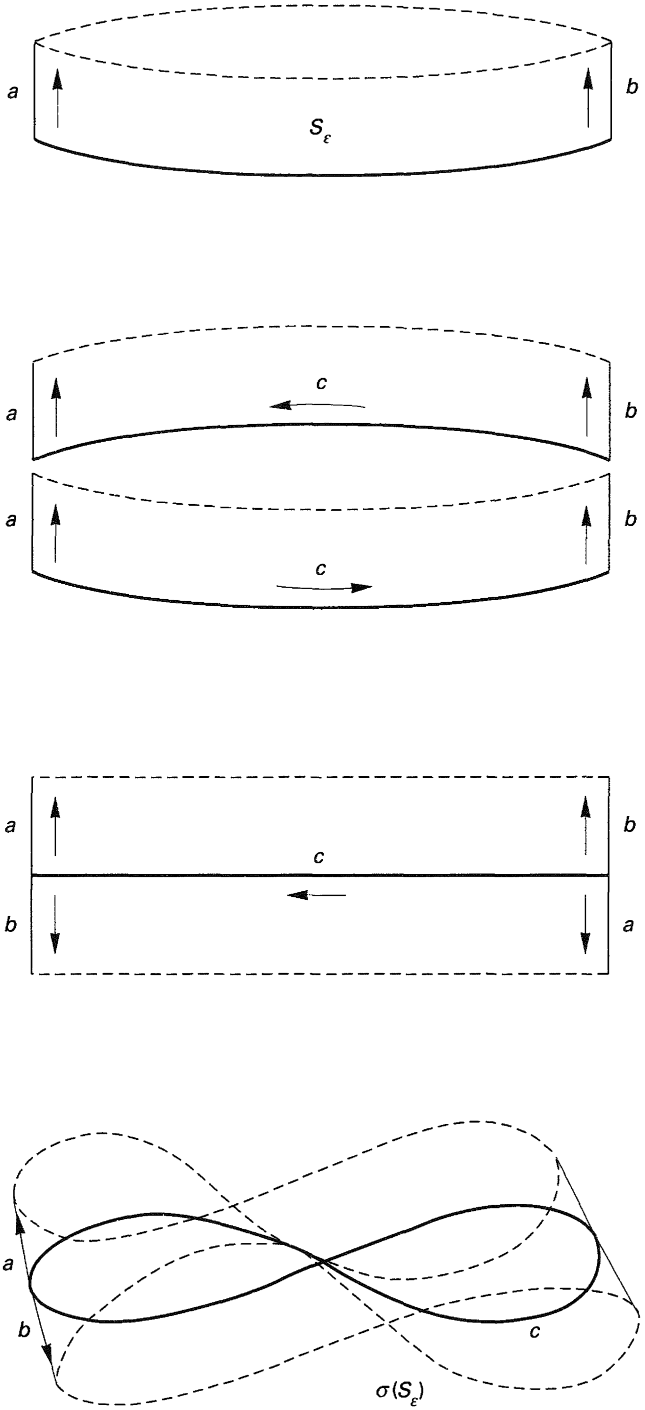

a
b
S_ε
c
a
b
a
b
c
a
b
c
b
a
a
b
c
$\sigma(S_\varepsilon)$

Figura 23.2

Esercizi

1. Dimostrare che lo spazio proiettivo complesso $\mathbf{P}^n(\mathsf{C})$ è una varietà differenziabile orientabile di dimensione $2n$ per ogni $n \geq 1$.
2. Dimostrare che $\mathbf{P}^2(\mathsf{R})$ è omeomorfo allo spazio ottenuto dal nastro di Moebius M identificando ad un punto la circonferenza $\partial M := M \backslash M^0$.
3. Sia X una superficie topologica. Un *atlante* $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ si dice *olomorfo* se per ogni $i,\ j \in I$ tale che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'applicazione

   $$\varphi_j \cdot \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \mathsf{C}$$

   è olomorfa (dove si è identificato R^2 con C). Due *atlanti olomorfi* in X si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante olomorfo. Una classe di equivalenza di atlanti olomorfi in X si dice *struttura complessa* su X. Una superficie topologica dotata di una struttura complessa si dice *superficie di Riemann.* Dimostrare che una superficie di Riemann è una superficie differenziabile orientabile.

24 Diffeomorfismi locali

Le proprietà algebriche dei differenziali di un morfismo di varietà differenziabili danno informazioni sul comportamento del morfismo stesso. In questo paragrafo e nei successivi investigheremo queste proprietà e le loro conseguenze geometriche.

Un risultato fondamentale dell'Analisi che utilizzeremo è il seguente.

24.1 TEOREMA (della funzione inversa) *Sia $U \subset \mathsf{R}^n$ un aperto, e sia $F : U \to \mathsf{R}^n$ un'applicazione di classe $\mathsf{C}^{(1)}$. Supponiamo che esista $\mathbf{a} \in U$ tale che il differenziale $F_{*\mathbf{a}} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ sia un isomorfismo. Allora esiste un aperto $V \subset U$ contenente $\mathbf{a}$ tale che $F(V)$ è un aperto e la restrizione $F_{|V} : V \to F(V)$ è un diffeomorfismo di classe $\mathsf{C}^{(1)}$.*

Per la dimostrazione di questo teorema rinviamo a un testo di Analisi Matematica.

Nel paragrafo 22 abbiamo dimostrato che, se un'applicazione $F : U \to \mathsf{R}^n$ è un diffeomorfismo di U su un aperto, allora $F_{*\mathbf{a}}$ è un isomorfismo per ogni $\mathbf{a} \in U$ (corollario 22.2). Il teorema 24.1 inverte questo risultato. Si osservi che dall'enunciato del teorema 24.1 e dal corollario 22.2 segue in particolare che se $F_{*\mathbf{a}}$ è un isomorfismo in un punto $\mathbf{a} \in U$ allora $F_{*\mathbf{x}}$ è un isomorfismo in ogni punto $\mathbf{x}$ appartenente ad un intorno aperto di $\mathbf{a}$; in altre parole il *luogo dei punti $\mathbf{x} \in U$ in cui $F_{*\mathbf{x}}$ è un isomorfismo è aperto.*

Ciò che è notevole nel teorema 24.1 è che esso permette di concludere che un morfismo ha una proprietà topologica e differenziale molto forte a partire dall'informazione, molto semplice da verificare, che $F_{*\mathbf{a}}$ è un isomorfismo, cioè che la matrice jacobiana $JF(\mathbf{a})$ ha determinante diverso da zero.

Ad esempio, sia U un aperto di $\mathbf{C}$ e $f : U \to \mathbf{C}$ un'applicazione olomorfa. Segue dall'esempio 22.5(4) che f è un diffeomorfismo locale in un punto $z \in U$ se e solo se $f'(z) \neq 0$.

Consideriamo un morfismo di varietà differenziabili $f : X \to Y$. Diremo f un *diffeomorfismo locale nel punto* $x \in X$ se f induce un diffeomorfismo di un intorno aperto di x su un intorno aperto di $f(x)$. f si dirà *diffeomorfismo locale* se lo è in ogni punto $x \in X$.

Un diffeomorfismo locale è anche un omeomorfismo locale.

Ovviamente un diffeomorfismo è un diffeomorfismo locale, ma il viceversa non è in generale vero: ad esempio, il morfismo

$$E : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1, \quad E(x) = e^{2\pi i x}$$

è un diffeomorfismo locale ma non è un diffeomorfismo. Ogni inclusione aperta è un diffeomorfismo locale ma non è un diffeomorfismo se non è suriettiva. Si osservi che se esiste un diffeomorfismo locale $f : X \to Y$ allora $\dim(X) = \dim(Y)$.

Segue immediatamente dalla definizione che, se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo locale in $x \in X$ e $g : Y \to Z$ è un diffeomorfismo locale in $f(x)$, allora $g \cdot f$ è un diffeomorfismo locale in x; quindi la composizione di diffeomorfismi locali è un diffeomorfismo locale.

Il teorema 24.1 può anche enunciarsi così: se $F_{*\mathbf{a}}$ è un isomorfismo, F è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{a}$. In tale forma questo risultato ammette un'immediata estensione a morfismi tra varietà.

24.2 TEOREMA *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà differenziabili ed $x \in X$. f_{*x} è un isomorfismo in x se e solo se f è un diffeomorfismo locale in x.*

La dimostrazione del teorema è un facile esercizio sull'uso delle carte locali e viene lasciata al lettore.

24.3 *Esempi*

1. Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x$, il morfismo indotto dalla proiezione. Il differenziale f_{*x} si annulla in $x = (-1,0), (1,0)$, i punti in cui la retta tangente è parallela all'asse y. In un qualunque intorno di uno di questi punti f non è biunivoca e quindi non è un diffeomorfismo locale. In ogni altro punto di $\mathbf{S}^1$ f è un diffeomorfismo locale (fig. 24.1).

2. Sia $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $s(u,v) = (u,uv)$. Siano (u,v) coordinate nel dominio e (x,y) nel codominio. La matrice jacobiana di s in un punto (u,v) è:

$$Js(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

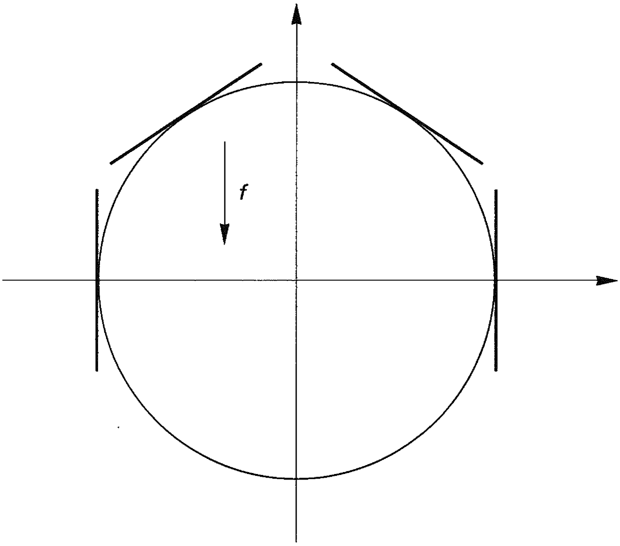


Figura 24.1

e quindi s è un diffeomorfismo locale in tutti i punti che non appartengono alla retta $u = 0$. Infatti la restrizione di s a $\mathsf{R}^2 \backslash \{u = 0\}$ è un diffeomorfismo

$$\mathsf{R}^2 \backslash \{u = 0\} \rightarrow \mathsf{R}^2 \backslash \{x = 0\}$$

il cui inverso è

$$b : \mathsf{R}^2 \backslash \{x = 0\} \rightarrow \mathsf{R}^2 \backslash \{u = 0\}$$
$$b(x, y) = \left(x, \frac{y}{x}\right).$$

Tutta la retta $u = 0$ viene mandata da s nell'origine. Quindi

$$\mathrm{Im}(s) = [\mathsf{R}^2 \backslash \{x = 0\}] \cup \{\mathbf{0}\}$$

non è aperta.

Il fatto di essere un diffeomorfismo locale è una proprietà locale dei morfismi, che si verifica punto per punto; invece la proprietà di essere un diffeomorfismo è di natura globale perché un diffeomorfismo dev'essere necessariamente un'applicazione biunivoca. La biunivocità è anche sufficiente perché un diffeomorfismo locale sia un diffeomorfismo:

24.4 PROPOSIZIONE *Se $f : X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo locale e un'applicazione biettiva, allora f è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Poiché f è biettiva l'applicazione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è definita. Inoltre, essendo f un diffeomorfismo locale, ogni punto $y \in Y$ possiede un intorno aperto V tale che la restrizione di f^{-1} a V sia un diffeomorfismo; in particolare f^{-1} è un morfismo. Quindi f e f^{-1} sono diffeomorfismi uno inverso dell'altro. ■

Un esempio di diffeomorfismo locale suriettivo che non è un diffeomorfismo è l'applicazione $z \mapsto e^z$, di $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ in sé; la controimmagine di ogni punto $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ è un insieme infinito discreto: questa proprietà è un caso particolare di un risultato generale che ora dimostreremo.

Consideriamo un morfismo $f : X \to Y$ di varietà e supponiamo $\dim(X) = \dim(Y)$. Un punto $y \in Y$ si dirà *valore regolare* di f se f è un diffeomorfismo locale in ogni punto $x \in f^{-1}(y)$; altrimenti y è detto *valore critico* di f. Questa definizione rientra in una più generale che daremo nel prossimo paragrafo. Si osservi che dalla definizione segue che ogni punto $y \in Y$ tale che $f^{-1}(y) = \emptyset$ è un valore regolare perché la condizione della definizione è banalmente soddisfatta in y.

24.5 TEOREMA *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà e supponiamo* $\dim(X) = \dim(Y)$. *Sia $y \in Y$ un valore regolare di f. Allora:*

(a) *L'insieme $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di X (eventualmente vuoto).*

(b) *Se X è compatto allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito ed esiste un aperto $V \subset Y$ contenente y tale che ogni $y' \in V$ è un valore regolare di f e gli insiemi $f^{-1}(y)$ ed $f^{-1}(y')$ hanno lo stesso numero di elementi. In particolare l'insieme dei valori regolari di f è un aperto di Y.*

Dimostrazione

(a) Sia $x \in f^{-1}(y)$. Poiché f è un diffeomorfismo locale in x, esiste un intorno aperto U di x mandato da f diffeomorficamente su un intorno aperto di y; in particolare f è biunivoca in U e quindi $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$.

(b) $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio compatto e quindi è finito. Sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, e per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia U_i un intorno aperto di x_i mandato da f diffeomorficamente su un intorno aperto di y. Allora

$$V = [f(U_1) \cap \ldots \cap f(U_n)] \backslash f(X \backslash (U_1 \cup \ldots \cup U_n))$$

è un aperto di Y contenente y che ha le proprietà volute. ■

L'ultima asserzione del teorema può anche esprimersi così. Sia $W \subset Y$ l'aperto dei valori regolari: la funzione $W \to \mathbb{N}$ che associa a $y \in W$ il numero $\#f^{-1}(y)$ dei punti dell'insieme $f^{-1}(y)$ è localmente costante, cioè è costante su ogni componente connessa di W.

Anche se è molto semplice, il teorema 24.5 ha notevoli conseguenze. Vediamone alcune.

Identifichiamo C al piano euclideo $\mathbb{R}^2$ e sia $\pi_+ : \mathbf{S}^2\setminus\{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ la proiezione stereografica. Sia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morfismo. Diremo che F *si estende all'infinito* se esiste un morfismo $\hat{F} : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ tale che $F = \pi_+ \cdot \hat{F} \cdot \pi_+^{-1}$, cioè se esiste $\hat{F}$ la cui espressione nelle coordinate locali determinate da π_+ è F. Segue dal teorema 24.5(b) che se F si estende all'infinito e possiede almeno un valore regolare (per esempio è olomorfa) allora esiste un aperto non vuoto W di C tale che $\#F^{-1}(w) < \infty$ per ogni $w \in W$. Ciò non avviene ad esempio per la funzione esponenziale $z \mapsto e^z$, la quale ha tutto C come insieme di valori regolari, ma ognuno di essi ha controimmagine infinita: pertanto e^z non si estende all'infinito. La stessa cosa avviene per tutte le funzioni olomorfe intere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dotate di una singolarità essenziale all'infinito.

Una classe di morfismi che si estendono all'infinito sono i polinomi. Se

$$P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$$

è un polinomio a coefficienti complessi di grado effettivo n $(a_n \neq 0)$, allora la corrispondente funzione $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si estende all'infinito. Infatti la restrizione di

$$\pi_+^{-1} \cdot P \cdot \pi_+ : \mathbf{S}^2\setminus\{(0,0,1)\} \to \mathbf{S}^2$$

a $\mathbf{S}^2\setminus\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ è, nelle coordinate locali date da π , la funzione:

$$Q(z) = P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{z^n}{\overline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \ldots + \overline{a}_n z^n}$$

(cfr. § 20). Poiché $Q(z)$ si estende a una funzione (olomorfa e quindi) di classe $C^{(\infty)}$ in un intorno di 0, $\pi_+^{-1} \cdot P \cdot \pi_+$ si estende a un morfismo $\hat{P} : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$.

Il teorema 24.5 permette di dare una nuova semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

24.6 TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi possiede una radice in* C.

Dimostrazione

Sia $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$ un polinomio a coefficienti complessi di grado effettivo $n \geq 1$, e sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la corrispondente applicazione. Sarà sufficiente dimostrare che P è suriettiva. Sia $z \in \mathbb{C}$: P è un diffeomorfismo locale in z se e solo se $P'(z) \neq 0$. Poiché il polinomio $P'(Z)$ non è identicamente nullo, esso si annulla in un numero finito di punti $\{z_1, \ldots, z_k\}$ e quindi $\mathbb{C}\setminus\{P(z_1), \ldots, P(z_k)\}$ è l'insieme dei valori regolari di P. Poiché P si estende all'infinito, per il teorema 24.5(b) la funzione $\#P^{-1}(w)$ è costante al variare di $w \in \mathbb{C}\setminus\{P(z_1), \ldots, P(z_k)\}$, essendo quest'insieme connesso. Ma $\#P^{-1}(w)$ non è zero ovunque e quindi è positivo ovunque. Ciò significa che P è suriettiva. ∎

Esercizi

1. Verificare che la proiezione naturale $\tau : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{P}^2$ è un diffeomorfismo locale.

2. Determinare i valori regolari della proiezione

$$f : \mathbf{S}^n \to \mathsf{R}^n,$$

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n).$$

3. Sia $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ un diffeomorfismo locale. Dimostrare che $\mathrm{Im}(f)$ è un intervallo aperto e che f definisce un diffeomorfismo di R su $\mathrm{Im}(f)$.

4. Dimostrare che se $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2, \ldots, f_k : X_k \to Y_k$ sono diffeomorfismi locali allora:

$$f = f_1 \times \ldots \times f_k : X_1 \times \ldots \times X_k \to Y_1 \times \ldots \times Y_k$$

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (f_1(x_1), \ldots, f(x_k))$$

è un diffeomorfismo locale.

5. Sia $U = \{(\rho, \theta) \in \mathsf{R}^2 : \rho > 0\}$ e

$$p : U \to \mathsf{R}^2$$

$$p(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

Dimostrare che p è un diffeomorfismo locale. Determinare un aperto massimale $V \subset U$ tale che la restrizione $p_{|V}$ sia un diffeomorfismo sull'immagine, e determinare $p(V)$. p è detta *applicazione di passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane in* R^2.

6. Sia $U = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathsf{R}^3 : \rho > 0\}$ e

$$s : U \to \mathsf{R}^3$$

$$s(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \cos(\varphi), \;\; \rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \;\; \rho \sin(\varphi)).$$

Dimostrare che s è un diffeomorfismo locale. Determinare un aperto massimale $V \subset U$ tale che la restrizione $s_{|V}$ sia un diffeomorfismo sull'immagine, e determinare $s(V)$. s è detta *applicazione di passaggio da coordinate polari* (o *sferiche*) *a coordinate cartesiane in* R^3.

7. Sia $W = \{(\rho, \theta, z) \in \mathsf{R}^3 : \rho > 0\}$ e

$$c : W \to \mathsf{R}^3$$

$$c(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \;\; \rho \sin(\theta), z)$$

Dimostrare che c è un diffeomorfismo locale. Determinare un aperto massimale $V \subset W$ tale che la restrizione $c_{|V}$ sia un diffeomorfismo sull'immagine, e determinare $c(V)$. c è detta *applicazione di passaggio da coordinate cilindriche a coordinate cartesiane* in R^3.

8. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff soddisfacente il secondo assioma di numerabilità, e Y una varietà differenziabile. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia un omeomorfismo locale. Dimostrare che X possiede una struttura di varietà differenziabile tale che f sia un diffeomorfismo locale.

9. Siano X, Y, Z varietà differenziabili, $f : X \to Y$ un diffeomorfismo locale che è un rivestimento e $g : X \to Z$ un morfismo. Supponiamo che si abbia $g(x) = g(x')$ per ogni $x, x' \in X$ tali che $f(x) = f(x')$. Dimostrare che ponendo per ogni $y \in Y$:

   $$h(y) = f(x),$$

   dove x è un elemento qualsiasi di $f^{-1}(y)$, si definisce un morfismo $h : Y \to Z$ tale che $h \cdot f = g$.

25 Immersioni e sottovarietà

25.1 DEFINIZIONE *Sia X una varietà differenziabile. Un sottospazio $Z \subset X$ si dice* sottovarietà differenziabile *di dimensione m di X se per ogni $z \in Z$ esiste un intorno aperto U_z di z in X e un'applicazione differenziabile $\overline{F_x} : U_z \to \mathsf{R}^m$ che induce una biezione F_z di $U_z \cap Z$ su un aperto V di R^m tale che la biezione inversa $V \to U_z \cap Z$ sia differenziabile come applicazione di V in X. Se* $\dim(X) = n$, *l'intero $n - m$ si dice* codimensione *di Z in X.*

Se Z è una sottovarietà di dimensione m di X, allora ogni coppia $(U_z \cap Z, F_z)$ è una carta locale in Z. La condizione che F_z e la sua inversa siano differenziabili implica che due qualsiasi di queste carte locali sono differenziabilmente compatibili. Pertanto $\{(U_z \cap Z, F_z)\}_{z \in Z}$ costituisce un m-atlante differenziabile in Z, e quindi Z è una varietà differenziabile di dimensione m.

Nella definizione 25.1 rientrano come casi particolari le sottovarietà di R^N (definizione 20.1; vedi fig. 25.1).

Una sottovarietà di dimensione 0 è un sottoinsieme discreto di X.

Una sottovarietà di dimensione n di una varietà differenziabile X di dimensione n è una sottovarietà aperta. Ciò segue facilmente dal teorema 24.2 (cfr. esercizio 1).

Segue subito dalla definizione che l'applicazione $\iota : Z \to X$ di inclusione di una sottovarietà Z in X è un morfismo di varietà. Inoltre in ogni punto $z \in Z$ il differenziale

$$\iota_{*z} : T_z(Z) \to T_z(X)$$

è iniettivo: la dimostrazione è simile al caso delle sottovarietà di R^N (cfr. corollario 22.2) e viene lasciata al lettore.

25.2 DEFINIZIONE *Un morfismo di varietà differenziabili $f : X \to Y$ è un*'immersione nel punto *$x \in X$ se $f_{*x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ è iniettivo. f è un*'immersione *se è un'immersione in ogni $x \in X$.*

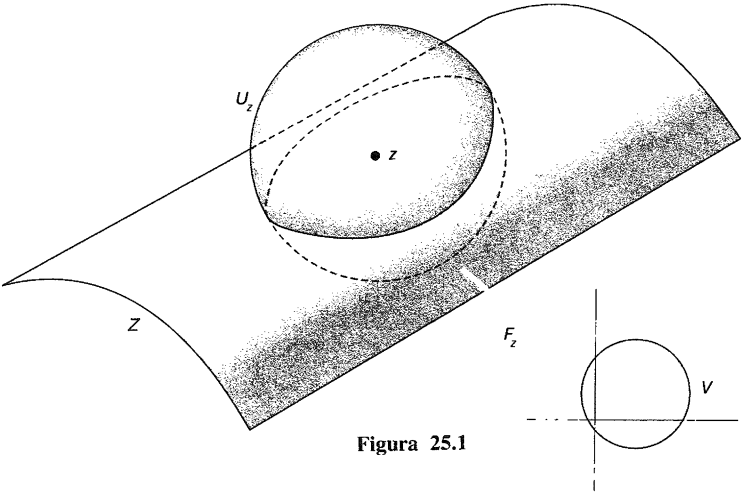


Figura 25.1

La definizione di immersione è data e si verifica punto per punto; è quindi una nozione di natura locale. Se f è un'immersione in qualche punto $x \in X$, allora $\dim(X) \leq \dim(Y)$, e se vale l'uguaglianza allora f è un diffeomorfismo locale.

Se $f : X \to Y$ è un'immersione in $x \in X$ e $g : Y \to Z$ è un'immersione in $f(x)$, allora $g \cdot f$ è un'immersione in x; pertanto la composizione di immersioni è un'immersione.

Un morfismo di varietà differenziabili $F : X \to Y$ è un'*inclusione differenziabile* se induce un diffeomorfismo di X su una sottovarietà di Y, cioè se $f(X)$ è una sottovarietà di Y e $f : X \to f(X)$ è un diffeomorfismo.

Se X è una sottovarietà di Y, l'applicazione $\iota : X \subset Y$ che manda X in se stessa è un esempio di inclusione differenziabile, che si chiama *inclusione naturale* della sottovarietà X in Y. L'applicazione di R^n in R^{n+m} che manda

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \qquad [25.1]$$

è un'inclusione differenziabile e un'immersione.

25.3 PROPOSIZIONE *Ogni inclusione differenziabile è un'immersione.*

Dimostrazione. Immediata. ■

Il viceversa non è vero. Ad esempio l'applicazione [20.2] non è un'inclusione differenziabile perché non è iniettiva; ma è un'immersione perché

$$Jf(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$$

è di rango 1 per ogni $t \in \mathsf{R}$.

In compenso la proposizione 25.3 può essere invertita localmente.

25.4 PROPOSIZIONE *Se $f : X \to Y$ è un'immersione allora ogni punto $x \in X$ possiede un intorno aperto V tale che la restrizione $f_{|V} : V \to Y$ sia un'inclusione differenziabile.*

Dimostrazione. Poniamo $y = f(x)$. Siano $\varphi : A \to X$ l'inversa di una carta locale in un intorno di x, $\psi : B \to Y$ l'inversa di una carta locale in un intorno di y, dove $A \subset \mathsf{R}^n$ e $B \subset \mathsf{R}^m$ sono aperti. Siano $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ tali che $\varphi(\mathbf{a}) = x$, $\psi(\mathbf{b}) = y$, e supponiamo, come è lecito fare, che si abbia $f(\varphi(A)) \subset \psi(B)$. Si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "H"'] & B \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

in cui $H = \psi^{-1} \cdot f \cdot \varphi$. Per costruzione $H(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Per ipotesi $H_{*\mathbf{a}}$ è iniettiva: pertanto la matrice jacobiana $JH(\mathbf{a})$ ha rango massimo n, e, salvo riordinare le variabili, possiamo supporre sia della forma:

$$JH(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$$

dove $M \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$, $N \in M_{m-n,n}(\mathsf{R})$.

Definiamo $K : A \times \mathsf{R}^{m-n} \to \mathsf{R}^m$ nel modo seguente:

$$K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = H(\mathbf{v}) + (\mathbf{0}, \mathbf{w}).$$

Allora $K(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ e

$$JK(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ N & \mathbf{I}_{m-n} \end{pmatrix}$$

dove 0 è la matrice nulla $n \times (m-n)$. Si ha $\det(JK(\mathbf{a}, \mathbf{0})) = \det(M) \neq 0$: per il teorema 24.1 K è un diffeomorfismo locale in $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$. Anche la composizione $\psi \cdot K$ è un diffeomorfismo locale in $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$: pertanto esiste un aperto $W \subset A \times \mathsf{R}^{m-n}$ contenente $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ tale che la restrizione $(\psi \cdot K)_{|W} : W \to Y$ sia una carta locale relativa a un intorno di y. Poniamo $U = W \cap (A \times \{\mathbf{0}\})$. Allora $j : U \subset W$ è un'inclusione differenziabile e quindi anche $[(\psi \cdot K)_{|W}] \cdot j$ è un'inclusione differenziabile.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[u, "\varphi_{|U}"] \arrow[r, "j"'] & W \arrow[u, "(\psi \cdot K)_{|W}"']
\end{tikzcd}$$

Poiché $\varphi_{|U} : U \to X$ è l'inversa di una carta locale in un intorno di x, l'asserto è dimostrato. ■

Si osservi che dalla dimostrazione della proposizione 25.4 segue che esistono coordinate locali in un intorno di x e in un intorno di y tali che f si esprima in coordinate locali nella forma [25.1].

Affinché un'immersione sia anche un'inclusione differenziabile è necessario che sia un'applicazione iniettiva. L'iniettività non è però sufficiente: non è difficile dare esempi di immersioni che sono iniettive ma che non sono inclusioni differenziabili (cfr. il successivo esempio 25.6(1)). L'iniettività è sufficiente nel caso in cui il dominio dell'applicazione è una varietà compatta.

25.5 PROPOSIZIONE *Sia $f : X \to Y$ un'immersione iniettiva. Se f è un'applicazione propria allora è un'inclusione differenziabile. In particolare se X è compatta f è un'inclusione differenziabile.*

Dimostrazione. L'ultima affermazione segue dalla prima, perché se X è compatta allora f è propria perché Y è di Hausdorff.

Dimostriamo la prima affermazione. Innanzitutto faremo vedere che l'applicazione $X \to f(X)$ è aperta e quindi è un omeomorfismo. Sia $U \subset X$ aperto e supponiamo $f(U)$ non aperto in $f(X)$; allora esiste una successione $\{y_i\}_{i\geq 1}$ di punti di $f(X)\backslash f(U)$ che converge ad un punto $y \in f(U)$. Siano $\{x\} = F^{-1}(y)$, $\{x_i\} = f^{-1}(y_i)$, $i = 1,2,\ldots$. Poiché $\{y\} \cup \{y_i : i = 1,2,\ldots\}$ è compatto anche $\{x\} \cup \{x_i : i = 1,2,\ldots\}$ è compatto, e quindi, a meno di sostituire $\{x_i\}_{i\geq 1}$ con una sottosuccessione, possiamo supporre che esista $x' := \lim(x_i) \in X$. Ma allora si ha:

$$F(x') = \lim F(x_i) = \lim(y_i) = y = F(x)$$

e, per l'iniettività di f, $x' = x$: quindi $\lim(x_i) = x$. Ma $x \in U$, mentre $x_i \notin U$ per ogni i, e ciò contraddice il fatto che U è aperto. Quindi $F(U)$ è aperto. Dunque $X \to f(X)$ è un omeomorfismo. Ma per la proposizione 25.4 F è localmente un'inclusione differenziabile; pertanto $f(X)$ è una varietà e $X \to f(X)$ è un diffeomorfismo locale biunivoco; dunque, per la proposizione 24.4, $X \to f(X)$ è un diffeomorfismo. ■

Ogni parametrizzazione $f : U \to \mathsf{R}^N$, dove $U \subset \mathsf{R}^n$ è un aperto, è un'inclusione differenziabile e, in particolare, un'immersione. Spesso è possibile, per una data sottovarietà $X \subset \mathsf{R}^N$ di dimensione n, assegnare un'immersione $f : U \to \mathsf{R}^N$, con $U \subset \mathsf{R}^n$ aperto, tale che $f(U) = X$ ma che non è una parametrizzazione: questo morfismo, di volta in volta opportunamente ristretto, fornisce, grazie alla proposizione 25.4, parametrizzazioni le cui immagini ricoprono tutta la varietà e le cui inverse ne definiscono quindi un atlante. Un'immersione f con queste proprietà si dice talvolta una *rappresentazione parametrica* di X, e le componenti di f si chiamano *equazioni parametriche* di X. Un esempio di rappresentazione parametrica della circonferenza $\mathbf{S}^1$ è costituito dall'immersione [20.2]; altri esempi sono descritti più avanti.

25.6 *Esempi*

1. Sia $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$ definita da $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(2\theta))$. Si verifica immediatamente che f è un'immersione. La sua restrizione all'aperto $\Delta = (0, \pi/2) \cup (\pi/2, 2\pi)$ è biunivoca, ma l'inversa non è continua perché $f(\Delta) = f(\mathsf{R})$ è connesso, mentre Δ è sconnesso. Quindi $f_{|\Delta}$ è un'immersione iniettiva che non è un'inclusione differenziabile (fig. 25.2).

2. Le applicazioni [22.2] e [22.4] non sono rappresentazioni parametriche perché non sono ovunque immersioni. La restrizione della [22.2] a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathsf{R}$ è una rappresentazione parametrica di $S^2(\mathbf{0}, r)\backslash\{(0,0,\pm r)\}$. La restrizione della [22.4] all'aperto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathsf{R}^{n-1}$ è una rappresentazione parametrica di $S^n(\mathbf{0}, r)\backslash$ $\backslash\{(0, \dots, 0, \pm r)\}$.

3. L'applicazione:

$$\varphi : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$$

$$\varphi(u, v) = (r\ \cos(u), r\ \sin(u), v)$$

è una rappresentazione parametrica del cilindro con asse l'asse Z, e sezione orizzontale la circonferenza $S^1(\mathbf{0}, r) \subset \mathsf{R}^2$.

4. *Toro in* R^4. L'applicazione:

$$\varphi : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^4$$

$$\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$$

è una rappresentazione parametrica del toro $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ (cfr. esempio 22.5(5)).

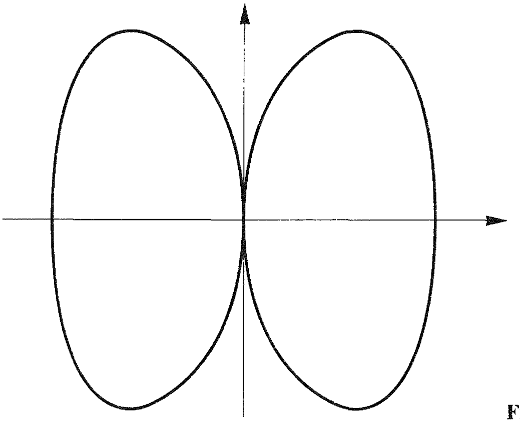


Figura 25.2

5. *Superfici rigate.* Una superficie rigata di R^N è una superficie descritta da una retta (o da un suo aperto) che varia in dipendenza di un parametro. Di solito una rappresentazione parametrica di una superficie siffatta è ottenuta assegnando una curva $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ e, per ogni $u \in \mathbf{J}$, una retta $r(u)$ passante per $\alpha(u)$, assegnata mediante un suo vettore di direzione $\mathbf{v}(u) \neq 0$, in modo che la corrispondente applicazione $\mathbf{v} : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ sia di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$. Una rappresentazione parametrica della superficie è quindi, in forma vettoriale:

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{v}(u), \qquad [25.2]$$

dove (u, v) varia in un opportuno aperto U di $\mathbf{J} \times \mathsf{R}$. Le rette $r(u)$ si dicono *generatrici*, e la curva α *direttrice*, della superficie rigata. Affinché la [25.2] definisca un'immersione è ovviamente necessario che la sua matrice jacobiana abbia rango 2, il che si traduce in opportune condizioni su α, su $\mathbf{v}$ e su U. Precisamente è immediato calcolare che la [25.2] è un'immersione nell'aperto U costituito dagli (u, v) per cui i vettori $\alpha'(u) + v\mathbf{v}'(u)$ e $\mathbf{v}(u)$ sono linearmente indipendenti.

Il cilindro descritto nell'esempio 3 è una superficie rigata di R^3 in cui

$$\alpha(u) = (r\ \cos(u), r\ \sin(u), 0)$$

e $\mathbf{v}(u) = (0, 0, 1)$ è costante.

Più in generale chiameremo *cilindro* una superficie rigata tale che le generatrici siano parallele tra loro; se la superficie è assegnata con rappresentazione parametrica [25.2], si può sempre fare in modo che $\mathbf{v}(u) = \mathbf{v}_0$ sia costante al variare di u. Una sua rappresentazione parametrica è pertanto:

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{v}_0.$$

Una superficie rigata in cui la curva direttrice è costante, cioè in cui tutte le generatrici passano per uno stesso punto $\mathbf{p}$, si dice un *cono di vertice* $\mathbf{p}$. Una sua rappresentazione parametrica è:

$$\varphi(u, v) = \mathbf{p} + v\mathbf{v}(u), \quad v \neq 0$$

6. *Superfici di rotazione in* R^3. Se $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ è una rappresentazione parametrica di una 1-varietà la cui immagine è contenuta in un piano H, e r è una retta di H tale che $r \cap \alpha(\mathbf{J}) = \emptyset$ allora, al variare del piano H nel fascio di asse r, $\alpha(\mathbf{J})$ descrive una *superficie* detta *di rotazione*.

Per verificare che si tratta effettivamente di una superficie, supponiamo per semplicità che H e r siano un piano e un asse coordinati, ad esempio il piano $z = 0$ e l'asse $y = z = 0$. Poiché $r \cap \alpha(\mathbf{J}) = \emptyset$ possiamo supporre che $\alpha(\mathbf{J})$ sia contenuta ad esempio nel semipiano $y > 0$. Pertanto sarà $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0)$, con $\alpha_2(u) > 0$ per ogni $u \in \mathbf{J}$. Allora il luogo descritto è l'immagine dell'applicazione:

$$\varphi : \mathbf{J} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3$$

$$\varphi(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos(v), \alpha_2(u)\sin(v)).$$

Infatti, per ogni fissato u_0, $\varphi(u_0, \cdot) : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3$ ha per immagine la circonferenza del piano di equazione $x = \alpha_1(u_0)$, di centro il punto $(\alpha_1(u_0), 0, 0)$, descritta dal punto $\alpha(u_0)$ quando H varia attorno a r. La matrice jacobiana di φ è:

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_1'(u) & 0 \\ \alpha_2'(u)\cos(v) & -\alpha_2(u)\sin(v) \\ \alpha_2'(u)\sin(v) & \alpha_2(u)\cos(v) \end{pmatrix}$$

Poiché per ipotesi $\alpha_2(u) > 0$ e $(\alpha_1'(u), \alpha_2'(u)) \neq (0, 0)$ per ogni $u \in \mathbf{J}$, $J\varphi$ ha ovunque rango massimo e quindi φ è una rappresentazione parametrica. Da ciò segue che $\varphi(\mathbf{J} \times \mathsf{R})$ è una superficie.

7. L'immagine di un morfismo $X \to Y$ di varietà differenziabili non è in generale una sottovarietà di Y. L'applicazione s considerata nell'esempio 24.3(2) ha per immagine $[\mathsf{R}^2 \backslash \{x = 0\}] \cup \{\mathbf{0}\}$, che non è una sottovarietà di R^2 nell'intorno di $\mathbf{0}$ (perché?).

8. *La superficie romana di Steiner.* Si consideri l'applicazione

$$f : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$$

$$f(\mathbf{u}) = f(u_0, u_1, u_2) = (u_1u_2, u_0u_2, u_0u_1)$$

che è evidentemente differenziabile. La matrice jacobiana di f è:

$$Jf = \begin{pmatrix} 0 & u_2 & u_1 \\ u_2 & 0 & u_0 \\ u_1 & u_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e $\det(Jf) = 2u_0u_1u_2$. Denotiamo con p_0, p_1, p_2 i tre piani coordinati di R^3. Jf ha rango 3 su $\mathsf{R}^3 \backslash (p_0 \cup p_1 \cup p_2)$, ha rango 2 su $(p_0 \cup p_1 \cup p_2) \backslash \{\mathbf{0}\}$, e ha rango 0 nell'origine. Quindi f è un diffeomorfismo locale in ogni punto dell'aperto $\mathsf{R}^3 \backslash (p_0 \cup p_1 \cup p_2)$ che viene mandato suriettivamente su se stesso; per ogni $\mathbf{u} \in \mathsf{R}^3 \backslash (p_0 \cup p_1 \cup p_2)$ si ha $f(\mathbf{u}) = f(-\mathbf{u})$ e quest'applicazione è "2–1", cioè la controimmagine di ogni punto di $\mathsf{R}^3 \backslash (p_0 \cup p_1 \cup p_2)$ consiste di due punti. Invece la restrizione di f a $p_0 \cup p_1 \cup p_2$ manda $p_0 \cup p_1 \cup p_2$ sull'unione $r_0 \cup r_1 \cup r_2$ dei tre

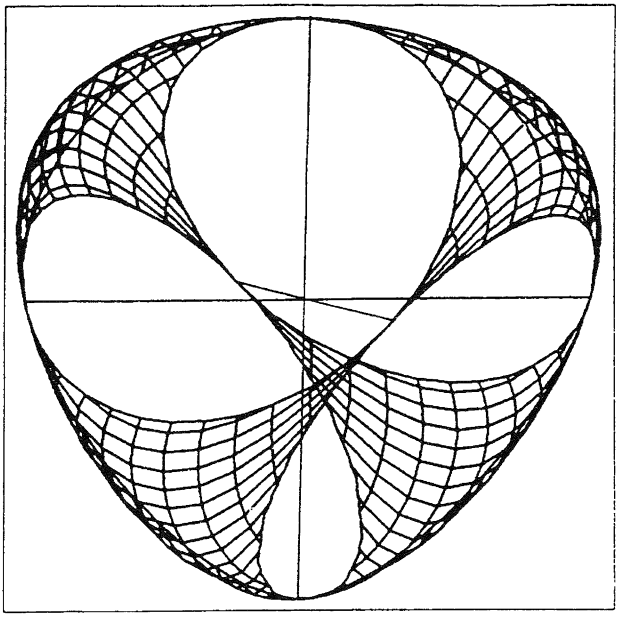


Figura 25.3

assi coordinati. La controimmagine $f^{-1}(\mathbf{x})$ di un punto $\mathbf{x} \in r_j \setminus \{\mathbf{0}\}$ è un'iperbole del piano p_j. Infine

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = r_0 \cup r_1 \cup r_2.$$

La restrizione di f alla sfera $\mathbf{S}^2$ è un'immersione. Infatti si calcola subito che per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{S}^2 \cap (p_0 \cup p_1 \cup p_2)$ la restrizione di $f_{*\mathbf{u}}$ a $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}^2)$ è iniettiva. E poiché su $\mathbf{S}^2$ si ha $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$ se e solo se $\mathbf{v} = \pm\mathbf{u}$, f induce un'immersione $\phi : \mathbf{P}^2(\mathsf{R}) \to \mathsf{R}^3$. L'immagine $R := \phi(\mathbf{P}^2(\mathsf{R}))$ si chiama *superficie di Steiner*, o *superficie romana* (fig. 25.3), così chiamata da J. Steiner che la scoprì durante un viaggio a Roma nel 1844. La superficie di Steiner è un modello in R^3 del piano proiettivo reale ma non è una superficie differenziabile. L'immersione ϕ non è un'inclusione sull'unione delle rette coordinate $H_0 \cup H_1 \cup H_2$ e quindi R non è diffeomorfa a $\mathbf{P}^2(\mathsf{R})$.

Esercizi

1. Dimostrare che una sottovarietà di dimensione n di una varietà differenziabile X di dimensione n è aperta in X.

2. Determinare il più grande aperto U in cui l'applicazione

$$f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$$

$$f(u, v) = (u^2, v^2, uv)$$

è un'immersione. Verificare se $f_{|U}$ è un'inclusione differenziabile.

3. Verificare che l'applicazione $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$

$$f(t) = (\sin(t), \sin(t)\cos(t))$$

è un'immersione e determinarne l'immagine.

4. Sia

$$f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$$
$$f(u, v) = (\sin(u), \sin(2u), v).$$

Determinare il luogo in cui f è un'immersione.

26 Summersioni

26.1 DEFINIZIONE *Un morfismo di varietà differenziabili* $f : X \to Y$ *è una* summersione nel punto $x \in X$ *se* $f_{*x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ *è suriettivo; f è una* summersione *se è una summersione in ogni* $x \in X$. *Il punto x è detto* punto regolare *per f se f è una summersione in x. Se non è un punto regolare, x è detto* punto critico *per f. Un punto $y \in Y$ si dice* valore regolare *di f se ogni $x \in f^{-1}(y)$ è un punto regolare; altrimenti y è detto* valore critico *per f.*

In particolare, se $y \notin \mathrm{Im}(f)$, y è un valore regolare di f; se $\dim(X) < \dim(Y)$ ogni $x \in X$ è un punto critico e $y \in Y$ è un valore regolare per f se e solo se $y \notin \mathrm{Im}(f)$.

Anche la nozione di summersione, come quella di immersione, è di natura locale. Se f è una summersione in qualche punto $x \in X$ allora $\dim(X) \geq \dim(Y)$, e se vale l'uguaglianza allora f è un diffeomorfismo locale in x.

Se $f : X \to Y$ è una summersione in $x \in X$ e $g : Y \to Z$ è una summersione in $f(x)$, allora $g \cdot f$ è una summersione in x; pertanto la composizione di summersioni è una summersione.

Un esempio tipico di summersione è la proiezione:

$$\begin{gathered} p : \mathsf{R}^{n+m} \to \mathsf{R}^m \\ p(x_1, \ldots, x_{n+m}) = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}). \end{gathered} \qquad [26.1]$$

Per ogni punto $y \in \mathsf{R}^m$ la fibra $p^{-1}(y)$ è uno spazio euclideo R^n, e quindi è una varietà differenziabile di dimensione n. Un risultato analogo è vero per ogni summersione.

26.2 TEOREMA *Sia $f : X \to Y$ una summersione nel punto $x \in X$, e sia $y = f(x)$. Allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà differenziabile di X di dimensione* $\dim(X) - \dim(Y)$ *in un intorno di x.*

Dimostrazione. Supponiamo $\dim(X) = n + m$ e $\dim(Y) = m$. Sia $\varphi : A \to X$ l'inversa di una carta locale in un intorno di x, $\psi : B \to Y$ l'inversa di una carta locale in un intorno di y, dove $A \subset \mathsf{R}^{n+m}$ e $B \subset \mathsf{R}^m$ sono aperti. Siano $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ tali che $\varphi(\mathbf{a}) = x$, $\psi(\mathbf{b}) = y$. Possiamo supporre che si abbia $f(\varphi(A)) \subset \psi(B)$ e quindi che si abbia un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "H"'] & B \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

in cui $H = \psi^{-1} \cdot f \cdot \varphi$. Per costruzione $H(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Per ipotesi $H_{*\mathbf{a}}$ è suriettiva e quindi possiamo supporre (salvo a riordinare le variabili) che la matrice jacobiana di H in $\mathbf{a}$ sia della forma:

$$JH(\mathbf{a}) = (N \;\; M)$$

dove $M \in \mathrm{GL}_m(\mathsf{R})$, $N \in M_{m,n}(\mathsf{R})$. Definiamo $K : A \to \mathsf{R}^{n+m}$ ponendo:

$$K(\mathbf{v}) = (v_1, \ldots, v_n, H(\mathbf{v})).$$

Allora $K(\mathbf{a}) = (a_1, \ldots, a_n, \mathbf{b})$ e

$$JK(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ N & M \end{pmatrix}$$

dove 0 è la matrice nulla $n \times m$. Poiché $\det(JK(\mathbf{a})) = \det(M) \neq 0$, segue dal teorema 24.1 che K è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{a}$ e quindi esiste un intorno aperto di $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{b})$ in R^{n+m}, che possiamo supporre della forma $R \times S$, con $R \subset \mathsf{R}^n$ e $S \subset \mathsf{R}^m$ aperti, in cui è definito il diffeomorfismo inverso K^{-1}. Inoltre per costruzione si ha $H = p \cdot K$, dove p è la summersione [26.1]. Pertanto

$$\phi := \varphi \cdot K^{-1} : R \times S \to X$$

è un diffeomorfismo su un intorno di x, cioè è l'inversa di una carta locale in x, e si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
R \times S \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "p"'] & B \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Allora la composizione:

$$\alpha : R \to R \times S \xrightarrow{\phi} X,$$

in cui il primo morfismo è l'inclusione $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{0})$, ha per immagine un intorno di x in $f^{-1}(y)$, e $\alpha(R)$ è una sottovarietà di X. ■

Il seguente corollario è immediato:

26.3 COROLLARIO *Sia* $f : X \to Y$ *un morfismo di varietà differenziabili. Se* $y \in Y$ *è un valore regolare di* f, *allora* $f^{-1}(y)$, *se non è vuota, è una sottovarietà di dimensione* $\dim(X) - \dim(Y)$ *di* X.

Dalla proposizione 26.2 e dal suo corollario 26.3 segue che le fibre di una summersione sono varietà aventi tutte la stessa dimensione. Ciò in generale non avviene per un morfismo qualsiasi: la struttura di un morfismo che possiede punti critici può essere molto complicata (cfr. esempio 25.6(8)).

26.4 PROPOSIZIONE *Sia* $f : X \to Y$ *un morfismo di varietà differenziabili,* $y \in Y$ *un valore regolare di* f, *e* $Z = f^{-1}(y)$. *Per ogni punto* $z \in Z$ *si ha:*

$$T_z(Z) = N[f_{*z} : T_z(X) \to T_y(Y)].$$

Dimostrazione. Poiché $f_{|Z} : Z \to Y$ è costante, $(f_{|Z})_{*z} : T_z(Z) \to T_y(Y)$ è l'applicazione nulla. Pertanto, essendo commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
T_z(Z) \arrow[d, "\iota_{*z}"'] \arrow[dr, "(f_{|Z})_{*z}"] & \\
T_z(X) \arrow[r, "f_{*z}"'] & T_y(Y)
\end{tikzcd}$$

per la proposizione 22.1 ed essendo ι_* iniettiva, si ha $T_z(Z) \subset N(f_{*z})$. Poiché f è una summersione in z si ha

$$\dim[N(f_{*z})] = \dim(X) - \dim(Y) = \dim(Z).$$

Ma si ha anche $\dim(T_z(Z)) = \dim(Z)$, e quindi $T_z(Z) = N(f_{*z})$. ∎

I risultati precedenti forniscono un metodo molto semplice per costruire varietà differenziabili senza dover assegnare carte locali: gli esempi che seguono illustrano questo metodo.

26.5 *Esempi*

1. Per verificare che la sfera $\mathbf{S}^n$ è una varietà differenziabile senza costruirne carte locali si può utilizzare il corollario 26.3, osservando che $\mathbf{S}^n$ è il sottoinsieme di R^{n+1}, $n \geq 1$, definito dall'equazione $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, cioè

$$\mathbf{S}^n = f^{-1}(1),$$

dove $f : \mathsf{R}^{n+1} \to \mathsf{R}$ è l'applicazione $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Poiché

$$Jf = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1}),$$

1 è un valore regolare di f, e dal corollario 26.3 discende che $\mathbf{S}^n$ è una sottovarietà di dimensione n di R^{n+1}.

2. Sia $P(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ un polinomio non costante nelle indeterminate X, Y a coefficienti reali, e sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da P. Se in ogni punto $\mathbf{p} \in C$ si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X}(\mathbf{p}), \frac{\partial P}{\partial Y}(\mathbf{p})\right) \neq (0,0) \qquad [26.2]$$

allora 0 è un valore regolare dell'applicazione $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dal polinomio $P(X,Y)$, e quindi C è una varietà di dimensione 1.

In generale l'insieme dei punti $\mathbf{p} \in C$ in cui la condizione [26.2] è soddisfatta è un aperto di C che è una varietà di dimensione 1. C può consistere di diverse componenti connesse, alcune delle quali possono ridursi a un punto. In un punto isolato di C si devono annullare entrambe le derivate parziali di P, perché altrimenti un intorno del punto in C sarebbe una varietà di dimensione 1.

Ad esempio la curva di equazione

$$Y^2 = X^2(X-1),$$

che è una cubica di tipo speciale ("parabola campaniforme puntata"; cfr. Sernesi 1989, p. 352), consiste di due componenti connesse, una delle quali è ridotta al solo punto $\mathbf{0}$, e in $\mathbf{0}$ le derivate parziali si annullano.

3. Gli esempi 1 e 2 sono casi particolari di *ipersuperfici algebriche di* $\mathbb{R}^{n+1}$. Sia $n \geq 1$ e sia $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ un polinomio non costante in $n+1$ indeterminate a coefficienti reali, $n \geq 1$, e sia $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il luogo dei punti in cui si annulla P. Se in ogni punto $\mathbf{p} \in X$ si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X_1}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial P}{\partial X_{n+1}}(\mathbf{p})\right) \neq (0, \ldots, 0) \qquad [26.3]$$

allora 0 è un valore regolare di P e X è una sottovarietà di dimensione n di $\mathbb{R}^{n+1}$ chiamata *ipersuperficie algebrica non singolare.*

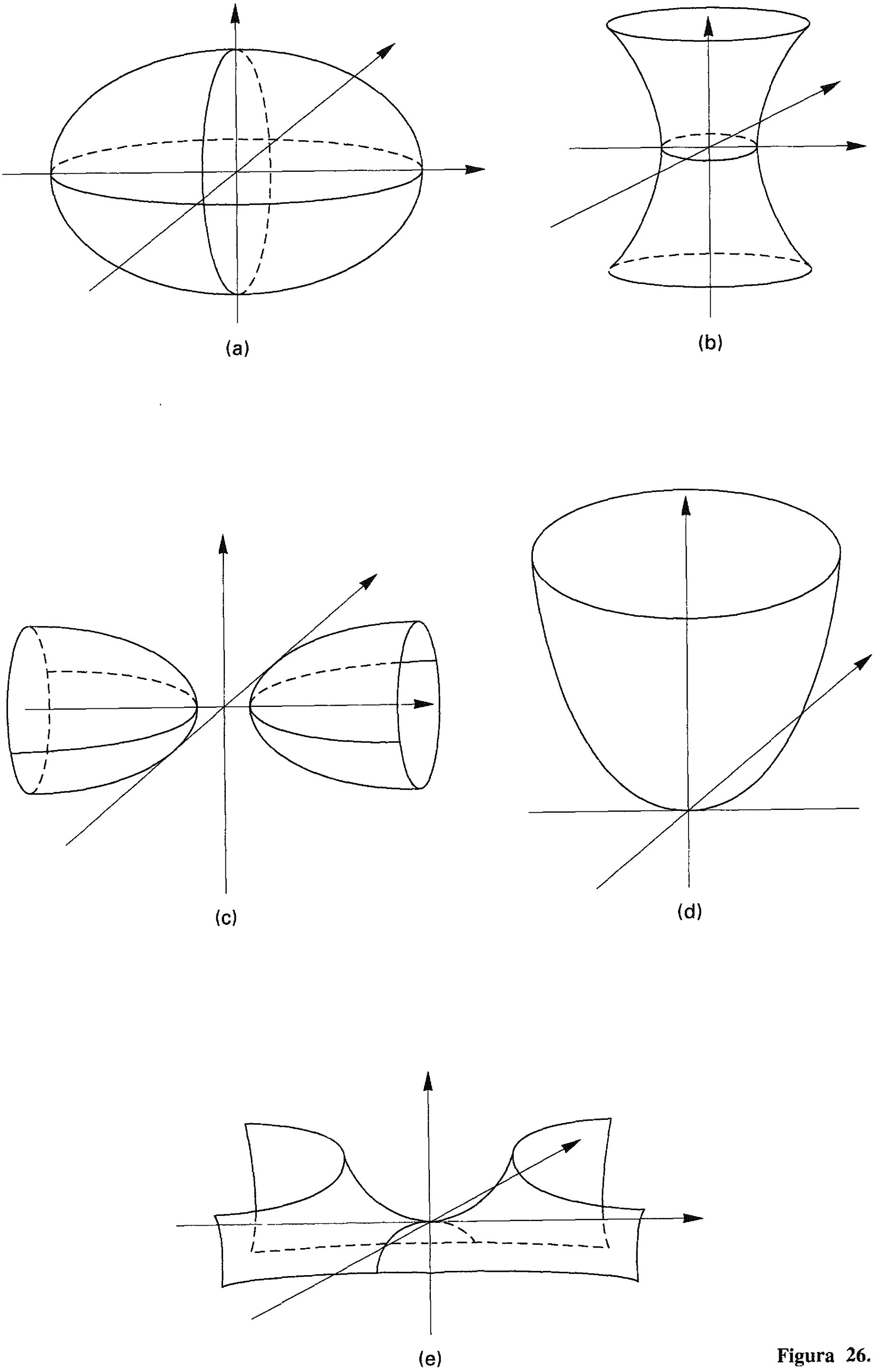
Più in generale l'insieme dei punti $\mathbf{p} \in X$ in cui la condizione [26.3] è soddisfatta è un aperto di X che è una varietà di dimensione n.

Sono esempi di ipersuperfici algebriche le *quadriche* $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, che hanno equazione:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}X_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < j \leq n+1} a_{ij}X_iX_j + 2\sum_{j=1}^{n+1} a_{0j}X_j + a_{00} = 0. \qquad [26.4]$$

Per una quadrica la condizione [26.3] è soddisfatta in ogni punto se e solo se la quadrica è *non degenere*, cioè se la matrice simmetrica dei suoi coefficienti $A = (a_{ij})$ soddisfa $\det(A) \neq 0$.

La classificazione euclidea delle quadriche di $\mathbb{R}^3$ consiste delle seguenti 5 *quadriche non degeneri* Q in forma canonica (vedi fig. 26.1), a cui ogni quadrica



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Figura 26.1

non degenere è congruente (cfr. Sernesi 1989, p. 380):

(a) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ $(a \geq b \geq c > 0)$ *ellissoide*

(b) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ $(a \geq b > 0, c > 0)$ *iperboloide iperbolico (a una falda)*

(c) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0, b \geq c > 0)$ *iperboloide ellittico (a due falde)*

(d) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - Z = 0$ $(a \geq b > 0)$ *paraboloide ellittico*

(e) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - Z = 0$ $(a, b > 0)$ *paraboloide iperbolico*

La condizione [26.3] è soddisfatta in ogni punto di ciascuna delle (a),...,(e) e quindi queste quadriche sono superfici differenziabili. Le quadriche (b), (e) sono caratterizzate dalla condizione $\det(A) > 0$ e sono superfici rigate (cfr. esempio 35.9(9)), mentre le (a), (c), (d) sono caratterizzate dalla condizione $\det(A) < 0$ e sono superfici a punti ellittici (cfr. esempio 35.9(8)).

4. $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ si identifica all'aperto di $M_n(\mathsf{R}) = \mathsf{R}^{n^2}$ definito dalla condizione $\det(A) \neq 0$, e quindi è una varietà di dimensione n^2. Sia $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ il gruppo lineare speciale. Si ha $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R}) = \det^{-1}(1)$, dove:

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathsf{R}) \to \mathsf{R}.$$

è la funzione determinante, che è differenziabile.

Facciamo vedere che 1 è un valore regolare di det. Se $A \in \mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$, la matrice jacobiana $J(\det)_A$ è una matrice $1 \times n^2$ il cui elemento di posto i, j è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\det(A))}{\partial a_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= (-1)^{i+j} \det(A(1 \dots \hat{\imath} \dots n | 1 \dots \hat{\jmath} \dots n)) \end{aligned}$$

cioè è il complemento algebrico di a_{ij} nella matrice A. Poiché $\det(A) \neq 0$ non tutti i complementi algebrici dei suoi elementi sono uguali a 0, cioè $J(\det)_A \neq (0, \dots, 0)$. Quindi 1 è un valore regolare di det. Dal corollario 26.3 segue che $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$ è una sottovarietà di dimensione $n^2 - 1$ di $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$.

5. Sia $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ il gruppo ortogonale. Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ appartiene a $\mathrm{O}(n)$ se e solo se soddisfa la condizione ulteriore ${}^tAA = \mathbf{I}_n$, dove $\mathbf{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ è la matrice identità. Consideriamo l'insieme $\mathrm{Simm}(n, \mathsf{R}) \subset M_n(\mathsf{R})$ costituito dalle matrici simmetriche. $\mathrm{Simm}(n, \mathsf{R})$ si identifica a un sottospazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ di R^{n^2} (definito dalle equazioni $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$) e quindi è una varietà differenziabile di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

L'applicazione:

$$\omega : \mathrm{GL}_n(\mathsf{R}) \to \mathrm{Simm}(n, \mathsf{R})$$
$$A \mapsto {}^tAA$$

è un morfismo, e $\mathrm{O}(n) = \omega^{-1}(\mathbf{I}_n)$.

