E. Acerbi L. Modica S. Spagnolo

Problemi scelti di Analisi Matematica II

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dx\,dy = ab \quad \forall a \in R,\ \forall b \in R$$

Serie di matematica e fisica 'T'
Liguori Editore

Indice

Parte prima

Testi dei problemi

1. (5/5/1976)

Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} .$$

Calcolare la somma di tale serie.

2. (5/5/1976)

Calcolare

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{A_\epsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy ,$$

dove

$$A_\epsilon = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \geqslant \epsilon^2 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant y^2 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right\} .$$

3. (5/5/1976)

Risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' = v-u \\ v' = u-v \end{cases}$$

con i dati iniziali $u(0)=a$, $v(0)=b$.

4. (5/5/1976)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione lipschitziana, crescente e tale che $f(0)=0$. Sia $(u(x),v(x))$ la soluzione del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} u' = f(v-u) \\ v' = f(u-v) \end{cases}$$

tale che $u(0)=1$, $v(0)=0$.

Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x)$.

5. (8/6/1976)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right).$$

6. (8/6/1976)

Calcolare il volume dell'ellissoide (in $\mathbf{R}^3$) con semiassi a, b, c. Trovare poi l'ellissoide di massimo volume tra quelli per cui

$$a + 2b + 3c = 7 \ .$$

7. (8/6/1976)

Sia

$$D = \left\{(x,y,z):\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad z + \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

e sia f: $[0,1]\to\mathbf{R}$ una funzione continua. Provare che

$$\iiint_D f(y)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\int_0^1 t^3 f(t)\,dt\ .$$

8. (8/6/1976)

Trovare tutte le funzioni $u(x,y)$ di classe C^1 tali che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = y \\ u(0,y) = e^y \end{cases}$$

9. (8/7/1976)

(a) Calcolare

$$\lim_{r\to+\infty} \iint_{D_r} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\quad ,$$

dove

$$D_r = \left\{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 1\quad ,\quad x\geqslant 0\quad ,\quad x^2+y^2\leqslant r^2\right\}\ .$$

(b) Usare il risultato precedente per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen} t}\,dt\ .$$

10. (8/7/1976)

Calcolare

$$\iint_S (xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dw) \quad ,$$

dove S è la superficie bidimensionale di $\mathbf{R}^4$ definita parametricamente dalle equazioni

$$x=r^2+s^2 \quad , \quad y=r-s \quad , \quad z=rs \quad , \quad w=r+s$$

con $0\leqslant r\leqslant 1 \quad , \quad 0\leqslant s\leqslant 1.$

11. (8/7/1976)

Calcolare la distanza fra i due insiemi

$$A = \left\{(x,y):\ |x-\frac{4}{5}|+y^2\leqslant\frac{1}{5}\right\}$$

$$B=\left\{(x,y):\ |x-3|+|y-3|\leqslant 3\right\} \quad ,$$

ricordando che $\mathrm{dist}(A,B)=\inf\left\{\mathrm{dist}(a,b):\ a\in A \quad . \quad b\in B\right\}$.

12. (8/7/1976)

Sia f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ una funzione di classe C^1.

Dimostrare che f è lipschitziana, con costante di Lipschitz K, se e solo se

$$|Df(x)|\leqslant K \qquad \forall x\in\mathbf{R}^n \quad ,$$

dove Df indica il gradiente di f.

Supponiamo che f sia K-lipschitziana; dire se è sempre possibile trovare un indice $i\in\left\{1,\ldots,n\right\}$ tale che

$$|D_i f(x)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{n}} \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n \ .$$

13. (1/10/1976)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{y - x^2} \\ \\ y(0) = a \qquad\qquad (a > 0) \ . \end{cases}$$

(i) Provare che tale problema ammette un'unica soluzione $y_a(x)$ in un intorno di $x = 0$. Calcolare la derivata prima, seconda e terza di $y_a(x)$ in $x = 0$.

(ii) Provare che la soluzione $y_a(x)$ è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$ ed ha limite per $x \to +\infty$. Calcolare tale limite.

14. (1/10/1976)

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{1}{x^n + y^n + ny}$$

definite sul quadrante $Q = \{(x, y) \colon x > 0, \ y > 0\}$.

(a) Dire per quali punti $(x, y) \in Q$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, y) < +\infty \quad .$$

(b) Dire per quali insiemi $A \subset Q$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_A f_n < +\infty \quad .$$

15. (1/10/1976)

Dimostrare che la sola funzione continua $f(x,y)$ tale che

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dx\,dy = ab \qquad \forall a \in \mathbf{R} \quad , \quad \forall b \in \mathbf{R}$$

è la funzione costantemente uguale a 1.

Dimostrare che se f è continua e $f(x,y) = -f(y,x)$ allora

$$(*) \qquad \int_0^a \int_0^a f(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad \forall a \in \mathbf{R} \quad .$$

Esistono altre funzioni continue che verificano (*)?

16. (22/10/1976)

Si consideri la curva C di equazioni parametriche

$$x = t - \cos t$$

$$y = 1 + \operatorname{sen} 2t \quad ,$$

con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(a) Tracciare un grafico approssimativo di C.

(b) Scrivere l'equazione della retta normale a C nel punto $A = (x(0), y(0))$ e nel punto $B = \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(c) Calcolare l'area del dominio D compreso fra queste due rette e l'arco di curva C che ha per estremi i punti A e B.

17. (22/10/1976)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y-x| \\ y(0)=a \end{cases} .$$

(i) Discutere, al variare del parametro reale a, l'esistenza e l'unicità locale e globale di soluzioni.

(ii) Determinare la soluzione del problema.

(iii) Dire per quali valori di a esistono soluzioni $y(x)$ del problema tali che

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 1 .$$

18. (22/10/1976)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'' = v' + av \\ v'' = u' - au \end{cases} .$$

(i) Dire per quali valori del parametro reale a tutte le soluzioni (u,v) del sistema sono coppie di funzioni periodiche.

(ii) Dire per quali valori di a il sistema ha qualche soluzione (u,v) con u e v polinomi non costanti.
(Si consiglia di trasformare il sistema dato in un'equazione equivalente del 4° ordine).

19. (14/1/1977)

Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \qquad y' = |y| + x^2 .$$

(i) Trovare la soluzione $y(x)$ di (*) tale che $y(a) = 0$, con a parametro reale.

(ii) Esistono altre soluzioni di (*) oltre a quelle trovate in (i)?

20. (14/1/1977)

Si rappresentino graficamente gli insiemi

$$K(s,t) = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant |z| \ , \quad s \leqslant z \leqslant t\right\}$$

al variare dei parametri reali s e t con $s<0<t$.

Dire per quali valori dei parametri s, t la "superficie laterale" di $K(s,t)$ è massima, oppure minima, sotto la condizione

$$\text{volume } (K(s,t)) = 1 \quad .$$

21. (14/1/1977)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n|y|} \, e^{nx} \quad .$$

22. (14/1/1977)

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}^2$. Dimostrare che, se f è nulla nell'origine, esistono due funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ continue su $\mathbf{R}^2$ e tali che

$$f(x,y) = xA(x,y) + yB(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

(si consiglia di considerare la funzione $g(t) = f(tx, ty)$) .

23. (4/2/1977)

Trovare le soluzioni $y(x)$ di classe C^1 del problema

$$\begin{cases} (y'+x)\,(y'-xy) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \qquad\qquad (y_0 > 0) \end{cases}$$

nel semipiano $\{(x,y) : y > 0\}$.

24. (4/2/1977)

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2}\,dt \quad .$$

(a) Dimostrare che f è di classe C^∞, e calcolarne l'estremo superiore e l'estremo inferiore su $\mathbf{R}^2$.

(b) Trovare i punti di massimo e minimo di f sul cerchio $\{x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

(c) Dire se esiste

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) \quad .$$

25. (4/2/1977)

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sen} y$$

al variare di x e y con $x > 0$ e $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

26. (4/2/1977)

Sia f: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione reale, e siano $f_{(t)}$: $[0,1] \to \mathbf{R}$, per $0 \leqslant t \leqslant 1$, le funzioni definite da

$$f_{(t)}(x) = f(t,x) \quad .$$

(a) Provare che f è separatamente continua se e solo se ogni

$f_{(t)}$ è continua e $(f_{(t_n)})$ converge puntualmente a $f_{(t_0)}$ per ogni $t_n \to t_0$.

(b) Provare che f è continua se e solo se ogni $f_{(t)}$ è continua e $(f_{(t_n)})$ converge uniformemente a $f_{(t_0)}$ per ogni $t_n \to t_0$.

27. (19/5/1978)

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

sul piano $\{x + y + z = 3\}$.

Dire se esistono punti di questo piano in cui tali estremi sono raggiunti.