Dimostriamo che $\mathbf{I}_n$ è un valore regolare di ω. Sia $A \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$. Identifichiamo

$$T_A(\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})) = M_n(\mathsf{R}),$$

perché $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$ è un aperto di $M_n(\mathsf{R}) = \mathsf{R}^{n^2}$, e

$$T_{\omega(A)}(\mathrm{Simm}(n, \mathsf{R})) = \mathrm{Simm}(n, \mathsf{R}),$$

perché $\mathrm{Simm}(n, \mathsf{R})$ è uno spazio euclideo. Interpretiamo i vettori tangenti come vettori velocità di curve differenziabili e il differenziale per mezzo dei vettori velocità. Sia $M \in T_A(\mathrm{GL}_n(\mathsf{R}))$. Allora M è il vettore velocità della curva:

$$t \mapsto A + tM$$

e

$$\omega_{*A}(M) = \frac{\mathrm{d}[{}^t(A + tM)(A + tM)]}{\mathrm{d}t}(0) =$$
$$= \frac{\mathrm{d}[{}^tAA + t({}^tMA + {}^tAM) + t^2({}^tMM)}{\mathrm{d}t}(0) = {}^tMA + {}^tAM.$$

Supponiamo $A \in \mathrm{O}(n)$ e $N \in \mathrm{Simm}(n, \mathsf{R})$. Allora

$$\omega_{*A}\left(\frac{AN}{2}\right) = \frac{1}{2}[{}^t(AN)A + {}^tA(AN)] = \frac{1}{2}({}^tN + N)] = N.$$

Ciò prova che in A il differenziale ω_{*A} è suriettivo, cioè che A è un punto regolare. Quindi $\mathbf{I}_n$ è un valore regolare di ω. Segue dal corollario 26.3 che $\mathrm{O}(n)$ è una varietà di dimensione:

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

6. Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile G che è anche un gruppo con prodotto $\mu : G \times G \to G$ e inverso $i : G \to G$ che sono morfismi di varietà. Negli esempi 4 e 5 abbiamo dimostrato che i gruppi $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$ e $\mathrm{O}(n)$ sono varietà differenziabili. È immediato verificare che le rispettive operazioni μ e ι sono applicazioni differenziabili e quindi $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$ e $\mathrm{O}(n)$ sono gruppi di Lie.

7. Sia $\pi : \mathsf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\} \to \mathbf{P}^1$, $\pi(x_0, x_1) = [x_0, x_1]$, la proiezione canonica, e sia

$$\Gamma(\pi) = \{((x_0, x_1), [x_0, x_1])\} \subset [\mathsf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}] \times \mathbf{P}^1$$

il grafico di π. Consideriamo $\Gamma(\pi)$ come un sottoinsieme di $\mathsf{R}^2 \times \mathbf{P}^1$ e siano

$$\Pi = \overline{\Gamma(\pi)}$$

la chiusura di $\Gamma(\pi)$ in $\mathsf{R}^2 \times \mathbf{P}^1$ e

$$\sigma : \Pi \to \mathsf{R}^2$$

la proiezione. $\Gamma(\pi)$ è definito in $[\mathsf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}] \times \mathbf{P}^1$ dall'equazione

$$x_0Y_1 - x_1Y_0 = 0$$

in cui (x_0, x_1) sono coordinate in R^2 e $[Y_0, Y_1]$ sono coordinate omogenee in $\mathbf{P}^1$. La stessa equazione definisce un chiuso C in $\mathsf{R}^2 \times \mathbf{P}^1$ che coincide con Π. Infatti $\Pi \subset C$ perché C è chiuso. Inoltre sia $\Pi\setminus\Gamma(\pi)$ che $C\setminus\Gamma(\pi)$ sono contenuti in $\{\mathbf{0}\} \times \mathbf{P}^1$; d'altra parte ogni punto $((0,0), [y_0, y_1]) \in \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{P}^1$ appartiene a Π perché

$$((0,0), [y_0, y_1]) = \lim_{t\to 0} ((ty_0, ty_1), [y_0, y_1])$$

e $((ty_0, ty_1), [y_0, y_1]) \in \Gamma(\pi)$ per ogni $t \neq 0$.

In particolare vediamo che

$$\Pi = \Gamma(\pi) \cup (\{\mathbf{0}\} \times \mathbf{P}^1)$$

e

$$\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{P}^1$$

mentre $\sigma^{-1}((x_0, x_1))$ consiste del solo $((x_0, x_1), [x_0, x_1])$ per ogni $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$ (fig. 26.2).

Verifichiamo che Π è una superficie differenziabile. Definiamo:

$$F_0,\ F_1 : \mathsf{R}^2 \to \Pi$$

$$F_0(u, v) = ((u, uv), [1, v])$$

$$F_1(u, v) = ((uv, v), [u, 1]).$$

L'immagine di F_0 è l'aperto $\Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_0)$ di Π, dove:

$$U_0 = \{[y_0, y_1] \in \mathbf{P}^1 : y_0 \neq 0\}.$$

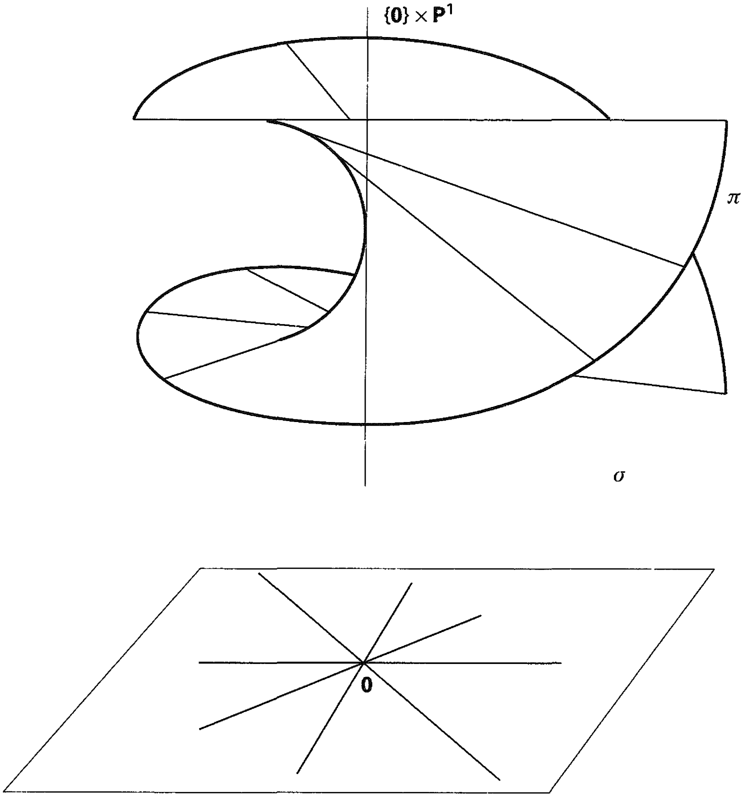


Figura 26.2

L'applicazione

$$G_0 : \Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_0) \to \mathsf{R}^2$$

$$((x_0, x_1), [y_0, y_1]) \mapsto \left(x_0, \frac{y_1}{y_0}\right)$$

è inversa di F_0; quindi G_0 è una carta locale in Π. Similmente l'immagine di F_1 è l'aperto $\Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_1)$ di Π, dove:

$$U_1 = \{[y_0, y_1] \in \mathbf{P}^1 : y_1 \neq 0\}$$

e

$$G_1 : \Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_1) \to \mathsf{R}^2$$

$$((x_0, x_1), [y_0, y_1]) \mapsto \left(\frac{y_0}{y_1}, x_1\right)$$

è l'inversa di F_1, e quindi G_1 è una carta locale in Π. Poiché:

$$(G_1 \cdot G_0^{-1})(u,v) = (G_1 \cdot F_0)(u,v) = (v^{-1}, uv)$$

vediamo che G_0 e G_1 sono differenziabilmente compatibili e quindi

$$\{(\Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_0), G_0), (\Pi \cap (\mathsf{R}^2 \times U_1), G_1)\}$$

costituisce un 2-atlante differenziabile per Π. Pertanto Π è una superficie differenziabile. Si osservi che la composizione $\sigma \cdot F_0$ coincide con l'applicazione s considerata nell'esempio 24.3(2).

L'applicazione $\sigma : \Pi \to \mathsf{R}^2$ è differenziabile. Le fibre $\sigma^{-1}((x_0, x_1))$, $(x_0, x_1) \neq (0,0)$, sono ridotte a un solo punto e quindi sono varietà di dimensione 0. La fibra $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{P}^1$ è una varietà che ha dimensione $1 > 0 = \dim(\Pi) - \dim(\mathsf{R}^2)$. In particolare σ non è una summersione nei punti di $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ anche se la fibra $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ è una sottovarietà di Π.

La superficie Π è detta *scoppiamento* (o *trasformazione monoidale*) *di* R^2 *in* $\mathbf{0}$.

Esercizi

1. Sia $n \geq 2$ e $M_n(\mathsf{R})$ lo spazio delle matrici $n \times n$ a elementi reali, identificato a R^{n^2}. Denotiamo con $M_n(\mathsf{R})_s$ il chiuso costituito dalle matrici di rango $\leq s$. Dimostrare che l'applicazione:

$$\det : M_n(\mathsf{R}) \backslash M_n(\mathsf{R})_{n-2} \to \mathsf{R}$$

è una summersione. Dedurre che il luogo delle matrici di rango $n-1$ è una sottovarietà di $M_n(\mathsf{R})$ di dimensione $n^2 - 1$.

2. Siano n, $m \geq 1$ e $1 \leq r \leq \min\{n, m\}$. Dimostrare che nello spazio $M_{n,m}(\mathsf{R})$ delle matrici $n \times m$ a elementi reali, identificato a R^{nm}, il luogo V_r delle matrici di rango r è una sottovarietà di codimensione $(m-r)(n-r)$.
(*Suggerimento.* Se $A \in M_{m,n}(\mathsf{R})$ ha rango r allora possiede una sottomatrice quadrata $A(i_1 \ldots i_r | j_1 \ldots j_r)$ di rango r. L'applicazione $\varphi : M_{m,n}(\mathsf{R}) \to \mathsf{R}^{(m-r)(n-r)}$ che associa a $B \in M_{m,n}(\mathsf{R})$ gli $(m-r)(n-r)$ minori ottenuti orlando $B(i_1 \ldots i_r | j_1 \ldots j_r)$ è differenziabile ed esiste un intorno U di A tale che $U \cap V_r = \varphi^{-1}(\mathbf{0})$. Verificare che φ è una summersione in A).

3. In ciascuno dei seguenti casi verificare se il sottoinsieme S di R^3 definito dall'equazione assegnata è una superficie differenziabile:

(a) $X^2 - Y^3 + Z^4 = 1$;

(b) $XYZ = 0$;

(c) $XYZ = 1$;

(d) $X^3 - Y = 1$;

(e) $XY + YZ + XZ = 1$;

(f) $X^2Y + XY^2 = Z$.

In caso negativo determinare il più grande sottoinsieme di S che è una superficie differenziabile.

4. In ognuno degli esempi dell'esercizio 3 si consideri il piano $\pi : X - Y = 0$, e si verifichi se $S \cap \pi$ è una varietà differenziabile di dimensione 1.
5. Determinare i valori del parametro $t \in \mathsf{R}$ per cui il sottoinsieme S di R^3 definito dalle equazioni $X + Y = t$, $X^2 + Y^2 = 1$, è una sottovarietà differenziabile di dimensione 1.

27 Applicazioni differenziabili e insiemi di misura nulla

Un valore critico di un'applicazione differenziabile $f : X \to Y$ tra varietà è un punto al di sopra del quale il morfismo ha un comportamento in qualche modo irregolare, o perché la fibra ha dimensione superiore a $\dim(X) - \dim(Y)$ oppure perché non è una varietà. È importante avere informazioni su quanto numerosi possono essere i valori critici. Una risposta completa a questa questione è fornita dal lemma di Sard, il quale afferma che tali punti non possono essere troppi, perché costituiscono un insieme "di misura nulla". In questo paragrafo discuteremo il lemma di Sard dandone la dimostrazione solo in un caso particolare che utilizzeremo nel paragrafo 29.

Siano $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ n-uple di numeri reali tali che $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$, e sia

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathsf{R}^n,$$

il prodotto cartesiano degli n intervalli aperti $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$; $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si dice un *plurirettangolo* (*aperto*) di R^n e il *volume di* $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è definito come

$$\mathrm{vol}(R(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

27.1 DEFINIZIONE *Un* sottoinsieme S di R^n *si dice* di misura nulla (o di misura n-dimensionale nulla) *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia numerabile di plurirettangoli* $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ *tale che* $S \subset \cup R_j$ *e* $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(R_j) < \varepsilon$.

27.2 *Esempio*

L'iperpiano $H \subset \mathsf{R}^n$ di equazione $X_n = 0$ ha misura nulla. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\mathbf{a}_j = \left(-\frac{j}{2}, \dots, -\frac{j}{2}, -\frac{j^{(n-1)}}{2^{2+j}}\varepsilon\right)$, $\mathbf{b}_j = \left(\frac{j}{2}, \dots, \frac{j}{2}, \frac{j^{(n-1)}}{2^{2+j}}\varepsilon\right)$ si ha:

$$H \subset \bigcup_j R(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(R(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1+j)}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

27.3 LEMMA

(a) *Un sottoinsieme di un insieme di misura nulla ha misura nulla.*

(b) *Se* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ *è una famiglia numerabile di insiemi di misura nulla,* $S = \bigcup_j S_j$ *è un insieme di misura nulla.*

(c) *Se* R *è un plurirettangolo di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ *una famiglia numerabile di plurirettangoli tali che* $\overline{R} \subset \cup R_j$, *allora* $\mathrm{vol}(R) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(R_j)$.

Dimostrazione. (a) e (b) sono lasciate al lettore come esercizio.

(c) Sia $R(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ un plurirettangolo. Il numero di interi nell'intervallo (c_i, d_i) è almeno uguale a $\max\{0, d_i - c_i - 1\}$ e al più uguale a $\max\{0, d_i - c_i + 1\}$; quindi se si ha $d_i - c_i > 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ il numero di punti a coordinate intere in $R(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ è maggiore o uguale a $\prod_{i=1}^{n} (d_i - c_i - 1)$ e minore o uguale a $\prod_{i=1}^{n} (d_i - c_i + 1)$. Supponiamo $R = R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $R_j = R(\mathbf{a}^j, \mathbf{b}^j)$, dove $\mathbf{a}^j = (a_1^j, \ldots, a_n^j)$, $\mathbf{b}^j = (b_1^j, \ldots, b_n^j)$. Poiché $\overline{R}$ è compatto è ricoperto da un numero finito di R_j che possiamo supporre essere $R_1, \ldots, R_s$. Per ogni numero reale $\rho > 0$ e per ogni plurirettangolo $R(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ poniamo $\rho R(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = R(\rho\mathbf{c}, \rho\mathbf{d})$. Sia ρ_0 tale che per ogni $\rho \geq \rho_0$ si abbia $b_i - a_i > 1$ e $b_i^j - a_i^j > 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, s$. Allora, poiché $\rho R \subset \bigcup_{j=1}^{s} \rho R_j$, e il numero di punti a coordinate intere in ρR non è superiore a quello dei punti a coordinate intere in $\rho R_1 \cup \ldots \cup \rho R_s$, si ha:

$$\prod_{i=1}^{n} (\rho b_i - \rho a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\rho b_i^j - \rho a_i^j + 1)$$

per ogni $\rho \geq \rho_0$. Dividendo ambo i membri per ρ^n e passando al limite per $\rho \to \infty$ si ottiene la conclusione. ■

Poiché ovviamente gli insiemi costituiti da un solo punto sono di misura nulla, dal lemma 27.3(b) segue che i numeri razionali costituiscono un sottoinsieme $\mathbb{Q}$ di misura nulla di $\mathbb{R}$: in particolare un insieme di misura nulla può essere denso.

Ogni insieme con interno non vuoto contiene la chiusura di un plurirettangolo: quindi dal lemma 27.3(a), (c) segue che un tale insieme non ha misura nulla. In particolare *esistono insiemi che non hanno misura nulla*, e *ogni insieme di misura nulla ha interno vuoto*. Segue che *ogni insieme di misura nulla ha complementare denso*.

Gli insiemi di misura nulla godono della proprietà di essere trasformati in insiemi di misura nulla da applicazioni di classe $C^{(\infty)}$:

27.4 TEOREMA *Sia* U *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $S \subset U$ *un insieme di misura nulla. Per ogni applicazione* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *di classe* $C^{(\infty)}$ *l'insieme* $f(S)$ *ha misura nulla.*

Dimostrazione. Poiché esistono sottoinsiemi S_1, $S_2, \ldots$, tali che $S = \bigcup_j S_j$ e $\overline{S_j}$ è compatto e contenuto in U per ogni j, per il lemma 27.3 possiamo supporre che $\overline{S}$ sia compatto e contenuto in U. Sia V un intorno aperto di S tale che $\overline{V}$ sia compatto e contenuto in U. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la compattezza di $\overline{S}$ possiamo ricoprire S con un numero finito di plurirettangoli $R_1, \ldots, R_k$ tali che $\mathrm{vol}(R_1) + \ldots + \mathrm{vol}(R_k) < \varepsilon$, e poiché V è aperto, possiamo supporre che $R_1, \ldots, R_k$ siano contenuti in V. Per la compattezza di $\overline{V}$ esiste $M > 0$ tale che

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < Md(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \overline{V}.$$

Ma allora esiste una costante $N > 0$ tale che $f(R_i)$ sia contenuto in un plurirettangolo R'_i tale che $\mathrm{vol}(R'_i) < N\,\mathrm{vol}(R_i)$. Segue che $f(S)$ è ricoperto da plurirettangoli $R'_1, \ldots, R'_k$ tali che $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(R'_i)) < N\varepsilon$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di ε. ∎

27.5 COROLLARIO *Sia U un aperto di R^n e sia $f : U \to \mathsf{R}^m$ un'applicazione di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$, con $n < m$. Allora $f(U)$ ha misura nulla.*

Dimostrazione. Sia $g : U \times \mathsf{R}^{m \quad n} \to \mathsf{R}^m$ l'applicazione definita da $g(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_n)$. g è di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ e $g(U \times \{\mathbf{0}\}) = f(U)$. Poiché $U \times \{\mathbf{0}\}$ è contenuto nell'iperpiano H_n, che ha misura nulla (esempio 27.2), segue che $U \times \{\mathbf{0}\}$ ha misura nulla e quindi $g(U \times \{\mathbf{0}\})$ ha misura nulla per il teorema 27.4. ∎

Un *sottoinsieme S di una varietà X* di dimensione n si dice *di misura nulla* se per ogni carta locale $\phi : U \to \mathsf{R}^n$, dove $U \subset X$ è un aperto, il sottoinsieme $\phi(S \cap U)$ ha misura nulla.

Abbiamo il seguente teorema:

27.6 TEOREMA *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà differenziabili con* $\dim(X) < \dim(Y)$. *Allora $f(X)$ è un sottoinsieme di misura nulla di Y.*

Dimostrazione. Siano $n = \dim(X)$, $m = \dim(Y)$. Poiché X e Y sono a base numerabile, possiamo trovare un ricoprimento numerabile $\{U_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ di X costituito da aperti diffeomorfi a aperti di R^n e un ricoprimento $\{V_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ di Y costituito da aperti diffeomorfi a aperti di R^m e tali che $f(U_i) \subset V_i$. Per il lemma 27.3 è sufficiente dimostrare che ognuno degli insiemi $f(U_i)$ ha misura nulla e ciò segue dal corollario 27.5. ∎

Il teorema precedente ha in particolare la conseguenza che *l'immagine di un morfismo $f : X \to Y$, con X e Y tali che* $\dim(X) < \dim(Y)$, *ha complementare denso.* Ciò segue dalla proprietà già osservata in precedenza degli insiemi di misura nulla di R^m di avere complementare denso. Esistono però morfismi $f : X \to Y$ con $\dim(X) < \dim(Y)$ tali che anche $f(X)$ sia denso in Y.

27.7 *Esempi*

1. Sia $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathsf{R}^4$ il toro e sia

$$\varphi : \mathsf{R}^2 \to T^2$$

$$\varphi(u, v) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \cos(2\pi v), \sin(2\pi v)).$$

Fissato $m \in \mathsf{R}$ consideriamo la retta in R^2 di equazioni parametriche:

$$\alpha(t) = (t, mt), \quad t \in \mathsf{R}$$

e la composizione $f = \varphi \cdot \alpha : \mathsf{R} \to T^2$. f è un'immersione perché composizione di due immersioni.

Se $m = \frac{p}{q}$ è razionale allora $f(q) = f(0)$, e quindi $f(\mathsf{R}) = f([0, q])$ è chiuso: quindi l'immagine di f è una sottovarietà di dimensione 1 di T^2.

Supponiamo m irrazionale e denotiamo con $[a]$ la *parte intera* di un numero reale a, che è il più grande intero che non supera a. Per ogni h, $k \in \mathsf{Z}$ il punto $\alpha(h) = (h, mh) \in \mathsf{R}^2$ è congruente al punto $(0, mh - [mh] + k)$ modulo Z^2. Pertanto $f(\mathsf{R})$ contiene l'immagine tramite φ di tutte le rette parallele a $\alpha(\mathsf{R})$ e passanti per i punti $(0, mh - [mh] + k)$. Poiché m è irrazionale l'insieme $\{mh - [mh] + k : h, k \in \mathsf{Z}\}$ è denso in R, e quindi l'unione di tutte le rette suddette è densa in R^2. Segue che $f(\mathsf{R})$ è denso in T^2 (fig. 27.1).

2. *La curva di Peano*. Un'applicazione continua, ma non differenziabile, di una varietà 1-dimensionale in una superficie può essere suriettiva. L'esempio più noto di questo fatto è la *curva di Peano*, che è un'applicazione continua e suriettiva $L : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ ($\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}^2$ non sono varietà, ma da questo esempio non è difficile dedurre

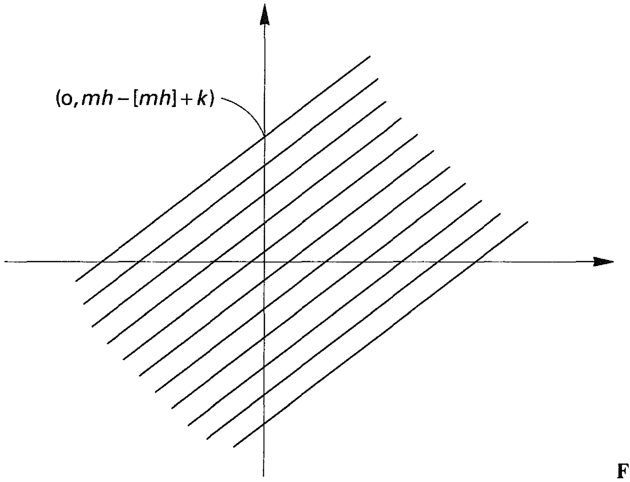


Figura 27.1

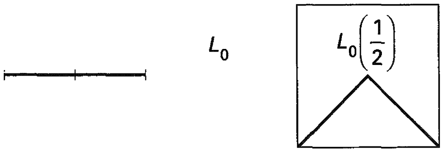


Figura 27.2

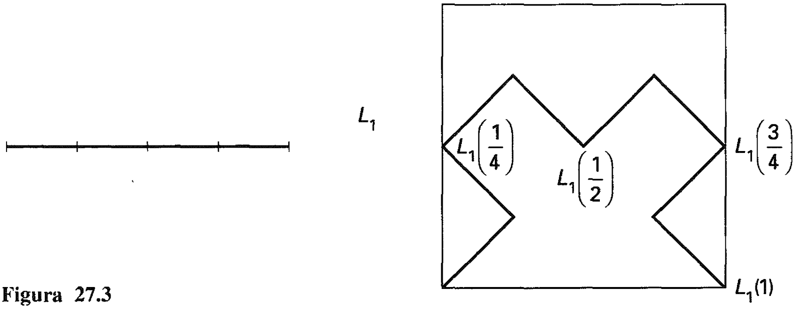

L_1
$L_1\left(\frac{1}{4}\right)$
$L_1\left(\frac{1}{2}\right)$
$L_1\left(\frac{3}{4}\right)$
$L_1(1)$

Figura 27.3

un'applicazione $f : X \to Y$ continua e suriettiva di varietà tali che $\dim(X) = 1$ e $\dim(Y) = 2$).

Definiremo L come limite di una successione di applicazioni. Consideriamo l'applicazione continua $L_0 : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ descritta dalla figura 27.2. L_0 è composizione di due applicazioni lineari, definite rispettivamente su $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e su $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ora consideriamo l'applicazione continua $L_1 : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ descritta dalla figura 27.3. Si ha

$$L_0(0) = L_1(0) = (0,0), \quad L_0\left(\frac{1}{2}\right) = L_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad L_0(1) = L_1(1) = (1,0).$$

L_1 manda gli intervalli $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$, $i = 0, \dots, 3$, rispettivamente nei 4 quadrati $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ contenuti in $\mathbf{I}^2$ riproducendo l'applicazione L_0 su ognuno di essi. Ora definiamo L_2 modificando L_1 su ognuno dei quattro intervalli $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$, $i = 0, \dots, 3$, nello stesso modo in cui si è modificata L_0 per ottenere L_1. L'applicazione L_2 è descritta dalla figura 27.4.

Induttivamente definiremo un'applicazione continua $L_n : \mathbf{I} \to \mathbf{I}^2$ la cui restrizione ai sottointervalli di ampiezza $\frac{1}{4^n}$ di $\mathbf{I}$ ha immagine in un quadrato di $\mathbf{I}^2$ di lato $\frac{1}{2^n}$ ed è analoga alla L_0 (fig. 27.5).

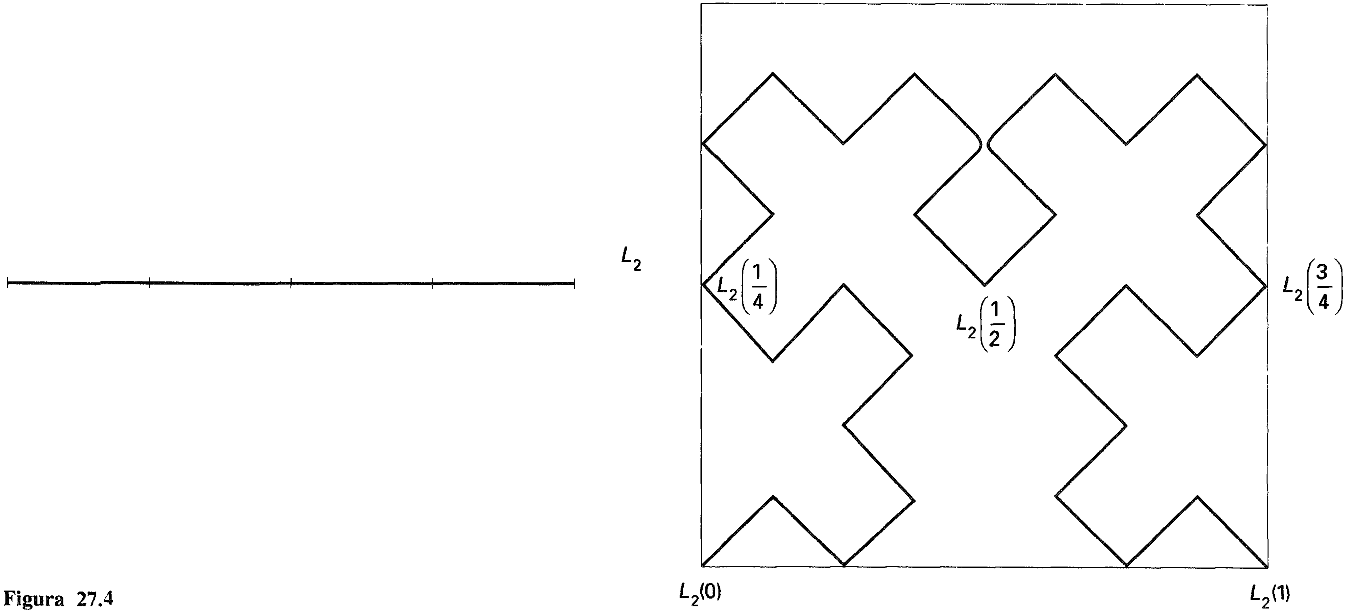

L_2
$L_2\left(\frac{1}{4}\right)$
$L_2\left(\frac{1}{2}\right)$
$L_2\left(\frac{3}{4}\right)$
$L_2(0)$
$L_2(1)$

Figura 27.4

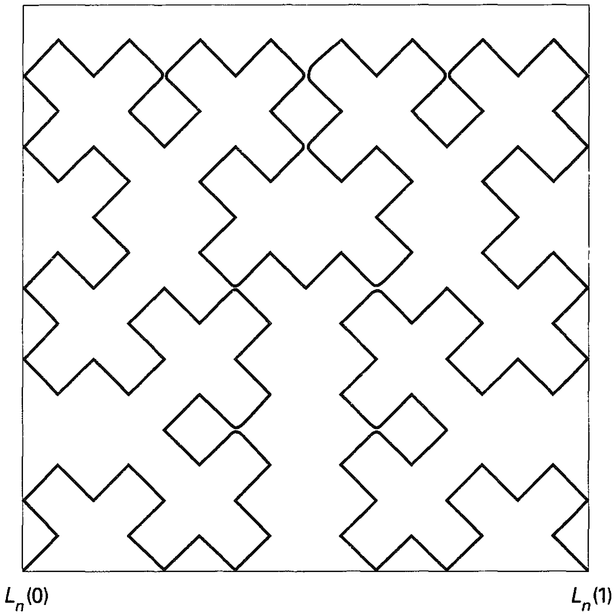


Figura 27.5

Otteniamo in questo modo una successione $\{L_n\}$ di elementi di $\mathcal{C}(\mathbf{I},\mathbf{I}^2)$. Consideriamo la distanza in $\mathbf{I}^2$:

$$d''(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

e la distanza δ in $\mathcal{C}(\mathbf{I},\mathbf{I}^2)$:

$$\delta(f,g) = \sup\{d''(f(t),g(t)) : t \in \mathbf{I}\}.$$

$(\mathbf{I}^2, d'')$ è uno spazio metrico completo perché compatto (teorema 10.13). Quindi $\mathcal{C}(\mathbf{I},\mathbf{I}^2)$ è completo (teorema 10.19).

Fissato $\varepsilon > 0$ sia $N > 0$ tale che $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Se $n \geq N$, la restrizione di L_n a ognuno dei sottointervalli di $\mathbf{I}$ di ampiezza $\frac{1}{4^N}$ ha immagine contenuta in un quadrato di lato $\frac{1}{2^N}$. Quindi per ogni n, $m \geq N$ si ha:

$$d''(L_n(t), L_m(t)) < \frac{1}{2^N} < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in \mathbf{I},$$

e da ciò segue che $\delta(L_n, L_m) < \varepsilon$. Pertanto $\{L_n\}$ è una successione di Cauchy. Sia:

$$L = \lim L_n \in \mathcal{C}(\mathbf{I},\mathbf{I}^2).$$

Facciamo vedere che $L(\mathbf{I}) = \mathbf{I}^2$. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{I}^2$. Per ogni n esiste $t \in \mathbf{I}$ tale che

$$d''(\mathbf{x}, L_n(t)) < \frac{1}{2^n}$$

perché $\mathbf{x}$ appartiene ad uno dei quadrati di $\mathbf{I}^2$ di lato $\frac{1}{2^n}$ ed esiste $t \in \mathbf{I}$ tale che $L_n(t)$ appartenga a quello stesso quadrato. D'altra parte, dato $\varepsilon > 0$, e scelto N tale che $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$, si ha $\delta(L_N, L) < \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $d''(L_N(t), L(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $t \in \mathbf{I}$. Quindi esiste $t \in \mathbf{I}$ tale che

$$d''(\mathbf{x}, L(t)) \leq d''(\mathbf{x}, L_N(t)) + d''(L_N(t), L(t)) < \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

e ciò implica che $L(\mathbf{I})$ è denso in $\mathbf{I}^2$. Ma $\mathbf{I}$ è compatto e quindi $L(\mathbf{I})$ è chiuso in $\mathbf{I}^2$; dunque $L(\mathbf{I}) = \mathbf{I}^2$.

Il teorema 27.6 è caso particolare del seguente risultato più generale:

27.8 LEMMA DI SARD *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà differenziabili. L'insieme dei valori critici di f è un insieme di misura nulla di Y.*

Il lemma di Sard garantisce che i valori critici di un morfismo non sono troppi, ed implica in particolare che i valori regolari sono densi in Y. Poiché i valori regolari devono essere considerati come punti di Y al di sopra dei quali il morfismo f ha un comportamento particolarmente buono e prevedibile, il lemma di Sard afferma che un morfismo non può comportarsi in modo complicato se non al di sopra di un sottoinsieme abbastanza piccolo di Y. Si osservi che il lemma di Sard si riferisce ai valori critici, e non ai punti critici. Infatti i punti critici di un morfismo *non* costituiscono in generale un insieme di misura nulla: si pensi al caso $\dim(X) < \dim(Y)$, nel quale ogni punto di X è un punto critico, ma X non ha misura nulla in se stesso a meno che $\dim(X) = 0$.

28 Campi vettoriali

Siano X una varietà differenziabile e S un sottoinsieme di X. Un *campo vettoriale* (definito) su S è il dato $\mathbf{V}$ di un vettore tangente $\mathbf{V}(x) \in T_x(X)$ per ogni $x \in S$.

Se $U \subset X$ è un sottoinsieme aperto e $F : U \to \mathsf{R}$ è una funzione differenziabile, otteniamo una funzione $\mathbf{V}F : U \cap S \to \mathsf{R}$ ponendo per ogni $x \in U \cap S$:

$$(\mathbf{V}F)(x) = \mathbf{V}(x)(F).$$

Questa funzione non è necessariamente differenziabile, sia perché $U \cap S$ non si è supposto aperto, sia perché nessuna ipotesi è stata fatta su $\mathbf{V}$ che garantisca la differenziabilità di $\mathbf{V}F$.

Se F, $G : U \to \mathsf{R}$ sono funzioni differenziabili, e a, $b \in \mathsf{R}$, allora sono soddisfatte le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(aF + bG) &= a\mathbf{V}F + b\mathbf{V}G \\ \mathbf{V}(FG) &= (\mathbf{V}F)G + F\mathbf{V}G \end{aligned} \qquad [28.1]$$

che seguono direttamente dalle corrispondenti identità scalari [21.1].

Un *campo vettoriale* $\mathbf{V}$ si dirà *differenziabile*, o *di classe* $C^{(\infty)}$, se è definito su un aperto A e se per ogni aperto $U \subset X$ tale che $U \cap A \neq \emptyset$ e per ogni funzione differenziabile $F : U \to \mathsf{R}$ la funzione $\mathbf{V}F : U \cap A \to \mathsf{R}$ è differenziabile.

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono coordinate locali in un aperto A, allora per ogni $i = 1, \ldots, n$, ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x \qquad \text{per ogni } x \in A,$$

si definisce un campo vettoriale $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ su A.

I campi vettoriali $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ sono differenziabili: infatti per ogni funzione $F : U \to \mathsf{R}$ di classe $C^{(\infty)}$ la funzione $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} : U \cap A \to \mathsf{R}$ è la derivata parziale di F rispetto ad x_i e quindi è di classe $C^{(\infty)}$.

Supponiamo che $\mathbf{V}$ sia un campo vettoriale su un sottoinsieme S di X, e siano $x_1, \ldots, x_n$ coordinate locali in un aperto A. In ogni punto $x \in S \cap A$ si ha l'identità:

$$\mathbf{V}(x) = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + \ldots + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$$

per opportuni $v_1(x), \ldots, v_n(x) \in \mathsf{R}$. Al variare di x restano definite in questo modo delle funzioni

$$v_1, \ldots, v_n : S \cap A \to \mathsf{R}$$

che si diranno *funzioni coordinate di* $\mathbf{V}$ *rispetto alle coordinate locali* $x_1, \ldots, x_n$.

Se $y_1, \ldots, y_n$ è un altro sistema di coordinate locali in un aperto B di X, e se

$$w_1, \ldots, w_n : S \cap B \to \mathsf{R}$$

sono le funzioni coordinate di $\mathbf{V}$ rispetto alle $y_1, \ldots, y_n$, allora in ogni punto $x \in S \cap A \cap B$ le coordinate $v_i(x)$ e le coordinate $w_i(x)$ sono legate tra loro dalla matrice di transizione dalle coordinate locali x_i alle coordinate locali y_i. Quindi si ha l'identità di funzioni definite su $S \cap A \cap B$:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\,.$$

28.1 PROPOSIZIONE *Sia A un aperto della varietà differenziabile X e sia* $\mathbf{V}$ *un campo vettoriale su A.* $\mathbf{V}$ *è differenziabile se e solo se per ogni sistema di coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$ definite su un aperto W di X le funzioni coordinate*

$v_1, \ldots, v_n$ di $\mathbf{V}$ *rispetto alle $x_1, \ldots, x_n$ sono funzioni differenziabili sull'aperto $W \cap A$.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{V}$ è differenziabile allora le v_i sono differenziabili perché $v_i = \mathbf{V}x_i$ per $i = 1, \ldots, n$ (cfr. [21.4]). Viceversa supponiamo che la condizione sia soddisfatta, e sia $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione differenziabile definita su un aperto U di X. Sia $x \in U \cap A$ e siano $x_1, \ldots, x_n$ coordinate locali in un intorno W di x. In $W \cap U \cap A$ si ha:

$$\mathbf{V}F = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (F) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

Poiché i campi vettoriali $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ sono differenziabili, le funzioni $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ sono differenziabili in $W \cap U \cap A$, come pure lo sono, per ipotesi, le funzioni $v_1, \ldots, v_n$. Quindi $\mathbf{V}F$ è differenziabile in $W \cap U \cap A$. Poiché ciò avviene in un intorno di ogni punto di $U \cap A$, la funzione $\mathbf{V}F$ è differenziabile in $U \cap A$, e quindi $\mathbf{V}$ è un campo vettoriale differenziabile. ■

Se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sono campi vettoriali su $S \subset X$ e F, G sono funzioni a valori reali definite sull'insieme S, allora ponendo:

$$(F\mathbf{V} + G\mathbf{W})(x) = F(x)\mathbf{V}(x) + G(x)\mathbf{W}(x), \quad x \in S,$$

si definisce un campo vettoriale $F\mathbf{V}+G\mathbf{W}$ su S. Se S è aperto e F, G, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ sono differenziabili, allora il campo vettoriale $F\mathbf{V} + G\mathbf{W}$ è differenziabile. La verifica di questo fatto è lasciata al lettore.

28.2 *Esempi*

1. Sia $X = \mathsf{R}^n$. Identificando a R^n ogni spazio tangente $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}^n)$, un campo vettoriale su un sottoinsieme $U \subset \mathsf{R}^n$ è un'applicazione

$$\mathbf{V} : U \to \mathsf{R}^n.$$

Le componenti $V_1, \ldots, V_n$ di $\mathbf{V}$ sono le funzioni coordinate di $\mathbf{V}$ rispetto ai campi vettoriali $\dfrac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u_n}$ determinati dalle coordinate standard $u_1, \ldots, u_n$. Se U è aperto il campo vettoriale $\mathbf{V}$ è differenziabile se e solo se lo sono le funzioni $V_1, \ldots, V_n$. L'implicazione "solo se" segue dalla proposizione 28.1, mentre il viceversa è un'immediata conseguenza della dimostrazione della 28.1.

Supponiamo $U \subset \mathsf{R}^n$ aperto e sia $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione di classe $C^{(\infty)}$. La funzione:

$$\operatorname{grad}(F) : U \to \mathsf{R}^n$$

$$\operatorname{grad}(F)(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n}(\mathbf{u}) \right)$$

si dice *gradiente* di F, e definisce un campo vettoriale differenziabile su U.

Se $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ sono due campi vettoriali definiti su U possiamo definire il loro *prodotto scalare* come la funzione

$$\mathbf{V} \bullet \mathbf{W} : U \to \mathsf{R}$$

$$(\mathbf{V} \bullet \mathbf{W})(\mathbf{u}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{W}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U.$$

Se U è aperto e $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ sono differenziabili, allora $\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}$ è una funzione differenziabile.

2. Consideriamo la sfera $\mathbf{S}^n \subset \mathsf{R}^{n+1}$. Se per ogni $x \in \mathbf{S}^n$ identifichiamo $T_x(\mathbf{S}^n)$ a un sottospazio di $\mathsf{R}^{n+1} = T_x(\mathsf{R}^{n+1})$, allora $T_x(\mathbf{S}^n) = x^{\perp}$. Un campo vettoriale sulla varietà $\mathbf{S}^n$ è un'applicazione

$$\mathbf{V} : \mathbf{S}^n \to \mathsf{R}^{n+1}$$

tale che $\mathbf{V}(x) \bullet x = 0$ per ogni x. $\mathbf{V}$ è differenziabile se lo è come applicazione, cioè se lo sono le sue funzioni componenti. Ad esempio, per un fissato $k \geq 1$ poniamo

$$\mathbf{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1}).$$

Otteniamo un campo vettoriale differenziabile $\mathbf{V}$ su $\mathbf{S}^{2k-1}$. Questo campo vettoriale è ovunque non nullo. Invece sulle sfere $\mathbf{S}^{2k}$ di dimensione pari non esistono campi vettoriali ovunque non nulli. Questa è una proprietà globale delle sfere di dimensione pari la cui dimostrazione necessita di strumenti che non svilupperemo in questo testo e che il lettore interessato potrà ritrovare, ad esempio, in Guillemin e Pollack (1974).

Sia X una varietà differenziabile e sia:

$$T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$$

l'unione disgiunta degli spazi tangenti ad X nei suoi punti. $T(X)$ è chiamato *fibrato tangente a X*. Si denoterà con

$$\pi : T(X) \to X$$

l'applicazione che a ogni $v \in T_x(X)$ associa il punto x.

$T(X)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $2\dim(X)$ che si definisce nel modo seguente.

Sia $n = \dim(X)$. Sia $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$ una carta locale, e siano $x_1, \ldots, x_n$ le corrispondenti coordinate locali su U. Definiamo

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to \mathsf{R}^{2n}$$

ponendo:

$$\Phi(\mathbf{v}) = ((\varphi \cdot \pi)(\mathbf{v}), v_1, \dots, v_n)$$

dove $v_1, \dots, v_n$ sono le coordinate di $\mathbf{v}$ nella base $\frac{\partial}{\partial x_1}(\pi(\mathbf{v})), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\pi(\mathbf{v}))$ di $T_{\pi(\mathbf{v})}(X)$. Otteniamo così una carta locale in $T(X)$.

Se $\psi : V \to \mathsf{R}^n$ è un'altra carta locale in X con coordinate locali $y_1, \dots, y_n$ e

$$\Psi : \pi^{-1}(V) \to \mathsf{R}^{2n}$$

è la corrispondente carta locale in $T(X)$, si ha

$$(\Psi \cdot \Phi^{-1})(\mathbf{u}, v_1, \dots, v_n) =$$

$$= \left((\psi \cdot \varphi^{-1})(\mathbf{u}),\ \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(y_1 \cdot \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\mathbf{u}), \dots, \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(y_n \cdot \varphi^{-1})}{\partial u_j}(\mathbf{u}) \right)$$

per ogni $(\mathbf{u}, v_1, \dots, v_n) \in \Phi(\pi^{-1}(U \cap V))$. Poiché φ e ψ sono differenziabilmente compatibili, segue che anche Φ e Ψ lo sono. Pertanto al variare di (U, φ) in un atlante diferenziabile per X la coppia $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ descrive un $2n$-atlante differenziabile per $T(X)$, e $T(X)$ è una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

È immediato verificare che la proiezione

$$\pi : T(X) \to X$$

è un'applicazione differenziabile.

Esercizi

1. Sia X una varietà differenziabile. Dimostrare che la proiezione $\pi : T(X) \to X$ è una summersione.
2. Sia X una sottovarietà differenziabile di R^N. Dimostrare che $T(X)$ è una sottovarietà di R^{2N}.
(*Suggerimento*. Sia $\iota : X \to \mathsf{R}^N$ l'inclusione, e si definisca un'applicazione

$$G : T(X) \to \mathsf{R}^N \times \mathsf{R}^N$$

ponendo

$$G(\mathbf{v}) = (\iota(\pi(\mathbf{v})), \iota_{*\pi(\mathbf{v})}(\mathbf{v})).$$

$G(T(X))$ è il sottoinsieme $\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) : \mathbf{x} \in \iota(X), \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(X)\}$.)

29 Il teorema di Whitney

Un importante risultato della topologia differenziale afferma che ogni varietà differenziabile X è diffeomorfa a una sottovarietà di R^N per qualche N, e quindi che la classe delle varietà differenziabili, che abbiamo introdotto in modo astratto, non è più generale di quella delle sottovarietà di R^N. Un celebre teorema di Whitney completa il precedente, affermando che ogni sottovarietà di dimensione n di R^N è diffeomorfa a una sottovarietà di R^{2n+1}.

In questo paragrafo dimostreremo il primo risultato solo nel caso di varietà compatte: la dimostrazione nel caso generale è più complicata e va al di là degli scopi di questo testo. Dimostreremo invece il teorema di Whitney sia nel caso compatto, in cui la dimostrazione non è difficile, che nel caso generale, in cui si fa uso dell'esistenza di "partizioni dell'unità", un importante risultato tecnico che viene impiegato frequentemente in topologia differenziale. Iniziamo il paragrafo introducendo le partizioni dell'unità.

Sia X uno spazio topologico e $\rho : X \rightarrow \mathsf{R}$ una funzione continua. L'insieme chiuso

$$\mathrm{supp}(\rho) = \overline{\{x \in X : \rho(x) \neq 0\}}$$

si dice *supporto* di ρ.

Ricordiamo che una famiglia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di sottoinsiemi di X si dice *localmente finita* se ogni $x \in X$ possiede un intorno aperto U_x tale che $S_\alpha \cap U_x \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $\alpha \in A$.

29.1 DEFINIZIONE *Sia X una varietà differenziabile. Una* partizione dell'unità *su X è una famiglia di funzioni di classe* $C^{(\infty)}$ $\{\rho_\alpha : X \rightarrow \mathsf{R}\}_{\alpha \in A}$ *a valori non negativi tale che:*

(a) *la famiglia* $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ *è localmente finita;*

(b) $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ *per ogni $x \in X$ (si noti che la somma è finita per la condizione* (a)*).*

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X; una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *si dice* subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$ *se per ogni $\alpha \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che* $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U$.

Per costruire partizioni dell'unità si utilizza la funzione di classe $C^{(\infty)}$:

$$\varphi : \mathsf{R} \rightarrow \mathsf{R}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(cfr. esercizio 19.6) e le seguenti funzioni costruite a partire da φ. Se $a < b$ la funzione

$$\psi : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$$

$$\psi(x) = \varphi(x-a)\varphi(b-x)$$

è di classe $C^{(\infty)}$, positiva in (a,b) e nulla altrove; quindi $\operatorname{supp}(\psi) = [a,b]$.

La funzione:

$$\varsigma : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$$

$$\varsigma(x) = \frac{\int_{\infty}^{x} \psi(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t}$$

è di classe $C^{(\infty)}$ e soddisfa:

$$\begin{aligned} \varsigma(x) &= 0 \quad \text{se } x \leq a, \\ \varsigma(x) &= 1 \quad \text{se } x \geq b, \\ 0 < \varsigma(x) &< 1 \quad \text{se } x \in (a,b). \end{aligned}$$

Se $0 < a < b$ la funzione:

$$g : \mathsf{R}^N \to \mathsf{R}$$

$$g(\mathbf{x}) = \varsigma(-\|\mathbf{x}\| + a + b)$$

è di classe $C^{(\infty)}$ e soddisfa:

$$\begin{aligned} &g(\mathbf{x}) = 1, && \text{se } \|\mathbf{x}\| \leq a, \\ &1 > g(\mathbf{x}) > 0, && \text{se } a < \|\mathbf{x}\| < b \\ &g(\mathbf{x}) = 0, && \text{se } \|\mathbf{x}\| \geq b. \end{aligned}$$

29.2 LEMMA *Sia U un aperto di R^N e sia K un insieme compatto non vuoto contenuto in U. Esiste una funzione $f : \mathsf{R}^N \to \mathsf{R}$ di classe $C^{(\infty)}$ a supporto compatto contenuto in U e a valori in* $[0,1]$ *tale che $f(\mathbf{x}) = 1$ per ogni $\mathbf{x} \in K$.*

Dimostrazione. Se $U \neq \mathsf{R}^N$ poniamo $a = 0$, $b = \dfrac{d(K, \mathsf{R}^N \backslash U)}{2}$ e

$$f(\mathbf{x}) = \varsigma(d(\mathbf{x}, \mathsf{R}^N \backslash U) - b).$$

Se $U = \mathsf{R}^N$ poniamo $a = -1$, $b = 0$ e

$$f(\mathbf{x}) = \varsigma(-d(\mathbf{x}, K)).$$

La funzione $f : \mathsf{R}^N \to \mathsf{R}$ così definita ha le proprietà volute. ■

Il teorema seguente permette di costruire partizioni dell'unità in infiniti modi.

29.3 TEOREMA *Sia X una varietà differenziabile e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora:*

(a) *esiste una partizione dell'unità numerabile $\{\rho_i : i = 1, 2, \ldots\}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$ tale che ogni ρ_i abbia supporto compatto;*

(b) *esiste una partizione dell'unità $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tale che $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$, e tale che ψ_α non sia identicamente nulla per al più un'infinità numerabile di indici α.*

Dimostrazione

(a) Ogni punto $x \in X$ possiede un intorno aperto W_x tale che $\overline{W_x}$ sia compatto, e sia contenuto in un aperto coordinatizzato e in U_α per qualche $\alpha \in A$. Il ricoprimento $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$. Poiché X è una varietà, e quindi è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e soddisfacente il secondo assioma di numerabilità, per la proposizione 10.5 $\mathcal{W}$ possiede un raffinamento numerabile localmente finito $\mathcal{V} = \{V_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Per costruzione per ogni i si ha, per qualche $\alpha \in A$:

$$\overline{V_i} \subset B_i \cap U_\alpha$$

dove B_i è un aperto coordinatizzato e $\overline{V_i}$ è compatto. Sia $\varphi_i : B_i \to \mathsf{R}^n$ una carta locale. Per il lemma 29.2 per ogni $i \geq 1$ esiste una funzione $f_i : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ di classe $C^{(\infty)}$ a supporto compatto contenuto in $\varphi_i(B_i)$ tale che $f_i(\mathbf{x}) = 1$ per ogni $\mathbf{x} \in \varphi_i(\overline{V_i})$. Poniamo

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} (f_i \cdot \varphi_i)(x) & \text{se } x \in B_i \\ 0 & \text{se } x \notin B_i. \end{cases}$$

La funzione σ_i è di classe $C^{(\infty)}$ perché lo sono le sue restrizioni ai due aperti B_i e $X \backslash \operatorname{Supp}(f_i \cdot \varphi_i)$. Poiché $\mathcal{V}$ è localmente finito la funzione $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ è ben definita in tutto X; inoltre, essendo tutte le funzioni σ_i a valori non negativi ed essendo $\sigma_i(x) \neq 0$ per qualche i in ogni punto $x \in X$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Pertanto ponendo

$$\rho_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(x)}$$

si ottiene una ben definita funzione $\rho_i : X \to \mathsf{R}$ di classe $C^{(\infty)}$ a valori non negativi ed a supporto compatto. La successione di funzioni $\{\rho_i : i = 1, 2, \ldots\}$ costituisce la partizione dell'unità cercata.

(b) Sia $\{\rho_i : i = 1, 2, \ldots\}$ la partizione dell'unità costruita nella prima parte della dimostrazione. Per ogni $i = 1, 2, \ldots$ sia $\alpha(i) \in A$ tale che $\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U_{\alpha(i)}$. Poniamo $\psi_\alpha \equiv 0$ se $\alpha \neq \alpha(i)$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$; altrimenti definiamo $\psi_\alpha = \sum_{\alpha(i)=\alpha} \rho_i$, cioè come la somma delle funzioni ρ_i tali che $\alpha(i) = \alpha$. È evidente che $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una partizione dell'unità su X e che al più un'infinità numerabile tra le funzioni ψ_α non è identicamente nulla. Inoltre per ogni $\alpha \in A$ si ha:

$$\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subset \overline{\bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \operatorname{supp}(\rho_i)}$$

e, poiché la famiglia di chiusi $\{\operatorname{supp}(\rho_i)\}$ è localmente finita, si ha:

$$\overline{\bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \operatorname{supp}(\rho_i)} = \bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \operatorname{supp}(\rho_i);$$

pertanto $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$ e quindi $\{\psi_\alpha\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$. ■

Si osservi che la partizione dell'unità considerata nella parte (b) del teorema è indicizzata dallo stesso insieme che indicizza il ricoprimento a cui è subordinata; ma in generale le funzioni ψ_α che la costituiscono non hanno supporto compatto. Ad esempio, se X non è compatta e si considera il ricoprimento costituito dal solo aperto X si ottiene una funzione ψ tale che $\operatorname{supp}(\psi) = X$.

Il teorema 29.3 verrà utilizzato nella dimostrazione del teorema di Whitney attraverso il seguente corollario:

29.4 COROLLARIO *Per ogni varietà differenziabile X esiste una funzione propria di classe $C^{(\infty)}$ $\rho : X \to \mathrm{R}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ il ricoprimento di X costituito dagli aperti aventi chiusura compatta, e sia $\{\rho_i : i = 1, 2, \ldots\}$ una partizione dell'unità numerabile subordinata ad $\mathcal{U}$. La funzione

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i\rho_i : X \to \mathrm{R}$$

è ben definita e di classe $C^{(\infty)}$. Poiché ogni compatto di R è contenuto in $[-n, n]$ per qualche n, è sufficiente verificare che $\rho^{-1}([-n, n])$ è compatto per ogni intero positivo n. Ma se $\rho(x) \leq n$ allora $\rho_i(x) \neq 0$ per qualche $i \leq n$, e quindi $\rho^{-1}([-n, n])$ è un chiuso contenuto in $\operatorname{Supp}(\rho_1) \cup \ldots \cup \operatorname{Supp}(\rho_n)$, che è compatto; dunque $\rho^{-1}([-n, n])$ è compatto. ■

Un altro utile corollario del teorema 29.3 è il seguente:

29.5 COROLLARIO *Sia X una varietà differenziabile, e siano $\emptyset \neq C \subset A \subset X$ con A aperto e C chiuso. Esiste una funzione di classe $C^{(\infty)}$ a valori non negativi $F : X \to \mathrm{R}$ tale che $F(x) = 1$ per ogni $x \in C$ e* $\mathrm{supp}(F) \subset A$.

Dimostrazione. Sia $\{F, G\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A, X \backslash C\}$ tale che $\mathrm{supp}(F) \subset A$ e $\mathrm{supp}(G) \subset X \backslash C$. Allora F è la funzione cercata. ■

Dimostriamo ora un importante risultato.

29.6 TEOREMA *Sia X una varietà differenziabile compatta. Esiste un'inclusione differenziabile di X in R^N per qualche N.*

Dimostrazione. Per ogni punto $x \in X$ sia V_x un intorno aperto di x tale che $\overline{V_x}$ sia compatto e sia contenuto in un aperto coordinatizzato. Sia $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_s\}$ un sottoricoprimento finito del ricoprimento $\mathcal{W} = \{V_x : x \in X\}$. Per ogni $h = 1, \dots, s$ siano B_h un aperto coordinatizzato contenente $\overline{V_h}$ e $\varphi_h : B_h \to \mathrm{R}^n$ un sistema di coordinate locali. Per il lemma 29.2 esiste una funzione $f_h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ a supporto compatto contenuto in $\varphi_h(B_h)$ tale che $f_h(\mathbf{x}) = 1$ per ogni $\mathbf{x} \in \varphi_h(\overline{V_h})$. Per ogni $h = 1, \dots, s$ poniamo

$$\sigma_h(x) = \begin{cases} (f_h \cdot \varphi_h)(x) & \text{se } x \in B_h \\ 0 & \text{se } x \notin B_h. \end{cases}$$

Le funzioni $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ sono di classe $C^{(\infty)}$ su X. Definiamo un morfismo:

$$F : X \to \mathrm{R}^{s(n+1)}$$

ponendo:

$$F(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_s(x), \sigma_1(x)\varphi_1(x), \dots, \sigma_s(x)\varphi_s(x)).$$

F è ben definita e di classe $C^{(\infty)}$ perché le funzioni $\sigma_h(x)\varphi_h(x)$ sono ben definite e di classe $C^{(\infty)}$ in tutto X, essendo $\sigma_h(x) = 0$ per $x \notin B_h$.

Supponiamo che x, $y \in X$ siano tali che $F(x) = F(y)$. Allora in particolare $\sigma_h(x) = \sigma_h(y)$ per $h = 1, \dots, s$. Se $x \in V_h$ allora $\sigma_h(y) = \sigma_h(x) \neq 0$ e quindi $y \in B_h$. Inoltre

$$\sigma_h(x)\varphi_h(x) = \sigma_h(y)\varphi_h(y)$$

e quindi $\varphi_h(x) = \varphi_h(y)$. Segue che $x = y$ perché φ_h è biunivoca su B_h. Pertanto F è biunivoca.

Poiché X è compatto, per la proposizione 25.5 sarà sufficiente dimostrare che F è un'immersione. Sia $x_0 \in V_h$. Per calcolare F_{*x_0} utilizzeremo la carta locale φ_h. Posto $\mathbf{u}_0 = \varphi_h(x_0)$, dobbiamo dimostrare che la matrice jacobiana $J(F \cdot \varphi_h^{-1})(\mathbf{u}_0)$ ha rango n. Ma per ogni $\mathbf{u}$ in un intorno di $\mathbf{u}_0$ si ha $f_h(\mathbf{u}) = 1$ e quindi:

$$(\sigma_h\varphi_h) \cdot \varphi_h^{-1})(\mathbf{u}) = (\varphi_h \cdot \varphi_h^{-1})(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

Pertanto la sottomatrice $\left(\dfrac{\partial((\sigma_h\varphi_h)\cdot\varphi_h^{-1})_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}_0)\right)$ di $J(F\cdot\varphi_h^{-1})(\mathbf{u}_0)$ è la matrice identità $n \times n$. Da ciò segue che $J(F\cdot\varphi_h^{-1})(\mathbf{u}_0)$ ha rango n. ∎

Il teorema 29.6 si estende con qualche ulteriore difficoltà tecnica a tutte le varietà differenziabili, non necessariamente compatte, ma non daremo la dimostrazione di questa estensione; il lettore interessato può consultare, ad esempio, de Rham (1960) e Munkres (1966). Questi risultati implicano che per studiare le varietà differenziabili è sufficiente limitarsi a studiare le sottovarietà degli spazi euclidei R^N. Nel trattare questioni generali è però di solito più comodo considerare varietà astratte piuttosto che sottovarietà di uno spazio euclideo, anche perché molti esempi di varietà, come ad esempio gli spazi proiettivi, le grassmanniane, i gruppi di Lie $\mathrm{GL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{R})$, $\mathrm{O}(n)$ e altri, sono definiti in modo astratto e non come sottovarietà di R^N.

Il teorema 29.6 fornisce un'inclusione differenziabile di una data varietà X di dimensione n in uno spazio euclideo R^N, ma l'intero N dipende dal metodo di dimostrazione e non viene fornita alcuna informazione su quanto piccolo si possa prendere N. Questa informazione viene invece data dal teorema di Whitney che dimostreremo tra poco. Iniziamo con una sua versione "locale" che afferma l'esistenza di immersioni.