28. (19/5/1978)

Calcolare

$$\iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy}\, dx\, dy ,$$

dove D è il dominio di $\mathbf{R}^2$

$$D = \left\{(x, y)\colon \frac{1}{2x} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x} \quad , \quad 2x^2 \leqslant y \leqslant 3x^2\right\} .$$

29. (19/5/1978)

Sia $f(x, y)$ una funzione reale di classe C^2.
Dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h, e^{-1/h^2}) - 2f(h, e^{-1/h^2}) + f(0,0)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) .$$

30. (19/5/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2} - 1} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} .$$

(a) Dire per quali (x_0,y_0) il problema è localmente risolubile.

(b) Sia $x_0 = y_0 = 0$, e sia $]a,b[$ il massimo intervallo su cui esiste una soluzione. Provare che $-a = b < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Provare che per $x_0 > 1$, $y_0 < -1$ esiste una soluzione definita su tutto **R**.

31. (6/6/1978)

Calcolare la minima e la massima distanza del punto (0,1,0) dai punti della curva di $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = x \end{cases} .$$

32. (6/6/1978)

Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\, dy \quad , \quad n \geqslant 1 \quad .$$

(a) Provare che ogni f_n è continua su **R**.

(b) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione (f_n).

33. (6/6/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - (y-x)(y-x-2) \\ y(0) = \lambda \quad . \end{cases}$$

(a) Provare che per $\lambda = 1$ esiste una ed una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Dire per quali valori di λ il problema ha qualche soluzione limitata.

34. (6/6/1978)

Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \qquad y' = f(x,y) \quad ,$$

dove $f(x,y)$ è una funzione di classe C^1 tale che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ .$$

(a) Provare che, se ogni soluzione $y(x)$ di (*) è periodica di periodo T, allora $f(x,y)$ è periodica (di periodo T) rispetto a x, per ogni $y \in \mathbf{R}$.

(b) Vale il viceversa?

35. (30/6/1978)

Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y)=\int_1^y \frac{e^{xt}}{t}\,dt$$

sull'insieme

$$A = \{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2 \quad , \quad 1\leqslant y\leqslant 2\}\ .$$

36. (30/6/1978)

Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y)=\frac{px+qy}{x^2+y^2}dx + \frac{rx+sy}{x^2+y^2}dy\ ,$$

definita su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dire per quali valori di p, q, r, s la forma ω è esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e in tal caso calcolarne le primitive.

37. (30/6/1978)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-x)^3 \\ y(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

Dimostrare che la soluzione esiste su tutta la semiretta $x\leqslant 0$, e calcolarla (in forma implicita).

38. (30/6/1978)

Siano $L\in\mathbf{R}$, $B = \{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ e

$$\mathscr{L}=\left\{f: B\to\mathbf{R} : f|_{\partial B} = 0 \quad \text{e} \quad |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right\}$$

(funzioni L–lipschitziane nulle sul bordo di B).

(a) Provare che esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$\left| \iint_B f(x,y)\,dx\,dy \right| \leqslant CL \qquad \forall f \in \mathscr{L}$$

(b) Esibire una funzione $f_0 \in \mathscr{L}$ tale che

$$\iint_B f_0(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{3} L\ .$$

(c) Dimostrare che nel punto (a) la minima costante possibile è $C = \pi/3$.

39. (3/10/1978)

Sia $0 \leqslant a \leqslant 1$, e si consideri l'insieme di $\mathbf{R}^2$

$$D(a) = \left\{(x,y):\ x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ xy \geqslant 9a^4\ ,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 4a\right\}.$$

Calcolare l'area di $D(a)$ e dire per quale valore di a tale area è massima.

40. (3/10/1978)

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$$

sulla semiretta $\{x \geqslant 0\}$.

41. (3/10/1978)

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - x^2 \\ y(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

42. (3/10/1978)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dire che relazione c'è fra i due fatti

(a) $f^2(x)$ è lipschitziana ;

(b) $f(x)$ è $\frac{1}{2}$ – hölderiana, cioè $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^{1/2}$.

43. (16/10/1978)

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{2^n(x+y)}{1 + n2^n(x^2+y^2)} \quad .$$

44. (16/10/1978)

Calcolare l'area del dominio di $\mathbf{R}^2$

$$D = \left\{(x, y) : x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad (x^2+y^2)^3 \leq 4x^2y^2\right\} \quad .$$

45. (16/10/1978)

Fissato un numero reale $a \geq 0$, studiare il comportamento per $x \geq 0$ delle soluzioni $y(x)$ del problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{(1+x^2)^2} - y^2 \\ y(0) = a \quad . \end{cases}$$

46. (16/10/1978)

Siano f e g due funzioni convesse di classe C^2 su $\mathbf{R}$, e sia $h = f \circ g$ la funzione composta.