29.7 TEOREMA *Sia X una sottovarietà differenziabile di dimensione k di R^N. Esiste un'immersione iniettiva $X \to \mathsf{R}^{2k+1}$.*

Dimostrazione. Se $N \leq 2k+1$ la composizione dell'inclusione $\iota : X \to \mathsf{R}^N$ con un'inclusione di R^N in R^{2k+1} come sottospazio vettoriale fornisce l'immersione cercata. Supponiamo dunque $N > 2k+1$: procedendo per induzione su $\delta = N - (2k+1)$ sarà sufficiente dimostrare che esiste un'immersione iniettiva $X \to \mathsf{R}^{N-1}$. Allo scopo dimostreremo l'esistenza di $\mathbf{n} \in \mathsf{R}^N$ tale che la composizione di ι con la proiezione ortogonale di R^N su $\mathbf{n}^\perp$ sia ancora un'immersione iniettiva: identificando l'iperpiano $\mathbf{n}^\perp$ a R^{N-1} si otterrà l'asserto. Definiamo un morfismo $H : X \times X \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^N$ ponendo

$$H(x, x', t) = t[\iota(x) - \iota(x')].$$

Definiamo inoltre un morfismo $L : T(X) \to \mathsf{R}^N$ ponendo:

$$L(x, \mathbf{v}) = \iota_{*x}(\mathbf{v}), \quad x \in X, \quad \mathbf{v} \in T_x(X).$$

Poiché $\dim(X \times X \times \mathsf{R}) = 2k+1$ e $\dim(T(X)) = 2k$, per il teorema 27.6 le immagini di H e di L hanno misura nulla. In particolare esiste $\mathbf{n} \in \mathsf{R}^N \backslash [\mathrm{Im}(H) \cup \mathrm{Im}(L)]$; è $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ perché $\mathbf{0} \in \mathrm{Im}(H)$.

Sia $\pi : \mathsf{R}^N \to \mathbf{n}^\perp$ la proiezione ortogonale e sia $f = \pi \cdot \iota : X \to \mathbf{n}^\perp$.

Il morfismo f è iniettivo. Supponiamo infatti che esistano x, $x' \in X$ distinti tali che $f(x) = f(x')$: allora $\iota(x) - \iota(x') = t\mathbf{n}$ per qualche $t \in \mathsf{R}$, $t \neq 0$, e quindi $\mathbf{n} = H\left(x, x', \frac{1}{t}\right)$, una contraddizione.

f è un'immersione. Supponiamo infatti che si abbia $f_{*x}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per qualche $x \in X$, $\mathbf{v} \in T_x(X)$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Allora:

$$\mathbf{0} = f_{*x}(\mathbf{v}) = [\pi_{*\iota(x)} \cdot \iota_{*x}](\mathbf{v}) = \pi(\iota_{*x}(\mathbf{v})) = \pi(L(x, \mathbf{v})).$$

Poiché ι è un'immersione $\iota_{*x}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, e quindi esiste $t \neq 0$ tale che $t\mathbf{n} = \iota_{*x}(\mathbf{v})$, ovvero tale che

$$\mathbf{n} = \frac{1}{t}\,\iota_{*x}(\mathbf{v}) = \iota_{*x}\left(\frac{\mathbf{v}}{t}\right) = L\left(x, \frac{\mathbf{v}}{t}\right),$$

una contraddizione. ∎

Se nel teorema 29.7 si suppone che X sia una varietà compatta di dimensione k allora, per la proposizione 25.5, l'immersione iniettiva $X \to \mathsf{R}^{2k+1}$ di cui si dimostra l'esistenza è un'inclusione differenziabile. Combinando questo risultato con il teorema 29.6 otteniamo il seguente

29.8 COROLLARIO *Sia X una varietà differenziabile compatta di dimensione k. Esiste un'inclusione differenziabile di X in R^{2k+1}.*

Concludiamo questo paragrafo con la dimostrazione dell'importante

29.9 TEOREMA (Whitney) *Sia X una sottovarietà differenziabile di dimensione k di R^N. Esiste un'inclusione differenziabile $X \to \mathsf{R}^{2k+1}$.*

Dimostrazione. Per il teorema 29.7 esiste un'immersione iniettiva $X \to \mathsf{R}^{2k+1}$. Componendo con il diffeomorfismo

$$\tau : \mathsf{R}^{2k+1} \to \mathsf{R}^{2k+1}, \quad \tau(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{1 + \|\mathbf{p}\|}$$

otteniamo un'immersione iniettiva $f : X \to \mathsf{R}^{2k+1}$ tale che $\|f(x)\| < 1$ per ogni $x \in X$. Definiamo un morfismo $F : X \to \mathsf{R}^{2k+2}$ ponendo $F(x) = (f(x), \rho(x))$, dove $\rho : X \to \mathsf{R}$ è una funzione propria di classe $C^{(\infty)}$ (ρ esiste per il corollario 29.4); evidentemente F è un'immersione iniettiva. Ora, procedendo come nella dimostrazione del teorema 29.7, scegliamo $\mathbf{n} \in \mathsf{R}^{2k+2}$ in modo che la composizione di F con la proiezione ortogonale $\pi : \mathsf{R}^{2k+2} \to \mathbf{n}^{\perp}$ sia un'immersione iniettiva. Poiché l'insieme degli $\mathbf{n}$ per cui ciò avviene è denso in R^{2k+2}, possiamo scegliere $\mathbf{n} \neq (0, \ldots, 0, t)$ per ogni $t \in \mathsf{R}$. Faremo vedere che $\pi \cdot F : X \to \mathbf{n}^{\perp}$ è propria e, grazie alla proposizione 25.5, ciò implicherà che $\pi \cdot F$ è un'inclusione differenziabile, concludendo la dimostrazione.

Per dimostrare che $\pi \cdot F$ è propria è sufficiente far vedere che per ogni $c > 0$ l'insieme $\{x \in X : \|(\pi \cdot F)(x)\| \leq c\}$ è compatto; e poiché ρ è propria, ciò seguirà se faremo vedere che per ogni $c > 0$ esiste $d > 0$ tale che

$$\{x \in X : \|(\pi \cdot F)(x)\| \leq c\} \subset \{x \in X : |\rho(x)| \leq d\}.$$

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero. Allora esiste una successione di punti $\{x_i\}_{i \geq 1}$ tale che $\|(\pi \cdot F)(x_i)\| \leq c$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$ e $\lim |\rho(x_i)| = \infty$. Possiamo supporre $\rho(x_i) \neq 0$ per ogni i, e considerare i vettori di R^{2k+2}:

$$\mathbf{y}_i = \frac{1}{\rho(x_i)} [F(x_i) - (\pi \cdot F)(x_i)].$$

Quando i tende all'infinito si ha:

$$\lim \mathbf{y}_i = \lim \frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} - \lim \frac{(\pi \cdot F)(x_i)}{\rho(x_i)} \cdot$$

Il secondo limite è $\mathbf{0}$, perché $\|(\pi \cdot F)(x_i)\| \leq c$ mentre $\lim |\rho(x_i)| = \infty$. Quindi:

$$\lim \mathbf{y}_i = \lim \frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \lim \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1 \right) = (0, \ldots, 0, 1)$$

perché $\|f(x_i)\| < 1$ per ogni i. Ma per definizione di π ogni $\mathbf{y}_i$ è parallelo a $\mathbf{n}$, e quindi tale è $(0, \ldots, 0, 1) = \lim \mathbf{y}_i$; ciò contraddice la scelta di $\mathbf{n}$, e conclude la dimostrazione. ■

Il teorema 29.9, combinato con la generalizzazione del teorema 29.6 al caso non compatto, implica che ogni varietà differenziabile di dimensione k possiede un'inclusione differenziabile in R^{2k+1}.

Il teorema di Whitney non dà il risultato migliore possibile. Whitney stesso dimostrò che sotto le medesime ipotesi esiste un'inclusione differenziabile $X \to \mathrm{R}^{2k}$. La dimostrazione di questo risultato è molto più difficile.

Capitolo 6

Geometria differenziale di curve e superfici

Negli spazi topologici le proprietà che vengono studiate sono assai generali perché l'omeomorfismo è una relazione di equivalenza molto debole. Nel capitolo 5 abbiamo iniziato a studiare le varietà differenziabili. I diffeomorfismi sono applicazioni più particolari degli omeomorfismi ma lasciano invariate solo alcune proprietà geometriche, e nel caso di sottovarietà di R^N non mantengono le distanze e le altre grandezze di natura metrica. In questo capitolo studieremo curve e superfici dello spazio euclideo, principalmente di R^3, da un punto di vista metrico. Le proprietà metriche delle varietà differenziabili dello spazio euclideo dipendono dalla loro immersione in R^N e possono variare drasticamente per varietà diffeomorfe ma immerse in modo diverso.

30 Curve differenziabili

In questo paragrafo studieremo le curve differenziabili in R^N. Sarà utile per il seguito considerare la seguente estensione della nozione di campo vettoriale al caso delle curve differenziabili.

Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva differenziabile in R^N, dove $\mathbf{J} \subset \mathsf{R}$ è un intervallo aperto. Un *campo vettoriale* (sottinteso *differenziabile*) *su* α è un'applicazione che associa ad ogni $t \in \mathbf{J}$ un vettore $\mathbf{V}(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathsf{R}^N) = \mathsf{R}^N$, in modo che $\mathbf{V} : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ sia un'applicazione di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$. Parleremo di *campo di versori* su α se $\|\mathbf{V}(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbf{J}$.

Un esempio di campo vettoriale su α è il campo dei vettori velocità $\alpha'(t)$.

I campi vettoriali su α si possono sommare, moltiplicare per funzioni di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ $f : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$ e moltiplicare scalarmente tra loro.

Un'altra operazione naturale su un campo vettoriale su α è la derivazione. La *derivata del campo vettoriale* $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, \mathbf{V}_N(t))$ su α è il campo vettoriale $\mathbf{V}'(t) = (V_1'(t), \dots, V_N'(t))$ le cui componenti sono le derivate delle componenti di $\mathbf{V}$. Denoteremo $\mathbf{V}'$ anche con il simbolo $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}$.

Siano $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{J}} \subset \mathsf{R}$ intervalli, $\theta : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathbf{J}$ un diffeomorfismo. Per ogni curva differenziabile $\alpha : \mathbf{J} \to X$ in una varietà differenziabile X la composizione

$$\beta = \alpha \cdot \theta : \tilde{\mathbf{J}} \to X$$
$$\beta(s) = \alpha(\theta(s))$$

è una curva differenziabile in X chiamata *riparametrizzazione* di α. Diremo β *orientata concordemente* (rispettivamente *discordemente*) *con* α a se $\theta'(s) > 0$ (rispettivamente $\theta'(s) < 0$) per ogni $s \in \tilde{\mathbf{J}}$. Una riparametrizzazione di α è una curva che ha la stessa immagine di α, ma ha vettore velocità in generale diverso in ogni punto e, se orientata discordemente con α, verso di percorrenza discorde da quello di α. Quando si vogliono studiare proprietà geometriche del luogo $\alpha(\mathbf{J})$ non è restrittivo sostituire ad α una sua riparametrizzazione.

30.1 *Esempio*

Siano $\mathbf{a}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{R}^N$. La curva differenziabile in R^N:

$$\alpha(t) = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$$

ha per immagine la retta passante per $\mathbf{a}$ e di direzione $\langle \mathbf{v} \rangle$. La curva:

$$\beta(s) = \mathbf{a} + c\mathbf{v}s$$

è un riparametrizzazione di α per ogni $c \in \mathsf{R}\backslash\{0\}$. Invece la curva:

$$\gamma(s) = \mathbf{a} + \mathbf{v}s^3$$

non è una riparametrizzazione di α perché $t = s^3$ non è un diffeomorfismo in 0. La restrizione $\gamma_{|\mathsf{R}\backslash\{0\}}$ di γ a $\mathsf{R}\backslash\{0\}$ è una riparametrizzazione di $\alpha_{|\mathsf{R}\backslash\{0\}}$.

In accordo con la terminologia usata più frequentemente, chiameremo *curva regolare* una curva differenziabile $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ tale che il suo vettore velocità sia non nullo in ogni punto $t \in \mathbf{J}$, cioè che sia una immersione.

Sia dunque $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva regolare. La *velocità di* α *nel punto* t è $v(t) = ||\alpha'(t)||$. La velocità è una funzione differenziabile $v : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$ a valori positivi. Se t_1, $t_2 \in \mathbf{J}$ la *lunghezza di* α *tra* t_1 *e* t_2 è il numero reale

$$\int_{t_1}^{t_2} ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \ldots + \alpha_N'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Se $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ è una riparametrizzazione di α, dove $\tilde{\mathbf{J}}$ è un intervallo e $\theta : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathbf{I}$ è un diffeomorfismo, in ogni punto $s \in \mathbf{J}$ il vettore velocità di β è $\beta'(s) = \alpha'(\theta(s))\theta'(s)$ e quindi la velocità di β è:

$$||\beta'(s)|| = ||\alpha'(\theta(s))||\ |\theta'(s)| > 0;$$

in particolare β è ancora una curva regolare.

Se $s_1, s_2 \in \tilde{\mathbf{J}}$ sono tali che $\theta(s_1) = t_1$, $\theta(s_2) = t_2$, allora la lunghezza di β tra s_1 ed s_2 è:

$$\int_{s_1}^{s_2} \|\beta'(s)\| \mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} \|\alpha'(\theta(s))\| \, |\theta'(s)| \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t,$$

cioè uguale alla lunghezza di α tra t_1 e t_2.

Quindi una riparametrizzazione di una curva regolare ha in generale velocità diversa in ogni punto, ma è una curva regolare che ha la stessa lunghezza della curva originaria α. Dimostreremo ora che è possibile riparametrizzare la curva regolare α in modo che la nuova curva abbia velocità costante uguale ad 1.

30.2 PROPOSIZIONE *Se $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ è una curva regolare esiste una riparametrizzazione di α che ha velocità costante uguale a* 1.

Dimostrazione. Fissato un punto $t_0 \in \mathbf{J}$, la funzione lunghezza:

$$s : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \mathrm{d}u$$

è di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ e tale che $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ per ogni $t \in \mathbf{J}$. Quindi s definisce un diffeomorfismo di $\mathbf{J}$ sull'immagine $s(\mathbf{J})$ che è un intervallo $\tilde{\mathbf{J}}$. Sia $\theta : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathbf{J}$ la funzione inversa di s. Per ogni $s = s(t) \in \tilde{\mathbf{J}}$ si ha $\theta'(s) = s'(t)^{-1} = \|\alpha'(t)\|^{-1} > 0$ e quindi $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ è una riparametrizzazione di α. Inoltre:

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\theta(s))\| \, |\theta'(s)| = \|\alpha'(t)\| \, \|\alpha'(t)\|^{-1} = 1. \ \blacksquare$$

La riparametrizzazione β descritta dalla proposizione precedente non è univocamente determinata, ma dipende dalla scelta del punto t_0 e dal verso di percorrenza. Ogni ulteriore sostituzione della forma $s = \pm u + c$, con $c \in \mathsf{R}$ costante, dà luogo ancora a una riparametrizzazione con le stesse proprietà.

Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbf{J}$, la *curva* regolare α si dirà *a velocità unitaria.*

30.3 *Esempi*

1. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathsf{R}^N$. La retta:

$$\alpha(t) = \mathbf{a} + \mathbf{v}t \quad t \in \mathsf{R} \qquad [30.1]$$

è a velocità unitaria se e solo se $\mathbf{v}$ è un versore.

2. Sia $r \in \mathsf{R}$, $r \neq 0$. La curva regolare di R^2:

$$\alpha(t) = (c_1 + r\cos(t), c_2 + r\sin(t)), \quad t \in \mathsf{R}$$

ha per immagine la circonferenza di centro (c_1, c_2) e raggio $|r|$. La sua velocità è

$$\|\alpha'(t)\| = |r|$$

e quindi α è a velocità unitaria solo se $|r| = 1$. Una sua riparametrizzazione a velocità unitaria è:

$$\beta(s) = \left(c_1 + r\cos\left(\frac{s}{r}\right), c_2 + r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \quad s \in \mathsf{R}.$$

3. Siano $r \in \mathsf{R}$, $r \neq 0$, $\mathbf{c} \in \mathsf{R}^N$, e siano $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \in \mathsf{R}^N$ due versori tra loro ortogonali. La curva regolare di R^N:

$$\alpha(t) = \mathbf{c} + r\cos(t)\mathbf{b}_1 + r\sin(t)\mathbf{b}_2 \quad t \in \mathsf{R} \qquad [30.2]$$

ha per immagine la circonferenza di centro $\mathbf{c}$ e raggio $|r|$ contenuta nel piano affine passante per $\mathbf{c}$ e avente giacitura $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.

4. Siano a, $b > 0$. La curva di R^3:

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \quad t \in \mathsf{R},$$

è un'*elica circolare* (fig. 30.1).

Il suo vettore velocità in t è:

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

e la sua velocità è:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Una riparametrizzazione a velocità unitaria di γ è:

$$g(s) = (c\cos(t), c\sin(t), dt)$$

dove

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esercizi

1. Calcolare le lunghezze delle curve degli esempi 30.3 tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.
2. Calcolare i campi vettoriali tangenti ad ognuna delle curve degli esempi 30.3.
3. Dimostrare che se una curva di R^N ha vettore velocità costante allora coincide con la restrizione della [30.1] ad un intervallo per qualche $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$.

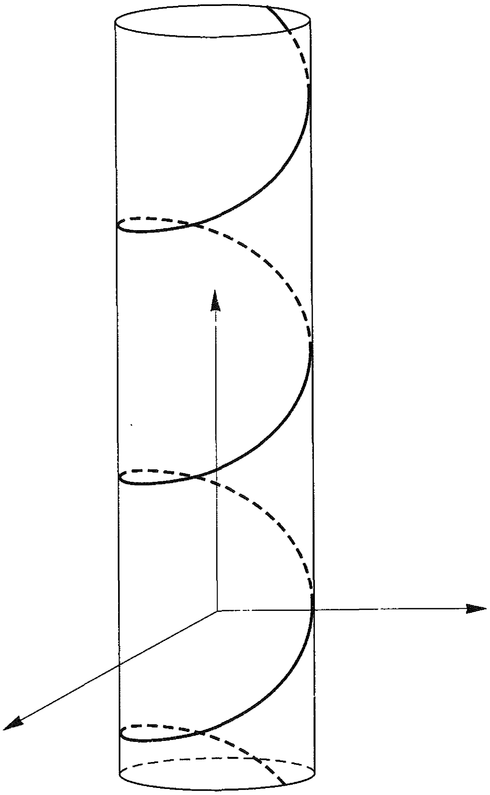


Figura 30.1

31 Classificazione delle curve regolari di R^N

Consideriamo una curva

$$\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$$

$$\alpha(t) = {}^{t}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))$$

ed un'isometria di R^N, cioè un'affinità $\Phi : \mathsf{R}^N \to \mathsf{R}^N$ della forma:

$$\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

dove $A = (a_{ij}) \in O(N)$, $\mathbf{c} = {}^{t}(c_1, \ldots, c_N)$. La curva

$$\beta : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$$

$$\beta(t) = \Phi(\alpha(t)) = \mathbf{c} + A\alpha(t) = \left(c_1 + \sum_j a_{1j}\alpha_j(t), \ldots, c_N + \sum_j a_{Nj}\alpha_j(t)\right) \qquad [31.1]$$

si dice *congruente ad* α. La congruenza è una relazione di equivalenza, come è immediato verificare. Il vettore velocità di β nel punto $t \in \mathbf{J}$ è:

$$\beta'(t) = A\alpha'(t)$$

e quindi se α è regolare (rispettivamente ha velocità unitaria) anche β è regolare (rispettivamente ha velocità unitaria).

Supponiamo α regolare. Vogliamo studiare le proprietà di $\alpha(\mathbf{J})$ che restano invarianti rispetto ad ogni isometria di R^N, cioè le proprietà che $\alpha(\mathbf{J})$ ha in comune con ogni $\beta(\mathbf{J})$ al variare di β nella classe di congruenza di α. Tali proprietà si diranno *proprietà metriche della curva* α; parleremo di *invarianti metrici di* α riferendoci a tutte le entità associate ad $\alpha(\mathbf{J})$ che sono invarianti rispetto ad ogni isometria. Per la proposizione 30.2 nello studio di invarianti metrici non è restrittivo supporre che la curva α abbia velocità unitaria.

Allo scopo di costruire invarianti metrici consideriamo il campo vettoriale tangente α' sulla curva α e le sue derivate successive, cioè i campi vettoriali:

$$\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(N-1)}.$$

Per ogni $t \in \mathbf{J}$ i sottospazi vettoriali di R^N:

$$\Theta_1(t) = \langle \alpha'(t) \rangle, \ \ \Theta_2(t) = \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle, \dots, \Theta_{N-1}(t) = \langle \alpha'(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t) \rangle$$

sono detti rispettivamente *primo, secondo,* $\dots$, *$(N-1)$-esimo spazio osculatore ad* α *in* t. Si ha ovviamente:

$$\Theta_1(t) \subset \Theta_2(t) \subset \dots \subset \Theta_{N-1}(t).$$

Se $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)$ sono linearmente indipendenti allora $\dim(\Theta_k(t)) = k$; in questo caso $\Theta_1(t)$ è detta *retta tangente*, $\Theta_2(t)$ *piano osculatore*, ad α in t.

31.1 PROPOSIZIONE *Sia* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ *una curva a velocità unitaria tale che* $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(N-1)}(t)$ *siano linearmente indipendenti in ogni* $t \in \mathbf{J}$. *Esistono campi vettoriali* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N$ *su* α *con le seguenti proprietà per ogni* $t \in \mathbf{J}$:

(1) $\{\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_N(t)\}$ *è una base ortonormale di* R^N *orientata positivamente.*

(2) $\Theta_k(t) = \langle \mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_k(t) \rangle, \ k = 1, \dots, N-1.$

(3) $\mathbf{b}_k(t) \bullet \alpha^{(k)}(t) > 0, \ k = 1, \dots, N-1.$

I campi vettoriali $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N$ *sono univocamente determinati dalle proprietà* (1), (2), (3). *L'insieme di campi vettoriali* $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N\}$ *su* α *è chiamato* base mobile di Frenet.

Dimostrazione. Sia $t \in \mathbf{J}$. Poniamo:

$$\mathbf{b}_1(t) = \alpha'(t),$$

$$\mathbf{c}_i(t) = \alpha^{(i)}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{b}_j(t) \bullet \alpha^{(i)}(t)])\mathbf{b}_j(t), \quad i = 2, \ldots, N-1. \qquad [31.2]$$

$$\mathbf{b}_i(t) = \frac{\mathbf{c}_i(t)}{\|\mathbf{c}_i(t)\|} \,. \qquad [31.3]$$

Si calcola subito che $\mathbf{b}_1(t), \ldots, \mathbf{b}_{N-1}(t)$ costituiscono un insieme ortonormale e soddisfano la condizione (2). $\mathbf{b}_N(t)$ è univocamente definito dalla condizione (1). Da:

$$\mathbf{c}_k(t) \bullet \alpha^{(k)} = \|\alpha^{(k)}\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{b}_j(t) \bullet \alpha^{(k)}(t)]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{b}_j(t) \bullet \alpha^{(k)}(t)]^2 - \sum_{j=1}^{k-1} [\mathbf{b}_j(t) \bullet \alpha^{(k)}(t)]^2 > 0$$

segue la (3). L'unicità di $\mathbf{b}_1(t), \ldots, \mathbf{b}_N(t)$ segue immediatamente da (2) e (3). Per verificare che $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N$ sono campi vettoriali su α procediamo per induzione. Supponendo $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$ campi vettoriali, i coefficienti $\mathbf{b}_j(t) \bullet \alpha^{(i)}(t)$ che intervengono a secondo membro delle [31.2] sono funzioni di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ di $t \in \mathbf{J}$, e pertanto $\mathbf{c}_i$ è un campo vettoriale su α. Segue che la funzione $\|\mathbf{c}_i(t)\|$ è di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ su $\mathbf{J}$, e quindi anche $\mathbf{b}_i$ è un campo vettoriale su α. ▪

La base mobile di Frenet è definita dalla geometria di α. Considerando le derivate dei campi vettoriali $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N$ ed esprimendole come combinazioni lineari di $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N$ si ottengono informazioni geometriche su α.

31.2 TEOREMA *Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva a velocità unitaria soddisfacente le ipotesi della proposizione* 31.1, *e sia $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N\}$ la base mobile di Frenet. Esistono funzioni $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1} : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$ di classe $\mathrm{C}^{(\infty)}$ con le proprietà*

$$\kappa_i(t) > 0, \quad i = 1, \ldots, N-2$$

per ogni $t \in \mathbf{J}$ se $N \geq 3$, e tali che si abbia identicamente:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}_i}{\mathrm{d}t} = -\kappa_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{b}_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N \qquad [31.4]$$

dove si è posto $\kappa_0 = \kappa_N = 0$ *e* $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_{N+1} = \mathbf{0}$. *Equivalentemente si ha l'identità:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \\ \vdots \\ \\ \mathbf{b}_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \dots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \mathbf{b}_N \end{pmatrix}.$$

$\kappa_1, \dots, \kappa_{N-1}$ *sono invarianti metrici di* α.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbf{J}$ si ha:

$$\mathbf{b}_i' = \sum_j a_{ij}(t)\mathbf{b}_j(t)$$

dove, poiché $\{\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_N(t)\}$ è una base ortonormale, $a_{ij}(t) = \mathbf{b}_i'(t) \bullet \mathbf{b}_j(t)$; in particolare i coefficienti a_{ij} sono funzioni di classe $C^{(\infty)}$. Derivando ambo i membri delle identità

$$\mathbf{b}_i \bullet \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$$

si ottiene

$$\mathbf{b}_i' \bullet \mathbf{b}_j = -\mathbf{b}_i \bullet \mathbf{b}_j'.$$

e pertanto la matrice di funzioni (a_{ij}) è antisimmetrica. Inoltre dalla [31.2] e dalla [31.3] segue che $\mathbf{b}_k$ è combinazione lineare di $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k)}$, e quindi che $\mathbf{b}_k'$ è combinazione lineare di $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k+1)}$: pertanto $\mathbf{b}_k'(t) \in \Theta_{k+1}(t)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$, e $\mathbf{b}_k'$ è combinazione lineare di $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k+1}$. Questa circostanza implica che:

$$\begin{aligned} a_{13} &= \dots = a_{1N} = 0, \\ a_{24} &= \dots = a_{2N} = 0, \\ &\vdots \\ a_{N-2,N} &= 0 \end{aligned}$$

e utilizzando l'antisimmetria di (a_{ij}) si deduce che la matrice ha la forma voluta con:

$$\kappa_1 = a_{12}, \quad \kappa_2 = a_{23}, \dots, \kappa_{N-1} = a_{N-1,N}.$$

Se $N \geq 3$ per ogni $i = 1, \dots, N-1$ dalla [31.4] deduciamo:

$$\kappa_i = \mathbf{b}_i' \bullet \mathbf{b}_{i+1}.$$

D'altra parte derivando la [31.2] otteniamo:

$$\mathbf{b}_i' = \|c_i\|^{-1}\alpha^{(i+1)} + \mathbf{v} \qquad [31.5]$$

dove $\mathbf{v}$ è un campo vettoriale su α tale che $\mathbf{v}(t) \in \Theta_i(t)$ per ogni $t \in \mathbf{J}$. Pertanto:

$$\kappa_i = \mathbf{b}_i' \bullet \mathbf{b}_{i+1} = (\|\mathrm{c}_i\|^{-1}\alpha^{(i+1)} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{b}_{i+1} = \|\mathrm{c}_i\|^{-1}\alpha^{(i+1)} \bullet \mathbf{b}_{i+1}$$

e quindi $\kappa_i(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{J}$ e $1 \leq i \leq N-2$, per la (3) della proposizione 31.1.

Lasciamo al lettore la verifica del fatto che $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1}$ sono invarianti metrici di α. ∎

Le [31.4] sono dette *formule di Frenet* per α. Le funzioni $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1}$: $\mathbf{J} \to \mathsf{R}$ si chiamano rispettivamente *prima*, *seconda*, $\ldots$, $(N-1)$*-esima curvatura* di α. La base mobile di Frenet $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N\}$ e le curvature $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1}$ insieme costituiscono il cosiddetto *apparato di Frenet.*

Il teorema precedente afferma in particolare che se $N \geq 3$ le curvature $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-2}$ sono ovunque positive, ma non assegna alcuna condizione sull'$(N-1)$-esima curvatura κ_{N-1}. Infatti può anche essere $\kappa_{N-1} \leq 0$: se ad esempio $\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$ è la retta parametrizzata $\alpha(t) = \mathbf{p}+\mathbf{v}t$, dove $\|\mathbf{v}\| = 1$, allora si ha $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}$, $\mathbf{b}_1' = \mathbf{0} = \kappa_1 \mathbf{b}_2$ e quindi $\kappa_1 = 0$ identicamente. Vediamo un altro esempio.

31.3 *Esempio*

Sia

$$\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^4$$
$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t), \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Si ha:

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin(t), \cos(t), -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$\alpha''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(t), -\cos(t), \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Poiché $\|\alpha'\| = 1$ e $\alpha' \bullet \alpha'' = 0$ identicamente, si trova:

$$\mathbf{b}_1 = \alpha'$$
$$\mathbf{b}_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Inoltre, essendo $\alpha''' \bullet \alpha'' = 0$, $\alpha''' \bullet \alpha' = -\frac{3}{4}$ si ha:

$$\mathbf{c}_3 = \alpha''' + \frac{3}{4}\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\sin(t), -\frac{1}{4}\cos(t), -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{4}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\|\mathbf{c}_3\| = \frac{1}{4}$$

e quindi:

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(t), -\cos(t), -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Infine con il campo di versori:

$$\mathbf{b}_4 = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t), \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

si ottiene la base ortonormale mobile $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ per α. È facile calcolare che:

$$\mathbf{b}_1' = \alpha'' = \kappa_1 \mathbf{b}_2 \text{ e quindi } \kappa_1 = \|\alpha''\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathbf{b}_2' + \kappa_1 \mathbf{b}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathbf{b}_3 \text{ e quindi } \kappa_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{b}_3' + \kappa_2 \mathbf{b}_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{b}_4 \text{ e quindi } \kappa_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\mathbf{b}_4' = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{b}_3.$$

Quindi le curvature di α sono

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \kappa_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

(in particolare sono funzioni costanti) e le formule di Frenet sono, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \\ \mathbf{b}_3' \\ \mathbf{b}_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{pmatrix}.$$

Dimostreremo ora che le curvature $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1}$ sono sufficienti ad individuare la classe di congruenza di α e che quindi esse costituiscono in un certo senso un insieme completo di invarianti metrici per α.

31.4 TEOREMA *Siano* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ *e* $\beta : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ *due curve a velocità unitaria soddisfacenti le ipotesi della proposizione* 31.1 *e siano rispettivamente* $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N\}$ *e* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N\}$ *le loro basi mobili di Frenet. Supponiamo che le loro curvature soddisfino* $\kappa_{\alpha,i} = \kappa_{\beta,i}$, $i = 1, \ldots, N-1$. *Allora* α *e* β *sono congruenti.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $t_0 \in \mathbf{J}$ e sia $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ l'isometria di R^N tale che

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha(t_0)) = \beta(t_0) \\ &A\mathbf{a}_i(t_0) = \mathbf{b}_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{31.6}$$

Ponendo $\kappa_i = \kappa_{\alpha,i} = \kappa_{\beta,i}$, $i = 1, \ldots, N-1$, le formule di Frenet per β sono:

$$\frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = -\kappa_{i-1}\mathbf{b}_{i-1} + \kappa_i \mathbf{b}_{i+1}.$$

D'altra parte, applicando A ad ambo i membri delle formule di Frenet per α si ottiene:

$$A\frac{d\mathbf{a}_i}{dt} = -\kappa_{i-1}A\mathbf{a}_{i-1} + \kappa_i A\mathbf{a}_{i+1}.$$

Quindi i campi vettoriali $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_N$ ed i campi vettoriali $A\mathbf{a}_1, \ldots, A\mathbf{a}_N$ soddisfano lo stesso sistema di N equazioni differenziali lineari ordinarie; inoltre essi soddisfano le stesse condizioni iniziali [31.6]: pertanto si ha $\mathbf{b}_i = A\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, N$. In particolare $\beta' = A\alpha'$ e quindi:

$$\Phi(\alpha(t)) - \Phi(\alpha(t_0)) = \int_{t_0}^{t} A\alpha'(u)du = \int_{t_0}^{t} \beta'(u)du = \beta(t) - \beta(t_0)$$

per ogni $t \in \mathbf{I}$. Dalla prima delle [31.6] segue che $\Phi(\alpha(t)) = \beta(t)$ per ogni $t \in \mathbf{I}$ cioè $\beta = \Phi(\alpha)$. ■

Vedremo ora che per assegnare una classe di congruenza di curve è sufficiente assegnare le funzioni curvatura.

31.5 TEOREMA *Siano* $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1} : U \to \mathsf{R}$ *funzioni di classe* $C^{(\infty)}$ *definite in un intorno* U *di* $0 \in \mathsf{R}$ *tali che* $\kappa_i(t) > 0$ *per ogni* $t \in U$ *e* $i = 1, \ldots, N-2$. *Esiste un intervallo* $\mathbf{J}$ *contenente* 0 *e contenuto in* U *e una curva a velocità unitaria* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ *che soddisfa le ipotesi della proposizione* 31.1 *e le cui funzioni curvatura sono le restrizioni a* $\mathbf{J}$ *di* $\kappa_1, \ldots, \kappa_{N-1}$.

Dimostrazione. Consideriamo la matrice antisimmetrica di funzioni su U:

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \dots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ed il sistema di equazioni differenziali lineari:

$$B'(t) = M(t)B(t) \qquad [31.7]$$

dove $B = (b_{ij})$ è una matrice $N \times N$ di funzioni incognite b_{ij} su U, con condizioni iniziali $B(0) = \mathbf{I}_N$. Per il teorema di Cauchy, per il quale rinviamo a un testo di Analisi Matematica, il sistema [31.7] ammette un'unica soluzione $B(t)$ definita in un intervallo $\mathbf{J} \subset U$ contenente 0. Derivando ogni termine della matrice prodotto ${}^{t}B(t)B(t)$ si ottiene la matrice:

$$({}^{t}B(t)B(t))' = {}^{t}(M(t)B(t))B(t) + {}^{t}B(t)M(t)B(t) =$$

$$= {}^{t}B(t){}^{t}M(t)B(t) + {}^{t}B(t)M(t)B(t) = 0$$

perché $M(t)$ è antisimmetrica. Pertanto la matrice ${}^{t}B(t)B(t)$ è costante e vale:

$${}^{t}B(t)B(t) = {}^{t}B(0)B(0) = \mathbf{I}_N.$$

Se ne deduce che $B(t)$ è una matrice ortogonale. Chiamiamo $T(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ \vdots \\ T_N(t) \end{pmatrix}$ la prima colonna di $B(t)$ e poniamo:

$$\alpha(t) = \int_0^t \mathbf{T}(s)\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_0^t T_1(s)\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_0^t T_N(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

La curva α ha vettore velocità $\mathbf{T}(t)$ in t. Poiché $\mathbf{T}(t)$ è un versore per ogni $t \in \mathbf{I}$, la curva α è a velocità unitaria. Dalla [31.7] segue che le colonne di B sono la base mobile di Frenet per α e che le [31.7] sono le sue formule di Frenet. In particolare α ha curvature $\kappa_1, \dots, \kappa_{N-1}$. ■

Esercizi

1. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva a velocità unitaria soddisfacente le ipotesi della proposizione 31.1 e sia $\beta = \alpha \cdot \theta : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathsf{R}^N$ una riparametrizzazione di α a velocità unitaria, dove

$\theta : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathbf{J}$ è un diffeomorfismo. Dimostrare che anche β soddisfa le ipotesi della proposizione 31.1 e $\kappa_{\alpha.i}(\theta(s)) = \kappa_{\beta.i}(s)$, per ogni $s \in \tilde{\mathbf{J}}$ e $i = 1, \dots, N-1$.

2. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva a velocità unitaria tale che $\alpha(\mathbf{J})$ sia contenuta in un iperpiano affine H. Supponendo che α possieda apparato di Frenet dimostrare che identicamente $\kappa_{N-1} = 0$.

3. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N$ una curva a velocità unitaria tale che $\alpha(\mathbf{J})$ sia contenuta in un sottospazio affine H. Dimostrare che α', α'', $\dots, \alpha^{(N-1)}$ sono contenuti nella giacitura di H.

32 Curve regolari di R^2 e di R^3

Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ una curva piana a velocità unitaria. Le ipotesi della proposizione 31.1 sono automaticamente soddisfatte perché si riducono a $\alpha' \neq 0$, e quindi la base mobile di Frenet per α è definita: essa consiste dei campi di versori $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, dove $\mathbf{t} = \alpha'$ e $\mathbf{n}$ è definito dalla condizione che $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ costituiscano una base ortonormale positivamente orientata per ogni $t \in \mathbf{J}$. $\mathbf{n}$ è detto *campo di versori normali ad* α. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, allora $\mathbf{t}(t) = (x'(t), y'(t))$ e $\mathbf{n} = (-y'(t), x'(t))$. La curva possiede un'unica funzione curvatura $\kappa : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$, e le formule di Frenet prendono la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} \end{aligned} \qquad [32.1]$$

Diamo una dimostrazione diretta delle [32.1]. La prima segue dall'identità $\mathbf{t} \bullet \mathbf{t} = 1$, da cui si ottiene, derivando primo e secondo membro, $2\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}' = 0$, e quindi che $\mathbf{t}'$ è un multiplo di $\mathbf{n}$. Dalla $\mathbf{t} \bullet \mathbf{n} = 0$, derivando ambo i membri, segue che $\mathbf{n}' \bullet \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \bullet \mathbf{n} = -\kappa$, mentre dalla $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = 1$ segue, come in precedenza, che $\mathbf{n}' \bullet \mathbf{n} = 0$: donde la seconda delle [32.1].

La curvatura $\kappa(t)$ è positiva o negativa a seconda che $\mathbf{n}(t)$, applicato in $\alpha(t)$, sia diretto verso la concavità o verso la convessità di $\alpha(\mathbf{J})$. Se $\kappa(t) = 0$ allora $\alpha(t)$ è *un (punto di) flesso*. Se $\kappa(t) \neq 0$, allora $\left|\dfrac{1}{\kappa(t)}\right|$ è detto *raggio di curvatura* di α in $\alpha(t)$, ed il punto

$$\mathbf{c}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)$$

è il *centro di curvatura* di α in $\alpha(t)$. La circonferenza di centro $\mathbf{c}(t)$ e raggio $\left|\dfrac{1}{\kappa(t)}\right|$ si dice *cerchio osculatore* ad α in $\alpha(t)$ (fig. 32.1); ha equazioni parametriche:

$$\gamma(\theta) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\cos(\theta)\mathbf{t}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\sin(\theta)\mathbf{n}(t).$$

Se $\kappa(t) = 0$ il raggio di curvatura si prende per definizione uguale a $+\infty$.

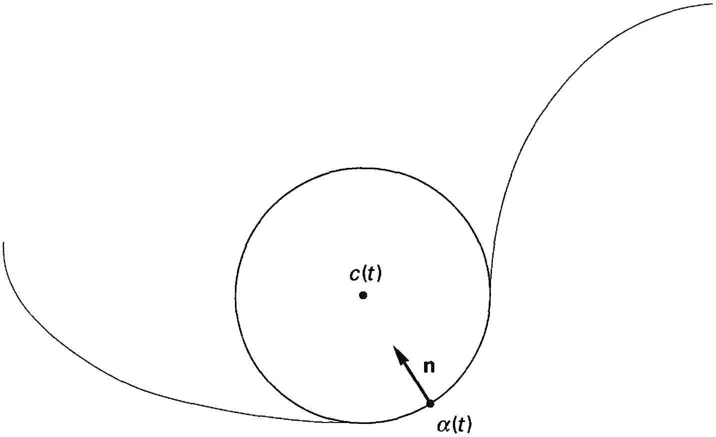


Figura 32.1

Consideriamo ora una curva $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ a velocità unitaria. Le ipotesi della proposizione 31.1 sono che $\mathbf{t} = \alpha'$ e $\mathbf{t}' = \alpha''$ siano ovunque linearmente indipendenti. Derivando primo e secondo membro dell'identità $\mathbf{t} \bullet \mathbf{t} = 1$ si deduce che $2\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}' = 0$, e quindi che $\mathbf{t}'$ è ortogonale a $\mathbf{t}$. Pertanto la condizione che $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ siano linearmente indipendenti è equivalente alla condizione che $\mathbf{t}'$ sia ovunque diverso da 0. Quindi *se* $\mathbf{t}'$ *è ovunque diverso da* 0 *la curva* α *possiede apparato di Frenet.* Sotto questa ipotesi la curvatura di α è la funzione $\kappa(t) = \|\mathbf{t}'(t)\|$. Si definisce il *campo di versori normali ad* α come $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$. Il campo vettoriale $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ si dice *campo di versori binormali ad* α. La base mobile di Frenet per α è $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ (fig. 32.2). Il piano $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ è il *piano osculatore* di α in t, mentre i piani $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$ e $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle$ sono detti rispettivamente *piano normale* e *piano rettificante* di α in t.

La seconda curvatura κ_2 è chiamata *torsione* di α, e viene di solito denotata τ. Le formule di Frenet diventano in questo caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \qquad \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} \qquad\qquad +\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \qquad -\tau\mathbf{n} \end{aligned} \tag{32.2}$$

Per comodità del lettore ne diamo una dimostrazione indipendente dal teorema 31.2. La prima delle [32.2] è vera per definizione di $\mathbf{n}$ e di κ. Differenziando primo e secondo membro delle identità $\mathbf{b} \bullet \mathbf{b} = 1$ e $\mathbf{b} \bullet \mathbf{t} = 0$ si ottiene rispettivamente:

$$\mathbf{b}' \bullet \mathbf{b} = 0, \;\; \mathbf{b}' \bullet \mathbf{t} = -\mathbf{b} \bullet \mathbf{t}' = -\mathbf{b} \bullet \kappa\mathbf{n} = 0$$

e quindi $\mathbf{b}'$ è un multiplo di $\mathbf{n}$, e possiamo scrivere $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$, identità che definisce τ; ciò dimostra la terza delle [32.2]. Per dimostrare la seconda osserviamo che dalla $\mathbf{n} \bullet \mathbf{t} = 0$ si deduce:

$$\mathbf{n}' \bullet \mathbf{t} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{t}' = -\mathbf{n} \bullet \kappa\mathbf{n} = -\kappa;$$

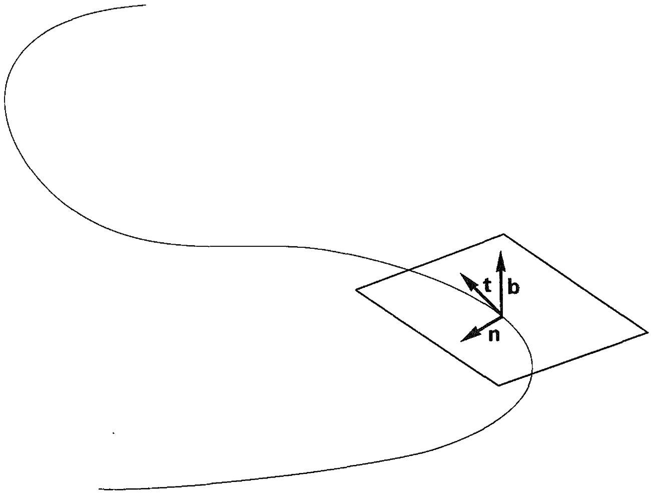


Figura 32.2

inoltre $\mathbf{n}' \bullet \mathbf{n} = 0$ perché $\mathbf{n}$ è un versore, e dalla $\mathbf{n} \bullet \mathbf{b} = 0$ si ottiene:

$$\mathbf{n}' \bullet \mathbf{b} = -\mathbf{n} \bullet \mathbf{b}' = -\mathbf{n} \bullet (-\tau \mathbf{n}) = \tau;$$

pertanto:

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{n}' \bullet \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{n}' \bullet \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{n}' \bullet \mathbf{b})\mathbf{b} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Sotto l'ipotesi che $\mathbf{t}'$ sia ovunque non nullo, per definizione si ha $\kappa(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{J}$. Allora $\dfrac{1}{\kappa(t)}$ è detto *raggio di curvatura* di α in $\alpha(t)$, e il punto

$$\mathbf{c}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\,\mathbf{n}(t)$$

è il *centro di curvatura* di α in $\alpha(t)$. Il piano osculatore ad α in $\alpha(t)$ è $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle =$ $= \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}'(t) \rangle$. Il piano affine $\alpha(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle$ passante per $\alpha(t)$ ed avente per giacitura il piano osculatore si dice *piano osculatore affine ad α in $\alpha(t)$*; esso contiene il centro di curvatura $\mathbf{c}(t)$. La circonferenza γ del piano osculatore affine di centro $\mathbf{c}(t)$ e raggio $\dfrac{1}{\kappa(t)}$ si dice *cerchio osculatore ad α in $\alpha(t)$*. Sue equazioni parametriche sono:

$$\gamma(\theta) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\cos(\theta)\mathbf{t}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\sin(\theta)\mathbf{n}(t).$$

Curve a velocità arbitraria. L'apparato di Frenet è stato definito per curve regolari a velocità unitaria. Quasi tutte le curve regolari che si considerano in pratica non sono però a velocità unitaria e una loro riparametrizzazione a velocità unitaria è il più delle volte molto complicata se non impossibile da ottenere esplicitamente (si veda l'esempio 32.2(3)). Non è però difficile calcolare l'apparato di Frenet di curve regolari senza conoscerne una riparametrizzazione a velocità unitaria. Vediamo in che modo.

Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ una curva regolare. Sia $\beta(s) = \alpha(t(s))$, $s \in \tilde{\mathbf{J}}$, una sua riparametrizzazione a velocità unitaria, e $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Supporremo β orientata concordemente con α. Denotiamo con $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ la velocità di α in $t \in \mathbf{J}$. Allora si ha:

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\beta(s(t))}{\mathrm{d}t} \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} \right\| \left\| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,. \qquad [32.3]$$

Sia $\mathbf{t}$ il campo di versori tangenti a β e sia $\mathbf{T}(t) = \mathbf{t}(s(t))$. $\mathbf{T}$ è un campo di versori tangenti ad α e si ha:

$$\alpha' = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathbf{T}v \qquad [32.4]$$

e

$$\alpha'' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} v + \mathbf{T} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} v^2 + \mathbf{T} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad [32.5]$$

La condizione che β sia dotata di apparato di Frenet è equivalente alla condizione che $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ sia ovunque diverso da 0, e per le [32.4], [32.5] questo equivale alla condizione che α' e α'' siano ovunque linearmente indipendenti.

Supponiamo dunque α' e α'' ovunque linearmente indipendenti. Siano $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ i campi di versori normali e binormali di β, e siano κ, $\tau : \tilde{\mathbf{J}} \to \mathsf{R}$ le sue funzioni curvatura e torsione rispettivamente. Componendo $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, κ, τ con la funzione $s : \mathbf{J} \to \tilde{\mathbf{J}}$ otteniamo campi vettoriali su α:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{t}(s(t)), \;\; \mathbf{N}(t) = \mathbf{n}(s(t)), \;\; \mathbf{B}(t) = \mathbf{b}(s(t))$$

e funzioni

$$K(t) = \kappa(s(t)), \;\; T(t) = \tau(s(t)),$$

che possiamo chiamare *apparato di Frenet sulla curva* α. È immediato verificare che l'apparato di Frenet su α è indipendente dalla scelta della riparametrizzazione a velocità unitaria β.

Sostituendo $K\mathbf{N}$ al posto di $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ nella [32.5] otteniamo la seguente espressione di α'':

$$\alpha'' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathbf{T} + Kv^2\mathbf{N}. \qquad [32.6]$$

La [32.6] è una formula familiare in cinematica: essa afferma che se un punto si muove con velocità costante allora la sua accelerazione ha direzione perpendicolare alla velocità ed è direttamente proporzionale alla curvatura e al quadrato della velocità; se la velocità non è costante allora l'accelerazione α'' possiede anche una componente in direzione tangenziale.

Le formule di Frenet esprimono le derivate di **t**, **n**, **b** *rispetto al parametro s* in funzione di **t**, **n**, **b**. Se invece deriviamo rispetto al parametro t, cioè deriviamo i campi vettoriali **T**, **N**, **B**, otteniamo le seguenti formule che generalizzano le [32.2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \qquad\quad K v \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -K v \mathbf{T} \qquad\qquad + T v \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \qquad\quad -T v \mathbf{N} \end{aligned} \tag{32.7}$$

Si ha infatti:

$$\mathbf{T}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = K v \mathbf{N}.$$

Le altre due formule si ottengono in modo simile.

Per poter calcolare l'apparato di Frenet su α dobbiamo darne l'espressione in termini di α stessa, senza cioè far intervenire la riparametrizzazione β.

32.1 PROPOSIZIONE *Sia* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ *una curva regolare tale che* α' *e* α'' *siano ovunque linearmente indipendenti. Allora* α *possiede apparato di Frenet e si ha:*

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|};$$

$$K = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad T = \frac{\alpha' \wedge \alpha'' \bullet \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}.$$

Dimostrazione. Il fatto che α possiede apparato di Frenet è gia stato dimostrato. L'espressione di **T** è la [32.4]. Utilizzando la [32.6] si trova:

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \alpha'' &= (v\mathbf{T}) \wedge \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{T} + K v^2 \mathbf{N}\right) = \\ &= (v\mathbf{T}) \wedge \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}\right) + K v^3 \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = K v^3 \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{32.8}$$

Pertanto:

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = K v^3 \tag{32.9}$$

perché K e v sono positivi. Dividendo primo e ultimo membro della [32.8] per $\|\alpha' \wedge \alpha''\|$ e tenendo conto della [32.9] si trova l'espressione di **B**. Dalla [32.9], dividendo per v^3, discende l'espressione cercata di K. L'identità $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ è vera per definizione. Resta da calcolare T. Calcoliamo $(\alpha' \wedge \alpha'') \bullet \alpha'''$; poiché $\alpha' \wedge \alpha''$

è parallelo a **B**, sarà sufficiente per questo calcolare la componente di α''' nella direzione di **B**. Abbiamo, tenuto conto delle [32.7]:

$$\alpha''' = \frac{d\alpha''}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + Kv^2\mathbf{N}\right)' = Kv^2\mathbf{N}' + \ldots = Kv^2(-Kv\mathbf{T} + Tv\mathbf{B}) + \ldots =$$
$$= KTv^3\mathbf{B} + \ldots$$

dove abbiamo denotato con ... tutti gli addendi che non sono paralleli a **B**. Segue che:

$$(\alpha' \wedge \alpha'') \bullet \alpha''' = (Kv^3\mathbf{B}) \bullet (KTv^3\mathbf{B}) = K^2Tv^6.$$

Dividendo per $\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2$ otteniamo l'espressione di T cercata. ■

32.2 *Esempi*

1. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ una curva piana a velocità arbitraria che soddisfa $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbf{J}$. Sia $\beta(s) = \alpha(t(s))$, $s \in \mathbf{A}$, una sua riparametrizzazione a velocità unitaria orientata concordemente con α, e $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Sia $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ la base mobile di Frenet di β, κ la sua funzione curvatura, e siano

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}(s(t)) = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{n}(s(t))$$
$$K(t) = \kappa(s(t)).$$

La [32.6] si deduce come nel caso di curve di R^3, e moltiplicandone scalarmente per **N** ambo i membri si ottiene:

$$K = \frac{\alpha'' \bullet \mathbf{N}}{\|\alpha'\|^2} \cdot \qquad [32.10]$$

La [32.10] può anche essere usata per calcolare la curvatura di curve di R^3. Sia ad esempio $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathsf{R}^2$ e sia $r > 0$. Consideriamo la circonferenza

$$\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2 \qquad [32.11]$$
$$\alpha(t) = (c_1 + r\cos(t), c_2 + r\sin(t))$$

di centro **c** e raggio r. Abbiamo

$$\alpha'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)), \quad \|\alpha'(t)\| = r$$
$$\mathbf{N}(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$$
$$\alpha''(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t))$$

e quindi per la [32.10]:

$$K = \frac{1}{r} \cdot$$

La curvatura è positiva perché il versore normale è diretto verso l'interno. Il raggio di curvatura è uguale a r e il cerchio osculatore coincide con α in ogni punto. Se riparametrizziamo la circonferenza con orientazione opposta:

$$\beta(t) = (c_1 + r\cos(t), c_2 - r\sin(t))$$

allora otteniamo $K = -\frac{1}{r}$.

2. Calcoliamo l'apparato di Frenet dell'elica circolare

$$\gamma : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3$$

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \quad a, b > 0$$

in cui supponiamo $a^2 + b^2 = 1$, cosicchè γ ha velocità unitaria.

Abbiamo:

$$\mathbf{t} = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\mathbf{t}' = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

$$\kappa(t) = a,$$

$$\mathbf{n} = (-\cos(t), -\sin(t), 0),$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = (b\sin(t), -b\cos(t), a).$$

$$\mathbf{b}' = (b\cos(t), b\sin(t), 0) = -b\mathbf{n}$$

quindi $\tau = b$. Il piano osculatore affine nel punto $\gamma(t)$ ha equazione

$$\mathbf{b} \bullet (\mathbf{x} - \gamma(t)) = 0$$

cioè:

$$b\sin(t)X - b\cos(t)Y + aZ - abt = 0.$$

3. Consideriamo la *cubica gobba*

$$\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3$$

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3).$$

Questa curva ha velocità

$$v(t) = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

e quindi non ha velocità unitaria. La sua funzione lunghezza è:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\, \mathrm{d}u.$$

L'inversa di questa funzione, che è necessario conoscere per riparametrizzare α a velocità unitaria, non è esprimibile per mezzo di funzioni elementari (è una funzione ellittica). Quindi già una curva semplicissima come la cubica gobba presenta un problema di riparametrizzazione molto complicato. Procediamo quindi a calcolarne l'apparato di Frenet utilizzando le formule della proposizione 32.1. Si ha:

$$\alpha' = (1, 2t, 3t^2), \quad \alpha'' = (0, 2, 6t), \quad \alpha''' = (0, 0, 6)$$

$$\alpha' \wedge \alpha'' = (6t^2, -6t, 2),$$

$$\|\alpha'\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}, \quad \|\alpha' \wedge \alpha''\| = \sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4}$$

e quindi:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(1, 2t, 3t^2); \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}(3t^2, -3t, 1)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)(1 + 9t^2 + 9t^4)}}(-9t^3 - 2t, -9t^4 + 1, 6t^3 + 3t);$$

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}; \quad \tau(t) = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

Come segue dai teoremi 31.3 e 31.4, la curvatura e la torsione caratterizzano tutte le proprietà geometriche di una curva. È quindi logico aspettarsi che a funzioni curvatura e torsione particolari corrispondano curve particolari. Vediamo un esempio.

32.3 PROPOSIZIONE

(a) *Una curva piana* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ *avente curvatura identicamente nulla ha immagine contenuta in una retta.*

(b) *Una curva* $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ *tale che* α' *e* α'' *siano ovunque indipendenti è contenuta in un piano se e solo se ha torsione identicamente nulla.*

Dimostrazione

(a) Dall'ipotesi segue che $\alpha''(t) = (0, 0)$, e quindi $\alpha(t) = (c_1 + tv_1, c_2 + tv_2)$ per qualche $c_1, c_2, v_1, v_2 \in \mathsf{R}$.

(b) Supponiamo che α sia contenuta in un piano. Allora per un opportuno $\mathbf{v} \in \mathsf{R}^3$ si ha:

$$(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \bullet \mathbf{v} = 0$$

identicamente. Derivando si ottiene:

$$\alpha' \bullet \mathbf{v} = \alpha'' \bullet \mathbf{v} = 0$$

e quindi il piano osculatore $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$ è costante. Pertanto il versore binormale $\mathbf{B}$ è costante e dalle formule di Frenet segue che $\tau = 0$.

Viceversa supponiamo $\tau = 0$. Allora $\mathbf{B}$ è costante. Fissato $t_0 \in \mathbf{J}$ poniamo

$$F(t) = (\alpha(t) - \alpha(t_0)) \bullet \mathbf{B}.$$

Poiché:

$$F'(t) = \alpha' \bullet \mathbf{B} = 0, \quad F(t_0) = 0$$

si ha $F(t) = 0$ identicamente, cioè $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ appartiene al piano perpendicolare a $\mathbf{B}$ per ogni $t \in \mathbf{J}$. Quindi α è contenuta in un piano perpendicolare a $\mathbf{B}$. ■

Altre caratterizzazioni di proprietà geometriche di curve mediante curvatura e torsione sono date negli esercizi.

32.4 *Esempi*

1. Siano a, $b > 0$. La curva piana regolare $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in \mathsf{R}$, parametrizza l'*ellisse* di equazione cartesiana $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. Si ha:

$$\alpha'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$$

$$\alpha''(t) = (-a \cos(t), -b \sin(t)), \quad \mathbf{N}(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$$

$$\kappa(t) = \frac{a \cos(t)^2 + b \sin(t)^2}{a^2 \sin(t)^2 + b^2 \cos(t)^2}.$$

La curva piana regolare $\beta(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$, a, $b > 0$, $t \in \mathsf{R}$, parametrizza un ramo dell'*iperbole* di equazione cartesiana $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. La curvatura di β è:

$$\kappa(t) = \frac{-ab}{\sqrt{(a^2 \sinh(t)^2 + b \cosh(t)^2)^3}}.$$

La curva piana regolare $\gamma(t) = (2at, at^2)$, $a > 0$, $t \in \mathsf{R}$, parametrizza la *parabola* di equazione cartesiana $X^2 = 4aY$. La sua curvatura è:

$$\kappa(t) = \frac{2a}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

2. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ una curva piana regolare a curvatura ovunque diversa da 0. Al variare di $t \in \mathbf{J}$ il centro di curvatura di α in t descrive una curva piana detta *evoluta* di α. Quindi l'evoluta di α è la curva:

$$\mathbf{c}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t).$$

L'evoluta di una circonferenza [32.11] è la curva costante $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}$ perché il centro di curvatura $\mathbf{c}(t)$ coincide con il centro $\mathbf{c}$ per ogni $t \in \mathsf{R}$.

La *cicloide* è la curva

$$\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad 0 < t < 2\pi;$$

α è descritta da un punto di una circonferenza di raggio 1 che rotola sull'asse X (fig. 32.3). La sua curvatura è:

$$\kappa(t) = \frac{1}{2\sqrt{2(1 - \cos(t))}}$$

e la sua evoluta è:

$$\mathbf{c}(t) = (t - 2\sin(t), 2 - 2\cos(t)).$$

3. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ una curva piana regolare. Un'*elica su α di passo $b > 0$* è la curva regolare:

$$\beta : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$$

$$\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), bt).$$

Se α è una circonferenza si ottiene un'elica circolare. Ad esempio:

$$\beta(t) = (\cos(t), \sin(2t), bt) \quad t \in \mathsf{R}$$

è un'elica sopra la curva piana dell'esempio 25.6.1.

La curva $\beta(t) = (2at, at^2, bt)$, a, $b > 0$, $t \in \mathsf{R}$, è un'elica sopra una parabola (fig. 32.4).

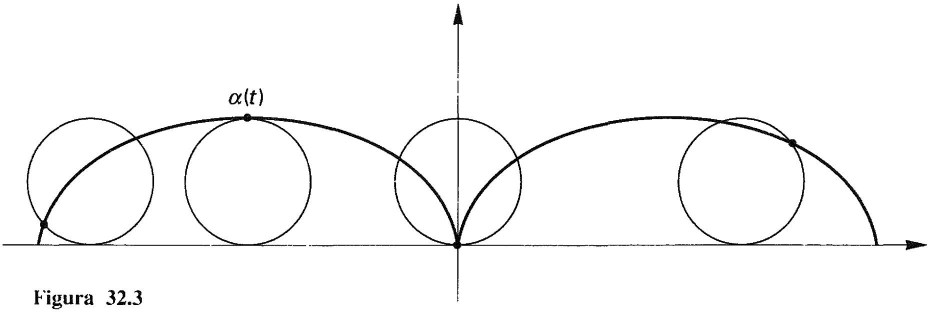


Figura 32.3

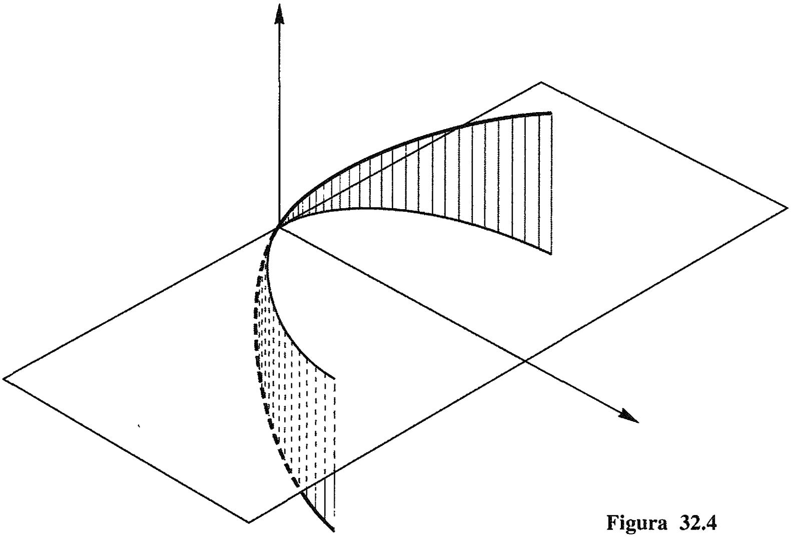


Figura 32.4

La sua curvatura è

$$\kappa(t) = \frac{2a\sqrt{b^2+4a^2}}{\sqrt{(4a^2(1+t^2)+b^2)^3}}$$

mentre $\tau = 0$. Dalla proposizione 32.3 discende che $\beta(\mathrm{R})$ è contenuta in un piano: si tratta del piano $bX - 2aZ = 0$.

La curva $\beta(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ è un'elica sopra un'iperbole. La curvatura e la torsione sono:

$$\kappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2 + 1}\cdot$$

Esercizi

1. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathrm{R}^2$ una curva piana regolare avente curvatura costante $\kappa > 0$. Dimostrare che $\alpha(\mathbf{J})$ è contenuta in una circonferenza di raggio $\frac{1}{\kappa}$.
2. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathrm{R}^3$ una curva dotata di apparato di Frenet, avente curvatura costante $\kappa > 0$ e torsione identicamente nulla. Dimostrare che $\alpha(\mathbf{J})$ è contenuta in una circonferenza di raggio $\frac{1}{\kappa}$.
3. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathrm{R}^3$ una curva dotata di apparato di Frenet la cui immagine sia contenuta in una sfera di raggio r. Dimostrare che per ogni $t \in \mathbf{J}$ la curvatura κ di α soddisfa $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$.
4. Calcolare la curvatura della curva piana $\alpha(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in \mathrm{R}$, dove $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ è la funzione dell'esercizio 19.6.

5. Calcolare la curvatura di una *catenaria*, che è una curva piana regolare di equazioni parametriche $\alpha(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, $a > 0$, $t \in \mathrm{R}$ (fig. 32.5).

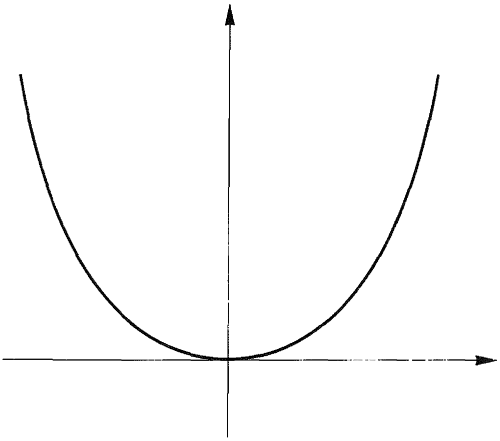


Figura 32.5

6. Calcolare l'evoluta di una *spirale logaritmica*, che è una curva piana di equazioni: $\alpha(t) = (\mathrm{e}^{bt} \cos(t), \mathrm{e}^{bt} \sin(t))$ $b > 0$, $t \in \mathrm{R}$ (fig. 32.6).

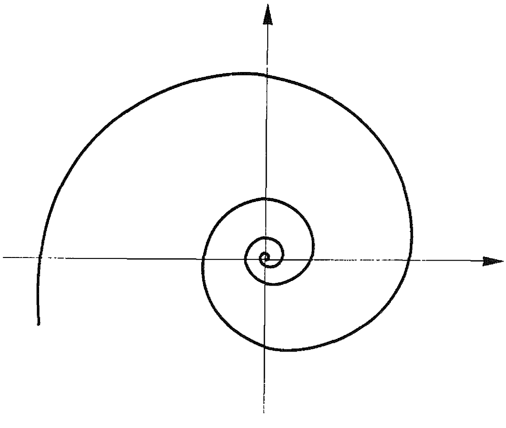


Figura 32.6

7. Dimostrare che ognuna delle seguenti curve è regolare e calcolarne l'apparato di Frenet nel punto indicato:

(a) $\alpha(t) = (\sin(t)^2, \cos(t)^3, 1 + \cos(t)\sin(t))$ in $\alpha(\pi/2)$.

(b) $\alpha(t) = (\cos(t)^2, \cos(t), \sin(t))$ in $\alpha(0)$.

(c) $\alpha(t) = (t, t\mathrm{e}^t, t^2\mathrm{e}^t)$ in $\alpha(0)$.

(d) $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)\right)$ in $\alpha(1)$.

33 Superfici di R^N: isometrie e prima forma fondamentale

In questo paragrafo inizieremo lo studio delle proprietà metriche delle superfici di R^N, cioè delle proprietà che dipendono dalla loro forma e dalla loro struttura metrica interna. Come sottoinsieme dello spazio metrico R^N ogni superficie differenziabile $S \subset \mathsf{R}^N$ ha una struttura di spazio metrico. Se però vogliamo studiare proprietà metriche "intrinseche" delle superfici è più opportuno definire una distanza nel modo seguente.

33.1 DEFINIZIONE *Sia* $S \subset \mathsf{R}^N$ *una superficie differenziabile. Per ogni coppia di punti* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in S$ *la* distanza intrinseca *di* $\mathbf{x}_1$ *da* $\mathbf{x}_2$ *è definita come*

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \inf\{\textit{lunghezze delle curve differenziabili in } S \textit{ di estremi } \mathbf{x}_1 \textit{ e } \mathbf{x}_2\}.$$

In generale $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ (dove $d(-,-)$ denota la distanza euclidea in R^N) perché $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ è calcolata per mezzo di curve vincolate ad essere contenute in S, mentre $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ è la lunghezza del segmento di estremi $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Se ad esempio S è una sfera di raggio $r > 0$ in R^3, la distanza intrinseca di due punti antipodali è πr, mentre la loro distanza euclidea è $2r$. Per ovvi motivi pratici è molto più importante conoscere la distanza intrinseca piuttosto che quella euclidea: si pensi alla superficie terrestre, omologabile a quella di una sfera, oppure alla superficie terrestre in zone limitate, ad esempio montagnose, dove la distanza euclidea ha una scarsa importanza pratica.

Nello studio delle proprietà metriche di una superficie $S \subset \mathsf{R}^N$ si utilizza la cosiddetta "prima forma fondamentale". Il prodotto scalare standard in R^N induce in ognuno degli spazi tangenti $T_\mathbf{x}(S)$, $\mathbf{x} \in S$, una forma bilineare simmetrica, che si chiama *prima forma fondamentale su* $T_\mathbf{x}(S)$, e che si denota con $\mathbf{I}_\mathbf{x}(-,-)$, oppure con $\mathbf{I}(-,-)$ quando non vi sia possibilità di equivoco; lo stesso nome viene dato alla forma quadratica associata, indicata con $\mathbf{I}_\mathbf{x}(-)$ o semplicemente $\mathbf{I}(-)$. Essendo la restrizione del prodotto scalare su R^N, *la prima forma fondamentale è definita positiva.*

33.2 DEFINIZIONE *Siano* $S \subset \mathsf{R}^N$ *e* $\hat{S} \subset \mathsf{R}^M$ *due superfici differenziabili. Un* isometria *di* S *in* $\hat{S}$ *è un diffeomorfismo* $f : S \to \hat{S}$ *tale che per ogni* $\mathbf{x} \in S$ *il differenziale* $f_{*\mathbf{x}} : T_\mathbf{x}(S) \to T_{f(\mathbf{x})}(\hat{S})$ *sia un'isometria di spazi vettoriali euclidei, cioè soddisfi:*

$$\mathbf{I}_\mathbf{x}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{I}_{f(\mathbf{x})}(f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}), f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{w})) \quad \text{per ogni } \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in T_\mathbf{x}(S).$$

Se esiste un'isometria $f : S \to \hat{S}$ *diremo* S *e* $\hat{S}$ isometriche.

È ovvio che il diffeomorfismo identità di una superficie differenziabile in sé è un'isometria; inoltre è immediato verificare che l'inversa di un'isometria e la composizione di due isometrie sono isometrie. Quindi l'isometria è una relazione di equivalenza tra superfici differenziabili che è più fine del diffeomorfismo, cioè superfici isometriche sono diffeomorfe. Il viceversa è in generale falso. Ad esempio, il diffeomorfismo

$$f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$$

$$f(\mathbf{u}) = c\mathbf{u}$$

con $c \neq 0$, 1, non è un'isometria (ma è un'applicazione conforme, cfr. esercizio 1).

Il motivo per il nome "isometria" che abbiamo utilizzato nella definizione 33.2 viene dal seguente risultato:

33.3 TEOREMA *Siano $S \subset \mathsf{R}^N$ e $\hat{S} \subset \mathsf{R}^M$ due superfici differenziabili. Un diffeomorfismo $f : S \to \hat{S}$ è un'isometria se e solo se per ogni curva regolare $\alpha : \mathbf{J} \to S$ e per ogni t_1, $t_2 \in \mathbf{J}$ la lunghezza di α tra t_1 e t_2 è uguale alla lunghezza della curva regolare $f \cdot \alpha : \mathbf{J} \to \hat{S}$ tra t_1 e t_2. In particolare, se f è un'isometria allora*

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2))$$

per ogni $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in S$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia un'isometria. La lunghezza di α tra t_1 e t_2 è:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\, \mathrm{d}t$$

mentre la lunghezza di $f \cdot \alpha$ tra t_1 e t_2 è:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|(f \cdot \alpha)'(t)\| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{I}_{(f\cdot\alpha)(t)}[(f \cdot \alpha)'(t)]}\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{I}_{(f\cdot\alpha)(t)}[f_{*\alpha(t)}(\alpha'(t))]}\, \mathrm{d}t.$$

Per definizione di isometria

$$\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \mathbf{I}_{(f\cdot\alpha)(t)}[f_{*\alpha(t)}(\alpha'(t))]$$

per ogni $t \in \mathbf{J}$ e quindi le lunghezze di α e di $f \cdot \alpha$ tra t_1 e t_2 coincidono.

Supponiamo viceversa che la condizione sia soddisfatta. Sia $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva adattata a $\mathbf{v}$, che possiamo supporre regolare prendendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Allora, fissato $\varepsilon_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la lunghezza di α tra ε_0 e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ è una funzione differenziabile

$$l(t) = \int_{\varepsilon_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

la cui derivata in 0 è

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}(0) = \|\alpha'(0)\| = \sqrt{\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})};$$

D'altra parte per ipotesi si ha anche:

$$l(t) = \int_{\varepsilon_0}^{t} \|(f \cdot \alpha)'(\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}(0) = \|(f \cdot \alpha)'(0)\| = \sqrt{\mathbf{I}_{f(\mathbf{x})}(f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}))}.$$

Confrontando si deduce

$$\sqrt{\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})} = \sqrt{\mathbf{I}_{f(\mathbf{x})}(f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}))}$$

e, poiché la prima forma fondamentale è definita positiva, segue che $\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \mathbf{I}_{f(\mathbf{x})}(f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}))$. Quindi f è un'isometria.

L'ultima affermazione segue dal fatto che la distanza intrinseca è calcolata per mezzo delle lunghezze delle curve regolari. ■

Le proprietà e le nozioni che vengono preservate dalle isometrie, cioè quelle proprietà che sono comuni a tutte le superfici tra loro isometriche, si dicono *intrinseche* e il loro studio è l'oggetto della *geometria intrinseca* delle superfici euclidee. Questa terminologia è giustificata dal teorema 33.3, il quale afferma tra l'altro che $\rho(-,-)$ è una nozione intrinseca. Da questo risultato segue che la prima forma fondamentale su una superficie, la quale dipende dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio euclideo, può essere calcolata utilizzando le lunghezze delle curve sulla superficie, le quali invece dipendono solo da proprietà geometriche interne della superficie. Questo fatto notevole ha una grande importanza concettuale.

Il nostro obiettivo è di studiare proprietà e grandezze invarianti rispetto ad isometrie, cioè intrinseche. Inizieremo con lo studio delle proprietà intrinseche di natura locale, cioè con le proprietà intrinseche delle superfici nell'intorno di un punto.

Per studiare le proprietà locali delle superfici euclidee considereremo una parametrizzazione $x : U \to \mathrm{R}^N$, dove U è un aperto di R^2; l'immagine $S = x(U)$ è una superficie di R^N che consiste di un solo aperto coordinatizzato, cioè possiede un atlante consistente di una sola carta locale $\{(S, x^{-1})\}$. Chiameremo una *superficie* siffatta *elementare*. Vogliamo dunque concentrare la nostra attenzione sulle superfici elementari.

Se $V \subset \mathsf{R}^2$ è un altro aperto e $\phi : V \to U$ un diffeomorfismo, la composizione $y = x \cdot \phi : V \to \mathsf{R}^N$ è un'altra parametrizzazione che soddisfa $y(V) = S$ e prende il nome di *riparametrizzazione di* S. Diremo che ϕ *mantiene* oppure *cambia l'orientazione* a seconda che sia $\det(\phi(\mathbf{u})) > 0$ oppure $\det(\phi(\mathbf{u})) < 0$ per ogni $\mathbf{u} \in U$.

Supponiamo d'ora in poi, in questo paragrafo, $N = 3$. Denotiamo con $\mathbf{u} = (u, v)$ un punto variabile in U, e sia $x(\mathbf{u}) = (x_1(\mathbf{u}), x_2(\mathbf{u}), x_3(\mathbf{u}))$. Se $\mathbf{x} \in S$ lo spazio tangente $T_{\mathbf{x}}(S)$ verrà come al solito considerato come un sottospazio vettoriale di R^3. I campi vettoriali differenziabili:

$$x_u := \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right), \quad x_v := \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right)$$

definiscono in ogni punto $\mathbf{x} = x(\mathbf{u}) \in S$ una base di $T_{\mathbf{x}}(S)$ perché si ha:

$$x_u(\mathbf{x}) = x_{*\mathbf{u}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\mathbf{u}}\right), \quad x_v(\mathbf{x}) = x_{*\mathbf{u}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\mathbf{u}}\right)$$

e $x_{*\mathbf{u}} : T_{\mathbf{u}}(U) \to T_{\mathbf{x}}(S)$ è un isomorfismo. Poiché le componenti di x_u e di x_v sono funzioni di $\mathbf{u}$ è più naturale scrivere $x_u(\mathbf{u})$ e $x_v(\mathbf{u})$ anziché, rispettivamente, $x_u(\mathbf{x})$ e $x_v(\mathbf{x})$. Pertanto nel seguito adotteremo questo piccolo abuso di notazione. Spesso ometteremo addirittura il riferimento ad $\mathbf{u}$ per maggior semplicità di notazione.

È naturale esprimere i vettori di $T_{\mathbf{x}}(S)$ e la prima forma fondamentale per mezzo della base $\{x_u(\mathbf{u}), x_v(\mathbf{u})\}$. Omettendo il riferimento ad $\mathbf{u}$, se $(du, dv) \in T_{\mathbf{u}}(U)$ sia

$$\mathbf{X} = x_{*\mathbf{u}}(du, dv) = x_u du + x_v dv \in T_{\mathbf{x}}(S);$$

si ha allora:

$$\mathbf{I}(\mathbf{X}) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

dove abbiamo posto:

$$E = x_u \bullet x_u, \quad F = x_u \bullet x_v, \quad G = x_v \bullet x_v.$$

Abbiamo utilizzato la notazione (du, dv) per le coordinate di un vettore di $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}^2)$, in accordo con l'uso tradizionale in geometria differenziale. Questa notazione vuole suggerire il fatto che un vettore tangente deve essere considerato come un incremento infinitesimo del punto $\mathbf{u} = (u, v)$. E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale e sono funzioni di classe $C^{(\infty)}$ di $\mathbf{u} \in U$. La matrice della prima forma fondamentale è:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad [33.1]$$

Poiché **I** è definita positiva si ha:

$$E > 0, \; G > 0, \; EG - F^2 > 0.$$

Queste disuguaglianze possono anche essere verificate direttamente: infatti $E = \|x_u\|^2$ e $G = \|x_v\|^2$ sono positivi perché i vettori x_u ed x_v sono non nulli, mentre

$$EG - F^2 = (x_u \bullet x_u)(x_v \bullet x_v) - (x_u \bullet x_v)^2 > 0 \qquad [33.2]$$

per la disuguaglianza di Schwarz.

Tramite l'isomorfismo $x_{*\mathbf{u}} : T_{\mathbf{u}}(U) \to T_{\mathbf{x}}(S)$ la prima forma fondamentale si trasporta su $T_{\mathbf{u}}(U)$; denotando questa forma quadratica su $T_{\mathbf{u}}(U)$ con lo stesso simbolo $\mathbf{I}(-)$, abbiamo:

$$\mathbf{I}(du, dv) = \mathbf{I}\left(x_{*\mathbf{u}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\mathbf{u}} du + \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\mathbf{u}} dv\right) = \mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Pertanto la prima forma fondamentale su $T_{\mathbf{u}}(U)$ si esprime, nella base canonica $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\mathbf{u}}, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\mathbf{u}}\right\}$, con la stessa matrice [33.1] con cui la $\mathbf{I}(-)$ su $T_{\mathbf{x}}(S)$ si esprime nella base $\{x_u(\mathbf{u}), x_v(\mathbf{u})\}$.

Vediamo in che modo la prima forma fondamentale interviene quando si calcolano grandezze di natura metrica su S quali lunghezze di curve, angoli ed aree.

Consideriamo una curva regolare α in S, definita in un intervallo $\mathbf{J}$, che supporremo assegnata come immagine tramite x di una curva regolare $(u(t), v(t))$, $t \in \mathbf{J}$, in U, cioè come $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$. Allora, per ogni t_1, $t_2 \in \mathbf{J}$, la lunghezza di α tra t_1 e t_2 ha la seguente espressione:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left\| x_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + x_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(x_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + x_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) \bullet \left(x_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + x_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\right)^{1/2} \mathrm{d}t = \qquad [33.3]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t.$$

Due particolari classi di curve regolari su S sono le immagini tramite x dei segmenti di rette parallele agli assi coordinati in U, cioè le cosiddette *u-curve*:

$$\alpha(u) = x(u, v_0) \quad v_0 \text{ fisso}$$

e *v-curve*:

$$\beta(v) = x(u_0, v) \quad u_0 \text{ fisso.}$$

Per ogni punto $\mathbf{x} = x(u_0, v_0) \in S$ passano un'unica u-curva ed un'unica v-curva, i cui vettori velocità in $\mathbf{x}$ sono rispettivamente x_u ed x_v.

Se $\mathbf{X} = x_u du + x_v dv$, $\mathbf{Y} = x_u \delta u + x_v \delta v \in T_{\mathbf{x}}(S)$, il coseno dell'angolo convesso θ da essi formato è:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y}}{\|\mathbf{X}\| \, \|\mathbf{Y}\|} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)^{1/2}(E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2)^{1/2}}$$

In particolare il coseno dell'angolo formato dai vettori x_u ed x_v in $\mathbf{x}$ è:

$$\frac{x_u \bullet x_v}{\|x_u\| \, \|x_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

La condizione di perpendicolarità di $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{Y}$ è:

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0 \qquad [33.4]$$

che nel caso $\mathbf{X} = x_u$ ed $\mathbf{Y} = x_v$ diventa:

$$F = 0 \qquad [33.5]$$

Poiché x_u ed x_v sono rispettivamente i vettori velocità della u-curva e della v-curva per $\mathbf{x}$, la [33.5] è anche la condizione affinché queste due curve siano perpendicolari.

Dal calcolo di più variabili (si veda anche l'esempio 43.4(4)) sappiamo che l'area $A(S)$ della superficie elementare S, se finita, è data dall'integrale doppio:

$$\int_U \|x_u \wedge x_v\| dudv.$$

Tenuto conto dell'identità (Sernesi 1989, teorema 18.2(6))

$$\|x_u \wedge x_v\|^2 = EG - F^2 \qquad [33.6]$$

l'integrale precedente fornisce la seguente formula:

$$A(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad [33.7]$$

Poiché l'integrando dipende solo dalla prima forma fondamentale, deduciamo la seguente

33.4 PROPOSIZIONE *Due superfici elementari isometriche di area finita hanno la stessa area.*

33.5 *Esempi*

1. Consideriamo un piano Π, ad esempio quello di equazioni parametriche

$$x(u,v) = (u,v,0).$$

Allora

$$x_u = (1,0,0),\ \ x_v = (0,1,0)$$

$$E = 1,\ \ F = 0,\ \ G = 1$$

e quindi la prima forma fondamentale è:

$$\mathbf{I}(du,dv) = du^2 + dv^2.$$

2. Sia $r > 0$ e consideriamo l'applicazione

$$x : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$$

$$x(u,v) = (r\ \cos(u), r\ \sin(u), v)$$

x è una rappresentazione parametrica del *cilindro* Γ di asse l'asse Z e di raggio r, che ristretta opportunamente fornisce una parametrizzazione nell'intorno di ogni punto di Γ. Le u-curve sono archi di circonferenze su piani perpendicolari al piano $Z = 0$; le v-curve sono rette parallele all'asse Z (fig. 33.1). Quindi le u-curve e le v-curve sono perpendicolari, e possiamo perciò predire che si abbia $F = 0$ identicamente.

Calcoliamo:

$$x_u = (-r\ \sin(u), r\ \cos(u), 0)$$

$$x_v = (0,0,1)$$

$$E = r^2.\ \ F = 0.\ \ G = 1.$$

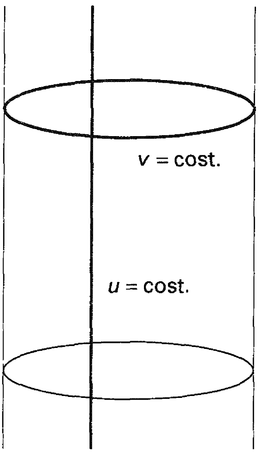


Figura 33.1

Quindi

$$\mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = r^2 du^2 + dv^2.$$

Riparametrizziamo Γ ponendo $u = r^{-1}w$, cioè ponendo:

$$y(w, v) = (r\cos(r^{-1}w), r\sin(r^{-1}w), v)$$

con $(w, v) \in \mathsf{R}^2$. Allora si ottiene

$$y_w = (\cos(r^{-1}w), \sin(r^{-1}w), 0),\ \ y_v = (0, 0, 1)$$

e questa nuova rappresentazione parametrica soddisfa $E = 1 = G$, $F = 0$. Quindi la prima forma fondamentale su Γ si esprime in questa nuova parametrizzazione come:

$$\mathbf{I}(y_u du + y_v dv) = du^2 + dv^2.$$

Ciò significa precisamente che localmente y induce un'isometria di R^2 su Γ, cioè che ogni punto $\mathbf{u} \in \mathsf{R}^2$ possiede un intorno aperto che viene mandato isometricamente su un aperto di Γ. Diremo pertanto il piano ed il cilindro *localmente isometrici.* Una *superficie* isometrica a un aperto del piano si dice *sviluppabile.* Una superficie localmente isometrica a un aperto del piano si dice *localmente sviluppabile.* Quindi il cilindro è localmente sviluppabile.

3. Sia $\mathbf{J}$ un intervallo aperto, $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ una rappresentazione parametrica di una 1-varietà la cui immagine sia contenuta nel piano $Z = 0$, e supponiamo che $\alpha(\mathbf{J})$ sia contenuta ad esempio nel semipiano $Y > 0$. Pertanto sarà $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0)$, con $\alpha_2(u) > 0$ per ogni $u \in \mathbf{J}$. L'applicazione

$$x : \mathbf{J} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3$$

$$x(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos(v), \alpha_2(u)\sin(v)),$$

è una rappresentazione parametrica di una *superficie di rotazione S* ottenuta facendo ruotare $\alpha(\mathbf{J})$ attorno all'asse X (cfr. esempio 25.6(6)). Anche in questo caso possiamo predire che si avrà $F = 0$ perché le v-curve sono archi di circonferenze perpendicolari alle u-curve, che sono curve ottenute ruotando $\alpha(\mathbf{J})$ (fig. 33.2). Calcolando si trova:

$$x_u = (\alpha_1'(u), \alpha_2'(u)\cos(v), \alpha_2'(u)\sin(v))$$

$$x_v = (0, -\alpha_2(u)\sin(v), \alpha_2(u)\cos(v))$$

$$E = ||\alpha'(u)||^2,\ \ F = 0,\ \ G = \alpha_2(u)^2$$

$$\mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = ||\alpha'(u)||^2 du^2 + \alpha_2(u)^2 dv^2.$$

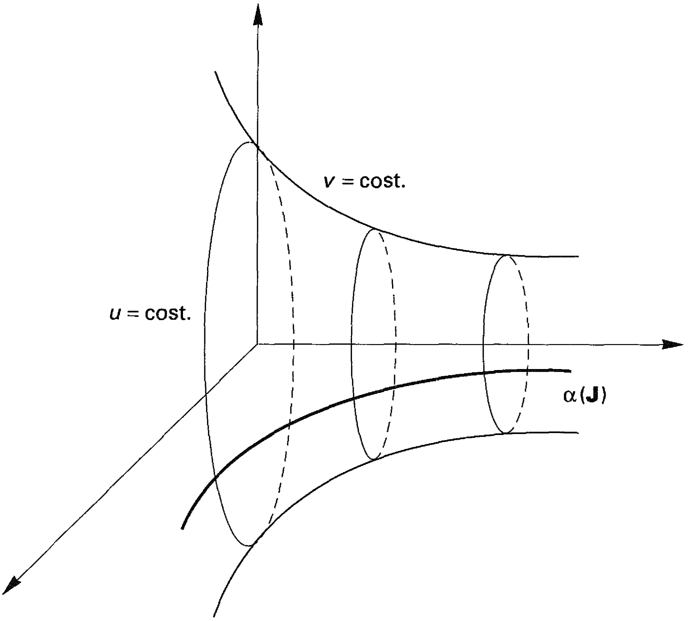


Figura 33.2

Se la curva α è a velocità unitaria si ha $\|\alpha'(u)\|^2 = 1$ e quindi:

$$\mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = du^2 + \alpha_2(u)^2 dv^2.$$

Nel caso particolare della *sfera* di centro l'origine e raggio r abbiamo:

$$x(u, v) = (r\ \cos(u), r\ \sin(u)\cos(v), r\ \sin(u)\sin(v)),\quad (u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$$

e

$$x_u = (-r\ \sin(u), r\ \cos(u)\cos(v), r\ \cos(u)\sin(v))$$

$$x_v = (0, -r\ \sin(u)\sin(v), r\ \sin(u)\cos(v))$$

$$E = r^2,\quad F = 0,\quad G = r^2\ \sin(u)^2$$

$$\mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = r^2 du^2 + r^2\ \sin(u)^2 dv^2.$$

Nessun aperto della sfera, per quanto piccolo, è isometrico ad un aperto del piano. Questo fatto verrà dimostrato nel paragrafo 37; esso corrisponde al fatto ben noto in cartografia che ogni rappresentazione cartografica della superficie terrestre necessariamente introduce qualche distorsione.

4. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una varietà 1-dimensionale e $\mathbf{v}$ un campo vettoriale su α tale che $\mathbf{v}(u) \neq \mathbf{0}$ per ogni $u \in \mathbf{J}$. La corrispondente *superficie rigata* S è definita vettorialmente come:

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{v}(u)$$

al variare di (u,v) in un conveniente aperto U di $\mathbf{J} \times \mathsf{R}$ sul quale x definisca una parametrizzazione (cfr. esempio 25.6(5)). Quindi una parametrizzazione $x(u,v)$ definisce una superficie rigata se le sue componenti sono polinomi di primo grado in uno dei parametri. Si ha:

$$x_u = \alpha'(u) + v\mathbf{v}'(u), \quad x_v = \mathbf{v}(u).$$

Supponiamo che α sia a velocità unitaria e che $\|\mathbf{v}\| = 1$ identicamente. Allora si ha $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}' = 0$ identicamente e:

$$E = 1 + 2v\alpha'(u) \bullet \mathbf{v}'(u) + v^2\|\mathbf{v}'\|^2, \quad F = \alpha'(u) \bullet \mathbf{v}(u), \quad G = 1.$$

Se in particolare $\mathbf{v} = \alpha'$, cioè S è la *rigata delle tangenti* (o *rigata tangente*) di α allora $\|\mathbf{v}'\|^2 = \|\alpha''\|^2 = \kappa^2$, dove κ è la curvatura di α e quindi:

$$E = 1 + v^2\kappa^2, \quad F = 1, \quad G = 1$$

$$\mathbf{I}(x_u \mathrm{d}u + x_v \mathrm{d}v) = (1 + v^2\kappa^2)\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2.$$

Osserviamo che se consideriamo una curva piana $\beta : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^2$ a velocità unitaria avente curvatura κ, uguale alla curvatura di α, la rigata delle tangenti di β è un aperto A del piano, e la sua prima forma fondamentale, rispetto alla parametrizzazione

$$y(u,v) = \beta(u) + v\beta'(u),$$

coincide con quella di S. Dunque S ed A sono localmente isometriche, e quindi S è localmente sviluppabile.

Il cilindro Γ considerato nell'esempio 2 è una superficie rigata. Abbiamo verificato che Γ è localmente sviluppabile pur non essendo una rigata tangente.

5. Come casi limite di superfici rigate abbiamo i *coni* (cfr. esempio 25.6(5)). Sia C il cono di vertice $\mathbf{p} \in \mathsf{R}^3$ di equazioni:

$$x(u,v) = \mathbf{p} + v\mathbf{v}(u)$$

dove (u,v) variano in un opportuno aperto del semipiano $v > 0$ e $\mathbf{v}(u) \neq \mathbf{0}$ per ogni u. Quindi una parametrizzazione $x(u,v)$ definisce un cono se le sue componenti sono polinomi di primo grado in uno dei parametri tali che i termini costanti siano costanti anche rispetto all'altro parametro.

Possiamo supporre $\|\mathbf{v}\| = 1$, cioè che la curva $\mathbf{v}$ sia contenuta nella sfera $\mathbf{S}^2$. Poiché si ha:

$$x_u = v\mathbf{v}', \quad x_v = \mathbf{v}$$

affinché x sia un'immersione è necessario che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ siano ovunque indipendenti e, poiché sono ortogonali tra loro, ciò equivale all'essere $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$ ovunque. Possiamo quindi supporre $\|\mathbf{v}'\| = 1$, cioè che $\mathbf{v}$ abbia velocità unitaria. Abbiamo:

$$E = v^2, \ F = 0, \ G = 1$$

$$\mathbf{I}(x_u du + x_v dv) = v^2 du^2 + dv^2.$$

Il cono C può essere localmente riparametrizzato mediante il cambiamento di variabili $x = v\cos(u)$, $y = v\sin(u)$. Nelle nuove coordinate locali la prima forma fondamentale diventa $\mathbf{I}(dx, dy) = dx^2 + dy^2$. Quindi C è localmente sviluppabile.

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia

$$x : U \to S \subset \mathbb{R}^3$$

una parametrizzazione della superficie elementare S. Utilizzando il diffeomorfismo x, la prima forma fondamentale $\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(-,-)$ su ciascuno spazio tangente $T_{\mathbf{x}}(S)$ si trasporta agli spazi tangenti $T_{\mathbf{u}}(U)$, sui quali vengono in tal modo definiti dei prodotti scalari. Pertanto la geometria intrinseca di S, dipendendo solo dalla prima forma fondamentale, può essere studiata direttamente su U. In particolare la lunghezza delle curve, gli angoli, le aree possono essere calcolati su U utilizzando le formule [33.3],...,[33.6]. I prodotti scalari su $T_{\mathbf{u}}(U)$ variano con $\mathbf{u}$, e i coefficienti E, F, G della matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ che li definisce rispetto alla base canonica variabile $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ sono funzioni differenziabili su U. Per arrivare a ottenere questi dati non è però necessario disporre di una parametrizzazione: in altre parole nulla ci impedisce di assegnare a priori prodotti scalari in ogni spazio tangente $T_{\mathbf{u}}(U)$ di un aperto U di $\mathbb{R}^2$ in modo che i coefficienti della matrice che li definisce rispetto alla base canonica siano funzioni differenziabili su U. In questo modo si definirà una "geometria intrinseca" su U la quale non proviene necessariamente, per lo meno a priori, da alcuna parametrizzazione di una superficie di $\mathbb{R}^N$.

Più in generale consideriamo una superficie differenziabile S e supponiamo assegnato su ogni spazio tangente $T_x(S)$ un prodotto scalare in modo che in ogni carta locale gli elementi della matrice che lo definisce siano funzioni differenziabili. Questo dato si dice *metrica riemanniana* su S. La superficie S dotata di una metrica riemanniana è detta *superficie riemanniana.*

Siano S e $\hat{S}$ due superfici riemanniane. Un diffeomorfismo $f : S \to \hat{S}$ è detto *isometria* se per ogni $x \in S$ il differenziale $f_{*x} : T_x(S) \to T_{f(x)}(\hat{S})$ è un'isometria di spazi vettoriali euclidei.

33.6 *Esempi*

1. Consideriamo la parametrizzazione

$$x : \mathsf{R}^2 \to \mathbf{S}^2 \subset \mathsf{R}^3$$

$$x(u,v) = \frac{1}{1+\|\mathbf{u}\|^2}\,(2u, 2v, u^2+v^2-1)$$

inversa della proiezione stereografica:

$$\pi_+ : \mathbf{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathsf{R}^2$$

$$\pi_+(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Calcolando si trova:

$$E = G = \frac{4}{(1+\|\mathbf{u}\|^2)^2}, \quad F = 0$$

e quindi la prima forma fondamentale ha la seguente espressione su $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}^2)$:

$$\mathbf{I}(du, dv) = \frac{4}{(1+\|\mathbf{u}\|^2)^2}\,(du^2+dv^2).$$

Questa metrica riemanniana in R^2 verrà chiamata *metrica stereografica*. Rispetto ad essa le semirette di origine $\mathbf{0}$, essendo le immagini dei semimeridiani, hanno lunghezza π. Verifichiamolo calcolando la lunghezza della semiretta $\alpha(t) = \mathbf{m}t$, $t > 0$, dove $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ è un versore:

$$\int_0^\infty \mathbf{I}(\alpha'(t))\mathrm{d}t = 4\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 2\left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg}(t)\right)\Bigg|_0^\infty = \pi.$$

Invece le immagini dei paralleli di $\mathbf{S}^2$ sono le circonferenze di centro l'origine. La loro lunghezza stereografica, all'aumentare del raggio, diventa sempre più piccola perché uguaglia quella di paralleli in $\mathbf{S}^2$ di latitudine sempre più alta. Verifichiamo anche questo fatto calcolando la lunghezza stereografica della circonferenza di raggio r:

$$\alpha(t) = r\cos(t)\mathbf{e}_1 + r\sin(t)\mathbf{e}_2, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

La lunghezza di α è:

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \mathbf{I}(\alpha'(t))\mathrm{d}t = \frac{8\pi r^2}{(1+r^2)^2}$$

la quale evidentemente tende a 0 al tendere di r a ∞. Si noti che prendendo $r = 1$ si ottiene $l(\alpha) = 2\pi$, la lunghezza dell'equatore di $\mathbf{S}^2$.

Inoltre è facile calcolare che, dati comunque vettori $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}^2)$, l'angolo che essi formano rispetto alla metrica euclidea uguaglia l'angolo che essi formano rispetto alla metrica stereografica. Ciò è quanto dire che la proiezione stereografica π_+ preserva gli angoli tra vettori (e infatti π_+ è un'applicazione conforme; cfr. esercizi 1 e 2).

2. Un esempio interessante di metrica riemanniana si ottiene sul disco aperto unitario $D = \{\mathbf{u} \in \mathsf{R}^2 : \|\mathbf{u}\| < 1\}$ di R^2 modificando opportunamente la metrica stereografica. Precisamente per ogni $\mathbf{u} \in D$ consideriamo su $T_{\mathbf{u}}(D)$:

$$\mathbf{I}(du, dv) = \frac{4}{(1 - \|\mathbf{u}\|^2)^2}\,(du^2 + dv^2).$$

La metrica riemanniana così definita su D si dice *metrica iperbolica*. D dotato di questa metrica si chiama *disco iperbolico* e si indica con $\mathcal{D}$.

Un'altra metrica riemanniana strettamente collegata alla precedente si introduce sul semipiano $H = \{\mathbf{u} = (u, v) : v > 0\}$ ponendo in $T_{\mathbf{u}}(H)$:

$$\mathbf{I}(du, dv) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}\cdot$$

H, dotato di questa metrica, si chiama *semipiano di Poincaré* e si indica con $\mathcal{H}$. La sua relazione con il disco iperbolico sta nel fatto che essi sono isometrici, cioè esiste un'isometria:

$$\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{D}.$$

L'isometria τ è data, in notazioni complesse, da:

$$\tau(z) = \tau(u + \mathrm{i}v) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\cdot$$

È ovvio che τ è un'applicazione differenziabile. Nell'esempio 5.4(14) abbiamo verificato che τ è un omeomorfismo e quindi, poiché anche la sua inversa è differenziabile, segue che τ è un diffeomorfismo. Ometteremo di verificare che τ è un'isometria perché non la utilizzeremo nel seguito. Nei paragrafi 38 e 39 ritorneremo su questi esempi.

Esercizi

1. Siano $S \subset \mathsf{R}^N$ e $\hat{S} \subset \mathsf{R}^M$ due superfici differenziabili (più in generale siano S e $\hat{S}$ due superfici riemanniane). Un'*applicazione conforme* è un morfismo

$$f : S \to \hat{S}$$

tale che esista una funzione differenziabile $\mu > 0$ su S tale che per ogni $\mathbf{x} \in S$ si abbia

$$\mathbf{I}_{f(\mathbf{x})}(f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{V}), f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{W})) = \mu(\mathbf{x})\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$$

per ogni $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} \in T_{\mathbf{x}}(S)$. Se $\mu(\mathbf{x}) = 1$ per ogni $\mathbf{x} \in S$ allora f si dice un'*isometria locale*.
Dimostrare che:

(a) ogni isometria è un'isometria locale;

(b) se f è un'applicazione conforme, f preserva gli angoli, cioè per ogni $\mathbf{x} \in S$ e per ogni $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} \in T_{\mathbf{x}}(S)$ l'angolo convesso tra $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ è uguale all'angolo convesso tra $f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{V})$ e $f_{*\mathbf{x}}(\mathbf{W})$.

2. Dimostrare che la proiezione stereografica $\pi_+ : \mathsf{S}^2\backslash\{(0,0,1)\} \to \mathsf{R}^2$ è un'applicazione conforme.

34 Superfici di R^3: operatore forma e seconda forma fondamentale

In questo paragrafo studieremo la geometria locale delle superfici di R^3. A tale scopo considereremo una superficie elementare $S \subset \mathsf{R}^3$, assegnata mediante una parametrizzazione $x : U \to \mathsf{R}^3$, dove U è un aperto di R^2. Manterremo le notazioni del paragrafo 33.

Nel seguito considereremo campi vettoriali sulla superficie S considerata come sottoinsieme di R^3. In quest'accezione un campo vettoriale $\mathbf{V}$ su S è il dato di un vettore $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in \mathsf{R}^3 = T_{\mathbf{x}}(\mathsf{R}^3)$ per ogni $\mathbf{x} \in S$. Se $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}(S)$ per ogni $\mathbf{x} \in S$ parleremo di *campo vettoriale tangente ad S*. Diremo che il *campo vettoriale* $\mathbf{V}$ *su S è differenziabile* se le componenti $V_1(\mathbf{x})$, $V_2(\mathbf{x})$, $V_3(\mathbf{x})$ di $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{x} = x(\mathbf{u})$, sono funzioni differenziabili di $\mathbf{u}$. Dato $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}(S)$, applicando $\mathbf{w}$ alle funzioni V_1, V_2, V_3 componenti di $\mathbf{V}$ si ottiene un vettore

$$\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{V}) = (\mathbf{w}(V_1), \mathbf{w}(V_2), \mathbf{w}(V_3)) \in \mathsf{R}^3 = T_{\mathbf{x}}(\mathsf{R}^3)$$

che si dice *derivata di* $\mathbf{V}$ *rispetto a* $\mathbf{w}$, e che indichiamo anche con $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{V}$ (omettendo le parentesi). Un modo equivalente di definire la derivata è il seguente. Si consideri una curva differenziabile $\alpha : \mathbf{J} \to S$ adattata a $\mathbf{w}$ e la *restrizione* $\alpha^*(\mathbf{V})$ *di* $\mathbf{V}$ *ad* α, cioè il campo vettoriale su α definito da $\alpha^*(\mathbf{V})(t) = \mathbf{V}(\alpha(t))$; allora:

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{V} = \alpha^*(\mathbf{V})'(0).$$

Si osservi che

$$\nabla_{x_u}(\mathbf{V}) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial u}(\mathbf{u}),\ \frac{\partial V_2}{\partial u}(\mathbf{u}),\ \frac{\partial V_3}{\partial u}(\mathbf{u})\right)$$

$$\nabla_{x_v}(\mathbf{V}) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial v}(\mathbf{u}),\ \frac{\partial V_2}{\partial v}(\mathbf{u}),\ \frac{\partial V_3}{\partial v}(\mathbf{u})\right).$$

La derivata di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ su S può essere definita anche rispetto ad un campo vettoriale $\mathbf{W}$ tangente ad S. Essa dà luogo a un nuovo campo vettoriale che denoteremo $\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}$, che è definito nel modo ovvio, e cioè come:

$$(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V})(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{W}(\mathbf{x})}(\mathbf{V}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in S.$$

Se $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ sono differenziabili anche $\nabla_W\mathbf{V}$ è un campo vettoriale differenziabile. La derivata gode delle seguenti proprietà che seguono facilmente dalle proprietà dei vettori tangenti:

$$\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}_1 + \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}_2,$$

$$\nabla_{\mathbf{U}+\mathbf{W}}(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} + \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V},$$

$$\nabla_{F\mathbf{W}}\mathbf{V} = F(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}), \tag{34.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{W}}(F\mathbf{V}) = (\mathbf{W}F)\mathbf{V} + F\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V},$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2) = (\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}_1) \bullet \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \bullet (\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V}_2),$$

per ogni scelta di campi vettoriali differenziabili $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ con $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ tangenti a S, e di una funzione differenziabile $F : S \rightarrow \mathsf{R}$.

Alla carta locale x resta associato un campo di versori su S:

$$\mathbf{N} = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}\,.$$

Per ogni $\mathbf{x} = x(\mathbf{u}) \in S$ il versore $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ è perpendicolare a $T_{\mathbf{x}}(S)$, e pertanto $\mathbf{N}$ è detto *campo di versori normali a S*. Le coordinate di $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ sono funzioni differenziabili di $\mathbf{u} = (u, v)$ e quindi $\mathbf{N}$ è un campo vettoriale differenziabile. Per ogni $\mathbf{u} \in U$ i vettori $x_u(\mathbf{u})$, $x_v(\mathbf{u})$, $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ costituiscono una base di R^3 positivamente orientata (si noti che in generale *non* si tratta di una base ortonormale perché $x_u(\mathbf{u})$ e $x_v(\mathbf{u})$ non sono versori né sono tra loro perpendicolari). Ponendo

$$\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})$$

si definisce un morfismo

$$\gamma : S \rightarrow \mathbf{S}^2$$

di S nella sfera unitaria di R^3, che si dice *applicazione di Gauss* di S. Quest'applicazione mette in relazione la geometria di S con quella di $\mathbf{S}^2$. Se ad esempio S è un aperto coordinatizzato di $\mathbf{S}^2$ allora γ è l'inclusione di S in $\mathbf{S}^2$; in generale γ dà informazioni sulla geometria locale di S e su quanto S si discosta dall'essere una sfera.

Per studiare localmente l'applicazione di Gauss dobbiamo individuarne il differenziale. Poiché per ogni $\mathbf{x} \in S$ si ha

$$T_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{S}^2) = \mathbf{N}(\mathbf{x})^{\perp} = T_{\mathbf{x}}(S)$$

il differenziale $\gamma_{*\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}(S) \rightarrow T_{\gamma(\mathbf{x})}(\mathbf{S}^2)$ può interpretarsi come un operatore su $T_{\mathbf{x}}(S)$:

$$\gamma_{*\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}(S) \rightarrow T_{\mathbf{x}}(S).$$

34.1 PROPOSIZIONE $\gamma_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$ *per ogni* $\mathbf{x} \in S$ *e per ogni* $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S)$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} \in T_{\mathbf{x}}(S)$ per ogni $\mathbf{x} \in S$ e per ogni $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S)$. Infatti poiché $\mathbf{N} \bullet \mathbf{N} = 1$ si ha:

$$0 = \mathbf{v}(\mathbf{N} \bullet \mathbf{N}) = 2\mathbf{N} \bullet \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$$

e pertanto il vettore $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$, essendo perpendicolare a $\mathbf{N}$, è tangente ad S in $\mathbf{x}$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva adattata a $\mathbf{v}$. La curva $\gamma \cdot \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{S}^2$ è definita da $(\gamma \cdot \alpha)(t) = \mathbf{N}(\alpha(t))$ cosicché:

$$\gamma_{*\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}(\gamma \cdot \alpha)}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}(\alpha(t))}{\mathrm{d}t}(0) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}. \quad \blacksquare$$

Dalla dimostrazione della proposizione segue che ponendo:

$$\mathrm{L}(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S)$$

resta definito un operatore lineare:

$$\mathrm{L} : T_{\mathbf{x}}(S) \to T_{\mathbf{x}}(S).$$

L è detto *operatore forma* o anche *operatore di Weingarten*. Il nome proviene dal fatto che L(v) descrive la variazione infinitesima del versore normale nella direzione $\mathbf{v}$, e tale variazione dipende unicamente dalla forma della superficie S in un intorno di $\mathbf{x}$. Il segno – nella definizione di L ha l'effetto di eliminare molti segni – nei calcoli successivi.

La proposizione 34.1 può venire riformulata nell'identità seguente:

$$\gamma_{*\mathbf{x}} = -\mathrm{L}$$

cioè l'opposto dell'operatore forma su $T_{\mathbf{x}}(S)$ coincide con $\gamma_{*\mathbf{x}}$, il differenziale dell'applicazione di Gauss in $\mathbf{x}$.

Si osservi che L dipende dalla parametrizzazione x perché dipende dal versore normale: se $y : V \to \mathsf{R}^3$ è una riparametrizzazione di x che cambia l'orientazione, $\mathbf{N}$ cambia di segno e quindi anche L cambia di segno. Se invece y non cambia l'orientazione allora si mantengono invariati sia $\mathbf{N}$ che L. Una proprietà fondamentale dell'operatore forma è descritta dalla proposizione seguente.

34.2 PROPOSIZIONE *Per ogni* $\mathbf{x} \in S$ *l'operatore forma* $\mathrm{L} : T_{\mathbf{x}}(S) \to T_{\mathbf{x}}(S)$ *è un operatore simmetrico (autoaggiunto) rispetto alla prima forma fondamentale, cioè si ha:*

$$\mathbf{I}(\mathrm{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathrm{L}(\mathbf{w})) \quad \textit{per ogni } \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}(S).$$

Dimostrazione. Poiché $\{x_u, x_v\}$ è una base di $T_{\mathbf{x}}(S)$, è sufficiente dimostrare che

$$\mathbf{I}(\mathrm{L}(x_u), x_v) = \mathbf{I}(x_u, \mathrm{L}(x_v)).$$

Allo scopo osserviamo che, essendo $\mathbf{N} \bullet x_v = 0 = \mathbf{N} \bullet x_u$, si ha:

$$0 = x_u(\mathbf{N} \bullet x_v) = (\nabla_{x_u}\mathbf{N}) \bullet x_v + \mathbf{N} \bullet x_{vu}$$

e

$$0 = x_v(\mathbf{N} \bullet x_u) = (\nabla_{x_v}\mathbf{N}) \bullet x_u + \mathbf{N} \bullet x_{uv}$$

dove abbiamo posto:

$$x_{uv} = \nabla_{x_u} x_v, \quad x_{vu} = \nabla_{x_v} x_u.$$

Pertanto, poiché $x_{uv} = x_{vu}$ per l'indipendenza dall'ordine di derivazione:

$$\mathbf{I}(\mathrm{L}(x_u), x_v) = (-\nabla_{x_u}\mathbf{N})\bullet x_v = \mathbf{N}\bullet x_{vu} = \mathbf{N}\bullet x_{uv} = (-\nabla_{x_v}\mathbf{N})\bullet x_u = \mathbf{I}(x_u, \mathrm{L}(x_v)). \blacksquare$$

La forma bilineare su $T_{\mathbf{x}}(S)$:

$$\mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{I}(\mathrm{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \mathrm{L}(\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} \bullet \mathbf{w} \qquad [34.2]$$

è detta *seconda forma fondamentale*. Anche $\mathbf{II}(-,-)$, come L, dipende dal segno di $\mathbf{N}$ e quindi dalla parametrizzazione x.

34.3 COROLLARIO *Per ogni* $\mathbf{x} \in S$ *la seconda forma fondamentale* $\mathbf{II}(-,-)$ *è una forma bilineare simmetrica su* $T_{\mathbf{x}}(S)$.

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}(S)$ si ha:

$$\mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{I}(\mathrm{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathrm{L}(\mathbf{w})) = \mathbf{I}(\mathrm{L}(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = \mathbf{II}(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \blacksquare$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ di $T_{\mathbf{x}}(S)$ sono:

$$\mathcal{L} = \mathbf{II}(x_u, x_u) = (-\nabla_{x_u}\mathbf{N}) \bullet x_u = \mathbf{N} \bullet x_{uu}$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{II}(x_u, x_v) = (-\nabla_{x_u}\mathbf{N}) \bullet x_v = \mathbf{N} \bullet x_{uv}$$

$$\mathcal{N} = \mathbf{II}(x_v, x_v) = (-\nabla_{x_v}\mathbf{N}) \bullet x_v = \mathbf{N} \bullet x_{vv}$$

dove si è posto:

$$x_{uu} = \nabla_{x_u} x_u; \quad x_{vv} = \nabla_{x_v} x_v, \quad x_{uv} = \nabla_{x_u} x_v, \quad x_{vu} = \nabla_{x_v} x_u.$$

La matrice della seconda forma fondamentale è:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \qquad [34.3]$$

e si ha:

$$\mathbf{II}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{L}ac + \mathcal{M}(ad + bc) + \mathcal{N}bd$$

per ogni $\mathbf{v} = ax_u + bx_v$, $\mathbf{w} = cx_u + dx_v \in T_\mathbf{x}(S)$. I coefficienti $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sono funzioni di classe $C^{(\infty)}$ su S.

35 Curvature

Manteniamo le notazioni del paragrafo precedente. La seconda forma fondamentale e l'operatore forma contengono molte informazioni sulla geometria della superficie elementare $S \subset \mathsf{R}^3$ nell'intorno del suo punto $\mathbf{x}$. Per rendercene conto consideriamo un qualsiasi piano di R^3 contenente $\mathbf{x}$ e parallelo al vettore $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. Un *piano H* siffatto si dice *normale a S in* $\mathbf{x}$.

35.1 LEMMA *Per ogni piano normale H a S in $\mathbf{x}$ l'intersezione $H \cap S$ è una varietà di dimensione* 1 *in un intorno di* $\mathbf{x}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in U$ tale che $\mathbf{x} = x(\mathbf{u})$. Sia $aX_1 + bX_2 + cX_3 + d = 0$ un'equazione cartesiana di H e consideriamo la funzione $h \cdot x : U \to \mathsf{R}$ ottenuta componendo la funzione $h : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}$, $h(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$, con la parametrizzazione x. Poiché $\mathrm{Im}(x_{*\mathbf{u}}) = T_\mathbf{x}(S) \not\subset H = N(h_{*\mathbf{x}})$, si ha $(h \cdot x)_{*\mathbf{u}} \neq 0$ e quindi $\mathbf{u}$ è un punto regolare dell'applicazione $h \cdot x$. Pertanto $(h \cdot x)^{-1}(0)$ è una sottovarietà di dimensione 1 di U in un intorno di $\mathbf{u}$ (teorema 26.2). Poiché x è un'immersione anche $x((h \cdot x)^{-1}(0)) = H \cap S$ è una sottovarietà di dimensione 1. ■

Dal lemma segue che per ogni H piano normale a S in $\mathbf{x}$ esiste una curva a velocità unitaria $\alpha_H : \mathbf{J} \to S$ che è una parametrizzazione di $H \cap S$ in un intorno di $\mathbf{x}$. Una curva siffatta verrà detta *sezione normale di S in* $\mathbf{x}$ (fig. 35.1). Al variare di H le sezioni normali descrivono un intorno di $\mathbf{x} \in S$ ed è evidente che le loro proprietà geometriche sono strettamente legate a quelle di S.

35.2 DEFINIZIONE *Sia $\mathbf{e} \in T_\mathbf{x}(S)$ un versore tangente alla superficie S nel punto* $\mathbf{x}$. *La* curvatura normale *di S in $\mathbf{x}$ nella direzione $\langle \mathbf{e} \rangle$ è:*

$$\kappa(\mathbf{e}) := (-\nabla_\mathbf{e}\mathbf{N}) \bullet \mathbf{e};$$

equivalentemente:

$$\kappa(\mathbf{e}) = \mathrm{L}(\mathbf{e}) \bullet \mathbf{e} = \mathbf{II}(\mathbf{e}, \mathbf{e}).$$

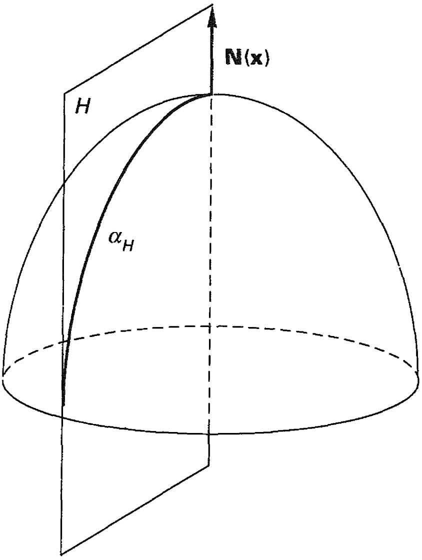


Figura 35.1

Si noti che $\kappa(\mathbf{e}) = \kappa(-\mathbf{e})$ e quindi la definizione è ben posta. Il segno della curvatura normale, come quello della seconda forma fondamentale, dipende dal segno di $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ e quindi dalla parametrizzazione x. Per definizione $\kappa(\mathbf{e})$ è la componente secondo $-\mathbf{e}$ della derivata di $\mathbf{N}$ rispetto a $\mathbf{e}$. Abbiamo anche la seguente interpretazione geometrica di $\kappa(\mathbf{e})$:

35.3 PROPOSIZIONE *Sia H un piano normale a S in* $\mathbf{x}$. *La curvatura della sezione normale α_H di S in $\mathbf{x}$ è uguale in valore assoluto alla curvatura normale $\kappa(\alpha'_H)$ di S in $\mathbf{x}$ nella direzione $\langle\alpha'_H\rangle$. Se $\kappa(\alpha'_H)\neq 0$ allora α_H volge la concavità verso* $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ *oppure no a seconda che $\kappa(\alpha'_H)$ sia positiva o negativa.*

Dimostrazione. Poniamo $\alpha = \alpha_H$. Poiché $\alpha'(t)$ è perpendicolare a $\mathbf{N}(t)$ si ha:

$$0 = (\mathbf{N} \bullet \alpha')'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}\mathbf{N} \bullet \alpha'(t) + \mathbf{N}(t) \bullet \alpha''(t)$$

e quindi, essendo $\alpha''(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$, dove $\mathbf{n}(t)$ è il versore normale e $\kappa(t)$ la curvatura di α in t:

$$\kappa(\alpha') = \mathbf{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = -\nabla_{\alpha'(t)}\mathbf{N} \bullet \alpha'(t) = \mathbf{N}(t) \bullet \alpha''(t) = \mathbf{N}(t) \bullet (\kappa(t)\mathbf{n}(t)) = \pm\kappa(t).$$

L'ultima affermazione segue dal fatto che $\kappa(t)\mathbf{n}(t)$ è rivolto verso la concavità di α. ■

Quindi la curvatura normale di S in $\mathbf{x}$ nella direzione $\langle\mathbf{e}\rangle$ è uguale in modulo alla curvatura della sezione normale relativa al piano normale di giacitura $\langle\mathbf{N}(\mathbf{x}), \mathbf{e}\rangle$. Poniamo:

$$\mathbf{S}^1_{\mathbf{x}}(S) = \{\mathbf{e} \in T_{\mathbf{x}}(S) : \|\mathbf{e}\| = 1\}.$$

La curvatura normale è una funzione

$$\kappa : \mathrm{S}^1_{\mathbf{x}}(S) \to \mathsf{R}.$$

i cui valori $\kappa(\mathbf{e})$, al variare di $\mathbf{e} \in \mathrm{S}^1_{\mathbf{x}}(S)$, sono le curvature di tutte le sezioni normali.

Poiché $\mathrm{S}^1_{\mathbf{x}}(S)$ è compatto e κ è continua, κ assume un valore massimo e un valore minimo, che si chiamano *curvature principali*; le direzioni in cui κ assume le curvature principali si dicono *direzioni principali*. Se in particolare κ è costante si ha una sola curvatura principale e tutte le direzioni sono principali; in questo caso il *punto* $\mathbf{x}$ è detto *ombelicale*.

35.4 TEOREMA (Rodriguez) *Le curvature principali sono gli autovalori di* L. *Se* $\mathbf{x}$ *è un punto ombelicale l'operatore* L *è l'omotetia di fattore la curvatura principale* k, *cioè è la moltiplicazione per* k.