Provare che in generale h non è una funzione convessa, mentre lo è certamente se f è anche crescente.

47. (25/1/1979)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}}$$

sulla semiretta $\{x > 0\}$.

48. (25/1/1979)

Si scriva l'equazione del piano T tangente nel punto $(1,1,1)$ alla superficie di $\mathbf{R}^3$

$$x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0 \quad .$$

Calcolare poi il volume della porzione del cilindro $\{(x,y,z): (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$ compresa fra il piano T e il piano $\{z = 0\}$.

49. (25/1/1979)

Data l'ellisse Γ di equazione

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} = 1 \qquad (\lambda, \mu > 0) \ ,$$

dire per quali valori di λ e μ essa contiene il cerchio C di centro $(1,0)$ e raggio 1.

Fra tali valori trovare quelli per cui Γ ha area minima, ricordando che $\text{area}(\Gamma) = \pi\sqrt{\lambda\mu}$.

50. (25/1/1979)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log|x| - y \\ y(x_0) = y_0 \qquad\qquad (x_0 \neq 0) \end{cases} ,$$

e dedurne che esiste una ed una sola funzione continua f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabile per $x \neq 0$ e tale che

$$f'(x) = \log|x| - f(x) \qquad \forall x \neq 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad .$$

51. (29/1/1979)

Si consideri la curva di $\mathbf{R}^3$

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \colon z = x^2 + y^2 \quad , \quad x + y + z = 0\right\} .$$

(a) Provare che Γ esiste e trovarne la retta tangente in ogni suo punto.

(b) Trovare i punti di massima e minima quota in Γ.

52. (29/1/1979)

Calcolare l'area del dominio di $\mathbf{R}^2$

$$D = \left\{(x, y) \colon x > 0 \quad , \quad |\log x| \leqslant 1 \quad , \quad |y - x \log x| \leqslant 1\right\} .$$

53. (29/1/1979)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy$$

54. (29/1/1979)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen} x - y \quad , \\ y(0) = a \quad . \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la soluzione $y(x)$ è definita su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Dire se $y(x)$ è limitata su $\mathbf{R}^+$.

(c) Dire se $y(x)$ ha limite per $x \to +\infty$.

55. (9/5/1980)

Sia $f(y) = e^{-y} \log y$.
Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = f(nx)$$

sulla semiretta $\{x > 0\}$.
Calcolare poi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \quad .$$

56. (9/5/1980)

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$$

dove γ è il grafico della funzione $y=\cos x$ sull'intervallo $[-\pi,\pi]$, orientato nel verso delle x crescenti.

57. (9/5/1980)

Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f(x,y)=(\varphi(x+y),\ \psi(x-y))$$

con φ, ψ funzioni reali di variabile reale.

Dimostrare che f è differenziabile su $\mathbf{R}^2$ se e solo se φ e ψ sono derivabili su $\mathbf{R}$.

58. (9/5/1980)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''+y=\frac{1}{1+t^2} \quad .$$

Trovare una formula risolutiva di tale equazione. Dimostrare che per ogni soluzione $y(t)$ esistono due costanti, A e B, per cui

$$\lim_{t\to+\infty} [y(t)-(A\cos t+B\operatorname{sen} t)]=0 \quad .$$

59. (16/6/1980)

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} \int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\, dt \ .$$

Dimostrare che tale serie converge uniformemente sull'insieme $A=\{|x|\geqslant 2\}$ e diverge sull'insieme complementare.

60. (16/6/1980)

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\int_0^1 \frac{1-e^{-xyt^2}}{t}\,dt\ .$$

Dimostrare che f è definita su $\mathbf{R}^2$ ed è differenziabile. Calcolare poi il differenziale di f nel punto $(1,2)$, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f ed infine il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

61. (16/6/1980)

Si consideri l'equazione differenziale

$$(*) \qquad (y')^2+xy'-y=0$$

(i) Trovare tutti i polinomi che sono soluzioni di $(*)$.

(ii) Dire per quali (x_0,y_0) l'equazione $(*)$ ha almeno una soluzione $y(x)$ tale che $y(x_0)=y_0$.

62. (16/6/1980)

Sia $f(x,y)$ una funzione continua.
Provare che se

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y)=1$$

allora

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} f(x,y)\,dx\,dy=1\ ,$$

dove $B_r=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant r^2\}$

Vale anche il viceversa?