Se $\mathbf{x}$ *non è un punto ombelicale ci sono esattamente due direzioni principali, che sono gli autospazi di* L *e sono ortogonali tra loro.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di $T_{\mathbf{x}}(S)$ tale che $\mathbf{e}_1$ sia una direzione principale, e quindi $\kappa(\mathbf{e}_1) = k_1$ sia una curvatura principale. Poniamo $k_2 = \kappa(\mathbf{e}_2) = \mathrm{L}(\mathbf{e}_2) \bullet \mathbf{e}_2$ e $k_{12} = \mathrm{L}(\mathbf{e}_1) \bullet \mathbf{e}_2 = \mathrm{L}(\mathbf{e}_2) \bullet \mathbf{e}_1$. Allora per ogni $\theta \in \mathsf{R}$ si ha:

$$\kappa(\theta) := \kappa(\mathbf{e}_1 \cos(\theta) + \mathbf{e}_2 \sin(\theta)) = \mathrm{L}(\mathbf{e}_1 \cos(\theta) + \mathbf{e}_2 \sin(\theta)) \bullet (\mathbf{e}_1 \cos(\theta) + \mathbf{e}_2 \sin(\theta)) =$$

$$= \cos(\theta)^2 k_1 + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) k_{12} + \sin(\theta)^2 k_2$$

e

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\theta} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)(k_2 - k_1) + 2(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) k_{12}.$$

Poiché $\kappa(0) = \kappa(\mathbf{e}_1)$ è un valore stazionario per $\kappa(\theta)$, si ha

$$0 = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\theta}(0) = 2k_{12}.$$

Segue che anche:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2k_{12} = 0$$

e quindi anche $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa(\mathbf{e}_2)$ è un valore stazionario per $\kappa(\theta)$, e cioè $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale e k_2 è una curvatura principale. Ora osserviamo che:

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_1) = (\mathrm{L}(\mathbf{e}_1) \bullet \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathrm{L}(\mathbf{e}_1) \bullet \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = k_1 \mathbf{e}_1$$

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_2) = (\mathrm{L}(\mathbf{e}_2) \bullet \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathrm{L}(\mathbf{e}_2) \bullet \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = k_2 \mathbf{e}_2$$

e quindi $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono autovettori di L con autovalori associati k_1 e k_2 rispettivamente. Ora la conclusione segue facilmente: se $k_1 = k_2$ allora L è la moltiplicazione per k e quindi $\kappa(\mathbf{e}) = \mathrm{L}(\mathbf{e})\bullet\mathbf{e} = k$ per ogni **e**: in questo caso **x** è un punto ombelicale. Se invece $k_1 \neq k_2$ allora le curvature principali k_1 e k_2 sono autovalori di L e le corrispondenti direzioni principali sono autospazi di L e sono tra loro ortogonali. Non ci sono altre direzioni principali perché nella dimostrazione ogni direzione principale può essere scelta come $\langle\mathbf{e}_1\rangle$ e quindi è un autospazio di L. ■

Per la proposizione 35.3 le direzioni principali corrispondono alle sezioni normali le cui curvature assumono valori massimo o minimo. Conseguenza notevole del teorema di Rodriguez è che tali direzioni sono tra loro perpendicolari, qualunque sia la superficie S, a meno che il punto **x** non sia ombelicale. Nel considerare una sezione normale di S in **x** si può supporre, dopo averne eventualmente cambiato l'orientazione, che essa sia orientata in modo che il suo versore normale coincida con $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. Per semplicità ci riferiremo a sezioni normali siffatte nell'enunciato del seguente immediato corollario:

35.5 COROLLARIO **x** *è un punto ombelicale di S se e solo se tutte le sezioni normali di S in* **x** *hanno la stessa curvatura in* **x**. *Se* **x** *non è un punto ombelicale, le curvature massima e minima delle sezioni normali vengono ottenute in corrispondenza a piani normali a S tra loro ortogonali.*

Segue ad esempio dal corollario precedente che ogni punto di una sfera di raggio r è un punto ombelicale perché tutte le sezioni normali sono circonferenze di raggio costante uguale a r: la curvatura principale in questo caso è uguale a $\pm\frac{1}{r}$ (in dipendenza del segno di **N**; cfr. anche l'esempio 35.9(3)).

Per mezzo dell'operatore forma e delle curvature principali si definiscono due importanti grandezze relative al punto $\mathbf{x} \in S$.

35.6 DEFINIZIONE *La* curvatura gaussiana *di S in* **x** *è:*

$$K(\mathbf{x}) = \det(\mathrm{L}) = k_1 k_2$$

dove k_1 e k_2 sono le curvature principali di S in **x**. *La* curvatura media *di S in* **x** *è:*

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{L}) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2);$$

Le definizioni precedenti sono valide anche nel caso di un punto ombelicale se si intende $k_1 = k_2 = k$. Si ha in tal caso $K(\mathbf{x}) = k^2$, $H(\mathbf{x}) = k$. In particolare in un punto ombelicale si ha $K(\mathbf{x}) \geq 0$. Un punto ombelicale tale che $K(\mathbf{x}) = 0$ si dice *planare*.

Nel caso della sfera di raggio r troviamo $K(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2}$ per ogni **x** (cfr. esempio 35.9(3)).

Si noti che la curvatura gaussiana, a differenza della curvatura media, non cambia di segno se cambia il segno di **N**, cioè se si riparametrizza S cambiandone l'orientazione. La curvatura gaussiana si interpreta geometricamente come il determinante del differenziale dell'applicazione di Gauss, cioè

$$K(\mathbf{x}) = \det(\gamma_{*\mathbf{x}}).$$

Per calcolare esplicitamente $K(\mathbf{x})$ e $H(\mathbf{x})$ per mezzo dei coefficienti delle forme fondamentali denotiamo con

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice di L rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ di $T_{\mathbf{x}}(S)$. Dalla [34.2] segue che:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = {}^{t}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad [35.1]$$

e pertanto:

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} \, . \qquad [35.2]$$

Inoltre; moltiplicando ambo i membri della [35.1] a destra per

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{1}$$

e prendendo le trasposte, deduciamo l'identità:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} . \qquad [35.3]$$

Calcolando la traccia del secondo membro si ottiene la formula:

$$H(\mathbf{x}) = \frac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{2(EG - F^2)} \qquad [35.4]$$

Se $H = 0$ identicamente allora S è detta una *superficie minima.*

Il segno di $K(\mathbf{x})$ è già sufficiente a dare una distinzione qualitativa tra i punti delle superfici:

35.7 DEFINIZIONE *Un* punto $\mathbf{x} \in S$ *si dice* ellittico *se* $K(\mathbf{x}) > 0$, *o equivalentemente se* $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 > 0$ *in* $\mathbf{x}$. *Il punto* $\mathbf{x}$ *si dice* iperbolico *se* $K(\mathbf{x}) < 0$, *cioè se* $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 < 0$ *in* $\mathbf{x}$. *Se* $K(\mathbf{x}) = 0$, *equivalentemente se* $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = 0$ *in* $\mathbf{x}$, *allora* $\mathbf{x}$ *è detto punto* parabolico.

$\mathbf{x} \in S$ è ellittico se e solo se tutte le sezioni normali volgono la concavità dalla stessa parte in $\mathbf{x}$; quindi in un intorno di $\mathbf{x}$ la superficie S non attraversa il piano tangente. L'opposto avviene per un punto iperbolico e quindi ogni intorno per quanto piccolo di $\mathbf{x}$ in S attraversa il piano tangente. Un punto parabolico è caratterizzato dal fatto che il minimo delle curvature delle sezioni normali è 0 (fig. 35.2).

35.8 PROPOSIZIONE *Sia* $\mathbf{x} \in S$. *Se* S *contiene un segmento aperto di una retta passante per* $\mathbf{x}$, *allora* $K(\mathbf{x}) \leq 0$.

Dimostrazione. Il segmento di retta è una sezione normale e ha curvatura 0 in $\mathbf{x}$. Pertanto non può essere $K(\mathbf{x}) > 0$ perché ciò implica che tutte le sezioni normali in $\mathbf{x}$ hanno curvatura non nulla. ■

35.9 *Esempi*

1. Consideriamo il piano di equazioni parametriche

$$x(u, v) = (u, v, 0).$$

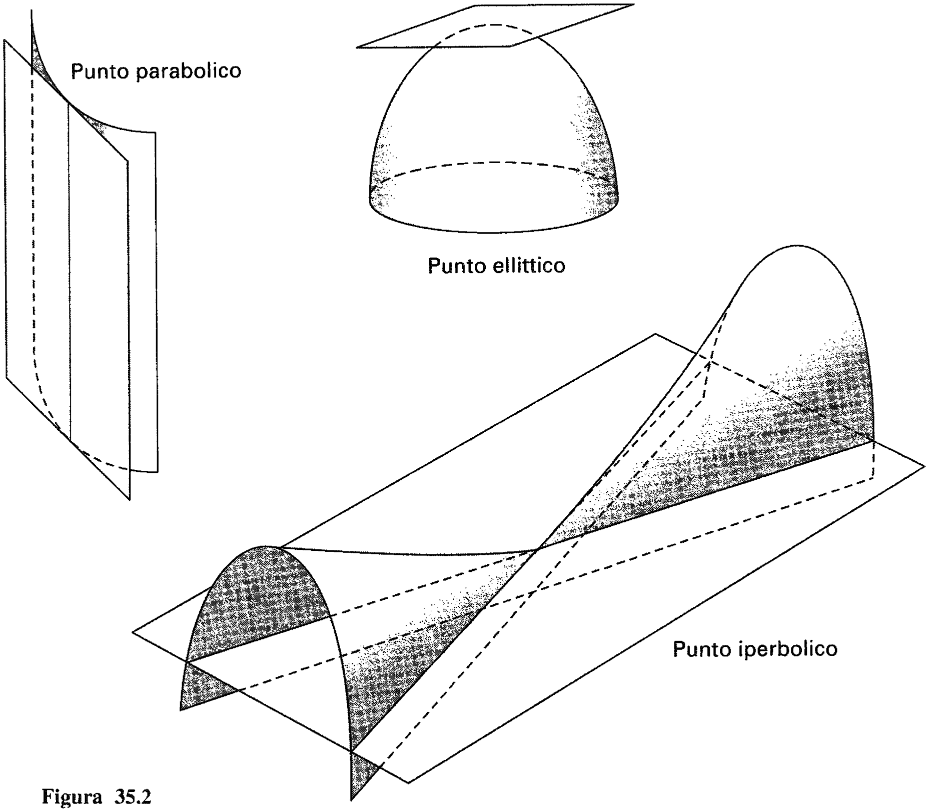


Figura 35.2

Allora $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$, e quindi l'operatore forma è nullo, ogni punto è ombelicale con curvatura principale 0 e sono identicamente 0 sia la curvatura media che quella gaussiana.

2. Consideriamo il cilindro Γ di equazioni parametriche:

$$x(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v).$$

Allora (cfr. esempio 33.5(2))

$$E = r^2, \ \ F = 0, \ \ G = 1$$

$$\mathbf{N} = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

$$x_{uu} = (-r \cos(u), -r \sin(u), 0), \ \ x_{uv} = x_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L} = x_{uu} \bullet \mathbf{N} = -r, \ \ \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0,$$

e quindi $K = 0$ identicamente. La matrice dell'operatore forma rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ è:

$$\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le curvature principali sono $k_1 = -\frac{1}{r}$, $k_2 = 0$, corrispondenti alle direzioni principali $\frac{x_u}{\|x_u\|} = (-\sin(u), \cos(u), 0)$ e $x_v = (0, 0, 1)$. La curvatura media è $H = -\frac{1}{2r}$.

L'operatore forma del cilindro Γ è in ogni punto diverso da zero, a differenza di quel che avviene per il piano, dove l'operatore è identicamente nullo. Ciò mostra che L non appartiene alla geometria intrinseca in quanto Γ è localmente sviluppabile. Analogamente vediamo che la curvatura media del cilindro è diversa da quella del piano che è nulla.

3. Per la sfera di centro l'origine e raggio r di equazioni parametriche:

$$x(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u) \cos(v), r \sin(u) \sin(v))$$

si ha (cfr. esempio 33.5(3)):

$$E = r^2, \ \ F = 0, \ \ G = r^2 \sin(u)^2$$

$$\mathbf{N} = (\cos(u), \sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v))$$

$$x_{uu} = (-r \cos(u), -r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v))$$

$$x_{uv} = (0, -r \cos(u) \sin(v), r \cos(u) \cos(v))$$

$$x_{vv} = (0, -r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v))$$

e quindi:

$$\mathcal{L} = -r, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = -r \sin(u)^2.$$

Pertanto:

$$K = \frac{r^2 \sin(u)^2}{r^4 \sin(u)^2} = \frac{1}{r^2}$$

cioè la sfera di raggio r ha curvatura gaussiana costante uguale a $\frac{1}{r^2}$. La matrice dell'operatore forma rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ è:

$$\frac{1}{r^4 \sin(u)^2} \begin{pmatrix} r^2 \sin(u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin(u)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^{-1} & 0 \\ 0 & -r^{-1} \end{pmatrix}$$

e quindi ogni punto della sfera è ombelicale ellittico.

4. Consideriamo la superficie di rotazione S di equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} &x : \mathbf{J} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^3 \\ &x(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u) \cos(v), \alpha_2(u) \sin(v)), \end{aligned} \qquad [35.5]$$

dove $\mathbf{J} \subset \mathsf{R}$ è un intervallo aperto, $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ è $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0)$, con $\alpha_2(u) > 0$ per ogni $u \in \mathbf{J}$ ($\alpha(\mathbf{J})$ è contenuta nel semipiano $Y > 0$ del piano $Z = 0$).

Abbiamo calcolato (cfr. esempio 33.5(3)) che

$$E = \|\alpha'\|^2, \quad F = 0, \quad G = \alpha_2^2.$$

Inoltre:

$$x_u \wedge x_v = (\alpha_2 \alpha_2', -\alpha_1' \alpha_2 \cos(v), -\alpha_1' \alpha_2 \sin(v)), \quad \|x_u \wedge x_v\| = \alpha_2 \|\alpha'\|;$$

$$x_{uu} = (\alpha_1'', \alpha_2'' \cos(v), \alpha_2'' \sin(v))$$

$$x_{uv} = (0, -\alpha_2' \sin(v), \alpha_2' \cos(v))$$

$$x_{vv} = (0, -\alpha_2 \cos(v), -\alpha_2 \sin(v))$$

e quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha_1'' \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2''}{\|\alpha'\|}, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = \frac{\alpha_1' \alpha_2}{\|\alpha'\|}$$

$$K = \frac{\alpha_1' (\alpha_1'' \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2'')}{\alpha_2 ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)^2} \qquad [35.6]$$

Si osservi che K è indipendente dal parametro v. Il denominatore della [35.6] è positivo e quindi il segno di K coincide con quello di $\alpha_1'(\alpha_1'' \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2'')$. Se α

ha velocità unitaria allora

$$K = \frac{\alpha_1'(\alpha_1''\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2'')}{\alpha_2} . \qquad [35.7]$$

5. Nell'esempio precedente prendiamo:

$$\alpha_1(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt, \quad \alpha_2(u) = e^{-u}, \qquad u > 0.$$

La curva α ha velocità unitaria. Essa è caratterizzata dalla proprietà seguente: la retta tangente ad α in $\alpha(u)$ interseca l'asse X in un punto che ha distanza costante uguale ad 1 dal punto $\alpha(u)$.

La superficie di rotazione S ottenuta facendo ruotare α attorno all'asse X è chiamata *pseudosfera*. La sua curvatura gaussiana ottenuta dalla [35.7] è $K = -1$ (fig. 35.3).

6. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^3$ una parametrizzazione di una varietà 1-dimensionale e $\mathbf{v}$ un campo vettoriale su α tale che $\mathbf{v}(u) \neq \mathbf{0}$ per ogni $u \in \mathbf{J}$. Consideriamo la corrispondente *superficie rigata* S, definita vettorialmente come:

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{v}(u)$$

al variare di (u, v) in un opportuno aperto U di $\mathbf{J} \times \mathsf{R}$. Per la proposizione 35.8 S ha ovunque curvatura gaussiana non positiva, cioè *una superficie rigata non possiede punti ellittici.* Nel paragrafo 33 abbiamo visto gli esempi del cilindro Γ (p. 281) e delle rigate tangenti (p. 284): calcoliamone la curvatura gaussiana.

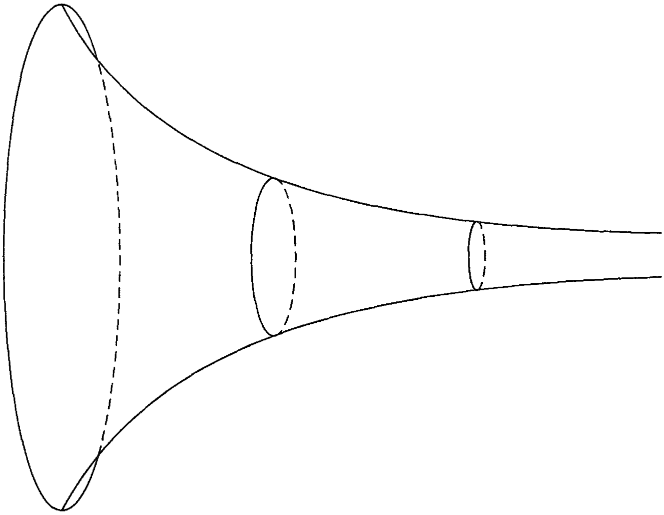


Figura 35.3

Per il cilindro Γ possiamo aspettarci $K = 0$ perché in ogni punto il piano tangente non è attraversato dalla superficie. Calcoliamo:

$$x_{uu} = (-r\cos(u), -r\sin(u), 0),$$

$$x_{uv} = (0, 0, 0) = x_{vv}$$

$$\mathbf{N} = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

$$\mathcal{L} = -r, \quad \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

e quindi $K = 0$ come previsto. La matrice dell'operatore di Weingarten è:

$$\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le direzioni principali, come era geometricamente prevedibile, sono la direzione della retta generatrice $\langle x_v \rangle$ e la sua ortogonale $\langle x_u \rangle$, corrispondente alla sezione normale che è una circonferenza di raggio r, e quindi di curvatura r^{-1}.

Il caso della rigata tangente è geometricamente meno evidente. Mantenendo le notazioni dell'esempio 33.5(4) abbiamo:

$$x_{uu} = \alpha'' + v\alpha''', \quad x_{uv} = \alpha'', \quad x_{vv} = 0$$

$$x_u \wedge x_v = (\alpha' + v\alpha'') \wedge \alpha' = v(\alpha'' \wedge \alpha')$$

$$\mathbf{N} = \pm\mathbf{b}$$

dove $\mathbf{b}$ è il versore binormale di α e $\pm$ è il segno di v. Denotando con κ e τ la curvatura e la torsione di α, si deduce:

$$\mathcal{L} = |v|\alpha''' \bullet \mathbf{b} = |v|\tau\kappa, \quad \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

e quindi di nuovo $K = 0$ identicamente.

7. Consideriamo una funzione differenziabile $f : U \to \mathsf{R}$ definita in un aperto U di R^2. Sia:

$$x : U \to \mathsf{R}^3$$

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

la parametrizzazione di Monge definita da f e $S = x(U)$. Abbiamo:

$$x_u = (1, 0, f_u), \quad x_v = (0, 1, f_v)$$

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2$$

$$\mathbf{N} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

$$x_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad x_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad x_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

Quindi la curvatura gaussiana di S è:

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)[(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 f_v^2]}.$$

Ad esempio la superficie S di equazioni parametriche:

$$x(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(lu^2 + 2muv + nv^2)\right)$$

è a punti ellittici, iperbolici o parabolici a seconda che si abbia

$$ln - m^2 \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0. \end{cases}$$

Si noti che S coincide con la quadrica di equazione:

$$2Z = lX^2 + 2mXY + nY^2$$

e le tre possibilità per il segno di $ln - m^2$ corrispondono rispettivamente ai seguenti casi (cfr. §26):

$$ln - m^2 \begin{cases} > 0 & \text{paraboloide ellittico} \\ = 0 & \text{quadrica semplicemente degenere} \\ < 0 & \text{paraboloide iperbolico} \end{cases}$$

Analizziamo le quadriche più in dettaglio.

8. *Quadriche a punti ellittici.* Le quadriche non degeneri a punti ellittici sono l'ellissoide, l'iperboloide ellittico (a due falde) e il paraboloide ellittico.

Ellissoide

Ponendo:

$$x(u,v) = (a\cos(u), b\sin(u)\cos(v), c\sin(u)\sin(v)),$$

dove $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -\pi/2 < u < \pi/2\}$, e a, b, $c > 0$, si ottiene una parametrizzazione dell'ellissoide:

$$Q : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

la cui immagine è $Q \setminus \{(0, 0, \pm c)\}$ (fig. 35.4).

Dall'espressione di $x(u,v)$ vediamo che se $b = c$, allora Q è una superficie di rotazione, ottenuta per rotazione di un'ellisse di semiassi a, b del piano $Z = 0$ attorno all'asse X; dalla [35.6] deduciamo che in questo caso si ha

$$K = \frac{a^2}{(a^2 \sin(u)^2 + b^2 \cos(u)^2)^2} > 0$$

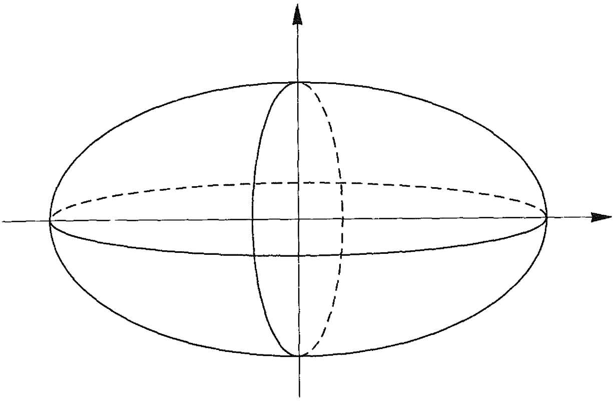


Figura 35.4

e quindi Q è a punti ellittici. Anche nel caso generale si calcola che l'ellissoide è a punti ellittici.

Iperboloide ellittico (a 2 falde)

Siano a, b, $c > 0$, $U = \{(u, v) \in \mathsf{R}^2 : u \neq 0\}$, e

$$x : U \to \mathsf{R}^3$$

$$x(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u)).$$

x è una parametrizzazione di una falda dell'iperboloide ellittico (fig. 35.5):

$$Q : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1.$$

Anche questa è una superficie a punti ellittici. È facile verificarlo per $a = b$,

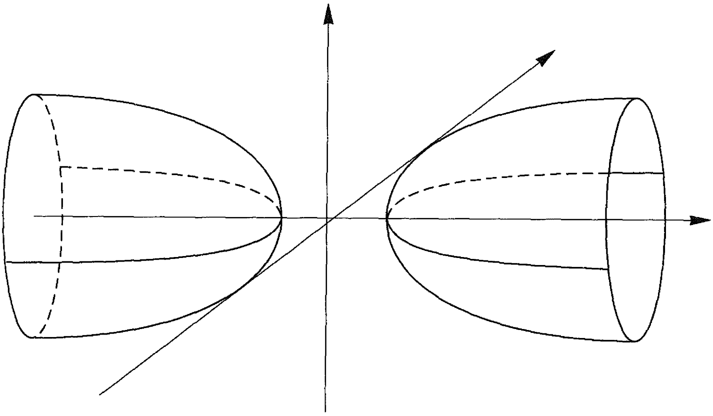


Figura 35.5

cioè nel caso in cui la superficie è ottenuta per rotazione di un ramo di iperbole del piano $Y = 0$ attorno all'asse Z. In tal caso si calcola facilmente che:

$$K = \frac{c^2}{(c^2 \sinh(u)^2 + a^2 \cosh(u)^2)^2} > 0.$$

Paraboloide ellittico

Siano a, $b > 0$, $U = \{(u,v) \in \mathrm{R}^2 : u > 0\}$, e $x : U \to \mathrm{R}^3$ definita da:

$$x(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2).$$

x è una parametrizzazione di un aperto del paraboloide ellittico (fig. 35.6):

$$Q : Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \cdot$$

Se $a = b$ allora la superficie è ottenuta per rotazione di una parabola del piano $Y = 0$ attorno all'asse Z. La curvatura gaussiana in questo caso si calcola facilmente essere:

$$K = \frac{4}{(4u^2 + a^2)^2} > 0.$$

9. *Quadriche a punti iperbolici.* Le rimanenti quadriche non degeneri sono tutte a punti iperbolici e sono superfici rigate.

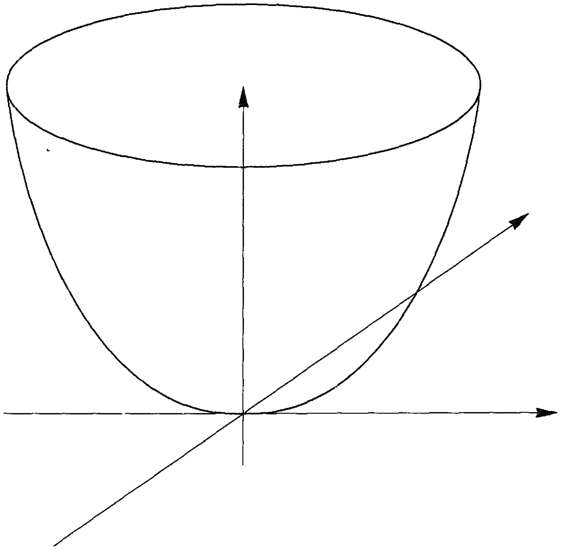


Figura 35.6

Iperboloide iperbolico

Siano a, b, $c > 0$ e

$$x : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$$

$$x(u, v) = (a(\cos(u) - v \sin(u)),\ b(\sin(u) + v \cos(u)), cv).$$

x è una parametrizzazione dell'iperboloide iperbolico (fig. 35.7):

$$Q : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Possiamo scrivere:

$$x(u, v) = (a \cos(u), b \sin(u), 0) + v(-a \sin(u), b \cos(u), c)$$

donde si vede che Q è una superficie rigata di direttrice un'ellisse del piano $Z = 0$. La stessa quadrica può essere anche parametrizzata nel modo seguente:

$$y(u, v) = (a(\cos(u) + v \sin(u)), b(\sin(u) - v \cos(u)), cv) =$$

$$= (a \cos(u), b \sin(u), 0) + v(a \sin(u), -b \cos(u), c)$$

che ne evidenzia una struttura di superficie rigata con stessa curva direttrice, ma con generatrici diverse.

Si ottengono quindi due sistemi di rette su Q. Le rette di ogni sistema sono a due a due sghembe, mentre rette di sistemi diversi si intersecano.

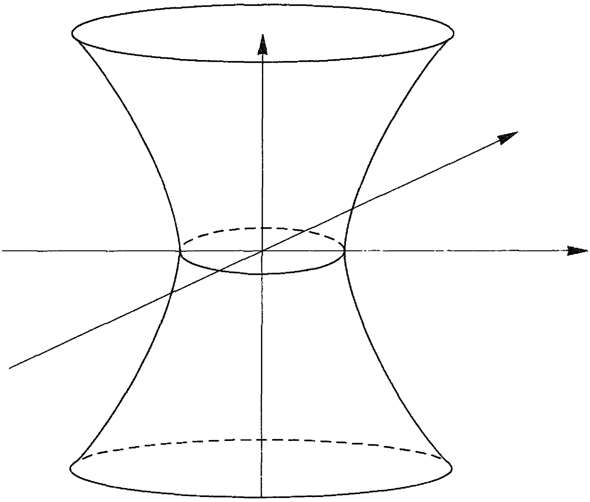


Figura 35.7

Una terza parametrizzazione dell'iperboloide iperbolico è:

$$z(u,v) = (a \cosh(u)\cos(v), b \cosh(u)\sin(v), c \sinh(u)).$$

Da questa parametrizzazione si vede che, se $a = b$, Q è una superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare attorno all'asse Z un ramo di iperbole del piano $Y = 0$. Calcolando la curvatura gaussiana in questo caso troviamo:

$$K = \frac{-c^2}{(c^2 \cosh(u)^2 + a^2 \sinh(u)^2)^2} < 0.$$

Paraboloide iperbolico

Siano a, $b > 0$. Ponendo:

$$x(u,v) = (a(u+v), b(u-v), 4uv), \qquad (u,v) \in \mathsf{R}^2$$

si definisce una parametrizzazione del paraboloide iperbolico di equazione $Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ (fig. 35.8). Scrivendo:

$$x(u,v) = (au, bu, 0) + v(a, -b, 4u) = (av, bv, 0) + u(a, b, 4v)$$

vediamo che Q è una superficie rigata in due modi diversi.

Nel primo modo la direttrice è la retta $f(u) = (au, bu, 0)$, mentre il secondo modo ha per direttrice la retta $g(v) = (av, bv, 0)$. Si ottengono quindi due sistemi di rette su Q. Anche in questo caso le rette di ogni sistema sono a due a due

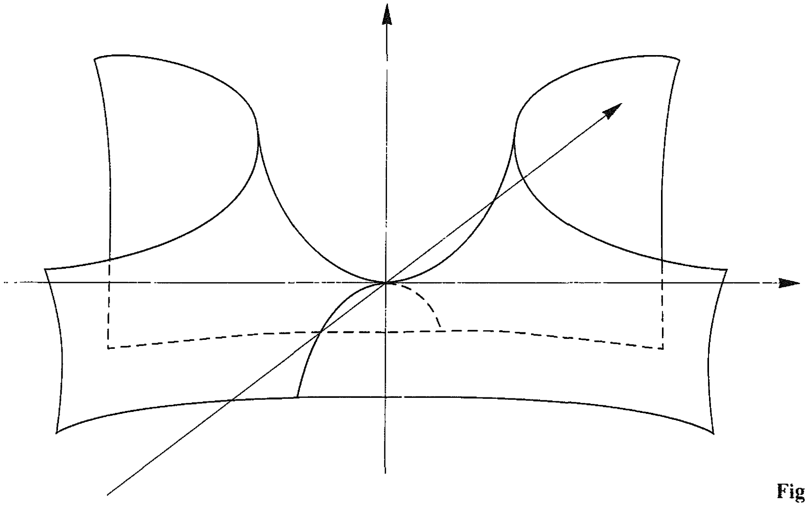


Figura 35.8

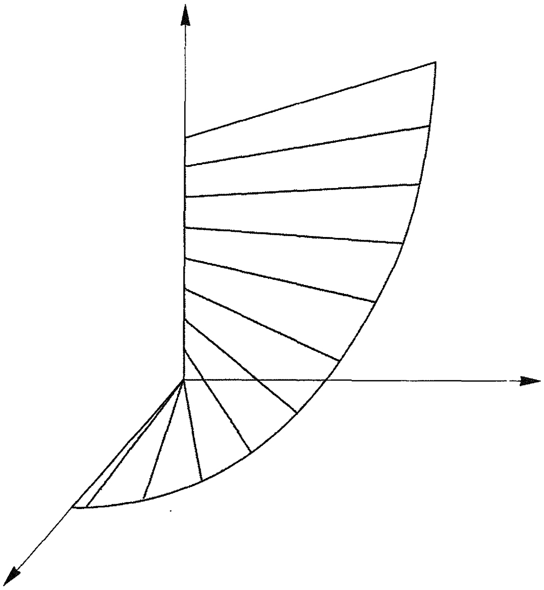


Figura 35.9

sghembe, mentre rette di sistemi diversi si intersecano. La curvatura gaussiana di Q è:

$$K = \frac{-2ab}{a^2b^2 + 4a^2(u+v)^2 + 4b^2(u-v)^2} < 0.$$

10. *Elicoide*. Siano a, $b > 0$. La superficie S di equazioni parametriche

$$x(u,v) = (av\cos(u), av\sin(u), bu), \qquad (u,v) \in \mathrm{R}^2,$$

è un'*elicoide* (fig. 35.9). Si calcola facilmente che:

$$K = \frac{-b^2}{a^2(b^2 + a^2v^2)}, \quad H = 0.$$

Quindi S è una superficie minima a curvatura gaussiana negativa.

Esercizi

1. Siano H e K le curvature media e gaussiana della superficie elementare S nel punto $\mathbf{x}$. Dimostrare che le curvature principali sono soluzioni dell'equazione in z:

   $$z^2 - 2Hz + K = 0.$$

2. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to S$ una curva a velocità unitaria nella superficie elementare S tale che α' e α'' siano linearmente indipendenti in un intorno di $t \in \mathbf{J}$. Dimostrare che:

   $$\mathbf{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \kappa(t)\mathbf{N}(t) \bullet \mathbf{n}(t)$$

dove $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(\alpha(t))$, $\mathbf{n}(t)$ è il versore normale e $\kappa(t)$ la curvatura di α in t. Dedurre il seguente

TEOREMA (Meusnier) *Nelle stesse ipotesi:*

$$\mathbf{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \kappa(t)\cos(\theta)$$

dove $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *è l'angolo acuto tra* $\mathbf{N}(t)$ *e il piano osculatore ad* α *in* $\alpha(t)$.

3. Dal teorema di Meusnier (esercizio 2) dedurre il seguente

TEOREMA *Se due curve a velocità unitaria* α, β *nella superficie elementare* S *passanti per uno stesso punto* $\mathbf{x} \in S$ *e dotate di apparato di Frenet hanno il medesimo piano osculatore in* $\mathbf{x}$, *e questo è diverso da* $T_\mathbf{x}(S)$, *allora* α *e* β *hanno la medesima curvatura in* $\mathbf{x}$.

4. Sia $D = \{(u, v) \in \mathrm{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, e $x : D \to \mathrm{R}^3$ l'applicazione così definita:

$$x(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Dimostrare che x è una parametrizzazione e in $x(1, 1)$ calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

5. Sia $U = \{(u, v) \in \mathrm{R}^2 : v \neq 0\}$ e

$$x : U \to \mathrm{R}^3$$

$$x(u, v) = \left(u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right).$$

Dimostrare che x è una parametrizzazione e calcolare in $x(1, 1)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

6. Sia $U = \left\{(t, s) \in \mathrm{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < s, \ t < \frac{\pi}{2}\right\}$ e

$$x : U \to \mathrm{R}^3$$

$$x(t, s) = (\sin(t), \cos(t)\cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che x è una parametrizzazione e calcolare in $x(0, 0)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

36 Proprietà globali delle superfici di R^3

Nei paragrafi 34 e 35 abbiamo studiato superfici elementari in R^3, cioè superfici consistenti di un solo aperto coordinatizzato, allo scopo di ottenere informazioni sulle proprietà locali delle superfici euclidee. L'ipotesi che la superficie fosse elementare è stata utilizzata attraverso l'uso delle coordinate locali e del campo di versori normali $\mathbf{N}$. In questo paragrafo estenderemo a superfici qualsiasi di R^3 ciò che è possibile estendere e daremo qualche applicazione.

Nel paragrafo 34 a una superficie elementare S abbiamo associato l'applicazione di Gauss

$$\gamma : S \to \mathbf{S}^2$$

la cui definizione dipende dal campo di versori normali $\mathbf{N}$, il quale a sua volta è definito a partire dalla parametrizzazione $x : U \to S \subset \mathsf{R}^3$. Se si sostituisce x con un'altra parametrizzazione $y : U \to S \subset \mathsf{R}^3$ il campo $\mathbf{N}$ resta invariato o viene sostituito dal suo opposto a seconda che y sia concordemente o discordemente orientata con x. Le altre grandezze introdotte o non dipendono affatto da x, oppure dipendono solo da $\mathbf{N}$. Ad esempio la prima forma fondamentale non dipende da x ma solo dall'inclusione di S in R^3. L'operatore forma L, e la seconda forma fondamentale dipendono da $\mathbf{N}$. Anche la curvatura normale, le curvature principali e la curvatura media cambiano di segno al cambiare di segno di $\mathbf{N}$. Invece le direzioni principali e la curvatura gaussiana sono indipendenti da $\mathbf{N}$ e lo sono perciò anche le nozioni di punto ellittico, iperbolico, parabolico, e ombelicale.

Pertanto se $S \subset \mathsf{R}^3$ è una superficie differenziabile qualsiasi, su di essa sono ben definite prima forma fondamentale (come già abbiamo osservato nel §33), direzioni principali e curvatura gaussiana in ogni punto. Sono anche ben definite le nozioni di punto ellittico, iperbolico, parabolico, e ombelicale.

Per poter parlare di "operatore forma" su tutta la superficie, e quindi definire in ogni punto la seconda forma fondamentale e le curvature normali, è invece necessario poter definire su S un campo di versori normali. Questa possibilità è equivalente all'orientabilità della superficie S, come evidenziato dal seguente lemma.

36.1 LEMMA *Assegnare su una superficie differenziabile S di R^3 un campo vettoriale differenziabile di versori normali è equivalente ad assegnare un'orientazione della superficie. In particolare è possibile definire su S un campo differenziabile di versori normali se e solo se S è orientabile.*

Dimostrazione. Se $x : U \to S$ e $y : V \to S$ sono due parametrizzazioni di un intorno del punto $\mathbf{x} \in S$, i campi di versori normali da esse definiti sono rispettivamente

$$\frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} \quad \text{e} \quad \frac{y_u \wedge y_v}{\|y_u \wedge y_v\|}.$$

Poiché si ha:

$$y_u \wedge y_v = \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}} (x_u \wedge x_v)$$

i due campi vettoriali sono concordi o discordi a seconda che il segno di $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}}$ sia positivo o negativo, cioè a seconda che i due sistemi di coordinate siano concordemente o discordemente orientati. Pertanto se su S è assegnato un atlante orientato su ogni aperto coordinatizzato esso definisce un campo differenziabile di versori normali, e questi campi vettoriali sono tra loro compatibili, dando quindi luogo a un campo di versori normali su tutta S. Viceversa, se è assegnato un campo di versori normali $\mathbf{N}$ su S, ed è dato un atlante differenziabile su S, è possibile modificare l'orientazione di ogni sua carta locale in modo da renderla compatibile con $\mathbf{N}$. Il nuovo atlante così ottenuto è orientato. ∎

La scelta di un campo di versori normali su una superficie S di R^3 è in un certo senso equivalente a distinguere su tutta S una faccia esterna e una interna. Orientare S è dunque equivalente a effettuare una tale distinzione.

Se $S \subset \mathsf{R}^3$ è una superficie differenziabile di equazione $f(X, Y, Z) = c$, dove $f : A \to \mathsf{R}$ è un'applicazione differenziabile definita in un aperto A di R^3 e $c \in \mathsf{R}$ è un valore regolare di f, allora S è una superficie orientabile. Infatti il campo di vettori

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}\right)$$

su S è un campo di vettori normali mai nulli, e quindi $\dfrac{\mathrm{grad}(f)}{\|\mathrm{grad}(f)\|}$ è un campo di versori normali su S.

Dopo queste premesse passiamo a studiare le superfici di R^3. Vogliamo innanzitutto caratterizzare le superfici che consistono interamente di punti ombelicali.

36.2 PROPOSIZIONE *Supponiamo che S sia una superficie differenziabile connessa di R^3. Tutti i punti di S sono ombelicali se e solo se S è contenuta in un piano oppure in una sfera. In tal caso la sua curvatura principale è costante, uguale a* 0 *nel caso planare e diversa da* 0 *nel caso sferico.*

Dimostrazione. Se S è contenuta in un piano oppure in una sfera allora ogni suo punto è ombelicale con curvatura principale costante uguale a 0 nel caso piano (esempio 35.9(1)) e diversa da 0 nel caso sferico (esempio 35.9(3)).

Supponiamo viceversa che ogni punto $\mathbf{x} \in S$ sia ombelicale. Poiché S è connessa possiamo supporre che S sia elementare. In $\mathbf{x}$ si ha, rispetto a una fissata parametrizzazione $x : U \to S$:

$$-\nabla_{x_u}\mathbf{N} = kx_u, \quad -\nabla_{x_v}\mathbf{N} = kx_v \qquad [36.1]$$

dove k è la funzione curvatura normale in S. Quindi:

$$\nabla_{x_u}(\nabla_{x_v}\mathbf{N}) = -k\nabla_{x_u}x_v - k_u x_v$$

$$\nabla_{x_v}(\nabla_{x_u}\mathbf{N}) = -k\nabla_{x_v}x_u - k_v x_u.$$

Poiché i due primi membri sono uguali deduciamo:

$$-k\nabla_{x_u}x_v - k_u x_v = -k\nabla_{x_v}x_u - k_v x_u$$

e, essendo $\nabla_{x_u}x_v = \nabla_{x_v}x_u$, si deduce:

$$-k_u x_v = -k_v x_u$$

e quindi $k_u = k_v = 0$ perché x_u e x_v sono linearmente indipendenti: deduciamo che k è costante.

Se $k = 0$, allora $\nabla_{x_u}\mathbf{N} = \nabla_{x_v}\mathbf{N} = 0$ e quindi $\mathbf{N}$ è costante. In questo caso S è contenuta in un piano. Fissiamo infatti $\mathbf{p} \in S$ e poniamo

$$f : S \to \mathrm{R}$$

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{N}.$$

Abbiamo:

$$x_u(f) = x_u \bullet \mathbf{N} = 0$$

$$x_v(f) = x_v \bullet \mathbf{N} = 0$$

e quindi f è costante. Poiché $f(\mathbf{p}) = 0$ si ha $f(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in S$ e quindi S è contenuta nel piano passante per $\mathbf{p}$ e normale a $\mathbf{N}$.

Se invece $k \neq 0$ allora le [36.1] danno:

$$\nabla_{x_u}\left(\frac{1}{k}\mathbf{N} + \mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{x_v}\left(\frac{1}{k}\mathbf{N} + \mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$$

e quindi:

$$\frac{1}{k}\mathbf{N} + \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

un vettore costante. Pertanto:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \frac{1}{k},$$

cioè la distanza di $\mathbf{x} \in S$ da $\mathbf{c}$ è costante, e quindi $\mathbf{x}$ appartiene alla sfera di centro $\mathbf{c}$ e raggio $\frac{1}{k}$. ■

La proposizione 36.2 implica che una superficie connessa S non può consistere di punti ombelicali a curvatura principale variabile: in altre parole per poter avere su una superficie connessa punti ombelicali di diversa curvatura principale è necessario che vi siano anche punti non ombelicali. Abbiamo anche la seguente immediata conseguenza:

36.3 COROLLARIO *Sia S una superficie compatta e connessa di* R^3 *consistente interamente di punti ombelicali. Allora S è una sfera.*

Una sfera ha curvatura gaussiana costante positiva. Che cosa avviene se una superficie compatta connessa di R^3 possiede curvatura gaussiana ovunque positiva ma non necessariamente costante? Un esempio di superficie con queste proprietà è l'ellissoide di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1 \quad a,b,c>0$$

(cfr. esempio 35.9(8)). La classe di queste superfici è molto ristretta, se ci si limita a considerare quelle orientabili.

36.4 TEOREMA *Sia $S \subset \mathsf{R}^3$ una superficie compatta connessa orientabile avente curvatura gaussiana ovunque positiva. Allora S è diffeomorfa a $\mathbf{S}^2$.*

Dimostrazione. Fissata un'orientazione di S possiamo supporre assegnato un campo differenziabile di versori normali $\mathbf{N}$ su S. A $\mathbf{N}$ è associata un'applicazione di Gauss:

$$\gamma : S \to \mathbf{S}^2$$
$$\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}).$$

Poiché $K(\mathbf{x}) = \det(\gamma_*(\mathbf{x})) > 0$ il differenziale di γ è ovunque non degenere e quindi γ è un diffeomorfismo locale. Poiché S è compatta, γ è anche suriettiva perché è aperta (teorema 24.5(b)). Quindi γ è un rivestimento di $\mathbf{S}^2$. Ma S è connessa e $\mathbf{S}^2$ è semplicemente connessa, e quindi γ è un omeomorfismo (corollario 18.7). Si conclude che γ è un diffeomorfismo (proposizione 24.4). ∎

Il teorema seguente pone un vincolo importante alla curvatura gaussiana di una superficie compatta.

36.5 TEOREMA *Sia S una superficie differenziabile compatta di R^3. Esiste almeno un punto $\mathbf{p} \in S$ tale che $K(\mathbf{p}) > 0$.*

Dimostrazione. Sia

$$\Phi : S \to \mathsf{R}$$
$$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}.$$

Poiché S è compatta e Φ è differenziabile, in particolare continua, Φ assume un massimo in un punto $\mathbf{p} \in S$. Sia $\alpha : \mathbf{J} \to S$ una curva differenziabile tale che $\alpha(t_0) = \mathbf{p}$, e sia $\alpha'(t_0) = \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(S)$. La funzione

$$\Phi \cdot \alpha = \alpha \bullet \alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}$$

è differenziabile e possiede un massimo assoluto in t_0; quindi:

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi \cdot \alpha)}{\mathrm{d}t}(t_0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2(\Phi \cdot \alpha)}{\mathrm{d}t^2}(t_0) \leq 0. \qquad [36.2]$$

Esplicitando la prima di queste due relazioni si trova:

$$2\alpha'(t_0) \bullet \alpha(t_0) = 2\mathbf{v} \bullet \mathbf{p} = 0.$$

Quest'uguaglianza significa che $\mathbf{v}$ è perpendicolare a $\mathbf{p}$ e quindi che $\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ è un versore normale a S in $\mathbf{p}$, perché $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(S)$ può essere un vettore tangente qualsiasi. Supponiamo ora che α sia un sezione normale di S in $\mathbf{p}$; la seconda delle [36.2] dà:

$$2\alpha'(t_0) \bullet \alpha'(t_0) + 2\alpha''(t_0) \bullet \alpha(t_0) = 2\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} + 2\alpha''(t_0) \bullet \mathbf{p} =$$

$$= 2 + 2\alpha''(t_0) \bullet \mathbf{p} \leq 0$$

e quindi, per il teorema 35.3:

$$|\kappa(\mathbf{v})| = |\kappa(\alpha)(t_0)| = |\alpha''(t_0)| \bullet \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \qquad [36.3]$$

dove $\kappa(\mathbf{v})$ è la curvatura normale di S nella direzione $\langle \mathbf{v} \rangle$ calcolata rispetto al versore normale $\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$. Poiché questa disuguaglianza è valida per tutti i $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^1_{\mathbf{x}}$, le curvature normali sono diverse da 0 e quindi $K(\mathbf{p}) > 0$. ■

Dal teorema 36.5 discende immediatamente il seguente corollario:

36.6 COROLLARIO *In* R^3 *non esistono superfici differenziabili compatte tali che* $K(\mathbf{x}) \leq 0$ *per ogni* $\mathbf{x} \in S$.

Ovviamente la compattezza di S è essenziale perché la conclusione del corollario sia vera. Si pensi ad esempio alla pseudosfera, che ha curvatura costante -1, ma non è compatta (cfr. esempio 35.9(5)). Abbiamo anche il seguente risultato:

36.7 COROLLARIO *In* R^3 *non esistono superfici minime (cioè tali che* $H \equiv 0$*) compatte.*

Dimostrazione. Se in un punto $\mathbf{p} \in S$ si ha $H(\mathbf{p}) = 0$, allora $K(\mathbf{p}) \leq 0$. ■

37 Il Theorema Egregium

Nel paragrafo 35 abbiamo introdotto l'operatore forma L in un punto di una superficie elementare S e l'abbiamo applicato allo studio della geometria locale di S. L è definito per mezzo del campo di versori normali alla superficie, e coincide con il differenziale, cambiato di segno, dell'applicazione di Gauss. Quindi L dipende dallo spazio ambiente R^3 e infatti si verifica facilmente che L non appartiene alla geometria intrinseca di S (cfr. esempio 35.9(2)). Conseguentemente non possiamo a priori aspettarci che siano intrinseche le altre grandezze che abbiamo introdotto per mezzo di L (seconda forma fondamentale, curvature e direzioni principali, curvatura media e curvatura gaussiana). In questo paragrafo scopriremo un fatto inaspettato, e cioè che la curvatura gaussiana è una grandezza intrinseca.

Sia S una superficie elementare di R^3. Manteniamo le notazioni del paragrafo precedente. Nel paragrafo 34 abbiamo introdotto la derivata $\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$ di un campo vettoriale differenziabile $\mathbf{Z}$ sulla superficie S rispetto ad un campo vettoriale tangente $\mathbf{Y}$. Questa operazione definisce un campo vettoriale che in generale non è tangente ad S anche quando $\mathbf{Z}$ è tangente ad S. È possibile definire un'operazione analoga a $\nabla_{\mathbf{Y}}$, che trasforma campi vettoriali tangenti in campi vettoriali tangenti.

37.1 DEFINIZIONE *Siano* $\mathbf{Y}$ *e* $\mathbf{Z}$ *campi vettoriali differenziabili tangenti a* S. *La* derivata covariante *di* $\mathbf{Z}$ *rispetto a* $\mathbf{Y}$ *è il campo vettoriale:*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - (\mathrm{L}(\mathbf{Y}) \bullet \mathbf{Z})\mathbf{N}$$

o equivalentemente:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + ((\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{N}) \bullet \mathbf{Z})\mathbf{N}.$$

Osserviamo che $\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$ è un campo vettoriale tangente a S. Infatti si ha:

$$(\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) \bullet \mathbf{N} = (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) \bullet \mathbf{N} + (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{N}) \bullet \mathbf{Z} = \mathbf{Y}(\mathbf{Z} \bullet \mathbf{N}) = 0$$

perché $\mathbf{N}$ è perpendicolare a $\mathbf{Z}$. Utilizzando l'identità precedente possiamo anche scrivere:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + ((\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{N}) \bullet \mathbf{Z})\mathbf{N} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - ((\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) \bullet \mathbf{N})\mathbf{N}$$

e da questa espressione si vede che in ogni punto $\mathbf{x} \in S$ *la derivata covariante* $(\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z})(\mathbf{x})$ *è la proiezione di* $(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z})(\mathbf{x})$ *su* $T_{\mathbf{x}}(S)$.

La derivata covariante gode di proprietà analoghe alle [34.1]. Precisamente si ha:

37.2 PROPOSIZIONE *Dati comunque i campi vettoriali differenziabili* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ *tangenti a* S *e una funzione differenziabile* $F : S \to \mathsf{R}$, *si ha:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) = \mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} + \mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \\ &\mathrm{D}_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) = \mathrm{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + \mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \\ &\mathrm{D}_{F\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = F(\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) \qquad [37.1] \\ &\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}(F\mathbf{Z}) = (\mathbf{Y}F)\mathbf{Z} + F(\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) \\ &\mathbf{Y}(\mathbf{X} \bullet \mathbf{Z}) = (\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{X} \bullet (\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Le prime quattro delle [37.1] seguono dalle analoghe [34.1] e dalla linearità di L. Dimostriamo l'ultima. Si ha:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X} \bullet \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{X} \bullet (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) =$$

$$= [\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} + (\mathrm{L}(\mathbf{Y}) \bullet \mathbf{X})\mathbf{N}] \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{X} \bullet [\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} + (\mathrm{L}(\mathbf{Y}) \bullet \mathbf{Z})\mathbf{N}] =$$

$$= \mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{X} \bullet \mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}. \blacksquare$$

L'importanza della derivazione covariante sta nella seguente proposizione.

37.3 PROPOSIZIONE *La derivata covariante è un'operazione intrinseca.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\nabla_{x_u} x_v = x_{vu} = x_{uv} = \nabla_{x_v} x_u$ per la simmetria delle derivate seconde rispetto all'ordine di derivazione, e quindi, per la proposizione 34.2:

$$\mathrm{D}_{x_u} x_v = \nabla_{x_u} x_v - (\mathrm{L}(x_u) \bullet x_v)\mathrm{N} = \nabla_{x_v} x_u - (x_u \bullet \mathrm{L}(x_v))\mathrm{N} = \mathrm{D}_{x_v} x_u. \qquad [37.2]$$

Inoltre utilizzando l'ultima delle [37.1] si ottiene:

$$E_u = x_u(x_u \bullet x_u) = 2(\mathrm{D}_{x_u} x_u) \bullet x_u$$

$$F_u = x_u(x_u \bullet x_v) = (\mathrm{D}_{x_u} x_u) \bullet x_v + (\mathrm{D}_{x_u} x_v) \bullet x_u$$

$$G_u = x_u(x_v \bullet x_v) = 2(\mathrm{D}_{x_u} x_v) \bullet x_v$$

$$E_v = x_v(x_u \bullet x_u) = 2(\mathrm{D}_{x_v} x_u) \bullet x_u$$

$$F_v = x_v(x_u \bullet x_v) = (\mathrm{D}_{x_v} x_u) \bullet x_v + (\mathrm{D}_{x_v} x_v) \bullet x_u$$

$$G_v = x_v(x_v \bullet x_v) = 2(\mathrm{D}_{x_v} x_v) \bullet x_v.$$

Combinando queste identità con la simmetria [37.2] si deduce che:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}_{x_u} x_v) \bullet x_u &= (\mathrm{D}_{x_v} x_u) \bullet x_u = \frac{1}{2} E_v \\
(\mathrm{D}_{x_v} x_u) \bullet x_v &= (\mathrm{D}_{x_u} x_v) \bullet x_v = \frac{1}{2} G_u \\
(\mathrm{D}_{x_u} x_u) \bullet x_u &= \frac{1}{2} E_u \\
(\mathrm{D}_{x_u} x_u) \bullet x_v &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\
(\mathrm{D}_{x_v} x_v) \bullet x_v &= \frac{1}{2} G_v \\
(\mathrm{D}_{x_v} x_v) \bullet x_u &= F_v - \frac{1}{2} G_u.
\end{aligned} \qquad [37.3]$$

Quindi le componenti di $\mathrm{D}_{x_u}x_u$, $\mathrm{D}_{x_u}x_v$, $\mathrm{D}_{x_v}x_u$, $\mathrm{D}_{x_v}x_v$ rispetto alla base mobile $\{x_u, x_v\}$ si esprimono come combinazione lineare delle derivate di E, F, G rispetto a x_u e a x_v e pertanto sono intrinseche. Dalla linearità di $\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$ rispetto a $\mathbf{X}$ e a $\mathbf{Y}$ segue che $\mathrm{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$ è intrinseca. ■

Dalla proposizione 37.3 deduciamo che la derivata covariante può essere definita su una qualsiasi superficie riemanniana. Come conseguenza della proposizione 37.3 otteniamo il seguente:

37.4 TEOREMA (Theorema Egregium di Gauss) *La curvatura gaussiana è intrinseca.*

Vista l'importanza di questo teorema ne diamo due dimostrazioni.

Prima dimostrazione. Sia $\mathbf{Z}$ un campo vettoriale differenziabile tangente a S. Vogliamo calcolare la componente tangenziale del campo vettoriale $\nabla_{x_u}(\nabla_{x_v}\mathbf{Z})$. A tale scopo non ci preoccuperemo di calcolarne i termini che sono multipli di $\mathbf{N}$, che verranno quindi sostituiti da punti di sospensione. Si ha:

$$\begin{aligned}\nabla_{x_u}(\nabla_{x_v}\mathbf{Z}) &= \nabla_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}\mathbf{Z} + (\mathrm{L}(x_v) \bullet \mathbf{Z})\mathbf{N}) = \\ &= \nabla_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}\mathbf{Z}) + \nabla_{x_u}\mathbf{N}(\mathrm{L}(x_v) \bullet \mathbf{Z}) + (\ldots)\mathbf{N} = \\ &= \mathrm{D}_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}\mathbf{Z}) - (\mathrm{L}(x_v) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_u) + (\ldots)\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Similmente:

$$\nabla_{x_v}(\nabla_{x_u}\mathbf{Z}) = \mathrm{D}_{x_v}(\mathrm{D}_{x_u}\mathbf{Z}) - (\mathrm{L}(x_u) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_v) + (\ldots)\mathbf{N}$$

Poiché:

$$0 = \nabla_{x_u}(\nabla_{x_v}\mathbf{Z}) - \nabla_{x_v}(\nabla_{x_u}\mathbf{Z})$$

anche la componente tangenziale del secondo membro è 0, e quindi sostituendo le espressioni trovate sopra si ottiene:

$$0 = \mathrm{D}_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}\mathbf{Z}) - (\mathrm{L}(x_v) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_u) - [\mathrm{D}_{x_v}(\mathrm{D}_{x_u}\mathbf{Z}) - (\mathrm{L}(x_u) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_v)].$$

Deduciamo l'identità:

$$\mathrm{D}_{x_v}(\mathrm{D}_{x_u}\mathbf{Z}) - \mathrm{D}_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}\mathbf{Z}) = (\mathrm{L}(x_u) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_v) - (\mathrm{L}(x_v) \bullet \mathbf{Z})\mathrm{L}(x_u).$$

Sostituiamo $\mathbf{Z} = x_u$ e moltiplichiamo scalarmente per x_v. Otteniamo:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D}_{x_v}(\mathrm{D}_{x_u}x_u)] \bullet x_v - [\mathrm{D}_{x_u}(\mathrm{D}_{x_v}x_u)] \bullet x_v = \\ &= (\mathrm{L}(x_u) \bullet x_u)(\mathrm{L}(x_v) \bullet x_v) - (\mathrm{L}(x_v) \bullet x_u)(\mathrm{L}(x_u) \bullet x_v) = \det(\mathrm{L}) = K.\end{aligned}$$

Il primo membro può essere riespresso tramite le [37.3] per mezzo dei coefficienti E, F, G e delle loro derivate, e quindi è una funzione intrinseca su S. Se ne deduce che K è una funzione intrinseca. ■

Seconda dimostrazione. Questa dimostrazione fornisce anche una espressione esplicita di K per mezzo dei coefficienti E, F, G e delle loro derivate. Tenendo conto della [33.6] abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= x_{uu} \bullet \mathbf{N} = \frac{x_{uu} \bullet x_u \wedge x_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\
\mathcal{M} &= x_{uv} \bullet \mathbf{N} = \frac{x_{uv} \bullet x_u \wedge x_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\
\mathcal{N} &= x_{vv} \bullet \mathbf{N} = \frac{x_{vv} \bullet x_u \wedge x_v}{\sqrt{EG - F^2}}
\end{aligned} \tag{37.4}$$

Sostituendo le [37.4] nell'espressione [35.2] di K otteniamo:

$$\begin{aligned}
K(EG - F^2)^2 &= (\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2)(EG - F^2) = \\
&= (x_{uu} \bullet x_u \wedge x_v)(x_{vv} \bullet x_u \wedge x_v) - (x_{uv} \bullet x_u \wedge x_v)^2.
\end{aligned}$$

Esprimendo ognuno dei fattori tra parentesi come un determinante, ed esplicitando i prodotti di determinanti come determinanti di prodotti di matrici otteniamo:

$$K(EG - F^2)^2 = \begin{vmatrix} x_{uu} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix}^{t} \begin{vmatrix} x_{vv} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} \\ x_u \\ x_v \end{vmatrix}^{2} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{uu} \bullet x_{vv} & x_{uu} \bullet x_u & x_{uu} \bullet x_v \\ x_{vv} \bullet x_u & E & F \\ x_{vv} \bullet x_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} \bullet x_{uv} & x_{uv} \bullet x_u & x_{uv} \bullet x_v \\ x_{uv} \bullet x_u & E & F \\ x_{uv} \bullet x_v & F & G \end{vmatrix} =$$

$$= (x_{uu} \bullet x_{vv} - x_{uv} \bullet x_{uv}) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x_{uu} \bullet x_u & x_{uu} \bullet x_v \\ x_{vv} \bullet x_u & E & F \\ x_{vv} \bullet x_v & F & G \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & x_{uv} \bullet x_u & x_{uv} \bullet x_v \\ x_{uv} \bullet x_u & E & F \\ x_{uv} \bullet x_v & F & G \end{vmatrix}.$$

Ora consideriamo le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
x_{uu} \bullet x_u &= \frac{1}{2} E_u & x_{uv} \bullet x_u &= \frac{1}{2} E_v \\
x_{vv} \bullet x_v &= \frac{1}{2} G_v & x_{uu} \bullet x_v &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\
x_{uv} \bullet x_v &= \frac{1}{2} G_u & x_{vv} \bullet x_u &= F_v - \frac{1}{2} G_u
\end{aligned} \tag{37.5}$$

dalle quali deduciamo:

$$x_{uu} \bullet x_{vv} - x_{uv} \bullet x_{uv} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(x_{uu} \bullet x_v) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(x_{uv} \bullet x_v) = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Sostituendo nell'espressione ottenuta precedentemente otteniamo infine:

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \Bigg\{ & \left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & E \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \Bigg\}. \end{aligned} \quad [37.6]$$

La [37.6] esprime K per mezzo di E, F, G e delle loro derivate prime e seconde, e mostra che K è intrinseca. ■

Il teorema 37.4 è sorprendente perché la curvatura gaussiana è il prodotto delle curvature principali, che non sono grandezze intrinseche. Lo stesso Gauss ne fu sorpreso quando lo dimostrò e per questo lo chiamò "Theorema Egregium".