63. (30/6/1980)

Provare che

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n}\frac{1}{[1+(nx+y)^2+(x+ny)^2]^2}\,dx\,dy=0\quad ,$$

dove $B_n=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant n^2\}$.

64. (30/6/1980)

Trovare le soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ dell'equazione differenziale

$$y'=2y-y^2\quad .$$

65. (30/6/1980)

Siano

$$f(x,y)=\frac{1}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(ty)}{t^2}\,dt\ ,$$

$$A=\{(x,y):\ x\geqslant 1\quad ,\quad y\geqslant 0\}\,.$$

Provare che

$$\max_A f=1\quad ,\quad \inf_A f=1-\frac{\pi}{2}\quad .$$

66. (30/6/1980)

Sia φ: $[0,a] \to [0,b]$ una funzione continua avente esattamente N punti di massimo relativo. Dimostrare che il grafico Γ di φ è una curva rettificabile e che

$$\text{lunghezza di } \Gamma \leqslant 2Nb + a \quad .$$

67. (6/10/1980)

Dimostrare che

$$x^3 + y^3 - 3axy \geqslant -a^3 \qquad \forall x \geqslant 0 \quad \forall y \geqslant 0 \quad \forall a \geqslant 0 \quad .$$

68. (6/10/1980)

(a) Dimostrare che esiste una costante reale c tale che

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\lambda(x^4+y^4)} dx\, dy = \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \qquad \forall \lambda > 0 \quad .$$

(b) Dimostrare che

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} \leqslant c \leqslant \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2} \quad .$$

69. (6/10/1980)

Sia $a > 0$ fissato. Studiare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{tg}(xy) \\ y(a) = \pi/a \end{cases}$$

tracciandone anche un grafico approssimativo. Mostrare in particolare che l'intervallo di definizione di $y(x)$ è del tipo $]0,b[$ con $a < b < \frac{3}{2} a$.

70. (6/10/1980)

Sia $M > 0$, e sia (f_n) una successione di funzioni reali definite su $[0,1]$ e tali che

$$\text{lunghezza di } \Gamma(f_n) \leqslant M \qquad \forall n \in N \quad ,$$

dove $\Gamma(f_n)$ indica il grafico di f_n.

Provare che se (f_n) tende puntualmente su $[0,1]$ a una funzione continua f allora

$$\text{lunghezza di } \Gamma(f) \leqslant M \quad .$$

71. (24/10/1980)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + x^{2n} + y^{2n}) \quad .$$

72. (24/10/1980)

Calcolare

$$\lim_{r \to +\infty} e^{-r} \iint_{B_r} e^{|x|+|y|} \, dx \, dy \quad ,$$

dove $B_r = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$.

73. (24/10/1980)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{arctg} y - \dfrac{1}{x} \\ \\ y\left(\dfrac{4}{\pi}\right) = 1 \end{cases} .$$

74. (24/10/1980)

(a) Sia F: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una funzione di classe C^1 tale che

$$(\det DF)(x, y) \neq 0 \qquad\qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 .$$

Provare che gli eventuali zeri di F sono isolati.

(b) Sia f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$f(x,y) = 0 \Rightarrow [Df(x,y) = (0,0)\ ;\ (\det \text{ Hessiano } f)(x,y) = 0]$
Provare che f può avere solo zeri isolati.

75. (23/1/1981)

Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} n \int_{1/n}^{1} \frac{e^{t^2/n} - 1}{t}\, dt .$$

76. (23/1/1981)

Dire per quali funzioni $u(x, y)$ di classe C^1 su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx + u(x,y)\, dy$$

risulta esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

77. (23/1/1981)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - (\operatorname{arctg} x)^2 \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Studiare l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione, tracciandone poi un grafico approssimativo.

78. (23/1/1981)

Sia $f(x,y)$ una funzione continua tale che $f(0,0) = 0$ e che

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = 0 \quad ,$$

e si ponga per ogni $n \in N$

$$f_n(x,y) = f(nx, ny) \quad .$$

(a) Dimostrare che (f_n) tende puntualmente a zero su $\mathbf{R}^2$.

(b) Dire in quali casi la convergenza è uniforme.

79. (6/2/1981)

Calcolare estremo superiore e inferiore della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{|x+y|}\; e^{-x^2-y^2}$$

sul cerchio $\left\{x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\}$.

80. (6/2/1981)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left[(x+y)^{2n}+(x-y)^{2n}\right] .$$

81. (6/2/1981)

Studiare l'esistenza, l'unicità e il comportamento della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2} - e^{x^2} \\ y(0) = 0 \quad , \end{cases}$$

tracciandone poi un grafico approssimativo.