La [37.6] è nota come *formula di Brioschi* per la curvatura gaussiana. Essa permette di calcolare facilmente K una volta nota la prima forma fondamentale.

Tale espressione non richiede per la sua validità che la superficie S sia definita in R^3, ma solo che su di essa sia definita la prima forma fondamentale e pertanto può essere presa come definizione della curvatura gaussiana su una qualsiasi superficie riemanniana. In particolare il "Theorema Egregium" permette di definire la curvatura gaussiana per una superficie differenziabile di R^N oppure per un aperto del piano su cui sia definita una metrica riemanniana. Il lettore può ad esempio verificare facilmente che il semipiano di Poincaré $\mathcal{H}$ e il disco iperbolico $\mathcal{D}$ hanno curvatura gaussiana costante uguale a -1.

Il "Theorema Egregium" può anche essere utilizzato per verificare che due superfici non sono isometriche: infatti esso implica che due superfici aventi curvature gaussiane diverse non sono isometriche. Ad esempio *nessun aperto di una sfera di raggio r è isometrico a un aperto del piano* perché le curvature gaussiane del piano e della sfera sono costanti, rispettivamente $K = 0$ e $K = \frac{1}{r^2}$, ma diverse tra loro. Similmente, una sfera non è localmente isometrica a una superficie rigata.

38 Geodetiche

Sia $S \subset \mathsf{R}^3$ una superficie differenziabile. Una curva differenziabile $\alpha : \mathbf{J} \to S$, dove $\mathbf{J} \subset \mathsf{R}$ è un intervallo aperto, è una *geodetica* di S se la sua accelerazione α'' è normale a S. In altre parole la componente tangenziale dell'accelerazione di una geodetica è nulla.

38.1 LEMMA *Sia $S \subset \mathsf{R}^3$ una superficie differenziabile e $\alpha : \mathbf{J} \to S$ una geodetica. Allora α ha velocità costante.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha' \bullet \alpha') = 2\alpha'' \bullet \alpha' = 0. \blacksquare$$

Ogni curva costante è banalmente una geodetica. Se ad esempio $\alpha(t) = \mathbf{p} + \mathbf{v}t$ è una retta a velocità costante contenuta nella superficie S allora α è una geodetica perché la sua accelerazione α'' è identicamente nulla. Quindi le geodetiche sono curve che generalizzano le rette parametrizzate a velocità costante.

Nel piano R^2 ogni curva α ha accelerazione α'' tangente al piano. Quindi l'unica possibilità perché α sia un geodetica è che $\alpha'' = 0$, cioè che α sia una retta. Pertanto le geodetiche del piano sono le rette a velocità costante.

Per ogni curva α sulla superficie S possiamo scrivere:

$$\alpha'' = \nabla_{\alpha'}\alpha' = \mathrm{D}_{\alpha'}\alpha' + (\mathrm{L}(\alpha') \bullet \alpha')\mathrm{N}$$

e α è una geodetica se e solo se

$$\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha' = 0.$$

In altre parole una curva è una geodetica se ha velocità costante dal punto di vista della geometria intrinseca di S. Poiché la derivata covariante è intrinseca, questa condizione può essere presa come definizione di geodetica su una superficie differenziabile di R^N o più in generale su una superficie riemanniana.

38.2 DEFINIZIONE *Sia S una superficie riemanniana. Una curva $\alpha : \mathbf{J} \to S$, dove $\mathbf{J} \subset \mathsf{R}$ è un intervallo aperto, è una* geodetica *di S se:*

$$\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha' = 0$$

Su una superficie riemanniana le geodetiche esistono in abbondanza, come risulta dal seguente teorema di esistenza.

38.3 TEOREMA *Sia S una superficie riemanniana, $\mathbf{x} \in S$ e $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(S)$ un vettore tangente a S in $\mathbf{x}$. Esiste un intervallo aperto $\mathbf{J}$ contenente $0 \in \mathsf{R}$ e una* *geodetica* $\alpha : \mathbf{J} \rightarrow S$ *tale che* $\alpha(0) = \mathbf{x}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$; *la geodetica* α *su* $\mathbf{J}$ *con queste proprietà è unica.*

Dimostrazione. Sia $U \subset \mathrm{R}^2$ un aperto e $x : U \rightarrow S$ una parametrizzazione di un intorno aperto di $\mathbf{x}$ in S. Sia $\mathbf{u} \in U$ tale che $x(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$, e sia $\mathbf{v} = v_1 x_u + v_2 x_v$. La geodetica α di cui vogliamo dimostrare l'esistenza può supporsi della forma $\alpha(t) = x(a_1(t), a_2(t))$, dove $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ è una curva $a : \mathbf{J} \rightarrow U$ tale che

$$a(0) = \mathbf{u}, \ \ (a_1'(0), a_2'(0)) = (v_1, v_2). \qquad [38.1]$$

L'accelerazione di α è:

$$\alpha'' = \frac{\mathrm{d}\alpha'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1' x_u + a_2' x_v) =$$

$$= a_1'' x_u + a_1'(x_{uu} a_1' + x_{uv} a_2') + a_2'' x_v + a_2'(x_{vu} a_1' + x_{vv} a_2').$$

α è una geodetica se e solo se si ha $\alpha'' \bullet x_u = 0 = \alpha'' \bullet x_v$. Esplicitando queste condizioni e utilizzando le [37.5] si ottengono facilmente le equazioni:

$$\begin{aligned} &a_1'' E + a_2'' F + \frac{1}{2}[a_1'^2 E_u + 2a_1' a_2' E_v + a_2'^2(2F_v - G_u)] = 0 \\ &a_1'' F + a_2'' G + \frac{1}{2}[a_1'^2(2F_u - E_v) + 2a_1' a_2' G_u + a_2'^2 G_v] = 0 \end{aligned} \qquad [38.2]$$

Nelle [38.2] i coefficienti E, F, G e le loro derivate vanno considerati come funzioni di t. Poiché identicamente $EG - F^2 > 0$ le [38.2] sono equivalenti a un sistema di equazioni differenziali in a_1, a_2 della forma seguente:

$$a_1'' = f_1(a_1, a_2, a_1', a_2')$$

$$a_2'' = f_2(a_1, a_2, a_1', a_2')$$

con condizioni iniziali [38.1]. Per un fondamentale teorema di esistenza per i sistemi di equazioni differenziali (per il quale rinviamo a un testo di Analisi Matematica) esistono un intervallo $\mathbf{J}$ contenente 0 e funzioni a_1, a_2 differenziabili in $\mathbf{J}$ soddisfacenti le [38.1] e le [38.2]. L'unicità di a_1, a_2 segue dallo stesso risultato. Le a_1, a_2 definiscono nel modo detto sopra la geodetica cercata. ■

Il teorema 38.3 non dà alcuna informazione sull'intervallo $\mathbf{J}$: la geodetica α potrebbe estendersi a un intervallo più grande. Una geodetica che non è estendibile a un intervallo più grande si dice una *geodetica massimale.*

38.4 *Esempi*

1. *Piano.* Le rette a velocità costante $\alpha(t) = \mathbf{p} + \mathbf{v}t$, $t \in \mathrm{R}$ sono geodetiche massimali in un piano H. Poiché per ogni $\mathbf{p} \in H$ e per ogni $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ c'è una retta

passante per **p** con vettore velocità uguale a **v**, dal teorema 38.3 segue che le rette sono tutte le geodetiche non costanti di un piano.

2. *Cilindro.* La parametrizzazione $x(u,v) = (r\cos(r^{-1}u), r\sin(r^{-1}u), v)$, $-\pi < u < \pi$, è un'isometria di un aperto del piano su un aperto del cilindro di R^3 di asse l'asse Z e raggio r. Pertanto le geodetiche del cilindro sono le trasformate delle geodetiche del piano, cioè delle rette. Si ottengono in questo modo le rette generatrici (le rette $u =$ cost.), le circonferenze direttrici (le curve $v =$ cost.) e le eliche circolari immagini delle altre rette del piano, cioè le curve:

$$\alpha(t) = (r\cos(r^{-1}t), r\sin(r^{-1}t), ct), \qquad c > 0.$$

3. *Sfera.* Sia S una sfera di R^3, che supponiamo di raggio r e di centro l'origine. Sia α una circonferenza massima su S parametrizzata a velocità costante. α è una geodetica (massimale) perché la sua accelerazione è normale a α e parallela al piano di α, quindi è normale a S. Poiché per ogni punto di S esistono circonferenze massime per quel punto aventi vettore velocità preassegnato, le circonferenze massime sono tutte le geodetiche massimali non costanti di una sfera.

Come abbiamo osservato all'inizio del paragrafo, le geodetiche generalizzano la proprietà delle rette di un piano di avere vettore accelerazione costante. Un'altra proprietà importante delle rette è di essere curve di minima lunghezza tra tutte quelle passanti per due punti assegnati. Anche questa proprietà si trasporta alle geodetiche, e anzi le caratterizza, ma solo localmente, mentre in grande la proprietà non sempre vale. Precisamente, se P, Q sono due punti di una superficie riemanniana contenuti in uno stesso aperto coordinatizzato, allora esiste un'unica geodetica che li contiene e contenuta nell'aperto, e questa è la curva di lunghezza minima passante per P e Q (enunciamo questo risultato senza dimostrazione; il lettore interessato può consultare, ad esempio, Stoker 1969). Ma questa proprietà non vale per punti qualsiasi. Ad esempio due punti P, Q non antipodali su una sfera di raggio r sono contenuti in un'unica circonferenza massima, ma se di questa circonferenza si prende l'arco di ampiezza maggiore di πr che contiene P e Q, allora certamente questo non ha lunghezza minima; se poi i due punti P, Q sono antipodali allora esistono infinite geodetiche che li contengono. Un altro esempio: due punti su una retta generatrice di un cilindro sono contenuti in infinite eliche, che sono tutte geodetiche, ma la geodetica di minima lunghezza è la retta generatrice che li contiene.

In generale non è facile determinare sistematicamente tutte le geodetiche su una data superficie. Però è talvolta possibile determinare particolari geodetiche quando si ha una parametrizzazione opportuna della superficie S. Allo scopo è utile il seguente risultato.

38.5 LEMMA *Sia S una superficie riemanniana e $U \subset S$ un aperto coordinatizzato. Supponiamo che i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale in U soddisfino le condizioni $E_u = E_v = F = 0$. Allora le u-curve in U sono geodetiche.*

Dimostrazione. Su una u-curva α il campo vettoriale α' coincide con la restrizione ad α di x_u, e la sua accelerazione con il campo vettoriale $x_{uu} = \nabla_{x_u} x_u$. Affinché questo sia perpendicolare a S si deve avere $x_{uu} \bullet x_u = x_{uu} \bullet x_v = 0$. Ma

$$0 = E_u = \frac{\partial}{\partial u}(x_u \bullet x_u) = 2x_{uu} \bullet x_u.$$

Inoltre $0 = F = x_u \bullet x_v$ implica:

$$0 = F_u = \frac{\partial}{\partial u}(x_u \bullet x_v) = x_{uu} \bullet x_v + x_{uv} \bullet x_u. \qquad [38.3]$$

Ma essendo:

$$0 = E_v = \frac{\partial}{\partial v}(x_u \bullet x_u) = 2x_{uv} \bullet x_u$$

sostituendo nella [38.3] si ottiene anche $x_{uu} \bullet x_v = 0$.- ■

Si osservi che le condizioni $E_u = E_v = F = 0$ del lemma equivalgono a:

$$\mathbf{I}(du, dv) = c du^2 + G(u, v) dv^2$$

dove $c \neq 0$ è una costante.

38.6 *Esempio*

Vogliamo calcolare le geodetiche del *semipiano di Poincaré*

$$\mathcal{H} = \{(u, v) : v > 0\}$$

che ha metrica riemanniana

$$\mathbf{I}(du, dv) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

(esempio 33.6(2)). Consideriamo il piano R^2 con metrica riemanniana

$$\mathbf{I}(dx, dy) = dx^2 + e^{2x} dy^2.$$

Per il lemma 38.5 le rette $y = \text{cost.}$ sono geodetiche. Il diffeomorfismo:

$$F : \mathsf{R}^2 \to \mathcal{H}$$

$$u = y, \quad v = e^{\,x}$$

è un'isometria perché calcolandone la matrice jacobiana si trova:

$$F_*(dx, dy) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\mathbf{I}(F_*(dx, dy)) = e^{2x}(dy^2 + e^{\ 2x}dx^2) = e^{2x}dy^2 + dx^2.$$

Pertanto sono geodetiche massimali in $\mathcal{H}$ le trasformate delle rette y = cost., cioè le semirette verticali u = cost.. Per trovare le altre geodetiche massimali consideriamo un qualsiasi punto $(u_0, 0)$ e le coordinate polari in $\mathcal{H}$ centrate in questo punto. Otteniamo la parametrizzazione:

$$u = u_0 + \rho \cos(\theta), \quad v = \rho \sin(\theta),$$

dove $0 < \rho$, $0 < \theta < \pi$. In queste coordinate la prima forma fondamentale diventa:

$$\mathbf{I}(d\rho, d\theta) = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{\rho^2 \sin(\theta)^2} = \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)^2}\, d\rho^2 + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\, d\theta^2$$

e, con l'ulteriore cambiamento di coordinate:

$$\psi = \int_{\pi_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\sin(\bar{\theta})}$$

(dove $0 < \pi_0 < \pi$) si ottiene un sistema di coordinate (ρ, ψ) rispetto al quale la prima forma fondamentale è:

$$\mathbf{I}(d\rho, d\psi) = E(\rho, \psi)d\rho^2 + d\psi^2.$$

Deduciamo, per il lemma 38.5, che le ψ-curve sono geodetiche per ogni scelta di u_0. Quindi sono geodetiche, e evidentemente massimali, in $\mathcal{H}$ le semicirconferenze centrate in un qualsiasi punto dell'asse u.

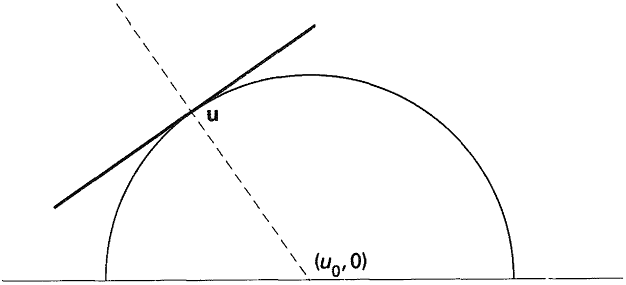


Figura 38.1

Per ogni punto $\mathbf{u} = (u, v) \in \mathcal{H}$ e per ogni direzione non verticale in $\mathbf{u}$ esiste una semicirconferenza centrata in qualche punto $(u_0, 0)$ passante per $\mathbf{u}$ e avente per tangente la direzione assegnata (fig. 38.1). Segue dal teorema di unicità 38.3 che non ci sono altre geodetiche massimali non costanti oltre le semicirconferenze della forma suddetta e le semirette verticali.

39 Geometrie non euclidee

Lo studio della geometria su basi logiche, svincolato dall'intuizione, fu iniziato nella Grecia antica. Negli *Elementi* di Euclide la geometria viene studiata per mezzo di assiomi formulati in modo esplicito. L'assiomatica degli *Elementi* è stata sostituita in tempi recenti da quella proposta da D. Hilbert alla fine del XIX secolo (Hilbert 1970), nella quale si distinguono, per la geometria piana, cinque diversi tipi di assiomi, e precisamente quelli di *incidenza*, *ordine*, *congruenza*, *parallele* e *continuità*.

Nell'assiomatica di Hilbert si assumono come oggetti primitivi i *punti* (denotati nel seguito con lettere maiuscole A, B, $C, \ldots$) e le *rette* (denotate con lettere minuscole a, b, $c, \ldots$) tra i quali sussistono delle relazioni primitive che sono:

l'*appartenenza* di un punto A a una retta a $(A \in a)$,

il *giacere* di un punto B tra altri due A e C (diremo che B sta tra A e C),

la *congruenza* di segmenti e la congruenza di angoli (i segmenti e gli angoli vengono definiti per mezzo degli assiomi, si veda più avanti).

Gli oggetti e le relazioni soddisfano ai seguenti assiomi:

(I) ASSIOMI DI INCIDENZA

(1) *Dati due punti distinti A e B, esiste un'unica retta $\overline{AB}$ che li contiene.*

(2) *Ogni retta contiene almeno due punti distinti.*

(3) *Esistono almeno tre punti non su una stessa retta.*

(II) ASSIOMI DI ORDINE

(1) *Dati tre punti A, B, C su una stessa retta, uno e uno solo di essi sta tra gli altri due.*

(2) *Se A e B sono due punti distinti, esiste almeno un punto $C \in \overline{AB}$ tale che B stia tra A e C.*

Dati due punti distinti A e B, l'insieme dei punti della retta $\overline{AB}$ che stanno tra A e B si chiama *segmento* di estremi A e B, e si denota con AB. Per definizione A e B non appartengono a AB.

(3) (Assioma di Pasch) *Se A, B, C sono tre punti non su una stessa retta e a è una retta che non contiene nessuno di essi ma interseca il segmento AB, allora a interseca il segmento BC oppure il segmento AC.*

A partire dagli assiomi di ordine si introducono in modo ben noto le nozioni di *semiretta*, *semipiano* e *angolo* definito da due semirette a, b di origine uno stesso punto, denotato $\angle(a,b)$. Se A, O e B sono tre punti non allineati, l'angolo definito dalle semirette di origine O e passanti per A e B rispettivamente, si denota $\angle(A,O,B)$. Se due segmenti AB e CD sono congruenti si scriverà $AB \equiv CD$. Se due angoli $\angle(a,b)$ e $\angle(a',b')$ sono congruenti si scriverà $\angle(a,b) \equiv \angle(a',b')$.

(III) ASSIOMI DI CONGRUENZA

(1) *Dato un segmento AB, una retta a, un punto $A' \in a$ e una delle semirette a' definite da A' in a, esiste un unico punto B' su a' tale che AB sia congruente a $A'B'$.*

(2) *Se due segmenti sono entrambi congruenti a un terzo, essi sono congruenti tra loro.*

(3) *Se A, B, C sono tre punti tali che B stia tra A e C e A_1, B_1, C_1 sono tali che B_1 stia tra A_1 e C_1, e se $AB \equiv A_1B_1$ e $BC \equiv B_1C_1$, allora $AC \equiv A_1C_1$.*

(4) *Siano $\angle(a,b)$ un angolo, a' una semiretta e σ uno dei due semipiani definiti dalla retta di a'. Allora esiste una e una sola semiretta b' in σ avente la stessa origine di a' tale che si abbia $\angle(a,b) \equiv \angle(a',b')$. Inoltre $\angle(a,b) \equiv \angle(a,b)$.*

(5) *Siano A, B, C tre punti non allineati, e A_1, B_1, C_1 tre altri punti non allineati tali che $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $\angle(B,A,C) \equiv \angle(B_1,A_1,C_1)$; allora*

$$\angle(A,B,C) \equiv \angle(A_1,B_1,C_1).$$

(IV) ASSIOMA DELLE PARALLELE *Data una retta a e un punto $A \notin a$, esiste una e una sola retta a' passante per A che non interseca a (le rette a, a' si dicono* parallele*).*

(V) ASSIOMI DI CONTINUITÀ

(1) (Assioma di Archimede) *Dati due segmenti AB e CD, esiste un numero finito di punti A_1, $A_2, \ldots, A_n$ della retta $\overline{AB}$ tali che:*

$$CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_{n-1}A_n$$

e B sta tra A e A_n.

(2) (Assioma di completezza lineare) *Se a è una retta e a' è un sottoinsieme del piano contenente a i cui punti soddisfano gli assiomi* (II), (III)(1) *e* (V)(1) *rispetto ad a, allora $a' = a$.*

Hilbert dimostrò la non-contraddittorietà di questo sistema di assiomi costruendone un modello per mezzo di coordinate, essenzialmente riconducendosi alla non-contraddittorietà dei numeri reali. La geometria che si ottiene è un modello di geometria euclidea piana. Un modello sostanzialmente equivalente a quello di Hilbert è un qualunque piano euclideo, cioè un piano affine reale definito su un piano vettoriale euclideo (studiato nei corsi di Geometria I).

Come è noto l'indipendenza degli assiomi della geometria euclidea è stata a lungo messa in dubbio, specialmente quella dell'assioma delle parallele rispetto agli altri. La questione fu risolta nella prima metà del secolo XIX con la scoperta da parte di N.I. Lobačevskij e J. Bolyai di un modello della cosiddetta *geometria non euclidea iperbolica*. Successivamente Riemann costruì un modello di *geometria non euclidea ellittica*, che differisce sia dalla geometria euclidea che dalla geometria iperbolica.

In entrambe queste geometrie l'assioma delle parallele è sostituito da un altro. Nella geometria ellittica esso è sostituito dal seguente:

(IV)$'$ *Data una retta a e un punto $A \notin a$, ogni retta passante per A interseca a.*

Un modello di geometria ellittica è costituito dalla sfera $\mathbf{S}^2$ in cui si prendono come rette le circonferenze massime. Poiché due circonferenze massime qualsiasi si intersecano, l'assioma delle parallele non vale ma vale l'assioma (IV)$'$. In questa geometria valgono gli assiomi di incidenza, ma non quelli dell'ordine, perché le rette di questa geometria sono curve chiuse e quindi non è possibile decidere di tre punti allineati quale stia tra altri due. Una descrizione della geometria ellittica si trova in Hilbert e Cohn-Vossen (1990), a cui rinviamo il lettore per maggiori dettagli. Poiché nella geometria ellittica l'assioma delle parallele non è l'unico a non valere, essa non dimostra che tale assioma è logicamente indipendente da *tutti* gli altri.

Tale requisito è invece posseduto dalla geometria iperbolica, nella quale l'assioma delle parallele è sostituito dal seguente:

(IV)$''$ *Data una retta a e un punto $A \notin a$, esistono almeno due rette passanti per A che non intersecano a.*

Un modello di geometria iperbolica è costituito dal semipiano di Poincaré $\mathcal{H}$ nel quale le rette sono definite come le immagini delle geodetiche non costanti, e cioè le semirette verticali e le semicirconferenze di centro un punto dell'asse x; chiameremo queste curve *rette iperboliche*.

Dati due punti distinti P, $Q \in \mathcal{H}$, esiste un'unica retta iperbolica contenente P e Q: se i due punti hanno la stessa ascissa allora sono contenuti in una stessa

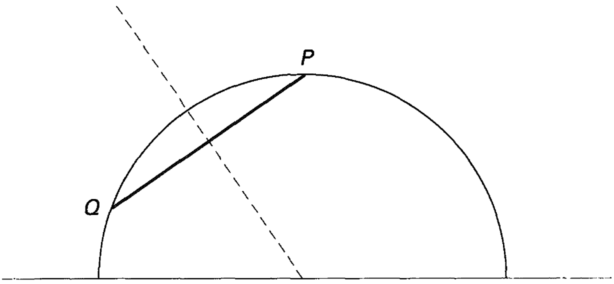


Figura 39.1

semiretta verticale; se invece hanno ascisse diverse allora sono contenuti nella semicirconferenza di centro il punto dell'asse x ottenuto come intersezione con la retta perpendicolare al segmento PQ e passante per il suo punto medio (fig. 39.1). È evidente l'unicità della retta iperbolica contenente P e Q e quindi gli assiomi di incidenza sono soddisfatti. La relazione di ordine è definibile in questa geometria e gli assiomi di ordine sono soddisfatti, come è facilmente verificabile.

Gli angoli iperbolici, i segmenti iperbolici, le semirette e i semipiani si definiscono in modo ovvio.

Per definire le relazioni di congruenza tra segmenti e tra angoli procederemo in modo analogo al caso euclideo. Le relazioni di congruenza nel piano euclideo sono definite per mezzo delle congruenze, che costituiscono un gruppo di trasformazioni del piano. Nel semipiano di Poincaré le congruenze sono sostituite dalle isometrie di $\mathcal{H}$, che costituiscono un gruppo di trasformazioni di $\mathcal{H}$ denotato $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. La validità degli assiomi di congruenza si verifica per mezzo delle proprietà del gruppo $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, come ora vedremo.

Consideriamo il gruppo $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$, che consiste delle trasformazioni $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ della forma seguente (in notazione complessa):

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{39.1}$$

dove $a, b, c, d \in \mathsf{R}$ e $ad - bc > 0$.

39.1 PROPOSIZIONE $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$. Se $z \in \mathcal{H}$, cioè se $z = x + iy$, con $y > 0$, allora $cz + d \neq 0$ e quindi $T(z) \in \mathsf{C}$ è definito; inoltre:

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd)+(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2} = u + iv$$

dove:

$$v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} > 0.$$

Quindi $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. D'altra parte si ha:

$$T^{\;1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad w \in \mathcal{H}$$

e quindi $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ e T è un diffeomorfismo di $\mathcal{H}$ in sé. Per verificare che T è un'isometria di $\mathcal{H}$ osserviamo che, posto $dz = dx + \mathrm{i}dy$ si ha

$$\mathbf{I}(dz) = \mathbf{I}(dx, dy) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

Poiché:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

otteniamo (cfr. esempio 22.5(4)):

$$T_{*z}(dz) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,dz = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}\,dz$$

e quindi:

$$\mathbf{I}(T_{*z}(dz)) = \frac{\left|\dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2}\,dz\right|^2}{v^2} = \left|\frac{ad - bc}{(cz + d)^2}\,dz\right|^2 \frac{|cz + d|^4}{(ad - bc)^2 y^2} = \mathbf{I}(dz).$$

Dunque T è un'isometria, cioè $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. ■

Poiché le geodetiche sono definite intrinsecamente esse sono mandate in sé da un'isometria. Segue da ciò e dalla proposizione 39.1 che *ogni* $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ *manda rette iperboliche in rette iperboliche.*

Per ogni $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathcal{H}$ la trasformazione

$$T_{z_0}(z) = \frac{1}{y_0}(z - x_0)$$

appartiene a $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ e soddisfa:

$$T_{z_0}(z_0) = \mathrm{i}.$$

Pertanto $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ *agisce transitivamente su* $\mathcal{H}$, perché per ogni z_0, $z_1 \in \mathcal{H}$ si ha:

$$(T_{z_1}^{-1} \cdot T_{z_0})(z_0) = z_1.$$

Sia $\theta \in \mathsf{R}$. La trasformazione:

$$S_\theta(z) = \frac{z + \mathrm{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{1 - z\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

appartiene a $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$, lascia fisso il punto i e induce sul piano tangente in i la rotazione di angolo θ. Infatti si calcola facilmente che:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}(\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\theta}.$$

Pertanto componendo opportunamente trasformazioni T_{z_0} e S_θ vediamo che $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ *agisce transitivamente sull'insieme delle coppie* (z_0, l_0) in cui z_0 è un punto di $\mathcal{H}$ e l_0 una retta iperbolica. Segue che $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ *agisce transitivamente sull'insieme delle semirette di* $\mathcal{H}$.

Le trasformazioni di $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ sono le analoghe delle congruenze del piano euclideo che preservano l'orientazione. La trasformazione

$$R(z) = -\bar{z}$$

lascia fissa la retta immaginaria e scambia tra loro i due semipiani $x > 0$ e $x < 0$. Si verifica immediatamente che $R \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$. Componendo R con gli elementi di $\mathrm{PSL}_2(\mathsf{R})$ si ottengono elementi di $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ della forma:

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

con a, b, c, $d \in \mathsf{R}$ tali che $ad - bc < 0$, ognuno dei quali viene detto una *riflessione iperbolica*.

È evidente che le proprietà del gruppo $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ che abbiamo descritto implicano la validità degli assiomi di congruenza.

L'assioma delle parallele è sostituito dall'assioma (IV)$''$. Infatti si verifica in modo elementare che, data una retta iperbolica l e un punto $z \notin l$ esistono infinite rette iperboliche contenenti z e disgiunte da l.

L'assioma (V)(1) dell'ordine afferma la possibilità di misurare i segmenti. Ciò è possibile mediante la nozione di lunghezza di una curva che è definita in una superficie riemanniana. La validità dell'assioma (V)(2) è ovvia.

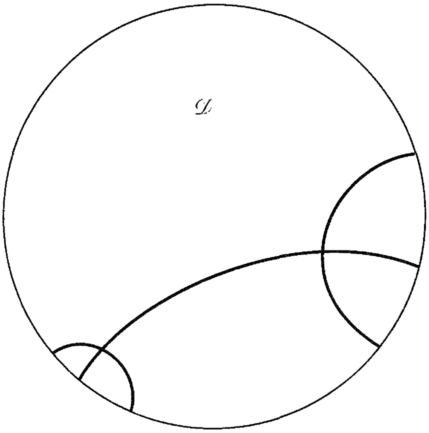


Figura 39.2

Quindi $\mathcal{H}$ è un modello di geometria non euclidea iperbolica.

Sappiamo che $\mathcal{H}$ è isometrico al disco iperbolico $\mathcal{D}$ (cfr. esempio 33.6(2)). Quindi anche $\mathcal{D}$ è un modello di geometria non euclidea iperbolica. In $\mathcal{D}$ le rette iperboliche sono le intersezioni con $\mathcal{D}$ delle circonferenze perpendicolari a $\mathbf{S}^1$ (fig. 39.2).

Come già osservato in precedenza, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{H}$ hanno una grande importanza concettuale perché dimostrano l'indipendenza logica dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi, risolvendo un problema rimasto in sospeso per molti secoli. Lo studio della geometria di $\mathcal{D}$ e $\mathcal{H}$ è anche interessante indipendentemente da questo fatto perché si collega a problemi assai profondi in teoria dei numeri, in analisi complessa, nella teoria delle superficie di Riemann. Il lettore interessato a questi sviluppi può consultare ad esempio Berger (1980), Jones e Singerman (1987), Lobačevskij (1994). Per un'esposizione elementare delle geometrie non euclidee rinviamo a Hilbert e Cohn-Vossen (1990) e Rees (1988).

Capitolo 7

Integrazione sulle varietà differenziabili

40 Algebra multilineare

Consideriamo uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione finita, definito su un campo K che supporremo di caratteristica 0. Sia $r \geq 1$ un intero; un *r-tensore* (sottinteso *covariante*), o *forma r-lineare* (o *forma multilineare di grado r*) su $\mathbf{V}$ è un'applicazione:

$$F : \mathbf{V}^r \to \mathsf{K}$$

definita sul prodotto cartesiano $\mathbf{V}^r = \mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V}$ e a valori nel campo K, che è lineare rispetto ad ognuno degli argomenti indipendentemente; in altre parole per ogni $i = 1, \ldots, r$ F soddisfa:

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, a\mathbf{v}_i + a'\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_r) = \\
&= aF(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_r) + a'F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_r)
\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}$, $a, a' \in \mathsf{K}$.

Uno 0-*tensore* è definito come una funzione costante $\mathbf{V} \to \mathsf{K}$.

Se $r = 1$ si ottiene la nozione di *forma lineare*, o *funzionale lineare*, $F : \mathbf{V} \to \mathsf{K}$ (cfr. Sernesi 1989, p. 133). Nel caso $r = 2$ F è una *forma bilineare* $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{K}$ (cfr. Sernesi 1989, p. 190). Il determinante

$$\det : \mathsf{K}^n \to \mathsf{K}$$

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, è un esempio di n-tensore su K^n.

L'insieme di tutti gli r-tensori su $\mathbf{V}$ si denota $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$. In particolare $\mathcal{T}^0(\mathbf{V}^\vee) = \mathsf{K}$, e $\mathcal{T}^1(\mathbf{V}^\vee) = \mathbf{V}^\vee$ è lo *spazio duale* di $\mathbf{V}$. La somma di due r-tensori F, $G \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ è un r-tensore $F+G$ che è definito come:

$$(F+G)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) + G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}.$$

È immediato verificare che $F+G$ è r-lineare. Il prodotto di un r-tensore F per uno scalare $a \in \mathsf{K}$ è un r-tensore aF che si definisce nel modo seguente:

$$(aF)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = aF(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}.$$

Si verifica subito che, dotato di queste operazioni, $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ è un K-spazio vettoriale in cui il vettore nullo è l'r-tensore identicamente nullo $0 : \mathbf{V}^r \to \mathsf{K}$.

Supponiamo che $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$, $G \in \mathcal{T}^s(\mathbf{V}^\vee)$ siano rispettivamente un r-tensore e un s-tensore su $\mathbf{V}$. Il *prodotto tensoriale* $F \otimes G$ è l'$(r+s)$-tensore su $\mathbf{V}$ così definito:

$$(F \otimes G)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{r+s}) = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) G(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{r+s}).$$

Si verifica immediatamente che $F \otimes G$ è $(r+s)$-lineare. In questo modo resta definita un'applicazione

$$\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee) \times \mathcal{T}^s(\mathbf{V}^\vee) \to \mathcal{T}^{r+s}(\mathbf{V}^\vee)$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &(F+F') \otimes G = F \otimes G + F' \otimes G \\ &F \otimes (G+G') = F \otimes G + F \otimes G' \\ &(aF) \otimes G = a(F \otimes G) = F \otimes (aG) \\ &(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H) \quad (\textit{proprietà associativa}) \end{aligned} \qquad [40.1]$$

per ogni F, $F' \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$, G, $G' \in \mathcal{T}^s(\mathbf{V}^\vee)$, $H \in \mathcal{T}^t(\mathbf{V}^\vee)$, $a \in \mathsf{K}$. Le verifiche sono elementari e vengono lasciate al lettore. Si osservi che in generale $F \otimes G \neq G \otimes F$. Inoltre grazie alla proprietà associativa è ben definito il prodotto tensoriale $F_1 \otimes \otimes \dots \otimes F_k$ di un numero finito qualsiasi di tensori $F_1, \dots, F_k$; se $F_i \in \mathcal{T}^{r_i}(\mathbf{V}^\vee)$ allora

$$F_1 \otimes \dots \otimes F_k \in \mathcal{T}^{r_1 + \dots + r_k}(\mathbf{V}^\vee).$$

Poniamo:

$$\mathcal{T}^*(\mathbf{V}^\vee) = \oplus_{r \geq 0} \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee).$$

Dalle [40.1] segue che con l'operazione di prodotto tensoriale $\mathcal{T}^*(\mathbf{V}^\vee)$ è una $\mathbb{K}$-algebra associativa graduata, che si chiama *algebra tensoriale* di $\mathbf{V}^\vee$.

Un *r-tensore F* si dice *decomponibile* se esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathbf{V}^\vee = \mathcal{T}^1(\mathbf{V}^\vee)$ tali che

$$F = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_r.$$

In tal caso si ha:

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = \varphi_1(\mathbf{v}_1)\varphi_2(\mathbf{v}_2) \dots \varphi_r(\mathbf{v}_r) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}.$$

40.1 DEFINIZIONE *Un* r-multiindice *su n elementi è un elemento I del prodotto cartesiano $\{1, \dots, n\}^r$, cioè è una r-upla ordinata $I = (i_1, \dots, i_r)$ di indici tali che $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$. Scriveremo $|I| = r$. Diremo I* crescente *se $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$; ovviamente se I è crescente allora $r \leq n$.*

Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$ e sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ la base duale; ricordiamo che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è la base di $\mathbf{V}^\vee$ definita dalle condizioni:

$$x_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij};$$

quindi, per ogni $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$ si ha:

$$x_i(\mathbf{v}) = a_i.$$

Per ogni scelta di un r-multiindice $I = (i_1, \dots, i_r)$ su n elementi possiamo considerare l'r-tensore decomponibile $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r}$. Per definizione si ha:

$$(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_r r}$$

se $\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{e}_n$, $j = 1, \dots, r$. In particolare, se $J = (j_1, \dots, j_r)$ allora:

$$(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r})(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } I \neq J \\ 1 & \text{se } I = J. \end{cases} \qquad [40.2]$$

Denoteremo talvolta $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r}$ con il simbolo $x_{i_1 i_2 \dots i_r}$, o ancora più brevemente con x_I. Gli r-tensori della forma $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r}$ sono in numero di n^r.

Abbiamo il seguente risultato.

40.2 PROPOSIZIONE *Fissata una base* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *di* $\mathbf{V}$, *e detta* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *la base duale, i tensori* $\{x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r} : 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n\}$ *costituiscono una base di* $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$. *In particolare* $\dim(\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)) = n^r$.

Dimostrazione. Siano F, $G \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$. Se per ogni r-multiindice I si ha

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) = G(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) \qquad [40.3]$$

allora, per la multilinearità, segue che $F = G$. Pertanto, dato $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$, e posto

$$G = \sum_{|I|=r} F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}) x_I,$$

si deve avere $F = G$, perché dalle [40.2] segue che le [40.3] sono soddisfatte. Quindi i tensori x_I generano $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$. D'altra parte, se

$$F = \sum_{|I|=r} a_I x_I = 0$$

allora per ogni r-multiindice J si ha:

$$0 = F(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_r}) = \sum_{|I|=r} a_I x_I(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_r}) = a_J$$

e quindi gli x_I sono anche linearmente indipendenti. ■

40.3 DEFINIZIONE *Un* r-tensore $F : \mathbf{V}^r \to \mathsf{K}$ *si dice* alterno *se per ogni coppia di indici* i, j *tale che* $1 \leq i < j \leq r$ *e per ogni scelta di* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \in \mathbf{V}^r$ *si ha:*

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_r) = -F(\mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_r) \qquad [40.4]$$

Il tensore determinante su K^n è un esempio di n-tensore alterno. Ogni 1-tensore è alterno perché la condizione della definizione è soddisfatta banalmente. L'r-tensore nullo su uno spazio $\mathbf{V}$ è alterno. Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale è un esempio di 2-tensore che non è alterno.

L'insieme di tutti gli r-tensori alterni su $\mathbf{V}$ si denota $\wedge^r\mathbf{V}^\vee$. È immediato verificare che $\wedge^r\mathbf{V}^\vee$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$. Porremo $\wedge^0\mathbf{V}^\vee = \mathcal{T}^0\mathbf{V}^\vee = \mathsf{K}$.

Denotiamo con σ_r il gruppo simmetrico su r elementi, cioè il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, r\}$. Come d'uso, per ogni $\pi \in \sigma_r$ denoteremo con $\varepsilon(\pi)$ il segno di π. Se $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ e $\pi \in \sigma_r$, possiamo definire un nuovo tensore $F^\pi \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ ponendo

$$F^\pi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = F(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(r)}).$$

40.4 LEMMA

(1) *Sia* $F \in \wedge^r\mathbf{V}^\vee$. *Se* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}$ *sono linearmente dipendenti allora* $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) = 0$. *In particolare* $\wedge^r\mathbf{V}^\vee = (0)$ *se* $r > \dim(\mathbf{V})$.

(2) *Un* r*-tensore* $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ *è alterno se e solo se*

$$F^\pi = \varepsilon(\pi)F \quad \textit{per ogni } \pi \in \sigma_r. \qquad [40.5]$$

Dimostrazione

(1) L'ultima affermazione è ovvia conseguenza della prima. Per dimostrare la prima possiamo supporre, salvo riordinare i vettori $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r$, il che non cambia la validità della conclusione, che si abbia $\mathbf{v}_r = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}$. Allora

$$F(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i F(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{r-1},\mathbf{v}_i).$$

Poiché F è alterno si ha $F(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{r-1},\mathbf{v}_i) = 0$ per ogni $i = 1,\dots,r-1$ perché due dei vettori $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{r-1}$, $\mathbf{v}_i$ sono uguali; quindi $F(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r) = 0$.

(2) La condizione [40.4] è equivalente a $F^\tau = \varepsilon(\tau)F$ per ogni trasposizione τ. Quindi se la condizione [40.5] è soddisfatta allora $F \in \wedge^r\mathbf{V}^\vee$. Se viceversa $F \in \wedge^r\mathbf{V}^\vee$ allora $F^\tau = \varepsilon(\tau)F$ per ogni trasposizione τ. Poiché $F^{(\pi\cdot\pi')} = (F^\pi)^{\pi'}$ per ogni π, $\pi' \in \sigma_r$, la [40.5] segue dal fatto che ogni permutazione è prodotto di trasposizioni. ■

Per ogni $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ definiamo un nuovo r-tensore $\mathrm{Alt}(F)$ ponendo

$$\mathrm{Alt}(F) = \frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\sigma_r} \varepsilon(\pi)F^\pi.$$

Esplicitamente si ha:

$$\mathrm{Alt}(F)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\sigma_r} \varepsilon(\pi)F(\mathbf{v}_{\pi(1)},\dots,\mathbf{v}_{\pi(r)}).$$

Si osservi che l'ipotesi che K abbia caratteristica 0 assicura che $r! \neq 0$ in K e quindi che questa definizione sia ben posta.

40.5 LEMMA

(1) $\mathrm{Alt}(F) \in \wedge^r\mathbf{V}^\vee$ *per ogni* $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$.

(2) $F \in \wedge^r\mathbf{V}^\vee$ *se e solo se* $\mathrm{Alt}(F) = F$. *In particolare* $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(G)) = G$ *per ogni* $G \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$.

(3) Alt *è un'applicazione lineare suriettiva*

$$\mathrm{Alt} : \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee) \to \wedge^r\mathbf{V}^\vee$$

Dimostrazione

(1) Poiché $(G+H)^\pi = G^\pi + H^\pi$ per ogni G, $H \in \mathcal{T}^t(\mathbf{V}^\vee)$, $\pi \in \sigma_r$, abbiamo:

$$\mathrm{Alt}(F)^\rho = \frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\sigma_r} \varepsilon(\pi)F^{\pi\cdot\rho} = \varepsilon(\rho)\frac{1}{r!}\sum_{\pi\in\sigma_r} \varepsilon(\pi\cdot\rho)F^{\pi\cdot\rho} =$$

$$= \varepsilon(\rho)\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\sigma_r} \varepsilon(\sigma)F^\sigma = \varepsilon(\rho)\mathrm{Alt}(F)$$

e la conclusione segue dalla (2) del lemma 40.4.

(2) Se $\mathrm{Alt}(F) = F$, allora $F \in \wedge^r \mathbf{V}^\vee$ per (1). Se viceversa $F \in \wedge^r \mathbf{V}^\vee$, allora:

$$\mathrm{Alt}(F) = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \sigma_r} \varepsilon(\pi) F^\pi = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \sigma_r} \varepsilon(\pi)\varepsilon(\pi) F = \frac{1}{r!}(r!F) = F$$

(3) Che Alt sia un'applicazione suriettiva da $\mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$ a $\wedge^r \mathbf{V}^\vee$ segue da (1) e (2). La verifica della linearità è lasciata al lettore. ■

Il prodotto tensoriale $F \otimes G$ di due tensori alterni $F \in \wedge^r \mathbf{V}^\vee$, $G \in \wedge^s \mathbf{V}^\vee$ non è alterno in generale. Per ovviare a questo inconveniente utilizziamo l'applicazione Alt definendo il *prodotto esterno* di $F \in \wedge^r \mathbf{V}^\vee$ e $G \in \wedge^s \mathbf{V}^\vee$ come l'$(r+s)$-tensore alterno

$$F \wedge G := \mathrm{Alt}(F \otimes G).$$

40.6 Lemma *Se* $F \in \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\vee)$, $G \in \mathcal{T}^s(\mathbf{V}^\vee)$ *e* $\mathrm{Alt}(F) = 0$, *allora*

$$\mathrm{Alt}(F \otimes G) = \mathrm{Alt}(G \otimes F) = 0$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+s} \in \mathbf{V}$. Allora:

$$\begin{aligned}&(r+s)!\,\mathrm{Alt}(F \otimes G)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+s}) = \\ &= \sum_{\pi \in \sigma_{r+s}} \varepsilon(\pi) F(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\pi(r)}) G(\mathbf{v}_{\pi(r+1)}, \mathbf{v}_{\pi(r+s)}).\end{aligned} \qquad [40.6]$$

Denotiamo con Δ il sottogruppo di σ_{r+s} consistente delle permutazioni δ tali che

$$\delta(r+1) = r+1, \ldots, \delta(r+s) = r+s,$$

cioè che lasciano fissi $r+1, \ldots, r+s$. Sia $\rho \in \sigma_{r+s}$ e sia

$$\Delta \cdot \rho = \{\delta \cdot \rho : \delta \in \Delta\}$$

la classe laterale destra di Δ rispetto a ρ. Poniamo $\mathbf{u}_1 = \rho(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathbf{u}_{r+s} = \rho(\mathbf{v}_{r+s})$. Allora per ogni $\delta \in \Delta$ si ha:

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\delta \cdot \rho) F(\mathbf{v}_{(\delta \cdot \rho)(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{(\delta \cdot \rho)(r)}) G(\mathbf{v}_{(\delta \cdot \rho)(r+1)}, \ldots, \mathbf{v}_{(\delta \cdot \rho)(r+s)}) = \\ &= \varepsilon(\rho)\varepsilon(\delta) F(\mathbf{u}_{\delta(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\delta(r)}) G(\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s})\end{aligned}$$

e pertanto:

$$\sum_{\pi\in\Delta\cdot\rho} \varepsilon(\pi)F(\mathbf{v}_{\pi(1)},\dots,\mathbf{v}_{\pi(r)})G(\mathbf{v}_{\pi(r+1)},\dots,\mathbf{v}_{\pi(r+s)}) =$$

$$= \left[\varepsilon(\rho)\sum_{\delta\in\Delta}\varepsilon(\delta)F(\mathbf{u}_{\delta(1)},\dots,\mathbf{u}_{\delta(r)})\right]G(\mathbf{u}_{r+1},\dots,\mathbf{u}_{r+s}) = \qquad [40.7]$$

$$= \varepsilon(\rho)r!\,\mathrm{Alt}(F)(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r)G(\mathbf{u}_{r+1},\dots,\mathbf{u}_{r+s}) = 0$$

Poiché σ_{r+s} è unione disgiunta di classi laterali $\Delta\cdot\rho$, il secondo membro della [40.6] si scompone in un numero finito di sommatorie [40.7], e quindi è 0: pertanto $\mathrm{Alt}(F\otimes G) = 0$. In modo simile si dimostra che $\mathrm{Alt}(G\otimes F) = 0$. ■

40.7 PROPOSIZIONE *Il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà:*

(1) $(F + F')\wedge G = F\wedge G + F'\wedge G$

(2) $G\wedge(F + F') = G\wedge F + G\wedge F'$

(3) $(aF)\wedge G = a(F\wedge G) = F\wedge(aG)$

(4) $G\wedge F = (-1)^{rs}F\wedge G$

(5) $(F\wedge G)\wedge H = F\wedge(G\wedge H)$

per ogni $F, F'\in\wedge^r\mathbf{V}^{\vee}$, $G\in\wedge^s\mathbf{V}^{\vee}$, $H\in\wedge^t\mathbf{V}^{\vee}$, $a\in\mathsf{K}$.

Dimostrazione. La dimostrazione delle (1), (2), (3) non presenta difficoltà ed è lasciata al lettore.

(4) Siano $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{s+r}\in\mathbf{V}$. Allora:

$$(G\otimes F)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{s+r}) = G(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s)F(\mathbf{v}_{s+1},\dots,\mathbf{v}_{s+r}) =$$

$$= F(\mathbf{v}_{s+1},\dots,\mathbf{v}_{s+r})G(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s) = (F\otimes G)(\mathbf{v}_{s+1},\dots,\mathbf{v}_{s+r},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s) =$$

$$= (F\otimes G)^{\sigma}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{s+r})$$

dove $\sigma\in\sigma_{s+r}$ è la permutazione

$$\sigma(1) = s+1,\dots,\sigma(r) = s+r,\ \ \sigma(r+1) = 1,\dots,\sigma(r+s) = s.$$

Pertanto, osservando che $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{rs}$, si ha:

$$G\wedge F = \mathrm{Alt}(G\otimes F) = \mathrm{Alt}((F\otimes G)^{\sigma}) = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Alt}(F\otimes G) = (-1)^{rs}F\wedge G.$$

(5) Poiché

$$\mathrm{Alt}(F\wedge G - F\otimes G) = \mathrm{Alt}(F\wedge G) - \mathrm{Alt}(F\otimes G) = F\wedge G - F\wedge G = 0$$

dal lemma 40.6 e dalla (1) segue che

$$(F \wedge G) \wedge H - \mathrm{Alt}(F \otimes G \otimes H) = \mathrm{Alt}[(F \wedge G) \otimes H - (F \otimes G) \otimes H] =$$

$$= \mathrm{Alt}[(F \wedge G - F \otimes G) \otimes H] = 0$$

Quindi

$$(F \wedge G) \wedge H = \mathrm{Alt}(F \otimes G \otimes H).$$

In modo simile si dimostra che anche

$$F \wedge (G \wedge H) = \mathrm{Alt}(F \otimes G \otimes H)$$

e la conclusione segue. ■

Consideriamo la somma diretta

$$\wedge^* \mathbf{V}^{\vee} := \oplus_{r \geq 0} \wedge^r \mathbf{V}^{\vee}.$$

La proprietà associativa (5) implica che è ben definito il prodotto esterno $F_1 \wedge \ldots \wedge F_r$ di un numero finito qualsiasi di tensori alterni $F_1, \ldots, F_r$. Più in generale dalla proposizione 40.7 segue che rispetto al prodotto esterno $\wedge^* \mathbf{V}^{\vee}$ è una K-algebra associativa graduata, che si chiama *algebra esterna*, o *algebra di Grassmann, di* $\mathbf{V}^{\vee}$.

Supponiamo che $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \wedge^1 \mathbf{V}^{\vee} = \mathbf{V}^{\vee}$. Dalla (4) della proposizione 40.7 segue che se $1 \leq i < j \leq r$ allora

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_j \wedge \ldots \wedge \varphi_i \wedge \ldots \wedge \varphi_r = -\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \wedge \ldots \wedge \varphi_j \wedge \ldots \wedge \varphi_r \in \wedge^r \mathbf{V}^{\vee}.$$

In particolare, se $\varphi_i = \varphi_j$ per qualche $i \neq j$ allora

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r = 0.$$

Più in generale, *se* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathbf{V}^{\vee}$ *sono linearmente dipendenti allora*

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r = 0.$$

La dimostrazione è simile a quella della (1) del lemma 40.4 e viene lasciata al lettore.

Vogliamo ora descrivere in modo più esplicito gli spazi $\wedge^r \mathbf{V}^{\vee}$.

40.8 TEOREMA *Sia* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *una base di* $\mathbf{V}$, *e sia* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *la base duale. Allora per ogni* $r \geq 1$ *i tensori alterni*

$$\{x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\} \qquad [40.8]$$

costituiscono una base di $\wedge^r \mathbf{V}^\vee$. *In particolare*

$$\dim(\wedge^r \mathbf{V}^\vee) = \begin{cases} \dbinom{n}{r} & \text{se } 1 \leq r \leq n \\ 0 & \text{se } r \geq n+1 \end{cases}$$

Dimostrazione. L'ultima affermazione, riguardante la dimensione di $\wedge^r \mathbf{V}^\vee$, segue dal fatto che gli r-multiindici crescenti su n elementi sono in numero di $\binom{n}{r}$ se $1 \leq r \leq n$ e non ce ne sono se $r > n$.

Se I è un r-multiindice in cui qualche indice è ripetuto, allora $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r} = 0$ per la (4) della proposizione 40.7 (cfr. le osservazioni precedenti). Inoltre, sempre per la (4) della proposizione 40.7, se un r-multiindice J è ottenuto da un r-multiindice I mediante una permutazione di segno ε, allora

$$x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_r} = \varepsilon x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}.$$

Pertanto il sottospazio di $\wedge^r \mathbf{V}^\vee$ generato dagli r-tensori alterni $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$ al variare di I tra *tutti* gli r-multiindici è uguale a quello generato dai soli tensori $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$ relativi a r-multiindici *crescenti*, cioè dai tensori [40.8].

Ciò premesso, sia $F \in \wedge^r \mathbf{V}^\vee$. Per la proposizione 40.2 esistono coefficienti $a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \in \mathsf{K}$ tali che $F = \sum_{|I|=r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} x_{i_1 i_2 \ldots i_r}$. Pertanto

$$F = \mathrm{Alt}(F) = \mathrm{Alt}\left(\sum_{|I|=r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} x_{i_1 i_2 \ldots i_r}\right) = \sum_{|I|=r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \mathrm{Alt}(x_{i_1 i_2 \ldots i_r}) =$$

$$= \sum_{|I|=r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}.$$

Per quanto abbiamo premesso ciò dimostra che F è combinazione lineare degli r-tensori [40.8], e quindi essi generano $\wedge^r \mathbf{V}^\vee$.

Dimostriamo che i [40.8] sono linearmente indipendenti. Se I è un r-multiindice crescente e J è un r-multiindice qualunque, allora

$$x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_r}) = [\mathrm{Alt}(x_{i_1 i_2 \ldots i_r})](\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_r}) =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \sigma_r} \varepsilon(\pi) x_{i_1 i_2 \ldots i_r}(\mathbf{e}_{j_{\pi(1)}}, \ldots, \mathbf{e}_{j_{\pi(r)}}).$$

Quindi:

$$x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_r}) = \begin{cases} \pm \dfrac{1}{r!} & \text{se } J \text{ è una permutazione di } I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ciò posto, supponiamo che si abbia:

$$0 = \sum_{\substack{|I|=r \\ I \text{ cresc.}}} a_I x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}.$$

Allora, per ogni r-multiindice crescente J si ha

$$0 = \sum a_I x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_r}) = \frac{1}{r!} a_J$$

e quindi tutti i coefficienti a_J sono nulli. ■

Si osservi che, in particolare, segue dal teorema precedente che $\dim(\wedge^n \mathbf{V}^\vee) = 1$ e quindi ogni n-tensore alterno su $\mathbf{V}$ è multiplo del tensore $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Scopriremo tra poco qual è questo tensore. Più in generale vogliamo renderci conto di come sono definiti esplicitamente i tensori $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$. Nei primi casi ciò è facile. Ad esempio, se $r = 2$, allora

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} [x_{i_1} \otimes x_{i_2} - x_{i_2} \otimes x_{i_1}](\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (a_{i_1 1} a_{i_2 2} - a_{i_2 1} a_{i_1 2}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix}$$

dove $\mathbf{v}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{ni}\mathbf{e}_n$.

In generale abbiamo il seguente risultato.

40.9 TEOREMA *Siano $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathbf{V}^\vee$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}$. Allora:*

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{v}_1) & \varphi_1(\mathbf{v}_2) & \ldots & \varphi_1(\mathbf{v}_r) \\ \varphi_2(\mathbf{v}_1) & \varphi_2(\mathbf{v}_2) & \ldots & \varphi_2(\mathbf{v}_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_r(\mathbf{v}_1) & \varphi_r(\mathbf{v}_2) & \ldots & \varphi_r(\mathbf{v}_r) \end{vmatrix} \qquad [40.9]$$

Dimostrazione

$$r!\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = r!\,\mathrm{Alt}(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_r)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) =$$

$$= \sum_{\pi \in \sigma_r} \varepsilon(\pi) \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_r(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\pi(r)}) =$$

$$= \sum_{\pi \in \sigma_r} \varepsilon(\pi) \varphi_1(\mathbf{v}_{\pi(1)}) \ldots \varphi_r(\mathbf{v}_{\pi(r)}) = \det(\varphi_i(\mathbf{v}_j)). \ ■$$

Dunque il determinante è il tensore alterno fondamentale per mezzo del quale ogni altro si può esprimere. Ad esempio, se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è la base duale allora

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \frac{1}{n!} \det((a_{ij}))$$

dove $\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n$, $j = 1, \ldots, n$. Più in generale, segue immediatamente dalla [40.9] che se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

è la matrice delle loro coordinate, allora

$$x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = \frac{1}{r!}\det(A_I)$$

dove abbiamo denotato con A_I la sottomatrice quadrata di A costituita dalle righe $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Sia $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. Ad essa è associata un'applicazione lineare, detta *trasposta* di L:

$$L^* : \mathbf{W}^\check{} \to \mathbf{V}^\check{}$$

$$L^*(\varphi) = \varphi \cdot L \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathbf{W}^\check{}.$$

Più in generale per ogni $r \geq 1$ l'applicazione

$$L^r : \mathbf{V}^r \to \mathbf{W}^r$$

$$L^r(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = (L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_r))$$

induce un'applicazione:

$$L^* : \mathcal{T}^r(\mathbf{W}^\check{}) \to \mathcal{T}^r(\mathbf{V}^\check{})$$

che ad ogni r-tensore $F : \mathbf{W}^r \to \mathsf{K}$ su $\mathbf{W}$ associa la composizione $F \cdot L^r : \mathbf{V}^r \to \mathsf{K}$; è immediato verificare che $L^*(F) := F \cdot L^r$ è un r-tensore su $\mathbf{V}$. È evidente che quest'applicazione è lineare e che induce un'applicazione lineare

$$L^* : \wedge^r \mathbf{W}^\check{} \to \wedge^r \mathbf{V}^\check{}.$$

Esplicitamente, per ogni $F \in \wedge^r \mathbf{W}^\check{}$ si ha:

$$[L^*(F)](\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = F(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_r)).$$

Le applicazioni L^* sono compatibili con il prodotto esterno, cioè si ha:

$$L^*(F) \wedge L^*(G) = L^*(F \wedge G)$$

per ogni $F \in \wedge^r \mathbf{W}^{\smile}$, $G \in \wedge^s \mathbf{W}^{\smile}$. In altre parole le applicazioni L^* definiscono un omomorfismo di algebre esterne:

$$L^* : \wedge^* \mathbf{W}^{\smile} \rightarrow \wedge^* \mathbf{V}^{\smile}.$$

La verifica è lasciata al lettore.

40.10 TEOREMA *Se* $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ *è un'applicazione lineare, e* $\dim(\mathbf{V}) = n$, *allora*

$$L^*(F) = \det(L)F$$

per ogni $F \in \wedge^n \mathbf{V}^{\smile}$.

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$, e sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la base duale. Poiché $\wedge^n \mathbf{V}$ è generato da $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$, sarà sufficiente dimostrare che:

$$L^*(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det(L) x_1 \wedge \ldots \wedge x_n,$$

ovvero che

$$[L^*(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)](\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(L)[x_1 \wedge \ldots \wedge x_n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)]$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$.

Applicando il teorema 40.9 troviamo:

$$[L^*(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)](\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = [L^*(x_1) \wedge \ldots \wedge L^*(x_n)](\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) =$$

$$= \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1(L(\mathbf{v}_1)) & x_1(L(\mathbf{v}_2)) & \ldots & x_1(L(\mathbf{v}_n)) \\ x_2(L(\mathbf{v}_1)) & x_2(L(\mathbf{v}_2)) & \ldots & x_2(L(\mathbf{v}_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n(L(\mathbf{v}_1)) & x_n(L(\mathbf{v}_2)) & \ldots & x_n(L(\mathbf{v}_n)) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n!} \det(L) \begin{vmatrix} x_1(\mathbf{v}_1) & x_1(\mathbf{v}_2) & \ldots & x_1(\mathbf{v}_n) \\ x_2(\mathbf{v}_1) & x_2(\mathbf{v}_2) & \ldots & x_2(\mathbf{v}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n(\mathbf{v}_1) & x_n(\mathbf{v}_2) & \ldots & x_n(\mathbf{v}_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \det(L)[x_1 \wedge \ldots \wedge x_n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)]. \blacksquare$$

Esaminiamo ora il caso di uno *spazio vettoriale euclideo*, cioè di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$, che supporremo di dimensione finita, in cui è definito un prodotto scalare $\bullet$. Diamo la seguente definizione.