82. (6/2/1981)

Dimostrare che per ogni funzione f di classe C^1 tale che $f(0) = 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{1/n} f(x)e^x dx = \frac{1}{2} f'(0) .$$

83. (24/5/1982)

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} \frac{1}{1+x^2+|y|} dx\, dy ,$$

dove $B_n = \left\{(x,y) \colon x^2+y^2 \leqslant n^2\right\}$.

84. (24/5/1982)

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{4x^5 y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sull'insieme $D=\{(x,y)\colon |x|\leqslant 1 \quad , \quad |y|\leqslant 2\}$.

85. (24/5/1982)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| - \operatorname{arctg} e^x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'andamento della soluzione $y(x)$ al variare di y_0.

(b) Dimostrare in particolare che per un opportuno valore di y_0 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} .$$

86. (24/5/1982)

Siano $f,g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ due funzioni di classe C^1 tali che

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = [f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 1 \qquad \forall x\in\mathbf{R} \quad ,$$

$$f(0) = g'(0) = 1 \quad .$$

Provare che

$$f(x) = \cos x \quad , \quad g(x) = \operatorname{sen} x .$$

27. (4/6/1982)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{nx}}{n!}$$

88. (4/6/1982)

Dimostrare che per ogni $a > 0$ e $b > 0$ esiste una costante positiva $C = C(a,b)$ tale che

$$x^a y^b \leqslant C \cdot (x^{a+b} + y^{a+b}) \qquad \forall x \geqslant 0 \quad \forall y \geqslant 0 \quad .$$

Determinare la migliore costante $C(a,b)$.

89. (4/6/1982)

Sia $N \geqslant 1$ un intero. Dire per quali valori del parametro a si ha

$$\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{-N} dx\, dy < +\infty \quad ,$$

dove $D_a = \{(x,y): \ x \geqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant x^a\}$.

90. (4/6/1982)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \\ \\ y(0) = a \qquad\qquad (a > 0) \ , \end{cases}$$

tracciando poi un grafico approssimativo della soluzione $y(x)$. Provare che se $a \geqslant 1$ allora $y(x)$ ha almeno un flesso per $x > 0$.

91. (5/7/1982)

Disegnare la curva Γ la cui equazione in coordinate polari è

$$\rho = 1 - \cos\theta \qquad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

e calcolare l'area della regione di piano compresa fra Γ e l'asse delle ordinate.

92. (5/7/1982)

Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n$$

sull'intervallo $[0,\pi]$, e calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx .$$

93. (5/7/1982)

Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 1 - \log(x + y) \quad ,$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

94. (5/7/1982)

Sia $f(x,y)$ una funzione continua e verificante la condizione

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L\,|y_1-y_2| \qquad \forall x,y_1,y_2\in\mathbf{R}$$

Supponiamo inoltre che, se $y(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'=f(x,y) \quad ,$$

allora per ogni $c\in\mathbf{R}$ anche la funzione $y(x+c)$ è soluzione della stessa equazione.

Provare che f non dipende da x.

95. (8/10/1982)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{2n}-y^{2n}|^{1/n} \ .$$

96. (8/10/1982)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(y-x) \\ y(0)=a \end{cases}$$

al variare del parametro reale a, tracciando poi un grafico approssimativo delle soluzioni.

97. (8/10/1982)

Determinare la soluzione $(x(t),y(t))$ del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'+x'+y+2x=0 \\ y'-x'+3y+4x=0 \ . \end{cases}$$

98. (8/10/1982)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-x^2} \quad ,$$

determinare l'intervallo $[a,b]$ tale che $\int_a^b f(x)dx$ abbia il valore massimo possibile.

99. (22/10/1982)

Dire se la funzione

$$f(x,y) = xy \ \exp[xy/(x^2+y^2)]$$

è limitata su $\mathbf{R}^2$, e calcolarne il massimo e il minimo sull'insieme $\{(x,y)\colon |x|+|y| \leqslant 1\}$.

100. (22/10/1982)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!} \quad .$$

101. (22/10/1982)

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z il cerchio

$$\{(x,y,z)\colon y=0 \quad , \quad x^2+z^2-2x-1 \leqslant 0\} \ .$$

102. (22/10/1982)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1, crescente e tale che $f(0) = 0$. Provare che tutte le soluzioni $u(x)$ dell'equazione

$$u' = f(u)$$

sono definite in un intervallo del tipo $]-\infty, a[$.

103. (21/1/1983)

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\,\text{sen}\,[(x+y)^2]}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

dire se si tratta di una funzione continua su $\mathbf{R}^2$ e calcolarne estremo superiore e inferiore sul cerchio $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leqslant 1/2\}$.

104. (21/1/1983)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-y|^n}{n!} \log(n + x^2 + y^2) .$$

105. (21/1/1983)

Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x-y-2}{x+y}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

106. (21/1/1983)

Sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^1 tale che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ le funzioni

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_0) \quad , \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, t)$$

sono entrambe crescenti su $\mathbf{R}$..
Si può concludere che f è convessa su $\mathbf{R}^2$?

107. (11/2/1983)

Scrivere l'equazione del più piccolo cerchio di centro (0, 1) che interseca l'iperbole di equazione $xy = 8/9$.

108. (11/2/1983)

Studiare, nelle vicinanze del punto (1, 1), l'insieme

$$\{(x, y) : x \operatorname{sen} x - y \operatorname{sen} y = 0\} .$$

109. (11/2/1983)

Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \exp\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

dire se esso ha soluzione, e in caso affermativo tracciarne un grafico approssimativo e determinarne l'intervallo massimale di esistenza.

110. (11/2/1983)

Sia (P_n) una successione di polinomi su $\mathbf{R}$, tale che

$$P_n \to 0 \qquad \text{uniformemente su } \mathbf{R} .$$

Provare che, per n abbastanza grande, tutti i P_n sono polinomi costanti.

111. (11/5/1984)

Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sulla semiretta $\{x \geqslant 0\}$.

112. (11/5/1984)

Calcolare

$$\iint_D \frac{e^x}{1 + y^2} \, dx \, dy ,$$

dove $D = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant e^{-|x|}\}$.

113. (11/5/1984)

Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2} .$$

114. (11/5/1984)

Sia $y(x)$ una soluzione non identicamente nulla dell'equazione differenziale

$$y'' = y^2 + (y')^2 \, ;$$

provare che $y(x)$ non può essere definita su tutto $\mathbf{R}$.

115. (8/6/1984)

Si consideri il cono

$$C = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1 \right\} .$$

Dire per quali valori del parametro reale α si ha

$$0 \leqslant x^3 + \alpha y^3 + z^3 \leqslant 2 \qquad \forall \, (x, y, z) \in C \, .$$

116. (8/6/1984)

Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(x^n t)}{t} \, dt$$

sull'intervallo $[0, 1]$.

117. (8/6/1984)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} \log y - \dfrac{1}{y} \log x \\[2ex] y\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

per $x \leqslant \frac{1}{e}$. (Si consiglia di studiare preliminarmente l'insieme dei punti (x, y) dove $x \log x = y \log y$).

118. (8/6/1984)

Siano $a(x)$, $b(x)$ funzioni continue e positive, ed $y(x)$ una funzione continua definita per $x \geqslant 0$.

Si consideri l'implicazione

$$(*) \qquad [y(x) \leqslant a(x) + b(x) \int_0^x y(t)\,dt \qquad \forall x \geqslant 0] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad [y(x) \leqslant a(x) \exp \int_0^x b(t)\,dt \qquad \forall x \geqslant 0].$$

(i) Provare che (*) è vera quando a e b sono costanti.

(ii) Provare che (*) è vera quando $a(x)/b(x)$ è una funzione crescente.

(iii) L'implicazione (*) è sempre valida?

119. (3/7/1984)

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}\,.$$

Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare anche

$$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{x}\,.$$

120. (3/7/1984)

Data la funzione

$$f(x, y) = \operatorname{sen}^2 x + y \operatorname{sen} y ,$$

studiare l'insieme

$$\left\{(x, y) : |x| \leqslant \pi , \quad |y| \leqslant \frac{\pi}{2} , \quad f(x, y) = 1 \right\}$$

tracciandone anche un disegno approssimativo.

121. (3/7/1984)

Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$(*) \qquad y'' = e^{-y^2} - \log x ,$$

definita sul semipiano $\{(x, y) : x > 0\}$, provare che:

(i) le soluzioni di (*) sono definite su tutta la semiretta $]0, +\infty[$;

(ii) per ogni soluzione $y(x)$ di (*) si ha

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty .$$

122. (3/7/1984)

Sia $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione del tipo

$$(*) \qquad f(x, y) = \varphi(xy) , \quad \text{con } \varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ di classe } C^1 .$$

(a) Provare che

$$(**) \qquad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 .$$

(b) Provare che ogni $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1 verificante (**) è del tipo (*).