40.11 DEFINIZIONE *Sia* $n = \dim(\mathbf{V})$, *e sia* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *una base ortonormale di* $\mathbf{V}$. *Se* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$, *il* volume n-dimensionale orientato *di* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *è*

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det((\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{v}_n \\ \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{v}_n \end{vmatrix}$$

Il volume n-dimensionale (non orientato) *di* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *è* $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)|$.

Osserviamo che il volume orientato è definito per una n-upla *ordinata* di vettori. Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$, mentre se sono linearmente indipendenti $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un numero positivo o negativo a seconda che la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sia concordemente o discordemente orientata con $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Nel caso $n = 1$ si ha $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1)| = \|\mathbf{v}_1\|$.

Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è la base duale di $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, allora, per la [40.9]:

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = n!\, x_1 \wedge \dots \wedge x_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

La definizione di $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ dipende dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$: se si cambia base ortonormale il volume mantiene lo stesso valore assoluto, e cambia di segno se e solo se la nuova base è discordemente orientata con $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. In particolare, $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *dipende solo dall'orientazione definita in* $\mathbf{V}$ *da* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)|$ *dipende solo dalla n-upla non ordinata* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Questi fatti seguono facilmente dal teorema 40.10, oppure dal seguente risultato, che consente di calcolare il volume orientato senza utilizzare la base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

40.12 PROPOSIZIONE *Supponiamo assegnata una base ortonormale* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *di* $\mathbf{V}$. *Per ogni n-upla ordinata* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *di vettori di* $\mathbf{V}$ *si ha:*

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \pm\sqrt{\det((\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j))} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n \bullet \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n \bullet \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \bullet \mathbf{v}_n \end{vmatrix}^{1/2}$$

dove si deve prendere il segno positivo (negativo) se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base concordemente (discordemente) orientata con* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^2 = \det({}^t(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j))\det((\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)) = \det[{}^t(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)).$$

Ora osserviamo che l'elemento di posto h, k della matrice ${}^t(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_h \bullet \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_k) = (\mathbf{v}_h \bullet \mathbf{v}_k)$$

perché $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è ortonormale. Quindi ${}^t(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j)(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j)$ e segue che:

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^2 = \det((\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j)).$$

L'ultima affermazione riguardante il segno di $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un'ovvia conseguenza della definizione. ■

Nel caso $n = 1$ la proposizione afferma che $\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1)^2$.

È facile verificare che in R^n con prodotto scalare standard $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|$ eguaglia il volume del parallelepipedo determinato dai segmenti orientati applicati in un punto $\mathbf{p}$ che rappresentano i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ (cfr. esercizio 2).

Esercizi

1. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono $k \leq n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{V}$ allora è ben definito il volume k-dimensionale $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)|$ considerando $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ come elementi dello spazio vettoriale euclideo $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. Se invece $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente dipendenti poniamo $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = 0$. Dimostrare che:

$$|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ w_{k+11} & w_{k+12} & \cdots & w_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

dove le righe della matrice a secondo membro sono le coordinate rispetto a una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbf{V}$ dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$, essendo $\{\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base ortonormale di $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle^{\perp}$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ sia concordemente orientata con $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

2. Dimostrare che in R^n con prodotto scalare standard $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|$ eguaglia il volume (nel senso della teoria della misura elementare) del parallelepipedo determinato dai segmenti orientati applicati in un punto $\mathbf{p}$ che rappresentano i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

3. Supponiamo che $\mathbf{V}$ sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 orientato. Dimostrare che $|\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\|$, dove $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ è il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

41 Varietà con bordo

Per la teoria dell'integrazione è opportuno considerare oggetti geometrici che introdurremo in questo paragrafo, più generali delle varietà differenziabili, che chiameremo "varietà con bordo". Le varietà con bordo comprendono come casi particolari le varietà differenziabili; sono inoltre varietà con bordo gli intervalli chiusi di R e i dischi chiusi.

Siano R^n_+ e R^n_- i *semispazi chiusi* di R^n, $n \geq 1$, definiti da:

$$\mathsf{R}^n_+ = \{\mathbf{u} \in \mathsf{R}^n : u_n \geq 0\}$$

$$\mathsf{R}^n_- = \{\mathbf{u} \in \mathsf{R}^n : u_n \leq 0\}$$

La frontiera di R^n_+ e di R^n_-, cioè l'iperpiano coordinato di equazione $u_n = 0$, verrà denotata R^{n-1}_0.

Sia $U \subset \mathsf{R}^n_+$ un aperto, e sia $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione. In accordo con la definizione data nel paragrafo 19 (p. 178), diremo F *differenziabile di classe* $C^{(k)}$ ($k \geq 1$, oppure $k = \infty$) se F possiede un'estensione di classe $C^{(k)}$ a un aperto *di* R^n contenente U. Questa definizione di differenziabilità coincide con quella usuale se U è contenuto in $\mathsf{R}^n_+ \backslash \mathsf{R}^{n-1}_0$ perché in tal caso U è già aperto in R^n. Diremo una *applicazione* $F : U \to \mathsf{R}^m$ *differenziabile di classe* $C^{(k)}$ se le sue componenti sono funzioni differenziabili di classe $C^{(k)}$. Se $U \subset \mathsf{R}^n_+$, $V \subset \mathsf{R}^m_+$ sono due aperti, un'applicazione $F : U \to V$ è *differenziabile di classe* $C^{(k)}$ se lo è come applicazione a valori in R^m. Se U, $V \subset \mathsf{R}^n_+$ sono aperti un *diffeomorfismo di classe* $C^{(k)}$ $F : U \to V$ è un'applicazione che possiede inversa $G : V \to U$ e tale che F e G siano differenziabili di classe $C^{(k)}$.

Considerazioni analoghe alle precedenti possono farsi se si sostituisce R^n_+ con R^n_-.

Nel seguito ci limiteremo a considerare esclusivamente funzioni e applicazioni differenziabili di classe $C^{(\infty)}$; pertanto il termine "differenziabile" sarà d'ora in poi sinonimo di "differenziabile di classe $C^{(\infty)}$".

41.1 LEMMA *Siano U, V due aperti di R^n_+ (rispettivamente di R^n_-) e sia $F : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora F induce un diffeomorfismo $U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0 \to$ $\to V \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$.*

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso di R^n_+. Sia G il diffeomorfismo inverso di F. $U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ e $V \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ sono aperti di $\mathsf{R}^{n-1}_0 = \mathsf{R}^{n-1}$, e le restrizioni di F a $U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ e di G a $V \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ sono differenziabili. Quindi sarà sufficiente dimostrare che

$$F(U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0) \subset V \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$$

$$G(V \cap \mathsf{R}^{n-1}_0) \subset U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0.$$

Dimostriamo la prima inclusione. Supponiamo per assurdo che $F(\mathbf{u}) \in V\backslash V\cap \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ per qualche $\mathbf{u} \in U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$. Per definizione F possiede un'estensione differenziabile $\tilde{F}$ a un aperto $\tilde{U}$ di R^n contenente U. La composizione $\tilde{F} \cdot G$ è l'identità in $V\backslash V\cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ perché coincide con $F \cdot G$. Pertanto G è un diffeomorfismo locale, e quindi manda un intorno W di $F(\mathbf{u})$ in $V\backslash V\cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ in un intorno $G(W)$ di $\mathbf{u}$ in R^n. Ma $G(W)$ non è contenuto in R^n_+, e quindi non è contenuto in U, una contraddizione. La seconda inclusione si dimostra in modo simile. ■

Consideriamo uno spazio topologico X di Hausdorff a base numerabile. Una coppia (U, φ_U) in cui $U \subset X$ è un aperto e φ_U è un omeomorfismo di U su un aperto di R^n_+, $n \geq 1$, si dirà una *n-carta locale con bordo* in X. Due n-carte locali con bordo (U, φ_U) e (V, φ_V) in X si diranno *differenziabilmente compatibili* se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione

$$\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \mathsf{R}^n_+$$

è differenziabile. La terminologia introdotta nel paragrafo 19 a proposito delle carte locali si estende in modo ovvio a questo caso. Parleremo in particolare di *coordinate locali*, *aperti coordinatizzati*, ecc.

Un *n-atlante differenziabile con bordo in X* è una famiglia di n-carte locali con bordo $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di X e le carte locali $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ siano a due a due differenziabilmente compatibili. Se in X è assegnato un n-atlante differenziabile con bordo diremo che X è una *n-varietà (differenziabile) con bordo*; diremo n la *dimensione di X*. Diremo che l'atlante assegnato definisce una *struttura di varietà con bordo*. Le nozioni di *equivalenza tra n-atlanti differenziabili con bordo* e di *atlante differenziabile con bordo massimale* vengono date come nel paragrafo 19.

D'ora in poi utilizzeremo anche la dicitura *∂-varietà* come sinonimo di "varietà con bordo". Parleremo anche di *varietà senza bordo* per riferirci a varietà differenziabili nel senso della definizione 19.3.

Nel caso $n = 1$ è opportuno ammettere nella definizione di 1-varietà con bordo che le immagini delle 1-carte locali siano aperti di R^1_+ o di R^1 indifferentemente, altrimenti avremmo difficoltà nella definizione di orientazione (cfr. esempio 41.4(1)).

Sia X una n-varietà con bordo. Il *bordo* di X è il sottoinsieme ∂X consistente dei punti $x \in X$ che sono controimmagine di punti di R^{n-1}_0 rispetto a qualche carta locale (fig. 41.1). Nel caso in cui $\partial X = \emptyset$ la varietà X è una varietà senza bordo di dimensione n perché la struttura di varietà in X è definita da un n-atlante differenziabile con bordo le cui carte locali hanno per immagine aperti di R^n, e quindi sono carte locali nel senso del paragrafo 19, e sono a due a due differenziabilmente compatibili. Viceversa se X è una varietà senza bordo, ogni sua carta locale può supporsi a valori in $\mathsf{R}^n_+\backslash \mathsf{R}^{n-1}_0$, dopo averla eventualmente

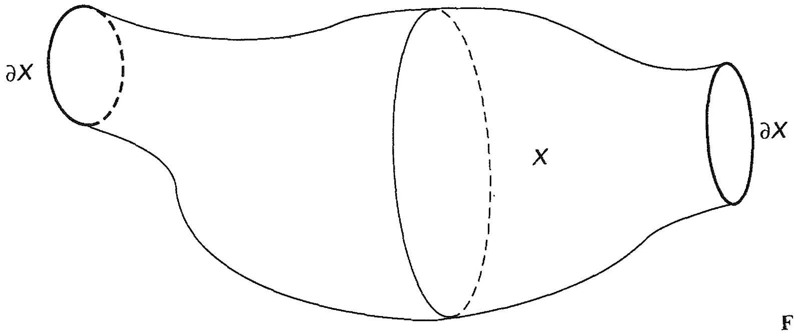


Figura 41.1

composta con il diffeomorfismo:

$$\xi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n_+ \backslash \mathsf{R}^{n-1}_0$$

$$\xi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, e^{u_n})$$

e quindi X è una varietà con bordo (il cui bordo è vuoto). Pertanto *le varietà senza bordo sono casi particolari di varietà con bordo.*

R^n_+ è un esempio di varietà con bordo, in cui l'identità di R^n_+ in sé è una carta locale che costituisce un atlante; ovviamente $\partial \mathsf{R}^n_+ = \mathsf{R}^{n-1}_0$. Più in generale, se $L : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ è un'applicazione lineare affine non costante, per ogni $c \in \mathsf{R}$ il sottoinsieme $\{\mathbf{u} \in \mathsf{R}^n : L(\mathbf{u}) \geq c\}$ è una varietà con bordo di dimensione n, il cui bordo è $\{\mathbf{u} : L(\mathbf{u}) = c\}$. Un aperto Y di una varietà con bordo X è una varietà con bordo della stessa dimensione e $\partial Y = Y \cap \partial X$.

41.2 PROPOSIZIONE *Se X è una ∂-varietà di dimensione n allora ∂X, se non è vuota, è una varietà senza bordo di dimensione $n - 1$.*

Dimostrazione. Sia $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ un n-atlante differenziabile con bordo in X. Sarà sufficiente far vedere che per ogni λ, $\mu \in \Lambda$

$$\varphi_\lambda^{-1}(\mathsf{R}^{n-1}_0) \cap U_\mu = \varphi_\mu^{-1}(\mathsf{R}^{n-1}_0) \cap U_\lambda, \qquad [41.1]$$

cioè che se un punto $x \in X$ appartiene a ∂X come elemento di un aperto coordinatizzato U_λ, allora x appartiene a ∂X rispetto a ogni altro aperto coordinatizzato a cui appartiene. Infatti una volta dimostrato questo fatto seguirà che per ogni $\lambda \in \Lambda$ la restrizione di φ_λ a $U_\lambda \cap \partial X$ è un omeomorfismo su un aperto di R^{n-1}_0 e quindi che la famiglia $\{(U_\lambda \cap \partial X, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ è un $(n-1)$-atlante differenziabile in ∂X.

La [41.1] è equivalente all'uguaglianza

$$\varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1}[\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \cap \mathsf{R}^{n-1}_0] = \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$$

la quale segue immediatamente dal lemma 41.1. ■

La definizione di *∂-sottovarietà* di una ∂-varietà si può introdurre in modo analogo alla definizione 25.1 di sottovarietà. Lasciamo al lettore il compito di darne la formulazione.

La nozione di *funzione differenziabile* $F : X \to \mathsf{R}$ su una ∂-varietà X si dà come per le varietà senza bordo. Similmente si dà la nozione di *morfismo* $f : X \to Y$ di X in un'altra ∂-varietà Y, e quindi anche la nozione di *diffeomorfismo* tra due ∂-varietà.

Se $p \in X$ denoteremo con $\mathcal{E}(X, p)$ l'insieme costituito dalle funzioni differenziabili a valori reali definite in un intorno di p. Un *vettore tangente* a X in p è un'applicazione

$$\mathbf{v} : \mathcal{E}(X, p) \to \mathsf{R}$$

soddisfacente alle condizioni [21.1]. L'insieme di tutti i vettori tangenti a X in p si chiama *spazio tangente a X in p* e si denota $T_p(X)$.

Le dimostrazioni del lemma 21.3 e della proposizione 21.4 si estendono alle varietà con bordo permettendo di concludere che *$T_p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a* $\dim(X)$ *per ogni $p \in X$*. Se $p \in \partial X$ allora $T_p(\partial X)$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1 di $T_p(X)$ (fig. 41.2).

Se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà con bordo e $p \in X$, il *differenziale di f in p*

$$f_{*p} : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$$

è l'applicazione lineare definita nel modo usuale:

$$f_{*p}(\mathbf{v})(F) = \mathbf{v}(F \cdot f)$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_p(X)$, $F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$. La proposizione 22.1 e il corollario 22.2 si estendono senza difficoltà.

Se U è un aperto di R^n_+, per ogni $\mathbf{x} \in U \cap [(\mathsf{R}^n_+ \setminus \mathsf{R}^{n-1}_0)]$ lo spazio tangente $T_{\mathbf{x}}(U)$ si identifica a R^n nel modo usuale. Se $\mathbf{x} \in U \cap \mathsf{R}^{n-1}_0$ l'identificazione di

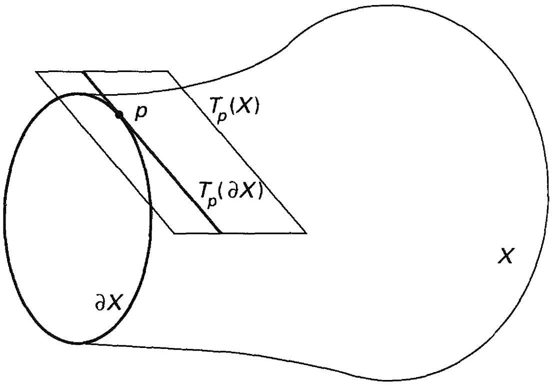


Figura 41.2

$T_{\mathbf{x}}(U)$ con $\mathbb{R}^n$ corrisponde alla base di $T_{\mathbf{x}}(U)$ costituita dalle derivazioni parziali $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{x})\right\}$; si deve però tenere presente che $\frac{\partial}{\partial u_i}(\mathbf{x})$ associa a $F \in \mathcal{E}(U, \mathbf{x})$ la derivata parziale $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i}(\mathbf{x})$ di un'estensione $\tilde{F}$ di F a un aperto $\tilde{U}$ di $\mathbb{R}^n$ contenente U (il lettore verifichi che questa derivata parziale è indipendente dall'estensione $\tilde{F}$ di F). Lo spazio $T_{\mathbf{x}}(U \cap \mathbb{R}^{n-1}_0)$ è il sottospazio di $T_{\mathbf{x}}(U)$ che ha per base $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial u_{n-1}}(\mathbf{x})\right\}$.

Se $f : U \to V$ è un morfismo di U in un aperto V di $\mathbb{R}^m_+$, e $\mathbf{x} \in U \cap [(\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathbb{R}^{n-1}_0)]$, il differenziale $f_{*\mathbf{x}}$ si calcola per mezzo della matrice jacobiana di f nel modo usuale. Se invece $\mathbf{x} \in U \cap \mathbb{R}^{n-1}_0$, allora $f_{*\mathbf{x}}$ si calcola per mezzo della matrice jacobiana di una qualsiasi estensione $\tilde{f}$ di f a un aperto $\tilde{U}$ di $\mathbb{R}^n$ contenente U. Considerazioni simili possono farsi per aperti di $\mathbb{R}^n_-$.

Anche la nozione di *campo vettoriale* si estende senza cambiamenti al caso delle varietà con bordo. Nel seguito, salvo esplicita menzione contraria, parlando di un campo vettoriale su una ∂-varietà X lo si supporrà sempre implicitamente differenziabile.

41.3 PROPOSIZIONE *Sia X una varietà senza bordo e sia $F : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile. Se $c \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di F allora i sottoinsiemi di X:*

$$\{p \in X : F(p) \geq c\} = F^{-1}([c, +\infty))$$

$$\{p \in X : F(p) \leq c\} = F^{-1}((-\infty, c])$$

se non vuoti, sono ∂-varietà il cui bordo, se non è vuoto, è $F^{-1}(c)$.

Dimostrazione. Sia $n = \dim(X)$. I sottoinsiemi $F^{-1}((c, +\infty))$ e $F^{-1}((-\infty, c))$ sono aperti di X e quindi sono varietà di dimensione n. Supponiamo $F^{-1}(c) \neq \emptyset$. Dalla dimostrazione del teorema 26.2 segue che ogni punto $p \in F^{-1}(c)$ possiede un intorno coordinatizzato in cui l'applicazione F è equivalente alla proiezione

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = x_n.$$

Poiché l'enunciato è ovvio per la proiezione π, segue la conclusione. ∎

La proposizione precedente permette di costruire facilmente esempi di varietà con bordo. Ad esempio il disco chiuso

$$\mathbf{D}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

è una varietà con bordo perché

$$\mathbf{D}^n = F^{-1}((-\infty, 1])$$

dove $F : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ è l'applicazione $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$. Similmente, le n-semisfere chiuse $\mathbf{S}^n_+$ e $\mathbf{S}^n_-$ in R^{n+1} (cfr. esempio 5.4(2)) sono n-varietà con bordo. Per altri esempi rinviamo agli esempi 41.4 e agli esercizi alla fine del paragrafo.

Una nozione importante che si estende alle varietà con bordo è quella di *orientabilità*. Supponiamo $n \geq 1$. Un *n-atlante con bordo* in una ∂-varietà X si dice *orientato* se le carte locali che vi appartengono sono a due a due concordemente orientate, avendo questa nozione una definizione del tutto analoga a quella del paragrafo 23. X si dice *orientabile* se possiede un atlante orientato. Come nel paragrafo 23, si definisce una *orientazione* su X. Se è orientabile, X possiede esattamente due *orientazioni*, che si dicono *opposte*. Una *∂-varietà* X in cui è assegnata un'orientazione si dirà *orientata*. Una orientazione su una varietà di dimensione 0 è definita come la scelta di un segno, +1 o −1, per ogni punto della varietà, cioè come un'applicazione $\varepsilon : X \to \{1, -1\}$.

Assegnata un'orientazione sulla ∂-varietà X, per ogni $p \in X$ resta assegnata un'orientazione sullo spazio tangente $T_p(X)$ per mezzo della base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ di $T_p(X)$, dove $x_1, \dots, x_n$ sono coordinate locali in p.

Siano X e Y ∂-varietà orientate della stessa dimensione n e $f : X \to Y$ un diffeomorfismo. Supponiamo che le orientazioni di X e di Y siano definite rispettivamente dall'atlante orientato $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ in X e dall'atlante orientato $\{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu\in M}$ in Y. Diremo che f *mantiene le orientazioni* se per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $\mu \in M$ la composizione $\psi_\mu \cdot f \cdot \varphi_\lambda^{-1}$ ha determinante jacobiano positivo in ogni punto in cui è definita.

Supponiamo $n \geq 2$. R^n_+ possiede un'orientazione naturale definita dalle coordinate locali $(u_1, \dots, u_n)$, che in ogni $\mathbf{u}$ corrisponde alla base $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{u})\right\}$ di $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}^n_+)$. Si definisce l'*orientazione indotta da* R^n_+ su $\partial\mathsf{R}^n_+ = \mathsf{R}^{n-1}_0$ come $(-1)^n$ l'orientazione definita dalle coordinate locali $(u_1, \dots, u_{n-1})$ in R^{n-1}_0, cioè come l'orientazione di $(u_1, \dots, u_{n-1})$ o l'opposta a seconda che n sia pari o dispari.

Nel caso $n = 1$ converremo che l'orientazione indotta da R^1_+ su $\{0\}$ sia −1, mentre l'orientazione indotta da R^1_- su $\{0\}$ sia +1.

Queste definizioni, anche se possono sembrare a prima vista artificiose, hanno una motivazione geometrica e permettono di eliminare i segni dall'enunciato del teorema di Stokes (cfr. §45). Estendiamo ora questa nozione al caso di una varietà qualsiasi.

Sia X una ∂-varietà orientata di dimensione $n \geq 2$ e supponiamo $\partial X \neq \emptyset$. Per ogni punto $p \in \partial X$ l'atlante orientato di X definisce coordinate locali $(x_1, \dots, x_n)$ in un intorno di p in X tali che $(x_1, \dots, x_{n-1})$ siano coordinate locali in un intorno di p in ∂X. È facile verificare che al variare di $p \in \partial X$ si ottiene in questo modo un atlante orientato su ∂X: definiamo l'*orientazione indotta da X su ∂X* come $(-1)^n$ l'orientazione definita da questo atlante orientato in ∂X. In particolare vediamo che se X è orientabile anche ∂X lo è, cioè una varietà senza bordo che è bordo di una ∂-varietà orientabile è anch'essa orientabile. Per ulteriori chiarimenti sull'orientazione indotta sul bordo di una ∂-varietà rinviamo gli esempi 41.4 e agli esercizi 3, 4, 5.

Su una varietà con bordo X una *partizione dell'unità* si definisce come nel caso delle varietà senza bordo, cioè come una famiglia di funzioni differenziabili $\{\rho_\alpha : X \to \mathsf{R}\}_{\alpha \in A}$ a valori non negativi tale che:

(a) La famiglia $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ è localmente finita;

(b) $\sum\limits_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ per ogni $x \in X$.

Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X la *partizione dell'unità* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si dice *subordinata a $\mathcal{U}$* se per ogni $\alpha \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U$.

Il teorema 29.3 che afferma l'esistenza di partizioni dell'unità subordinate a un dato ricoprimento aperto di una varietà senza bordo si estende con identico enunciato al caso delle varietà con bordo. La dimostrazione è la stessa; si deve solo sostituire al lemma 29.2 un analogo enunciato relativo ad aperti di R^n_+ (cfr. esercizio 6).

41.4 *Esempi*

1. Sia $\mathbf{J} = [a,b] \subset \mathsf{R}$ un intervallo chiuso e limitato. $\mathbf{J}$ è una ∂-varietà 1-dimensionale e $\partial\mathbf{J} = \{a,b\}$. Supponiamo $\mathbf{J}$ orientato secondo il verso delle t crescenti, cioè dall'atlante orientato $\{([a,b),\iota_a),((a,b],\iota_b)\}$, dove

$$\iota_a : [a,b) \to \mathsf{R}^1_+, \quad \iota_a(t) = t - a$$

$$\iota_b : (a,b] \to \mathsf{R}^1_-, \quad \iota_b(t) = t - b.$$

Allora l'orientazione indotta da $\mathbf{J}$ su $\partial\mathbf{J}$ è -1 su a e $+1$ su b.

Più in generale, se $f : \mathbf{J} \to X$ è un diffeomorfismo di $\mathbf{J}$ su una 1-varietà connessa con bordo, $\mathbf{J}$ induce, tramite f, un'orientazione su X corrispondente al verso di percorrenza secondo le t crescenti. L'orientazione indotta su ∂X è -1 nel punto iniziale $f(a)$ e $+1$ nel punto finale $f(b)$ (fig. 41.3).

2. Supponiamo che $X = \overline{A}$, dove A è un aperto connesso di R^2 tale che $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X)$ sia una sottovarietà 1-dimensionale senza bordo di R^2; nella letteratura X è spesso chiamato *dominio a frontiera regolare*. È facile verificare che X è una superficie con bordo tale che $\partial X = \mathrm{Fr}(X)$. L'orientazione naturale di R^2 induce un'orientazione su X, che in ogni $\mathbf{u} \in X$ è definita dalla base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dfrac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{u})\right\}$. Qual è l'orientazione, cioè il verso di percorrenza, indotta da

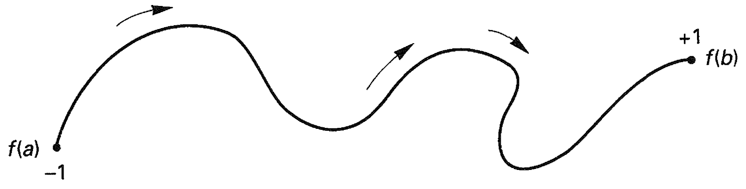


Figura 41.3

X su ∂X? Se $\mathbf{T}$ è il campo di versori tangenti a ∂X definito dall'orientazione, e se $\mathbf{N}$ è il campo di versori normali *esterni a* X, in ogni punto $\mathbf{u} \in \partial X$ l'orientazione definita da $\{\mathbf{N}(\mathbf{u}), \mathbf{T}(\mathbf{u})\}$ è concorde con quella definita da $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial u_2}(\mathbf{u})\right\}$ (cfr. esercizio 5). La figura 41.4 si riferisce all'orientazione antioraria del piano, nel qual caso il verso di percorrenza di ∂X è quello illustrato con una freccia in ogni sua componente connessa.

3. Sia $X = \overline{A}$, dove A è un aperto connesso di R^3 tale che $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X)$ sia una superficie senza bordo di R^3; anche in questo caso X è spesso detto *dominio a frontiera regolare* di R^3. Si verifica facilmente che X è una ∂-varietà di dimensione 3 tale che $\partial X = \mathrm{Fr}(X)$. L'orientazione naturale di R^3 induce un'orientazione di X, che induce un'orientazione della superficie ∂X. Questa orientazione è quella che corrisponde, nel senso del lemma 36.1, alla scelta del campo $\mathbf{N}$ di versori normali *esterni* a X. Infatti se $x : U \to \partial X$ è una parametrizzazione di un aperto di ∂X, e se con le notazioni del lemma 36.1 si ha $\mathbf{N} = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$, allora l'orientazione definita su ∂X dalla base $\{x_u, x_v\}$ è tale che in ogni punto $p \in \partial X$ la base $\{\mathbf{N}, x_u, x_v\}$ di $T_p(X)$ sia concordemente orientata con la base canonica. E quindi, per l'esercizio 5, essa coincide con l'orientazione indotta da X.

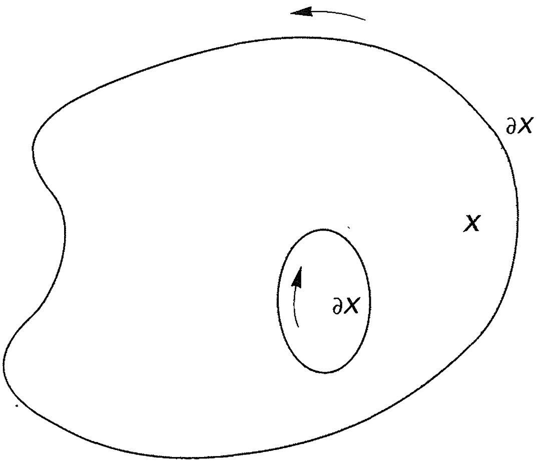


Figura 41.4

Lasciamo al lettore come esercizio il compito di generalizzare la nozione di *dominio a frontiera regolare di* R^n e di estendere a questo caso le considerazioni che abbiamo fatto riguardanti l'orientazione indotta sul bordo.

Esercizi

1. Sia X una varietà con bordo. Dimostrare che ∂X è chiuso in X. In particolare se X è compatta ∂X è una varietà senza bordo compatta.
2. Dimostrare che se X è una varietà con bordo e Y è una varietà senza bordo, allora il prodotto $X \times Y$ è una varietà con bordo e $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$.
3. Sia $\mathbf{u} \in \mathsf{R}_0^{n-1}$ e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ una base di $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}_0^{n-1})$ che appartiene all'orientazione indotta da R_+^n. Dimostrare che la base $\left\{-\frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{u}), \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\right\}$ di $T_{\mathbf{u}}(\mathsf{R}_+^n)$ è concordemente orientata con la base canonica $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{u})\right\}$.
4. Sia $p \in \partial X$, dove X è una ∂-varietà non necessariamente orientabile di dimensione n. Sia $U \subset \mathsf{R}_+^n$ un aperto contenente $\mathbf{0}$, e sia $\varphi : U \to X$ un diffeomorfismo su un aperto di X (cioè l'inverso di una carta locale) tale che $\varphi(\mathbf{0}) = p$. Nello spazio tangente $T_p(X)$ l'iperpiano $T_p(\partial X) = \varphi_{*\mathbf{0}}(T_{\mathbf{0}}(\mathsf{R}_0^{n-1}))$ definisce due semispazi chiusi, che sono $\varphi_{*\mathbf{0}}(\mathsf{R}_+^n)$ e $\varphi_{*\mathbf{0}}(\mathsf{R}_-^n)$. I *vettori* di $\varphi_{*\mathbf{0}}(\mathsf{R}_+^n) \backslash T_p(\partial X)$ si dicono *interni a* X, mentre i vettori appartenenti a $\varphi_{*\mathbf{0}}(\mathsf{R}^n) \backslash T_p(\partial X)$ si dicono *esterni a* X. Ad esempio $\varphi_{*\mathbf{0}}\left(\frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{0})\right)$ è un vettore interno a X. Dimostrare che la definizione di vettore tangente interno o esterno a X in p non dipende dalla scelta del diffeomorfismo φ.
5. Sia X una ∂-varietà orientata, e sia $p \in \partial X$. Dimostrare che se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ è una base di $T_p(\partial X)$ che appartiene all'orientazione indotta da X su ∂X, e se $\mathbf{v} \in T_p(X)$ è una vettore esterno a X, allora $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ appartiene all'orientazione di X.
6. Sia V un aperto di R_+^n e sia $K \subset V$ compatto e non vuoto. Dimostrare che esiste una funzione differenziabile $g : \mathsf{R}_+^n \to \mathsf{R}$ a supporto compatto contenuto in V e a valori in $[0, 1]$ tale che $g(\mathbf{u}) = 1$ per ogni $\mathbf{u} \in K$.
7. Sia X una ipersuperficie di R^{n+1}. Dimostrare che orientare X è equivalente ad assegnare un campo di versori normali ad X.

42 Forme differenziali

L'integrazione sulle varietà differenziabili con bordo è resa possibile da una corretta definizione di "integrando". Le forme differenziali sono oggetti a prima vista piuttosto macchinosi definiti sulle ∂-varietà, che però forniscono appunto la giusta nozione di integrando. Come tra poco vedremo, esse permettono di dare un significato a espressioni formali come ad esempio $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}x_i$, che intervengono come integrandi nella definizione di integrale di Riemann in R^n.

42.1 DEFINIZIONE *Sia X una ∂-varietà differenziabile. Sia $r \geq 1$ un intero. Una* r-forma differenziale *(o* forma differenziale di grado r*) ω su X è il dato $\omega(p)$ di un r-tensore alterno sullo spazio tangente $T_p(X)$ per ogni $p \in X$. In altre parole ω assegna un elemento $\omega(p) \in \Lambda^r[T_p(X)^\vee]$ ad ogni $p \in X$.*

Una 0-forma *è una funzione su X a valori reali.*

Le operazioni definite tra tensori alterni si possono applicare in ogni $p \in X$ per definire operazioni tra forme differenziali. Così, se ω_1, ω_2 sono due r-forme differenziali su X la loro *somma* $\omega_1 + \omega_2$ è definita come:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p) \quad \text{per ogni } p \in X$$

mentre il prodotto $c\omega$ di una r-forma differenziale su X per uno scalare $c \in \mathsf{R}$ è:

$$(c\omega)(p) = c\omega(p) \quad \text{per ogni } p \in X.$$

Se ω è una r-forma e ς è una s-forma, allora si definisce una $(r+s)$-forma $\omega \wedge \varsigma$ ponendo:

$$(\omega \wedge \varsigma)(p) = \omega(p) \wedge \varsigma(p) \quad \text{per ogni } p \in X.$$

Come caso particolare di questa definizione si ha il prodotto $F\omega$ di una funzione a valori reali (una 0-forma) per una r-forma, che è una r-forma. Si ha ovviamente:

$$\varsigma \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \varsigma. \qquad [42.1]$$

Una 1-forma associa a ogni punto $p \in X$ un funzionale lineare

$$\omega(p) : T_p(X) \to \mathsf{R}.$$

Ad ogni funzione differenziabile $F : X \to \mathsf{R}$ possiamo associare una 1-forma $\mathrm{d}F$ che in $p \in X$ è il differenziale di F in p:

$$\mathrm{d}F(p) = F_{*p} : T_p(X) \to \mathsf{R}$$

$\mathrm{d}F$ è detta *differenziale di F*.

Nel caso particolare di R^n, o di un aperto U di R^n_+, le funzioni coordinate $u_1, \ldots, u_n$ danno luogo alle 1-forme $\mathrm{d}u_1, \ldots, \mathrm{d}u_n$, che in un punto $\mathbf{u} \in U$ agiscono su $T_{\mathbf{u}}(U) = \mathsf{R}^n$ come proiezioni:

$$\mathrm{d}u_i(\mathbf{u})(x_1, \ldots, x_n) = x_i;$$

cioè $\{\mathrm{d}u_1(\mathbf{u}), \ldots, \mathrm{d}u_n(\mathbf{u})\}$ è la base di $(T_{\mathbf{u}}(U))^\vee$ duale della base canonica $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}(\mathbf{u})\right\}$. Se I è un r-multiindice, poniamo

$$\mathrm{d}u_I = \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_{i_r}.$$

Otteniamo un r-forma differenziale su U. Dal teorema 40.7 segue immediatamente la seguente proposizione:

42.2 PROPOSIZIONE *Ogni r-forma differenziale ω su un aperto U di R^n_+ o di R^n si può esprimere in modo unico come:*

$$\omega = \sum f_I \mathrm{d}u_I \tag{42.2}$$

dove la somma è estesa agli r-multiindici crescenti I e le f_I sono funzioni a valori reali su U.

Se ω è una 1-forma sull'aperto U di R^n_+, allora la sua espressione

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}u_i$$

può essere calcolata facilmente tenendo conto del fatto che

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i \left[\mathrm{d}u_i \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)\right] = f_j$$

perché $\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \delta_{ij}$. Più in generale, se ω è una r-forma su U, i coefficienti della sua espressione [42.2] sono dati dalla seguente formula:

$$f_{j_1 \dots j_r} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_{j_r}}\right). \tag{42.3}$$

Se ad esempio F è una funzione differenziabile a valori reali su U, il differenziale $\mathrm{d}F$ ha la seguente espressione:

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i} \mathrm{d}u_i \tag{42.4}$$

perché:

$$\left[\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)\right](\mathbf{u}) = F_{*\mathbf{u}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)(\mathbf{u})\right] = \frac{\partial F}{\partial u_j}(\mathbf{u}) \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in U.$$

Un esempio importante di n-forma su un aperto U di R^n_+ è la cosiddetta *forma di volume*

$$\mathrm{d}u_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}u_n$$

su cui torneremo più avanti.

Sia $f : X \to Y$ un morfismo di ∂-varietà, e sia ω una r-forma differenziale su Y. Definiamo una r-forma $f^*\omega$ su X ponendo:

$$f^*\omega(p) = (f_{*p})^*[\omega(f(p))]$$

dove

$$(f_{*p})^* : \wedge^r[T_{f(p)}(Y)^\vee] \to \wedge^r[T_p(X)^\vee]$$

è l'applicazione indotta da f_{*p} (cfr. p. 341). Diremo $f^*\omega$ la *r-forma immagine inversa di ω in X*. Se $r = 0$, cioè se ω è una funzione su Y, allora $f^*\omega = \omega \cdot f$.

Le seguenti formule sono facili da verificare e le loro dimostrazioni vengono pertanto lasciate al lettore:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 + \omega_2) &= f^*\omega_1 + f^*\omega_2 \\ f^*(\omega \wedge \varsigma) &= (f^*\omega) \wedge (f^*\varsigma). \end{aligned} \qquad [42.5]$$

Inoltre segue immediatamente dalla definizione che l'immagine inversa è compatibile con la composizione di morfismi, cioè che se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono morfismi di ∂-varietà e ω è una r-forma su Z, allora si ha l'uguaglianza di r-forme su X:

$$(g \cdot f)^*\omega = f^*(g^*\omega).$$

Siano $U \subset \mathsf{R}^n_+$, $V \subset \mathsf{R}^m_+$ aperti, e $f : U \to V$ un'applicazione differenziabile. Dette $x_1, \dots, x_m$ le funzioni coordinate in R^m, e $f_1, \dots, f_m$ le componenti di f, per ogni $\mathbf{u} \in U$ il differenziale:

$$f_{*\mathbf{u}} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$$

è l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$Jf(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}) \right),$$

e l'applicazione lineare indotta:

$$(f_{*\mathbf{u}})^* : (\mathsf{R}^m)^\vee \to (\mathsf{R}^n)^\vee$$

agisce come:

$$(f_{*\mathbf{u}})^*[\mathrm{d}x_i(f(\mathbf{u}))] = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})\mathrm{d}u_j(\mathbf{u}) = \mathrm{d}f_i(\mathbf{u}),$$

perché è definita dalla matrice ${}^tJf(\mathbf{u})$. Quindi, per la [42.4]:

$$f^*\mathrm{d}x_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j = \mathrm{d}f_i.$$

Segue dalla seconda delle [42.5] che per ogni r-multiindice I

$$f^*\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}f_I (= \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_{i_r})$$

e quindi applicando le [42.5] per una qualunque r-forma differenziale $\omega = \sum a_I \mathrm{d}x_I$ su V si ha:

$$f^*\omega = \sum (f^* a_I)\mathrm{d}f_I. \qquad [42.6]$$

Il risultato seguente descrive l'immagine inversa della forma di volume rispetto a un diffeomorfismo.

42.3 PROPOSIZIONE *Siano U, V aperti di R^n_+ o di R^n, e sia $f : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora:*

$$f^*(\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n) = \det(Jf)\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n.$$

Dimostrazione. Per la [42.6] abbiamo:

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n)(\mathbf{u}) &= \mathrm{d}f_1(\mathbf{u}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_n(\mathbf{u}) = \\ &= \left[\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial u_j}(\mathbf{u})\mathrm{d}u_j(\mathbf{u})\right] \wedge \ldots \wedge \left[\sum_j \frac{\partial f_n}{\partial u_j}(\mathbf{u})\mathrm{d}u_j(\mathbf{u})\right] = \\ &= \det(Jf(\mathbf{u}))\mathrm{d}u_1(\mathbf{u}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del teorema 40.10. ■

Una *r-forma differenziale ω su un aperto V* di R^n_+ si dirà *differenziabile* (sottinteso *di classe* $\mathrm{C}^{(\infty)}$) se nella sua espressione [42.2] le funzioni f_I sono differenziabili.

Sia X una ∂-varietà differenziabile di dimensione n, e sia ω una r-forma differenziale su X. La forma differenziale ω si dirà *differenziabile* se per ogni morfismo $\varphi : V \to X$ da un aperto V di R^n_+ che sia un diffeomorfismo su un aperto di X la forma differenziale $\varphi^*\omega$ su V è differenziabile. Perché ω sia differenziabile è sufficiente che la condizione sia verificata rispetto agli inversi delle carte locali di un atlante differenziabile $\{U_j, \varphi_j\}_{j \in J}$, cioè che $(\varphi_j^{-1})^*\omega$ sia differenziabile per ogni $j \in J$.

D'ora in poi considereremo soltanto forme differenziali differenziabili, e pertanto parleremo di forme differenziali sottintendendo l'aggettivo "differenziabile".

Se X è una ∂-varietà differenziabile e ω è una r-forma differenziale su X, il *supporto* di ω è la chiusura dell'insieme dei $p \in X$ tali che $\omega(p) \neq 0$. Quindi il supporto di ω è un chiuso, che denoteremo $\mathrm{supp}(\omega)$.

42.4 PROPOSIZIONE *Una ∂-varietà differenziabile X di dimensione n è orientabile se e solo se possiede una n-forma differenziale ovunque non nulla.*

Dimostrazione. Supponiamo che ω sia una n-forma differenziale ovunque non nulla su X. Sia $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ un atlante su X. Per $\lambda \in \Lambda$ si ha in U_λ:

$$(\varphi_\lambda)^*(\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n) = F_\lambda \omega$$

per un'opportuna funzione differenziabile F_λ su U_λ ovunque non nulla. A meno di sostituire la funzione coordinata u_1 con $-u_1$ possiamo supporre che F_λ sia ovunque positiva per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ma allora per ogni λ, $\mu \in \Lambda$ la funzione (se definita)

$$\varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \mathsf{R}^n_+$$

trasforma la forma di volume $du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ in un suo multiplo positivo. Per la proposizione 42.3, $\det(J(\varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1})) > 0$, e quindi $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ è un atlante orientato.

Viceversa supponiamo che X possieda un atlante orientato $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Allora

$$(\varphi_\mu \cdot \varphi_\lambda^{-1})^* du_1 \wedge \ldots \wedge du_n = J_{\lambda\mu} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

dove $J_{\lambda\mu}$ è una funzione ovunque positiva su $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$. Quindi su $U_\lambda \cap U_\mu$:

$$\varphi_\mu^* du_1 \wedge \ldots \wedge du_n = (\varphi_\lambda^* J_{\lambda\mu}) \varphi_\lambda^* du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \qquad [42.7]$$

dove $(\varphi_\lambda^* J_{\lambda\mu})$ è una funzione positiva in $U_\lambda \cap U_\mu$. Poniamo $\omega_\lambda = \varphi_\lambda^* du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e definiamo $\omega = \sum_\lambda \rho_\lambda \omega_\lambda$, dove $\{\rho_\lambda : U_\lambda \to \mathsf{R}\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\lambda\}$. Per la [42.7] in ogni punto $p \in U_\lambda$ $\omega(p)$ è somma di multipli positivi di $\omega_\lambda(p)$, e quindi $\omega(p) \neq 0$. Dunque ω è ovunque non nulla. ∎

Dalla dimostrazione della proposizione 42.4 segue che assegnare una orientazione su una ∂-varietà X di dimensione n è equivalente ad assegnare una n-forma differenziale ovunque non nulla su X, e quindi per orientare X occorre e basta scegliere una forma differenziale siffatta. Ad esempio l'orientazione standard su R^n corrisponde alla scelta della forma di volume $du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$, mentre l'orientazione opposta alla scelta della forma differenziale $-du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$. Altri esempi ed applicazioni di questo risultato verranno dati nei prossimi paragrafi.

Esercizi

1. Dimostrare che se U è un aperto di R^n, $F : U \to \mathsf{R}$ è una funzione differenziabile e $\mathbf{v} \in T_p(U)$ per qualche $p \in U$, allora

$$dF(p)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(F)_p$$

2. Sia $f : X \to Y$ un morfismo di ∂-varietà differenziabili e sia $F : Y \to \mathsf{R}$ una funzione differenziabile. Dimostrare che:

$$f^*(dF) = d(f^* F).$$

43 Integrazione sulle varietà con bordo

In questo paragrafo introdurremo la nozione di integrale su una ∂-varietà differenziabile: ciò si otterrà riconducendosi all'integrazione nello spazio euclideo per mezzo di carte locali. Mentre nello spazio euclideo si può parlare di integrale di una *funzione*, ciò non è possibile in una ∂-varietà qualsiasi, dove parleremo invece di integrale di una *forma differenziale*. Il motivo di ciò emergerà tra poco. La definizione di integrale che adotteremo in R^n è quella di Riemann: per essa e per le sue principali proprietà rinviamo a un testo di Analisi Matematica.

Un risultato importante riguardante l'integrazione in R^n è la cosiddetta *formula del cambiamento di variabili*, che può enunciarsi nel modo seguente.

43.1 TEOREMA *Sia $f : V \to U$ un diffeomorfismo tra due aperti di R^n, e sia F una funzione integrabile su U. Allora:*

$$\int_U F \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_V (F \cdot f)|\det(Jf)|\, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n. \qquad [43.1]$$

Un enunciato analogo sussiste se U e V sono aperti di R^n_+.

In questa formula abbiamo denotato con $x_1, \ldots, x_n$ le variabili correnti in U, e con $y_1, \ldots, y_n$ quelle in V; inoltre le scritture $F\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ e $(F \cdot f)|\det(Jf)|$ $\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$ denotano gli integrandi nella usuale notazione utilizzata nella teoria dell'integrazione in uno spazio euclideo. La [43.1] afferma che se si effettua il cambiamento di variabili determinato da f la trasformata $F \cdot f$ della funzione integranda F non è la funzione integranda rispetto alle nuove variabili: la nuova funzione integranda è invece $(F \cdot f)|\det(Jf)|$. Il fattore $|\det(Jf)|$ serve a compensare la distorsione infinitesimale di volume operata da f.

Se U è un aperto di R^n o di R^n_+ e $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione differenziabile, consideriamo la forma differenziale su U:

$$\omega = F\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Se F è integrabile su U (ad esempio se F ha supporto compatto in U) possiamo definire *l'integrale di ω esteso ad U* come

$$\int_U \omega := \int_U F\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Se V è un altro aperto di R^n o di R^n_+ e $f : V \to U$ un diffeomorfismo, per la proposizione 42.3 si ha:

$$f^*\omega = (F \cdot f)\det(Jf)\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n$$

e quindi dalla [43.1] deduciamo la formula:

$$\int_U \omega = \pm \int_V f^*\omega \tag{43.2}$$

dove si è supposto che $\det(Jf)$ abbia segno costante, e il segno a secondo membro è positivo o negativo a seconda che $\det(Jf)$ sia ovunque positivo oppure ovunque negativo su V, cioè a seconda che il diffeomorfismo f mantenga l'orientazione oppure no.

La formula [43.2] riesprime la [43.1] in modo più semplice e naturale. Ciò è dovuto alla proposizione 42.3, cioè al fatto che tramite un diffeomorfismo una forma differenziale si trasforma, a meno del segno, nello stesso modo in cui si trasforma un integrando. È questa proprietà che rende le forme differenziali gli oggetti più naturali da utilizzare come integrandi e che permette di estendere la definizione di integrale alle ∂-varietà orientate. Vediamo in che modo.

Sia X una ∂-varietà differenziabile di dimensione n *orientata*, $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un atlante orientato per X e sia ω una n-forma differenziale *a supporto compatto* su X.

Se $\mathrm{supp}(\omega)$ è contenuto in U_α per qualche $\alpha \in A$ poniamo:

$$\int_X \omega := \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*\omega \tag{43.3}$$

Se invece questa condizione non è soddisfatta consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Per ogni $\alpha \in A$ la forma differenziale $\rho_\alpha\omega$ ha supporto compatto contenuto in U_α. Possiamo quindi porre:

$$\int_X \omega := \sum_{\alpha\in A} \int_X \rho_\alpha\omega \tag{43.4}$$

Il risultato seguente assicura che la definizione [43.4] è ben posta.

43.2 PROPOSIZIONE *La definizione* [43.4] *dell'integrale* $\int_X \omega$ *è indipendente dall'atlante orientato* $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ *che definisce l'orientazione di* X *e dalla partizione dell'unità* $\{\rho_\alpha\}$.

Dimostrazione. Sia $\{V_\beta, \psi_\beta\}_{\beta\in B}$ un atlante orientato che definisce la stessa orientazione di $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, e $\{\sigma_\beta\}_{\beta\in B}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{V_\beta\}$. Osservando che $\mathrm{supp}(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) \subset U_\alpha \cap V_\beta$ per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ si ha:

$$(\varphi_\alpha \cdot \psi_\beta^{-1})^*[(\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega)] = (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega)$$

e pertanto, poiché φ_α e ψ_β sono orientate concordemente:

$$\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) =$$

$$= \int_{\psi_\beta(U_\alpha\cap V_\beta)} (\varphi_\alpha\cdot\psi_\beta^{-1})^*[(\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega)] = \int_{\psi_\beta(U_\alpha\cap V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) =$$

$$= \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega).$$

Poiché $\sum\limits_{\alpha\in A}\rho_\alpha = 1$ e $\sum\limits_{\beta\in B}\sigma_\beta = 1$, sfruttando la linearità dell'integrale in R^n si ha:

$$\sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\omega) = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \sum_\beta (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) =$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) = \sum_{\alpha\beta} \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) =$$

$$= \sum_\beta \int_{\psi_\beta(V_\beta)} \sum_\alpha (\psi_\beta^{-1})^*(\rho_\alpha\sigma_\beta\omega) = \sum_\beta \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\psi_\beta^{-1})^*(\sigma_\beta\omega). \ \blacksquare$$

È facile verificare che l'integrale su una ∂-varietà orientata X gode delle seguenti proprietà

$$\int_X (\omega_1 + \omega_2) = \int_X \omega_1 + \int_X \omega_2$$

$$\int_X (c\omega) = c\int_X \omega$$

comunque si prendano n-forme differenziali a supporto compatto ω_1 e ω_2 e $c \in \mathsf{R}$.

Si tenga presente che l'integrale $\int\limits_X \omega$ dipende dall'orientazione di X. Segue immediatamente dalla [43.2] che se si cambia l'orientazione di X l'integrale cambia di segno. Più precisamente, la [43.2] ha la seguente generalizzazione.

43.3 PROPOSIZIONE *Se X e Y sono ∂-varietà differenziabili connesse orientate di dimensione n, e $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo, allora per ogni n-forma differenziale ω a supporto compatto su Y si ha:*

$$\int_X f^*\omega = \pm\int_Y \omega$$

dove il segno a secondo membro è positivo o negativo a seconda che il diffeomorfismo f mantenga l'orientazione oppure no.

La dimostrazione è un facile esercizio e viene lasciata al lettore.

Una r-forma differenziale ω, con $r \neq n$, su una ∂-varietà X di dimensione n non può essere integrata; ma se si ha un morfismo $f : Y \to X$ da una ∂-varietà r-dimensionale orientata Y si può considerare l'immagine inversa $f^*\omega$ e integrare questa forma differenziale su Y. In particolare possiamo considerare una ∂-sottovarietà orientata Y di X di dimensione r e integrare la restrizione di ω a Y.

Le applicazioni più immediate dell'integrazione sulle ∂-varietà si hanno al calcolo di lunghezze, aree e volumi. Negli esempi che seguono esamineremo brevemente questo aspetto.

43.4 *Esempi*

1. Se X è un insieme finito, cioè una varietà compatta di dimensione 0, $\varepsilon : X \to \{\pm 1\}$ è una orientazione di X, e $F : X \to \mathsf{R}$ una funzione su X, interpretata come una 0-forma differenziale, si ha:

$$\int_X F = \sum_{x \in X} \varepsilon(x) F(x).$$

2. Sia U un aperto limitato di R^n. Allora si ha:

$$\int_U \mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n = \mathrm{mis}(U)$$

dove mis(U) è la misura di U nel senso della teoria dell'integrazione secondo Riemann. Ciò giustifica l'aver chiamato $\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n$ "forma di volume standard".

3. Sia $C \subset \mathsf{R}^n$ una varietà 1-dimensionale con bordo orientata, immagine diffeomorfa di un intervallo chiuso e limitato $\mathbf{J}$:

$$\alpha : \mathbf{J} \to \mathsf{R}^N.$$

La 1-forma differenziale ς su C definita come:

$$\varsigma(p)(\mathbf{v}) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{t} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in T_p(C),\ p \in C$$

dove $\mathbf{t} = \dfrac{\alpha'(p)}{\|\alpha'(p)\|}$, è detta *forma di lunghezza su C*. La sua immagine inversa su $\mathbf{I}$ è:

$$\alpha^*(\varsigma) = \sqrt{(\alpha_1')^2 + \ldots + (\alpha_N')^2}\, \mathrm{d}t \qquad [43.5]$$

e

$$L(C) := \int_C \varsigma = \int_J \alpha^*(\varsigma) = \int_J \sqrt{(\alpha'_1)^2 + \ldots + (\alpha'_N)^2}\,\mathrm{d}t$$

è *la lunghezza di* C, come è stata definita nel paragrafo 30 (p. 252). Per verificare la [43.5] si osservi che:

$$\alpha^*(\varsigma)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \varsigma\left(\alpha_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right) = \alpha_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \bullet \mathbf{t} = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + \ldots + (\alpha'_N)^2}.$$

Nello stesso modo si definisce la lunghezza di una 1-varietà compatta immagine di un morfismo $\alpha : [a,b] \to \mathsf{R}^N$ tale che $\alpha(a) = \alpha(b)$ (ad esempio una circonferenza).

4. Sia $X \subset \mathsf{R}^N$ una ∂-varietà orientata relativamente compatta di dimensione n, e sia ς la n-forma differenziale su X definita da:

$$\varsigma(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in T_p(X)$, $p \in X$, dove il volume è calcolato rispetto al prodotto scalare standard di R^N e all'orientazione di X. ς si chiama *forma di volume* su X e l'integrale $\int_X \varsigma$ è il *volume* di X, indicato con $\mathrm{vol}(X)$. Se $U \subset \mathsf{R}^n$ è un aperto e $x : U \to X$ è una parametrizzazione di un aperto di X, si ha

$$x^*(\varsigma) = \sqrt{\det((x_{u_i} \bullet x_{u_j}))}\,\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n$$

dove abbiamo denotato

$$x_{u_i} = x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \frac{\partial x_2}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial x_N}{\partial u_i}\right).$$

Si osservi che:

$$(x_{u_i} \bullet x_{u_j}) = {}^{\mathrm{t}}(Jx)Jx$$

e quindi

$$x^*(\varsigma) = \sqrt{\det({}^{\mathrm{t}}(Jx)Jx)}\,\mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n. \qquad [43.6]$$

Nel caso $n = 1$ riotteniamo la *forma di lunghezza* definita nell'esempio precedente. Nel caso $n = 2$ parleremo di *forma di area* e di *area* della superficie X, indicata con $A(X)$.

5. Sia S una ∂-superficie relativamente compatta di R^3. Se $x : U \to X$ è una parametrizzazione di un aperto di X allora:

$$x^*(\varsigma) = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv,$$

dove E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale su X, e quindi l'area dell'aperto $x(U)$ di S si calcola mediante l'integrale [33.7].

6. Sia $F : U \to \mathsf{R}$ una funzione differenziabile definita in un aperto limitato $U \subset \mathsf{R}^2$,

$$\Phi : U \to \mathsf{R}^3$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, F(u, v))$$

la corrispondente parametrizzazione di Monge e sia $X = \Phi(U) \subset \mathsf{R}^3$ il grafico di F. Poiché

$$J\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ F_u & F_v \end{pmatrix}$$

si ha

$$A(X) = \int_U \sqrt{1 + F_u^2 + F_v^2}\, du \wedge dv.$$

7. Per calcolare in pratica il volume di una ∂-varietà compatta o relativamente compatta X di R^N, o più in generale per integrare una forma differenziale ω su X, è sufficiente avere a disposizione una parametrizzazione $f : U \to X$ la cui immagine sia un aperto il cui complementare abbia volume n-dimensionale nullo (ad esempio sia una sottovarietà di dimensione minore di n) e integrare l'immagine inversa $f^*\varsigma$ o $f^*\omega$ su U.

Esercizi

1. Dimostrare che nel caso in cui X è un aperto limitato di R^N la forma di volume ς introdotta nell'esempio 43.4(4) coincide con la forma di volume standard.
2. Sia X una ipersuperficie relativamente compatta e orientata di R^{n+1} e sia $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_{n+1})$ il campo di versori normali che definisce l'orientazione di X. Dimostrare che la forma di volume ς su X ha la seguente espressione:

$$\varsigma = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} N_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

3. Dimostrare che la forma di volume sulla sfera $\mathbf{S}^n$ di R^{n+1} orientata dalla normale esterna è

$$\varsigma = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}.$$

4. Calcolare l'area della sfera $S(\mathbf{0}, r)$ di centro l'origine e raggio r di R^3.

5. Calcolare l'area della superficie $Z = \frac{2}{3}(u^{3/2} + v^{3/2})$, dove (u, v) varia nel triangolo aperto determinato dalle rette $u = 0$, $v = 0$, $u + v = 3$.

6. Calcolare l'area della *finestra di Viviani*, che è la ∂-superficie di R^3 contenuta nella sfera di equazione $X^2+Y^2+Z^2 = r^2$ ed interna al cilindro di equazione $X^2+Y^2-rX = 0$, dove $r > 0$.

7. Sia ω la 1-forma differenziale su $\mathsf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\omega(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}y.$$

Calcolare $\int_X \omega$, dove X è una circonferenza di centro l'origine e raggio r, orientata dalle normali esterne.

8. Sia S una superficie senza bordo compatta e orientata di R^3. L'integrale

$$\kappa(S) = \int_S K\varsigma$$

dove $K : S \to \mathsf{R}$ è la curvatura gaussiana di S, si chiama *curvatura totale* di S. Dimostrare che la curvatura totale di una sfera $S(\mathbf{p}, r)$ di centro un punto $\mathbf{p}$ e raggio $r > 0$ è 4π.

44 Differenziazione esterna

Le forme differenziali possono anche essere differenziate, oltre che integrate. Lo abbiamo già visto nel caso delle 0-forme, perché abbiamo definito un 1-forma $\mathrm{d}F$ per ogni funzione differenziabile $F : X \to \mathsf{R}$ su una ∂-varietà X.

Per estendere questa operazione a tutte le forme differenziali iniziamo dagli spazi euclidei. Sia U un aperto di R^n (o di R^n_+) e sia $\omega = \sum_I f_I \mathrm{d}u_I$ una forma differenziale di grado r su U. Definiamo il *differenziale esterno* (o *derivata esterna*) di ω come la $(r + 1)$-forma differenziale su U:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_I \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}u_I.$$

44.1 PROPOSIZIONE *La derivata esterna di forme differenziali su un aperto U di R^n (o di R^n_+) gode delle seguenti proprietà:*

(a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ (*linearità*) per ogni coppia di r-forme ω_1 e ω_2 su U;

(b) $d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (d\theta)$ per ogni r-forma ω e s-forma θ su U;

(c) $d(d\omega) = 0$ per ogni r-forma ω su U.

Dimostrazione

(a) è ovvia.

(b) Per la (a) è sufficiente dimostrare la (b) nel caso:

$$\omega = a_{i_1 i_2 \dots i_r} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}, \quad \theta = b_{j_1 j_2 \dots j_s} du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_s}.$$

Abbiamo

$$d(\omega \wedge \theta) = d[a_{i_1 i_2 \dots i_r} b_{j_1 j_2 \dots j_s} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_s}] =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_h} b_{j_1 j_2 \dots j_s} + a_{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial b_{j_1 j_2 \dots j_s}}{\partial u_h} \right) du_h \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_s} =$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_h} du_h \wedge \dots \wedge du_{i_r} \right) \wedge b_{j_1 j_2 \dots j_s} du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_s} +$$

$$+ (-1)^r a_{i_1 i_2 \dots i_r} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r} \wedge \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial b_{j_1 j_2 \dots j_s}}{\partial u_h} du_h \wedge du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_s} \right) =$$

$$= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (d\theta).$$

(c) Si ha:

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge du_I = \sum_I \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial u_i} du_i \right) \wedge du_I$$

e

$$d(d\omega) = \sum_I \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_I}{\partial u_i u_j} du_j \right) \wedge du_i \wedge du_I.$$

Ma poiché

$$\frac{\partial^2 f_I}{\partial u_i u_j} = \frac{\partial^2 f_I}{\partial u_j u_i}$$

e

$$du_j \wedge du_i = -du_i \wedge du_j$$

i termini della somma precedente si cancellano a due a due. ■

Per estendere la definizione di derivata esterna alle ∂-varietà si utilizza il seguente risultato:

44.2 PROPOSIZIONE *Sia $f : V \to U$ un diffeomorfismo tra due aperti di R^n (o di R^n_+) e sia ω una r-forma differenziale su U. Allora si ha l'identità di $(r+1)$-forme differenziali su V:*

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega).$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la proposizione nel caso:

$$\omega = a_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}u_{i_r}.$$

Chiamando $x_1, \dots, x_n$ le coordinate correnti in V si ha:

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = \mathrm{d}(f^*(a_{i_1 i_2 \dots i_r})\mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(a_{i_1 i_2 \dots i_r} \cdot f)}{\partial x_h} \mathrm{d}x_h \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r}.$$

D'altra parte:

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = f^* \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_k} \mathrm{d}u_k \wedge \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}u_{i_r} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f^* \left(\frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_k} \right) \mathrm{d}f_k \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f^* \left(\frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_k} \right) \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \mathrm{d}x_h \right) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r} =$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f^* \left(\frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial u_k} \right) \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \right) \mathrm{d}x_h \right) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(a_{i_1 i_2 \dots i_r} \cdot f)}{\partial x_h} \mathrm{d}x_h \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r} = \mathrm{d}(f^*\omega). \blacksquare$$

Ora possiamo definire la derivata esterna di una r-forma differenziale ω su una ∂-varietà qualsiasi X. La definizione verrà data localmente nel modo seguente. Sia $\varphi : U \to \mathsf{R}^n_+$ una carta locale in X, e definiamo $\mathrm{d}\omega$ su U come $\varphi^*[\mathrm{d}(\varphi^{-1*}\omega)]$. Se $\psi : V \to \mathsf{R}^n_+$ è un'altra carta locale in X, poniamo

$$f = \psi \cdot \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathsf{R}^n_+.$$

Allora:

$$f^*[\mathrm{d}(\psi^{-1*}\omega)] = \mathrm{d}[f^*(\psi^{\ 1*}\omega)] = \mathrm{d}[\psi^{-1} \cdot f)^*\omega] = \mathrm{d}(\varphi^{\ 1*}\omega)$$

e quindi su $U \cap V$ si ha:

$$\varphi^*[\mathrm{d}(\varphi^{\ 1*}\omega)] = \varphi^*[f^*(\mathrm{d}(\psi^{-1*}\omega))] = (f \cdot \varphi)^*[\mathrm{d}(\psi^{-1*}\omega)] = \psi^*[\mathrm{d}(\psi^{-1*}\omega)].$$

Pertanto le definizioni locali di $\mathrm{d}\omega$ sono compatibili tra loro, dando luogo ad una ben definita $(r+1)$-forma differenziale $\mathrm{d}\omega$ su X, che chiameremo *derivata esterna* (o *differenziale esterno*) di ω. La derivata esterna sulle ∂-varietà X gode di proprietà analoghe a quelle descritte dalla proposizione 44.1, che sono riassunte nel seguente enunciato.

44.3 TEOREMA *La derivata esterna su una ∂-varietà X gode delle seguenti proprietà, per ogni scelta di r-forme $\omega_1, \omega_2, \omega$ e di una s-forma θ:*

(a) $\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$.

(b) $\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (\mathrm{d}\theta)$.

(c) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

(d) *Se $F : X \to \mathsf{R}$ è una funzione differenziabile la derivata esterna* $\mathrm{d}F$ *coincide con il differenziale di F.*

La dimostrazione del teorema 44.3 è un facile esercizio e viene lasciata al lettore. Enunciamo anche il seguente risultato, che descrive una importante proprietà della derivata esterna.

44.4 TEOREMA *Sia $f : Y \to X$ un morfismo di ∂-varietà e sia ω una forma differenziale su X. Allora*

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega).$$

Dimostrazione. Il teorema è vero per le 0-forme (esercizio 42.2). Inoltre, se è vero per due forme ω e θ allora è anche vero per $\omega \wedge \theta$, grazie alla (b) del teorema 44.3. D'altra parte ogni forma su X è localmente esprimibile come $\sum_I a_I dx_I$ per opportune funzioni a_I, $x_1, \ldots, x_n$ e quindi il teorema vale localmente per ogni forma ω. Ma poiché la definizione di $\mathrm{d}\omega$ è locale la conclusione segue. ■

Una forma differenziale ω sulla ∂-varietà X si dirà *chiusa* se $\mathrm{d}\omega = 0$; ω si dirà *esatta* se esiste θ tale che $\omega = \mathrm{d}\theta$. Per la (c) del teorema 44.3 ogni forma esatta è anche chiusa; il viceversa non è vero (esercizio 1).

Esercizi

1. Dimostrare che la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}y$$

su $\mathrm{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ è chiusa ma non è esatta.

2. Sia X una ∂-varietà, $r \geq 0$ e siano

$$Z^r(X) = \{r\text{-forme differenziali chiuse } \omega\}$$

$$B^r(X) = \{r\text{-forme differenziali esatte } \omega\}.$$

(a) Dimostrare che $Z^r(X)$ e $B^r(X)$ sono spazi vettoriali reali e che $B^r(X)$ è un sottospazio di $Z^r(X)$. Lo spazio vettoriale quoziente $H^r_{DR}(X)$ si chiama *r-esimo gruppo di coomologia di De Rham* di X.

(b) Sia $f : X \to Y$ un morfismo di ∂-varietà. Dimostrare che f induce un'applicazione lineare

$$f^* : H^r_{DR}(Y) \to H^r_{DR}(X).$$

(c) Dimostrare che f^* gode delle seguenti proprietà:

(1) 1^*_X è l'identità di $H^r_{DR}(X)$.

(2) $(g \cdot f)^* = f^* \cdot g^* : H^r_{DR}(Z) \to D^r_{DR}(X)$ per ogni coppia di morfismi: $f : X \to Y,\ g : Y \to Z.$

Le (1) e (2) si dicono *proprietà funtoriali* della coomologia di De Rham.

(d) Dedurre dalle (c) che se X e Y sono ∂-varietà diffeomorfe allora $H^r_{DR}(X)$ e $H^r_{DR}(Y)$ sono isomorfi per ogni $r \geq 0$.

45 Il teorema di Stokes

Le operazioni di derivazione esterna e di integrazione delle forme differenziali sulle varietà con bordo, che sono di natura analitica, hanno una relazione notevole con l'operazione di natura geometrica che ad una ∂-varietà X associa il suo bordo ∂X. Questa relazione è contenuta nel teorema di Stokes generale, che generalizza un grande numero di formule dell'Analisi Matematica, e che interviene in molte circostanze in cui esistono relazioni tra geometria e analisi. Il suo enunciato è il seguente.

45.1 TEOREMA (Stokes) *Sia X una varietà con bordo orientata di dimensione n, e ω una $(n-1)$-forma differenziale a supporto compatto su X. Allora*

$$\int_X \mathrm{d}\omega = \int_{\partial X} \omega \qquad [45.1]$$

dove ∂X si intende dotato dell'orientazione indotta da X.

Prima di dare la dimostrazione del teorema di Stokes vogliamo considerare alcuni esempi.

45.2 *Esempi*

1. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e $F : [a, b] \to \mathsf{R}$ una funzione differenziabile. Allora il *teorema fondamentale del calcolo* afferma che

$$\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a). \qquad [45.2]$$

L'identità [45.2] è un caso particolare della [45.1] in cui si è presa $X = [a, b]$ orientata nel verso delle t-crescenti e $\omega = F$. Quindi il teorema di Stokes è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo.

2. Sia X un dominio a frontiera regolare di R^2 (cfr. esempio 41.4(2)) compatto, con l'orientazione indotta da quella naturale di R^2. ∂X è una varietà 1-dimensionale compatta Γ orientata dalla normale esterna (fig. 45.1).

Sia

$$\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

una 1-forma differenziale su X. Allora:

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

La [45.1] diventa in questo caso:

$$\int_\Gamma (P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y) = \int_X \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \qquad [45.3]$$

Questa identità è nota come *formula di Green nel piano*.

3. Sia X un dominio a frontiera regolare di R^3 (cfr. esempio 41.4(3)) compatto, con l'orientazione indotta da quella naturale di R^3. Il bordo ∂X è una varietà 2-dimensionale compatta Γ orientata dalla normale esterna.

Sia

$$\omega = P(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + R(x, y, z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

una 2-forma su X. Allora:

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

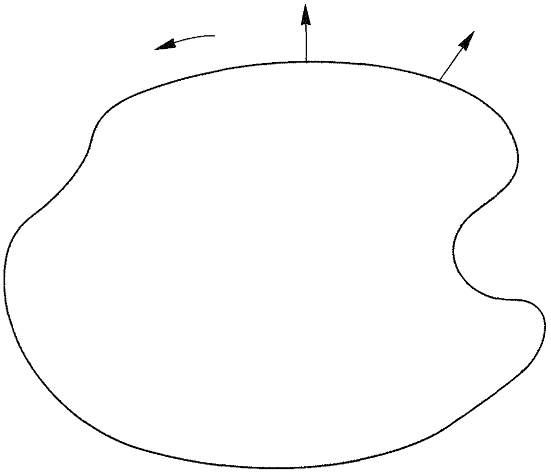


Figura 45.1

e la formula [45.1] dà in questo caso:

$$\int_{\Gamma} (P(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) =$$

$$= \int_{X} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Questa identità è conosciuta come *teorema della divergenza.*

4. Un altro caso particolare della [45.1] è il seguente. Sia X una superficie con bordo compatta e orientata di R^3. ∂X è una varietà 1-dimensionale compatta orientata (fig. 45.2).

Se

$$\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

è una 1-forma su X, allora

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

e la [45.1] dà:

$$\int_{\partial X} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z) =$$

$$= \int_{X} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \right].$$

Questo è il classico *teorema di Stokes in* R^3.

Dimostrazione del teorema 45.1. Poiché primo e secondo membro della [45.1] sono lineari in ω, possiamo utilizzare una partizione dell'unità e ridurci al caso in cui ω ha supporto compatto contenuto in un aperto coordinatizzato U. Sia $\phi : U \to \mathsf{R}^n_+$ una carta locale.

Supponiamo dapprima che $U \cap \partial X = \emptyset$, cioè che $\phi(U)$ sia un aperto di R^n. In questo caso

$$\int_{\partial X} \omega = 0$$

mentre

$$\int_X \mathrm{d}\omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathsf{R}^n} \mathrm{d}[(\phi^{-1})^*\omega]$$

perché $(\phi^{-1})^*\omega$ ha supporto compatto. Supponiamo che:

$$(\phi^{-1})^*\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n .$$

Allora:

$$\mathrm{d}[(\phi^{-1})^*\omega] = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

e quindi:

$$\int_{\mathsf{R}^n} \mathrm{d}[(\phi^{-1})^*\omega] = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathsf{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n . \qquad [45.4]$$

Per calcolare l'i-esimo addendo del secondo membro applichiamo il teorema di Fubini integrando prima rispetto a x_i. Otteniamo:

$$\int_{\mathsf{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{\mathsf{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n .$$

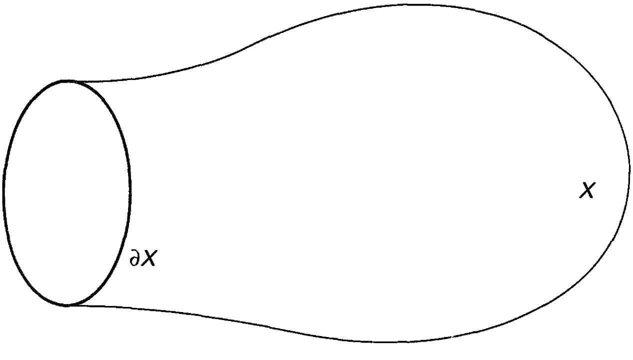


Figura 45.2

Poiché a_i ha supporto compatto, se $r \gg 0$ abbiamo:

$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \int_{r}^{r} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = a_i(r) - a_i(-r) = 0 - 0 = 0$$

Riassumendo otteniamo $\int_X \mathrm{d}\omega = 0$ e il teorema è dimostrato in questo caso.

Supponiamo ora che $\phi(U)$ sia un aperto di R^n_+ ma non necessariamente di R^n. Per calcolare $\int_X \mathrm{d}\omega$ possiamo ragionare come prima riducendoci alla [45.4]. Il calcolo del secondo membro della [45.4] può essere ripetuto per tutti gli addendi tranne l'ultimo. Si ottiene pertanto:

$$\int_{\mathsf{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = 0 \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

L'ultimo addendo è invece:

$$\int_{\mathsf{R}^n} \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{\mathsf{R}^{n-1}} \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1} =$$

$$\int_{\mathsf{R}^{n-1}} -a_n(x_1, \ldots, x_{n}\ {}_{1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che a_n ha supporto compatto e quindi:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = \int_{0}^{r} \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = 0 - a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

se $r \gg 0$. Riassumendo otteniamo:

$$\int_X \mathrm{d}\omega = \int_{\mathsf{R}^{n-1}} -a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}. \qquad [45.5]$$

Si ha d'altra parte:

$$\int_{\partial X} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathsf{R}^{n-1}_0} (-1)^{i-1} a_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{\mathsf{R}^{n\ 1}_0} (-1)^{n-1} a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}$$

perché $\mathrm{d}x_n = 0$ su R_0^{n-1}. Ora, ricordando la definizione dell'orientazione indotta da R_+^n su R_0^{n-1} deduciamo che si ha:

$$\int_{\mathsf{R}_0^{n-1}} (-1)^{n-1} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int_{\mathsf{R}^{n-1}} (-1)^{n-1} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{n-1} =$$

$$= -\int_{\mathsf{R}^{n-1}} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Confrontando con la [45.5] otteniamo la conclusione. ■

Un'utile conseguenza del teorema di Stokes è il seguente risultato.

45.3 TEOREMA *Siano X una ∂-varietà compatta orientata di dimensione $n+1$, Y una ∂-varietà di dimensione n, e $f : \partial X \to Y$ un morfismo. Se f possiede un'estensione ad un morfismo $\hat{f} : X \to Y$ allora per ogni n-forma differenziale ω su Y si ha:*

$$\int_{\partial X} f^*\omega = 0.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\int_{\partial X} f^*\omega = \int_{\partial X} \hat{f}^*\omega = \int_X \mathrm{d}(\hat{f}^*\omega) = \int_X \hat{f}(\mathrm{d}\omega) = 0$$

perché $\mathrm{d}\omega = 0$ essendo una $(n+1)$-forma su Y che ha dimensione n. ■

Come applicazione del teorema 45.3 dimostriamo la seguente *versione differenziabile del teorema del punto fisso di Brouwer:*

45.4 TEOREMA *Ogni morfismo $f : \mathbf{D}^{n+1} \to \mathbf{D}^{n+1}$ del disco unitario chiuso in sé possiede un punto fisso.*

Dimostrazione. Se f non ha punti fissi è possibile definire un morfismo

$$g : \mathbf{D}^{n+1} \to \mathbf{S}^n$$

in modo simile a quanto fatto nella dimostrazione del corollario 16.8. g è un'estensione dell'identità $\mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$. Dal teorema 45.3 applicato all'identità di $\mathbf{S}^n$ segue che $\int_{\mathbf{S}^n} \omega = 0$ per ogni n-forma differenziale su $\mathbf{S}^n$, e ciò è assurdo. ■

Risoluzione degli esercizi

§ 1

6. B e C.

7. A e B.

§ 2

14. Se $\mathcal{T}$ esiste deve coincidere con la famiglia

$$\{U \subset X : U \in \mathcal{N}(x) \text{ per ogni } x \in U\}$$

e quindi è unica. Facciamo vedere che questa famiglia è una topologia. Banalmente $\emptyset \in \mathcal{T}$. Sia $\{U_j\}_{j \in J}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{T}$ ed $U = \bigcup\limits_j U_j$. Se $x \in U$ allora $x \in U_j$ per qualche $j \in J$ e quindi $U_j \in \mathcal{N}(x)$; dalla (c) segue che anche anche $U \in \mathcal{N}(x)$, quindi $U \in \mathcal{T}$.
Siano $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ ed $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Allora $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{N}(x)$ e per la (b) $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{N}(x)$. Quindi $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$. Dimostriamo che $X \in \mathcal{T}$. Per ogni $x \in X$ segue dalla (a) che esiste $N \in \mathcal{N}(x)$ contenente x; per la (c) $X \in \mathcal{N}(x)$: quindi $X \in \mathcal{T}$.
Dimostriamo infine che per ogni $x \in X$ $\mathcal{N}(x)$ è il sistema degli intorni di x nella topologia $\mathcal{T}$. Se $N \in \mathcal{N}(x)$ allora, per la (d), esiste $M \in \mathcal{T}$ tale che $x \in M \subset N$: quindi N è un intorno di x. Se viceversa N è un intorno di x, allora per definizione di intorno esiste un aperto U tale che $x \in U \subset N$ e, per la definizione di $\mathcal{T}$, $U \in \mathcal{N}(x)$. Ma allora, per la (c), anche $N \in \mathcal{N}(x)$.

§ 4

2. (a) $\Rightarrow$ (b) e (a) $\Rightarrow$ (c) sono ovvie.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sia $x \in X$ e $N \in \mathcal{N}(f(x))$. Sia $B \in \mathcal{B}$ tale che $f(x) \in B \subset N$. Allora $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ e $f(f^{-1}(B)) \subset B \subset N$. Quindi f è continua in x.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sia $x \in X$ e $N \in \mathcal{N}(f(x))$. Siano poi $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tali che $f(x) \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subset N$. Allora $f^{-1}(S_1 \cap \dots \cap S_n) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$ è un intorno aperto di x; inoltre

$$f(f^{-1}(S_1 \cap \dots \cap S_n)) \subset S_1 \cap \dots \cap S_n \subset N$$

e quindi f è continua in x.

(a) $\Rightarrow$ (d) Poiché

$$V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(\overline{f(V)}),$$

e $f^{-1}(\overline{f(V)})$ è chiuso, si ha $\overline{V} \subset f^{-1}(\overline{f(V)})$ e quindi $f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)}$.

(d) $\Rightarrow$ (e) Poniamo $V = f^{-1}(W)$. Per la (d)

$$f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)} \subset \overline{W}$$

e prendendo le immagini inverse, $f^{-1}(f(\overline{V})) \subset f^{-1}(\overline{W})$. Poiché

$$\overline{f^{-1}(W)} = \overline{V} \subset f^{-1}(f(\overline{V}))$$

si ottiene $\overline{f^{-1}(W)} \subset f^{-1}(\overline{W})$.

(e) $\Rightarrow$ (a) Sia C un sottoinsieme chiuso di Y. Per la (e)

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(\overline{C}) \supset \overline{f^{-1}(C)}$$

e quindi $f^{-1}(C)$ è chiuso.

§ 5

11. A e D.

12. A e D.

13. A e B.

14. A e D.

15. C e D.

§ 7

11. Poiché H è discreto esiste un intorno aperto U di e tale che $U \cap H = \{e\}$. Per la continuità dell'applicazione

$$G \times G \to G$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

esiste un aperto $V \subset U$ contenente e tale che $g_1 g_2^{-1} \in U$ per ogni g_1, $g_2 \in V$. V è l'aperto cercato.

§ 8

13. Supponiamo X regolare e sia $F = X \backslash U$. Esistono aperti disgiunti A e B tali che $p \in A$ e $F \subset B$; si prenda $V = A$. Allora $\overline{V} \subset X \backslash B \subset U$.
Viceversa supponiamo la condizione soddisfatta e dimostriamo che X è regolare. Sia $F \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $p \notin F$. Poiché F è chiuso esiste un aperto U contenente p e tale che $F \cap U = \emptyset$. Sia V un aperto tale che $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Allora $A = V$, $B = X \backslash \overline{V}$ sono due aperti disgiunti e $p \in A$, $F \subset B$; quindi X è regolare.

15. Sia $\mathbf{X} = \prod_{\mu \in M} X_\mu$, X_μ spazi T_1 e siano u, $v \in X$ punti distinti. Sia $\mu \in M$ tale che $u(\mu) \neq v(\mu)$; siano U_μ, V_μ aperti di X_μ tali che $u(\mu) \in U_\mu$, $v(\mu) \notin U_\mu$, $u(\mu) \notin V_\mu$, $v(\mu) \in V_\mu$. Gli aperti di X:

$$U = p_\mu^{-1}(U_\mu), \quad V = p_\mu^{-1}(V_\mu)$$

soddisfano

$$u \in U, \quad v \notin V, \quad u \notin V, \quad v \in V.$$

16. Sia $X = \prod_{\mu \in M} X_\mu$, X_μ spazi regolari. Per dimostrare che X è regolare useremo la caratterizzazione data nell'esercizio 13. Per l'esercizio precedente X è uno spazio T_1. Sia $u \in X$ e U un aperto contenente u. Possiamo supporre U della forma:

$$U = p_{\mu_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\mu_s}^{-1}(U_s)$$

dove $\mu_1, \ldots, \mu_s \in M$, $U_j \subset X_{\mu_j}$ aperti opportuni contenenti $u_j = u(\mu_j)$. Per la regolarità degli X_μ esistono aperti $V_j \subset X_{\mu_j}$ tali che:

$$u_j \in V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j.$$

Allora

$$V = p_{\mu_1}^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap p_{\mu_s}^{-1}(V_s)$$

è un aperto tale che:

$$u \in V \subset \overline{V} \subset p_{\mu_1}^{-1}(\overline{V_1}) \cap \ldots \cap p_{\mu_s}^{-1}(\overline{V_s}) \subset p_{\mu_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\mu_s}^{-1}(U_s) = U.$$

§ 10

8. Rispetto a $\mathcal{T}$ lo spazio N è numerabilmente compatto perché ogni sottoinsieme non vuoto $S \subset \mathsf{N}$ possiede un punto di accumulazione: se infatti $s \in S$ allora $s + 1$ oppure $s - 1$ è un punto di accumulazione a seconda che s sia dispari oppure pari.
$(\mathsf{N}, \mathcal{T})$ non è compatto perché $\{\{2n - 1, 2n\}, n \geq 1\}$ è un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti finiti.
$(\mathsf{N}, \mathcal{T})$ non è compatto per successioni perché la successione $\{n\}$ non possiede sottosuccessioni convergenti.

§ 11

1. Sia $z \in \mathsf{R}\backslash\mathsf{Q}$. Allora $(-\infty, z) = \overline{(-\infty, z)}$ in Q.

2. C.

9. Non è restrittivo supporre $[a, b] = [-1, 1]$, perché due intervalli chiusi e limitati qualsiasi sono omeomorfi. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in [-1, 1]$ e definiamo un'applicazione continua $s : [-1, 1] \to \mathsf{R}$ ponendo:

$$s(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|} \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

La continuità di s segue da quella di f e dall'ipotesi che f non abbia punti fissi. Si ha evidentemente:

$$s(x) = \pm 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
$$s(-1) = -1, \quad s(1) = 1.$$

Quindi $s([-1, 1]) = \{-1, 1\}$. Ciò è assurdo perché $[-1, 1]$ è connesso mentre $\{-1, 1\}$ è sconnesso.

11. Se $t \neq 0$ allora X_t è un'iperbole equilatera, che ha due componenti connesse e quindi non è omeomorfa a R che è connesso. Se $t = 0$ allora $X_0 = r_x \cup r_y$ è l'unione degli assi coordinati: $X\backslash\{\mathbf{0}\}$ ha quattro componenti connesse mentre, per ogni $\alpha \in \mathsf{R}$, $\mathsf{R}\backslash\{\alpha\}$ ha due sole componenti connesse. Quindi non può esistere un omeomorfismo di X_0 su R.

12. (a) Nessun punto sconnette $\mathbf{S}^1$, mentre l'origine sconnette X.

(b) $X\backslash\{\mathbf{0}\}$ ha due componenti connesse omeomorfe a R mentre, per ogni $x \in \mathbf{I}$, $\mathbf{I}\backslash\{x\}$ è connesso oppure ha due componenti connesse ognuna delle quali è omeomorfa a un intervallo aperto da una parte e chiuso dall'altra e quindi non a R (cfr. esempio 11.14(1)).

16. A, C e D.

17. B e C.

18. A e D.

19. B, D e E.

§ 12

1. Sia $Y = \bigcup_{j \in J} K_j$, K_j sottoinsiemi connessi per archi di X tali che $\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset$, e sia $x \in \bigcap_{j \in J} K_j$. Siano y, $z \in Y$ due punti qualsiasi. Esistono λ, $\mu \in J$ tali che $y \in K_\lambda$, $z \in K_\mu$. Poiché K_λ e K_μ sono connessi per archi e $x \in K_\lambda \cap K_\mu$ esistono archi

$$a : \mathbf{I} \to K_\lambda, \quad b : \mathbf{I} \to K_\mu$$

tali che

$$a(0) = y, \quad a(1) = x = b(0), \quad b(1) = z.$$

L'applicazione $c : \mathbf{I} \to Y$ definita da:

$$c(t) = \begin{cases} a(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un arco in Y di estremi y e z.

3. Sia $p \in X$ un punto qualsiasi; poiché X è connesso sarà sufficiente dimostrare che $C_a(p)$ è un insieme aperto e chiuso in X. Sia $q \in \overline{C_a(p)}$; sia U un intorno connesso per archi di q e $s \in C_a(p) \cap U$. Esiste un arco $a : \mathbf{I} \to U$ tale che $a(0) = s$, $a(1) = q$; quindi $s \varepsilon q$ in U, e a maggior ragione $s \varepsilon q$ in X. Poiché $p \varepsilon s$ segue che $p \varepsilon q$, cioè $q \in C_a(p)$. Sia ora $q \in C_a(p)$; per la locale connessione per archi di X esiste un intorno U di q connesso per archi; quindi $U \subset C_a(q) = C_a(p)$ e quindi $C_a(p)$ è aperto.

§ 20

5. Consideriamo il caso $n = 2$. Le semisfere aperte di $\mathbf{S}^2$:

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 : x_1 > 0\}, \ \Sigma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 : x_2 > 0\}, \ \Sigma_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^2 : x_3 > 0\}$$

vengono mandate da p omeomorficamente su altrettanti aperti di $\mathbf{P}^2$ che ricoprono $\mathbf{P}^2$. Precisamente $p(\Sigma_i) = U_i = \{[\mathbf{x}] = [x_1, x_2, x_3] : x_i \neq 0\}$. Definiamo un'applicazione

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathsf{R}^2$$

$$\varphi_1([\mathbf{x}]) = \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right).$$

φ_1 è un omeomorfismo di U_1 sul disco aperto $\mathbf{D}^2$ perché la composizione $\varphi_1 \cdot p : \Sigma_1 \to \mathsf{R}^2$ coincide con la proiezione p_{23} sul piano $x_1 = 0$, che è una carta locale in $\mathbf{S}^2$ (perché inversa della parametrizzazione di Monge definita dalla funzione $f : \mathbf{D}^2 \to \mathsf{R}$, $f(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$). Quindi (U_1, φ_1) è una carta locale in $\mathbf{P}^2$. Similmente sono carte locali (U_2, φ_2) e (U_3, φ_3), dove:

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathsf{R}^2$$

$$\varphi_2([\mathbf{x}]) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right)$$

e

$$\varphi_3 : U_3 \to \mathsf{R}^2$$

$$\varphi_3([\mathbf{x}]) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right).$$

Resta da verificare che queste carte sono differenziabilmente compatibili. Ciò segue dall'esserlo le corrispondenti carte locali su $\mathbf{S}^2$: (Σ_3, p_{12}), (Σ_1, p_{23}), (Σ_2, p_{13}). Oppure può essere verificato direttamente. Ad esempio $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbf{D}^2 \cap A$, dove $A = \{(u, v) \in \in \mathsf{R}^2 : u \neq 0\}$, e si ha

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1} : \mathbf{D}^2 \cap A \to \mathsf{R}^2$$

$$[\varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1}](u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$$

che è un'applicazione differenziabile.
Quindi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)\}$ è un 2-atlante differenziabile su $\mathbf{P}^2$ che è una superficie differenziabile.
Nel caso generale $n \geq 3$ la costruzione di un n-atlante differenziabile su $\mathbf{P}^n$ è simile.

6. Nessun intorno di $(0, 0)$ in $XY = 0$ è omeomorfo a un intervallo perché l'origine lo disconnette in almeno quattro componenti connesse.

7. È sufficiente verificare che la composizione di f con l'applicazione differenziabile g è l'identità di R^2, dove $g(x, y, z)$ è definita in ciascun caso come segue:

(a) $g(x, y, z) = \left(x, \dfrac{y - z}{2}\right)$

(b) $g(x, y, z) = \left(\dfrac{z}{2}, y - x\right)$

(c) $g(x, y, z) = (y + z^2, z)$

(d) $g(x, y, z) = (y - 1, z)$

(e) $g(x, y, z) = \left(\dfrac{\ln(x) + \ln(z)}{2}, \dfrac{\ln(x) - \ln(z)}{2}\right)$.

§ 23

3. Sia $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ un atlante olomorfo in X. Per ogni i, $j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'applicazione

$$\varphi_j \cdot \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \mathsf{C}$$

essendo olomorfa, è anche C^∞, quindi X è una varietà differenziabile. Siano u e v rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $\varphi_j \cdot \varphi_i^{-1}$. La matrice jacobiana ha determinante

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

il quale è positivo in ogni punto per l'olomorfia dell'applicazione inversa di $\varphi_j \cdot \varphi_i^{-1}$.

§ 32

5. $$\kappa(t) = \frac{a^{-1} \cosh\left(\frac{t}{a}\right)}{\sqrt{\left(1 + \sinh\left(\frac{t}{a}\right)^2\right)^3}}.$$

6. $\mathbf{c}(t) = (-be^{bt}\sin(t), be^{bt}\cos(t))$.

7. (a) $\mathbf{T} = (0,0,-1)$, $\mathbf{N} = (-1,0,0)$, $\mathbf{B} = (0,1,0)$, $\kappa = 2$, $\tau = -3$; raggio di curvatura: $\frac{1}{2}$; centro di curvatura: $\left(\frac{1}{2},0,1\right)$; piano osculatore: $Y = 0$.

(b) $\mathbf{T} = (0,0,1)$, $\mathbf{N} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\kappa = \sqrt{5}$, $\tau = 0$; piano osculatore: $X - 2Y + 1 = 0$; centro di curvatura: $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$.

(c) $\mathbf{T} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\mathbf{N} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\kappa = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\tau = \frac{1}{2}$; piano osculatore: $X - Y + Z = 0$; centro di curvatura: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(d) $\mathbf{T} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\mathbf{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}\right)$, $\mathbf{B} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$, $\kappa = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$, $\tau = \frac{3}{7}$; centro di curvatura: $\left(\frac{5}{7}, \frac{25}{21}, -\frac{15}{14}\right)$; piano osculatore: $3X+2Y+Z+\frac{5}{6} = 0$.

§ 35

4. $E = \frac{3}{2}$, $F = \frac{1}{2}$, $G = \frac{3}{2}$, $\mathcal{L} = \frac{1}{4}$, $\mathcal{M} = -\frac{1}{4}$, $\mathcal{N} = \frac{1}{4}$, $K = 0$, $H = \frac{1}{4}$, k_1, $k_2 = \frac{1}{2}$, 0. $\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, piano tangente: $\sqrt{2}(X-1) + \sqrt{2}(Y-1) - 2(Z-\sqrt{2}) = 0$.

5. $E = 2$, $F = -1$, $G = 2$; $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = -1$, $K = -\frac{1}{3}$, $H = 0$, k_1, $k_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; piano tangente: $-X + Y + Z + \frac{1}{3} = 0$.

6. $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = 1$, $K = 1$, $H = 1$; piano tangente: $Y = 0$; $k_1 = k_2 = 1$ (è un punto ombelicale).

§ 41

6. Sia U un aperto di R^n tale che $V = U \cap \mathsf{R}^n_+$ e sia $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ la funzione del lemma 29.2 relativa a U e K. La restrizione g di f a R^n_+ è la funzione cercata.

§ 43

5. $\frac{116}{15}$.

6. $2\pi r^2 - 4r^2$.

Bibliografia

BERGER M., *Geometry, I, II*, Springer, Berlin 1980.

BISHOP R.L., GOLDBERG S.I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, New York 1980.

CAMPANELLA G., *Esercizi di topologia generale*, Aracne, Roma 1992.

CAPELLI A., *Istituzioni di analisi algebrica*, Pellerano, Napoli 1902.

DE RHAM G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris 1960.

GRAY A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, Florida 1993.

GREENBERG M.J., *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, Reading, Mass. 1967.

GUILLEMIN V., POLLACK A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1974.

HILBERT D., *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano 1970.

HILBERT D., COHN-VOSSEN S., *Geometria intuitiva*, trad. it. Bollati Boringhieri, Torino 1972, 1990^2.

JONES G.A., SINGERMAN D., *Complex Functions, an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

LOBAČEVSKIJ N.I., *Nuovi princìpi della geometria*, trad. it. Bollati Boringhieri, Torino 1969, 1994^2.

MUNKRES J.R., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966.

MUNKRES J.R., *Topology. A First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1975.

REES E.G., *Notes on Geometry*, Springer, Berlin 1988.

SERNESI E., *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino 1989.

SINGER I.M., THORPE J.A., *Lezioni di topologia elementare e di geometria*, trad. it. Boringhieri, Torino 1980.

SPIVAK M., *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York 1965.

STOKER J.J., *Differential Geometry*, Wiley Interscience, New York 1969.

THORPE J.A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer, Berlin 1979.

Elenco dei simboli

$\mathbf{D}_r(x)$	il disco aperto di centro x e raggio r	5
$\mathcal{N}(x)$	il sistema degli intorni di x	15
ι_s, (ι_d)	la topologia degli intervalli illimitati a sinistra (a destra)	17
$\jmath_s(\jmath_d)$	la topologia degli intervalli aperti a sinistra (a destra)	17
$Q_r(\mathbf{x})$	il quadrato aperto con lati paralleli agli assi di centro $\mathbf{x}$ e raggio r	18
$\mathcal{Q}_2$	la famiglia dei quadrati aperti con lati paralleli agli assi	18
$R(a,b;c,d)$	il rettangolo aperto con lati paralleli agli assi	18
$\mathcal{R}_2$	la famiglia dei rettangoli aperti con lati paralleli agli assi	18
$N_r(\mathbf{x})$	il quadrato aperto con diagonali parallele agli assi di centro $\mathbf{x}$ e raggio r	21
$\mathcal{D}_2$	la famiglia dei quadrati aperti con diagonali parallele agli assi	21
$\mathcal{A}_2$	famiglia di semipiani aperti di R^2	21
$\mathcal{Q}_n$	la famiglia degli n-cubi aperti di R^n con lati paralleli agli assi	22
$R(\mathbf{a},\mathbf{b})$	plurirettangolo aperto di R^n	22
$\mathcal{R}_n$	la famiglia dei plurirettangoli aperti di R^n	22
$\mathcal{A}_n$	famiglia di semispazi aperti di R^n	22
$\mathrm{Int}(S)$	l'interno di S	24
$\mathrm{Est}(S)$	l'esterno di S	24
$\mathrm{Fr}(S)$	la frontiera di S	24
$\overline{S}$	la chiusura di S	27
$D(S)$	il derivato di S	27
$V(S)$	il sottoinsieme algebrico di K^n definito da S	31
$\mathcal{C}(X,Y)$	l'insieme delle applicazioni continue di X in Y	34
c_{y_0}	l'applicazione costante di valore y_0	35
$X \approx Y$	X è omeomorfo a Y	37
$\mathrm{Omeo}(X)$	l'insieme degli omeomorfismi di X in sé	38

Θ_n	il gruppo delle traslazioni di R^n	38
Λ_n	il gruppo delle omotetie di R^n	39
$f_{\mid S}$	la restrizione di f a S	44
$\mathbf{I}$	l'intervallo unitario chiuso $[0,1]$ di R	46
$\mathbf{I}^n$	l'n-cubo di R^n	46
$\mathbf{D}^n$	l'n-disco unitario chiuso di R^n	46
$\mathbf{S}^{n-1}$	l'$(n-1)$-sfera unitaria di R^n	46
$\mathbf{S}^{n-1}_+$, $\mathbf{S}^{n-1}_-$	le $(n-1)$-semisfere (o $(n-1)$-calotte) chiuse	46
Δ^n	l'n-simplesso di R^n	46
$\overline{PQ}$	il segmento di estremi P e Q	46
$K(S)$	l'inviluppo convesso di S	47
$S^{n-1}(\mathbf{x},r)$	la $(n-1)$-sfera di centro $\mathbf{x}$ e raggio r	47
$\pi_{\mathbf{c},H}$	la proiezione di centro c sul piano H	56
π_+	la proiezione stereografica	57
T^n	il toro n-dimensionale	66
$\mathcal{T}_p$	la topologia quoziente rispetto a p	72
E		73
X/ρ	l'insieme quoziente di X modulo la relazione di equivalenza ρ	74
$\rho(f)$	la relazione di equivalenza definita da un'applicazione f	74
$\mathbf{P}^n(\mathsf{R})$	lo spazio proiettivo reale di dimensione n	82
$\mathbf{P}^n(\mathsf{C})$	lo spazio proiettivo complesso di dimensione n	84
Γ_f	il grafico dell'applicazione f	100
$\sum_n$, $\sum_{n,r}$	semispazi aperti di R^n	109-10
$d(\mathbf{x},F)$		116
$\delta(f,g)$	la distanza del sup (o della convergenza uniforme) tra f e g	123
$\mathcal{C}(p)$	la componente connessa di p	128
$X_1 \amalg X_2$	la somma topologica di X_1 e X_2	131
$\mathcal{C}_a(p)$	la componente connessa per archi di p	136
$f_0 \simeq f_1$	f_0 è omotopa a f_1	142
$f_0 \simeq_{\mathrm{rel}\,A} f_1$	f_0 è omotopa a f_1 relativamente ad A	142
$f \sim g$	gli archi f e g sono equivalenti	145
$\pi_1(X,x_0)$	l'insieme delle classi di equivalenza di cappi di base x_0	145
$[f]$	la classe di equivalenza del cappio f	145
$f * g$	la composizione dei cappi f e g	145
f°		147
ψ^*	l'omomorfismo indotto da ψ	151
(X,x_0)	spazio topologico puntato	163
$\mathbf{v}(F)_{\mathbf{a}}$,	la derivata direzionale di F in $\mathbf{a}$ nella direzione $\mathbf{v}$	174

$\dfrac{\partial F}{\partial u_j}(\mathbf{a})$	la j-esima derivata parziale di F in $\mathbf{a}$	174
$\mathrm{C}^{(k)}$, $\mathrm{C}^{(\infty)}$		174
$\dim(X)$	la dimensione della varietà X	177
$G_{r.N}$	la grassmanniana degli r-sottospazi di R^N	188
$\mathcal{E}(X,p)$	l'insieme delle funzioni reali definite in qualche intorno di $p \in X$	190
$T_p(X)$	lo spazio tangente a X in p	191
f_{*p}	il differenziale di f in p	195
$Jf(p)$	la matrice jacobiana di f in p	198
$\mathrm{vol}(R(\mathbf{a},\mathbf{b}))$	il volume del plurirettangolo $R(\mathbf{a},\mathbf{b})$	231
$\mathbf{V}F$		238
$\mathrm{grad}(F)$	il gradiente della funzione F	240
$\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}$	il prodotto scalare dei campi vettoriali $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$	241
$T(X)$	il fibrato tangente a X	241
$\mathrm{supp}(\rho)$	il supporto della funzione ρ	243
$\Theta_k(t)$	il k-esimo spazio osculatore	256
$\{\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_N\}$	la base mobile di Frenet	256
$\kappa_1,\dots,\kappa_{n-1}$	le curvature della curva α	257
$\kappa(t)$	la curvatura di una curva piana nel punto t	263
$\mathbf{c}(t)$	il centro di curvatura	263
κ, τ	curvatura e torsione di una curva di R^3	264
$\rho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$	la distanza intrinseca di $\mathbf{x}_1$ da $\mathbf{x}_2$	275
$\mathbf{I}_\mathbf{x}(-,-), \mathbf{I}_\mathbf{x}(-)$	la prima forma fondamentale	275
E, F, G	i coefficienti della prima forma fondamentale	278
$A(S)$	l'area della superficie elementare S	280
$\mathcal{D}$	il disco iperbolico	287
$\mathcal{H}$	il semipiano di Poincaré	287
$\nabla_\mathbf{w}$, $\nabla_\mathbf{W}$	derivata rispetto al vettore $\mathbf{w}$ o rispetto al campo vettoriale $\mathbf{W}$	288
$\mathbf{N}$	il campo dei versori normali	289
γ	l'applicazione di Gauss	289
L	l'operatore forma (o di Weingarten)	290
$\mathbf{II}(-,-)$	la seconda forma fondamentale	291
$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$	i coefficienti della seconda forma fondamentale	291
$\kappa(\mathbf{e})$	la curvatura normale nella direzione $\langle\mathbf{e}\rangle$	292
$\mathrm{S}^1_\mathbf{x}$		293
$K(\mathbf{x})$	la curvatura gaussiana di S in $\mathbf{x}$	295
$H(\mathbf{x})$	la curvatura media di S in $\mathbf{x}$	295
$D_\mathbf{Y}\mathbf{Z}$	la derivata covariante di $\mathbf{Z}$ rispetto ad $\mathbf{Y}$	314
$\mathrm{PSL}_2(\mathrm{R})$		327

$\mathcal{T}^t(\mathbf{V}^{\breve{}})$	lo spazio degli r-tensori su $\mathbf{V}$	332
$F \otimes G$	il prodotto tensoriale di F e G	332
$\mathcal{T}^*(\mathbf{V}^{\breve{}})$	l'algebra tensoriale di $\mathbf{V}$	332
$\wedge^r(\mathbf{V}^{\breve{}})$	lo spazio degli r-tensori alterni su $\mathbf{V}$	334
$\mathrm{Alt}(F)$		335
$F \wedge G$	il prodotto esterno di F e G	336
$\wedge^*(\mathbf{V}^{\breve{}})$	l'algebra esterna (o algebra di Grassmann) di $\mathbf{V}$	338
$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$	il volume n-dimensionale orientato di $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$	343
R^n_+, R^n_-, $\mathsf{R}^n_0\ ^1$		345
∂X	il bordo di X	346
$\omega \wedge \varsigma$		354
$\mathrm{d}F$	il differenziale di F	354
$\int_X \omega$		360
$L(C)$	la lunghezza di C	363
$A(X)$	l'area di X	363
$\kappa(S)$	la curvatura totale di S	365
$\mathrm{d}\omega$	il differenziale esterno (o derivata esterna) di ω	365
$H^r_{DR}(X)$	l'r-esimo gruppo di coomologia di De Rham di X	369

Indice analitico

Affinità, 38
  complessa, 40
  dirette, 39
Algebra:
  di Grassmann, 338
  esterna, 338
  tensoriale, 333
Aperto, *vedi* Insieme aperto; Sottoinsieme aperto
Apparato di Frenet, 259, 266
Applicazione(i):
  aperta, 37
  chiusa, 37
  compatibile con una relazione di equivalenza, 75
  conforme, 287
  continua, 3, 34
  di classe $C^{(k)}$ o C^{∞}, 174
  differenziabile, 178, 345
  di Gauss, 289
  indotta, 44
  omotope, 142
  periodica, 114
  prodotto, 65
  propria, 111, 216, 246
  trasposta, 341
Arco(i), 135
  di Jordan, 53
  equivalenti, 145
Area di una superficie, 363
  elementare, 280
Assioma(i):
  di numerabilità, 16
  di Hilbert, 324
  di separazione di Hausdorff, 88
Atlante(i), 99
  concordemente (discordemente) orientati, 202
  differenziabile, 177
    con bordo, 346
    massimale, 177
  olomorfo, 207
  orientato, 202, 350
Azione, 81

Base:
  di intorni, 15
  di una topologia, 12
  locale, 15
  mobile di Frenet, 256
Bordo di una ∂-varietà, 346

Calotta chiusa, 46
Campo:
  di versori, 251
    binomiali a una curva, 264
    normali a una curva, 263-64
    normali a una superficie, 289
  vettoriale, 238, 349
    differenziabile, 239, 288
    su una curva, 251
    su una superficie, 288
    tangente, 288
Cappio, 145
Carta(e) locale(i), 99, 175
  con bordo, 346
  differenziabilmente compatibili, 175, 346
Catenaria, 274
Cella, 46
Centro di curvatura, 263, 265
Cerchio osculatore, 263, 265
Chiuso, *vedi* Insieme chiuso; Sottoinsieme chiuso
Chiusura, 27
Cicloide, 272
Cilindro, 66, 186, 218, 281, 321
Circonferenza, 183, 203, 254
Componenti connesse, 128
  per archi, 136
Congruenze, 39

Cono, 218, 284
Coordinate:
  cartesiane, 212
  cilindriche, 212
  locali, 176, 346
  omogenee, 82
  polari in R^2, 212
  polari (o sferiche) in R^3, 212
Cubica gobba, 269
Cubo, 46
Cubo di Hilbert, 69
Curva(e):
  adattata a un vettore, 198
  a velocità unitaria, 253, 266
  congruenti, 255-56
  differenziabile, 179
  di Peano, 234
  piana differenziabile, 182
  regolare, 252
Curvatura(e):
  centro di, 263, 265
  del semipiano di Poincaré, 322
  di una curva, 259
  di una quadrica, 302-07
  di una sfera, 298
  di una superficie di rotazione, 299
  di una superficie rigata, 300
  di un cilindro, 298
  gaussiana, 295
  media, 295
  normale, 292
  principali, 294
  raggio di, 263, 265
  totale, 365

Derivata:
  covariante, 314
  direzionale, 173
  di un campo vettoriale, 251, 288
  esterna, 365, 368
  parziale, 174
Derivato, 27
Diffeomorfismo, 175, 178, 345, 348
  che mantiene (o cambia) l'orientazione, 278, 350
  locale, 208
Differenziale:
  di una funzione, 354
  di un morfismo, 195, 348
  esterno, 365, 368
Dimensione di una varietà differenziabile, 177
  con bordo, 347
Direttrice, 218
Direzioni principali, 294
Disco:
  aperto, 5
  iperbolico, 287
  unitario chiuso, 46
Distanza(e), 3
  del sup (o della convergenza uniforme), 123
  discreta, 4
  euclidea, 4
  intrinseca, 275
  topologicamente equivalenti, 7
Dominio a frontiera regolare, 351, 352

Elica:
  circolare, 254, 269
  su una curva piana, 272
Elicoide, 307
Ellisse, 271
Ellissoide, 226, 302
Equazioni parametriche, 217
Equivalenza:
  di atlanti differenziabili, 177, 346
  omotopica, 142
  topologica, 37
Estensione continua, 44
Esterno, 24
Estremi di un arco, 135
Evoluta, 272

Famiglia localmente finita, 116
Fibrato tangente, 241
Fibre, 36
Finestra di Viviani, 365
Fiore ad *n* petali, 133
Flesso, 263
Forma:
  di area, 363
  differenziale, 354
    chiusa, 368
    differenziabile, 357
    esatta, 368
  di lunghezza, 362
  di volume, 355, 363
  fondamentale:
    prima, 275
    seconda, 291
  immagine inversa, 356
  multilineare, 332
Formula(e):
  del cambiamento di variabili, 359
  di Brioschi, 318
  di Frenet, 259
  di Green nel piano, 370
Frontiera, 24
Funzione(i):
  coordinate, 174
    di un campo vettoriale, 239
  di classe $C^{(k)}$ o C^{∞}, 174
  differenziabile, 178, 345, 348
  di transizione, 176

- G-insieme, 81
- G-spazio, 82
- Generatrice, 218
- Geodetica, 319
  - massimale, 320
- Geometria:
  - intrinseca, 277
  - non euclidea:
    - ellittica, 326
    - iperbolica, 326
- Gradiente, 240
- Grado di un rivestimento, 162
- Grafico:
  - di una funzione, 182
  - di un'applicazione, 100
- Grassmanniana, 188
- Gruppo:
  - di coomologia di De Rham, 369
  - di Lie, 227
  - di monodromia, 167
  - fondamentale (o primo gruppo di omotopia), 149, 150
    - del cilindro, 157
    - del toro, 157
    - di $\mathbf{P}^n$, 168
    - di $\mathbf{S}^1$, 156
    - di $\mathbf{S}^n$, 160
  - lineare, 58, 81
  - ortogonale, 58, 110, 226
  - simplettico, 59
  - topologico, 80
  - unitario, 6, 59

- Ideale, 31
- Identificazione, 72
- Immersione, 213
- Inclusione:
  - continua, 44
  - differenziabile, 214
  - naturale, 214
- Incollamento di applicazioni, 44
- Insieme(i):
  - algebrico, 31
  - aperto, 10
    - ben ricoperto, 162
    - coordinatizzato, 176, 346
  - di livello, 36
- Integrale di una forma differenziale, 359-60
- Interno, 24
- Intorno, 15
- Invarianti metrici di una curva, 256, 258
- Inviluppo convesso, 47
- Iperbole, 271
- Iperboloide:
  - ellittico (a due falde), 226, 303
  - iperbolico (a una falda), 226, 305
- Iperpiano(i):
  - affini, 36
    - paralleli, 36
  - all'infinito, 83, 85
- Ipersuperficie:
  - algebrica, 224
  - differenziabile, 182
- Isometria(e), 9, 39
  - dirette, 39
  - di superfici, 275
  - locale, 288

- Lemma:
  - di Sard, 238
  - di sollevamento dell'omotopia, 155
  - di Urysohn, 93
- Logaritmo naturale complesso, 54
- Lunghezza:
  - di una curva, 252
  - di una 1-varietà orientata, 363

- Matrice(i):
  - di transizione, 194
  - jacobiana, 198
  - simmetriche, 226
- Metrica:
  - iperbolica, 287
  - riemanniana, 285
  - stereografica, 286
- Monodromia, 166
- Morfismo, 178, 348
- Multiindice, 333

- Nastro di Moebius, 80, 203
- Numero di Lebesgue, 118

- Omeomorfismo, 9, 37
  - locale, 60
- Omotetia, 39
- Omotopia, 142
  - relativa, 142
- Operatore:
  - di chiusura, 33
  - di interno, 34
  - di Weingarten, 290
  - forma, 290
- Orbita, 81
- Orientazione, 202, 350
  - indotta da una ∂-varietà sul bordo, 350-51

- Parabola, 271
- Paraboloide:
  - ellittico, 226, 304
  - iperbolico, 306

Parametrizzazione:
  di Monge, 182
  in $\mathbb{R}^N$, 181
Parte interna di un numero reale, 234
Partizione dell'unità, 243, 351
Piano(i):
  affini, 36
  geodetiche del, 320
  normale:
    a una curva, 264
    a una superficie, 292
  osculatore, 256, 265
  proiettivo:
    complesso, 84
    reale, 82, 205
  rettificante, 264
Plurirettangolo (aperto), 231
Poligonale, 49
  chiusa, 49
  semplice, 49
Poligono convesso, 53
Prodotto:
  di cappi, 145
  di varietà differenziabili, 186
  esterno, 336
  scalare di due campi vettoriali, 241
  tensoriale, 332
  topologico, 62, 66, 69
Proiezione(i), 9, 56, 64, 69
  naturale (o canonica), 74
    di $\mathbf{S}^n$ su $\mathbf{P}^n$, 83
  stereografica, 57, 58
Proprietà:
  dell'intersezione finita, 104
  di separazione, 88
  funtoriali:
    del gruppo fondamentale, 151
    della coomologia di Re Rham, 369
  intrinseche, 277
  metriche di una curva, 256
  topologica, 37
  universale dei rivestimenti universali, 170
  universale del prodotto topologico, 65
Pseudosfera, 300
Punto(i):
  aderente (o di aderenza), 27
  connessi, 128
  critico, 221
  di accumulazione, 27
  di frontiera, 24
  ellittico, 296
  esterno, 24
  iniziale e finale di un arco, 135
  interno, 24
  iperbolico, 296
  limite, 27
  ombelicale, 294
  parabolico, 296
  planare, 295
  regolare, 221

Quadrato aperto, 18, 21
Quadrica(e), 224
  a punti ellittici, 302-04
  a punti iperbolici, 304-07
  non degenere, 224

Radicale di un ideale, 31
Raffinamento, 116
Raggio di curvatura, 263, 265
Rappresentazione parametrica, 216
Restrizione, 44
Retrazione, 158
Retta(e):
  affini, 36
  iperboliche, 326
  proiettiva:
    complessa, 84
    reale, 82
  tangente, 256
Rettangolo aperto, 18
Ricoprimento, 14
  aperto, 45
  chiuso finito, 45
Riflessione iperbolica, 329
Rigata delle tangenti (o tangente), 284
Riparametrizzazione:
  di una curva, 252
  di una superficie elementare, 278
Ritratto, 158
Rivestimento, 162
  universale, 168

Saturazione, 72
Scoppiamento (o trasformazione monoidale) di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbf{0}$, 230
Semipiano di Poincaré, 287, 322, 326
Semisfera chiusa, 46
Semispazi chiusi, 345
Sezione normale, 292
Sfera, 46, 99, 185, 200, 223, 321
  di Riemann, 85
Similitudine, 39
Simmetrie, 39
Simplesso, 46
Sistema(i):
  di coordinate locali, 175
    orientati concordemente (discordemente), 202
  (fondamentale) di intorni, 15
Solido convesso, 46

Sollevamento, 154, 163
Somma topologica, 131
Sottobase, 14
Sottoinsieme:
  algebrico, 31
  aperto, 5
  che sconnette uno spazio topologico, 132
  chiuso, 26
  compatto, 101
  connesso, 125
  connesso per archi, 135
  convesso, 46
  denso, 30
  di misura nulla, 231, 233
  discreto, 60
  limitato, 10
  relativamente compatto, 110
  saturo, 72, 74
  sconnesso, 125
Sottospazio(i):
  affine, 36
  metrico, 4
  topologico, 43
    affinemente equivalenti, 47
    congruenti, 47
    simili, 47
Sottosuccessione, 17
Sottovarietà:
  aperta, 178
  differenziabile, 213, 348
    di R^N, 181
Spazio(i):
  ambiente, 4, 43
  duale, 332
  isometrici, 9
  metrico(i), 3
    completo, 120
    omeomorfi, 9
    totalmente limitato, 120
  osculatori, 256
  proiettivo:
    complesso, 84, 114, 207
    reale, 82, 99, 101, 110, 187
  tangente, 191, 348
    affine, 197
  topologico(i), 10
    banale, 11
    compatto, 101
    compatto per successioni, 117
    connesso, 125
    connesso per archi, 135
    di Hausdorff, 88
    di prima cetegoria, 122
    discreto, 11
    di seconda categoria (o di Baire), 122
    localmente compatto, 114
    localmente connesso, 133
    localmente connesso per archi, 139, 167
    localmente semplicemente connesso, 170
    metrizzabile, 11
    normale, 91
    numerabilmente compatto, 117
    omeomorfi, 37
    omotopicamente equivalenti (o dello stesso tipo di omotopia), 143
    ottenuto identificando un sottoinsieme a un punto, 76
    paracompatto, 116
    prodotto, 62, 66, 69
    puntato, 163
    quoziente, 74
      rispetto all'azione di un gruppo, 82
    regolare, 90
    sconnesso, 125
    semplicemente connesso, 150
    separabile, 30
    T_1, 89
    T_2, 88
    topologicamente equivalenti, 37
    totalmente sconnesso, 132
Spirale logaritmica, 274
Stabilizzatore, 81
Strisce aperte, 19
Struttura:
  complessa, 207
  di varietà differenziabile, 177
  topologica, 10
Successione(i), 17
  di Cauchy, 120
  in uno spazio T_1 o in uno spazio di Hausdorff, 89-90
Summersione, 221
Superficie(i):
  differenziabile, 178, 182
  di Riemann, 207
  di rotazione, 218, 282
  elementare, 278
  isometriche, 275
  localmente sviluppabile, 282
  minima, 296
  riemanniana, 285
  rigata, 218, 284
  romana di Steiner, 219-20
  sviluppabile, 282
Supporto:
  di una forma differenziale, 357
  di una funzione, 243
  di uno spazio topologico, 10

- Tensore, 331
  - alterno, 334
  - decomponibile, 333
- Teorema:
  - della divergenza, 371
  - della funzione inversa, 207
  - del punto fisso, 132
  - di Baire, 122
  - di Bolzano-Weierstrass, 104
  - di Brouwer, 158, 374
  - di Heine-Borel, 102
  - di Meusnier, 308
  - di Rodriguez, 294
  - di sollevamento degli archi, 164
  - di sollevamento dell'omotopia, 164
  - di Stokes, 369
    - in $\mathbb{R}^3$, 371
  - di Tychonoff, 107
  - di Withney, 249
  - Egregium, 316
  - fondamentale:
    - dell'algebra, 111, 160, 211
    - del calcolo, 370
- Termine di una successione, 17
- Topologia, 10
  - banale, 11
  - cofinita, 12
  - della convergenza puntuale, 69
  - della convergenza uniforme, 123
  - differenziale, 179
  - discreta, 11
  - di Zariski, 32
  - euclidea, 11
  - generata da una famiglia di sottoinsiemi, 23
  - indotta:
    - da un'applicazione, 39
    - da una distanza, 11
    - su un sottoinsieme, 11, 42
  - meno fine, 12
  - naturale, 11
  - più fine, 12
  - prodotto, 62, 66, 69
  - quoziente, 72
  - relativa, 42
- Toro, 66, 99, 110, 187, 201, 217
- Torsione, 264
- Traslato, 36

- Valore:
  - critico, 210, 221
  - regolare, 210, 221
- Varietà:
  - diffeomorfe, 179
  - differenziabile, 177
    - con bordo, 346
    - senza bordo, 346
  - orientabile (non orientabile), 202, 350
  - orientata, 203, 350
  - topologica, 99
- Velocità di una curva, 252
- Vettore:
  - esterno, 353
  - interno, 353
  - tangente, 191, 348
  - velocità, 195
- Volume:
  - di una varietà, 363
  - di un plurirettangolo, 231
  - n-dimensionale, 343