123. (8/10/1984)

Data la funzione

$$f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2}\, dt\,,$$

dimostrare che essa assume massimo e minimo sul cono di $\mathbf{R}^2$

$$K = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x\}\,,$$

e dire in quali punti ciò accade.

124. (8/10/1984)

(a) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2\, e^{-n|x|} \sqrt{n + x^2}$$

è definita e continua su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Dimostrare che f non è derivabile per $x = 0$.

125. (8/10/1984)

Studiare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen} y}{x + y} \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

tracciandone anche un grafico approssimativo.

126. (8/10/1984)

Data una funzione continua $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, sia $y_n(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_n'(x) = n y_n(x) + e^{-n^2} f(x) & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y_n(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione di funzioni (y_n) sull'intervallo $[0, 1]$.

127. (22/10/1984)

Dire se esiste qualche funzione continua $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che per $(x, y) \neq (0, 0)$ si abbia

$$f(x, y) = \frac{[(x-1)^2 + y^2] \log [(x-1)^2 + y^2]}{|x| + |y|} \,.$$

128. (22/10/1984)

Calcolare

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{D_\epsilon} \frac{|x|}{y(1+y^2)} \, dx \, dy \,,$$

dove

$$D_\epsilon = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2x^2 \,, \quad \epsilon \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

129. (22/10/1984)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = yy' + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = C \end{cases}$$

al variare del parametro reale C, e tracciare un grafico approssimativo della soluzione.

130. (22/10/1984)

Sia (f_n) una successione di funzioni continue tali che

$$\begin{cases} f_n(x) & \text{è periodica di periodo } T_n\ ; \\ f_n \to f & \text{uniformemente su } \mathbf{R}\ . \end{cases}$$

(a) Provare che se $\sup \{T_n\} < +\infty$ allora anche $f(x)$ è periodica.

(b) Cosa si può dire se $\sup \{T_n\} = +\infty$?

131. (25/1/1985)

Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{n\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + n^2(x^2 + y^2)} \quad .$$

132. (25/1/1985)

Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{x} \log y \, dx\, dy \, ,$$

dove $D = \{ (x, y) : 0 < \sqrt{y} < x < 1 \}$.

133. (25/1/1985)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \,, \end{cases}$$

tracciando anche un grafico approssimativo della soluzione.

134. (25/1/1985)

Indicato con σ il segmento $\{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y = 1\}$, si consideri la funzione

$$f(x, y) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + y \log\left(1 + \frac{1}{y}\right) .$$

(a) Provare che

$$\inf_{\sigma} f = \log 2 \,, \qquad \sup_{\sigma} f = \log 3 \,.$$

(b) Generalizzare il risultato al caso

$$f(x, y) = g(x) + g(y) \,,$$

con $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ di classe C^2 e strettamente concava.

135. (11/2/1985)

Dire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ la funzione definita per $(x, y) \neq (0, 0)$ da

$$f(x, y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^4 + y^2}$$

è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$.

136. (11/2/1985)

Sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2$ la funzione

$$F(x, y) = \left(\frac{y^2 - y^2}{x^2 + y^2} \;,\quad \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) .$$

Trovare l'immagine di F.

137. (11/2/1985)

Studiare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^y - x^2}{e^y + x^2} \\ \\ y(1) = 0 \end{cases} ,$$

tracciandone anche un grafico approssimativo.

138. (11/2/1985)

Data una funzione continua $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definiamo una successione (f_n) di funzioni su $\mathbf{R}$ ponendo

$$f_0(x) = \varphi(x) \;,\quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt .$$

(a) Calcolare esplicitamente $f_n(x)$ qualora $\varphi(x) \equiv 1$.

(b) Supponendo φ limitata, studiare la convergenza della serie di funzioni

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) .$$

(c) Calcolare la somma della serie (*) quando

$$\varphi(x) = e^x \operatorname{sen} x .$$

Parte seconda

Risoluzioni dei problemi

1. Cominciamo con la convergenza puntuale.
Per $x = 0$ la serie è banalmente convergente.
Per $x \neq 0$ la serie coincide, a meno del fattore x, con la serie geometrica di ragione $1/(1 + x)$, cosicché è convergente se e solo se $1/|1 + x| < 1$, cioè per

$$x < -2 \quad \text{oppure} \quad x > 0 \,.$$

La somma della serie è data dalla funzione

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad x < -2 \quad \text{oppure} \quad x > 0 \,. \end{cases}$$

Passiamo ora alla convergenza uniforme.
Anzitutto mostriamo che la serie non è uniformemente convergente su alcun intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$: infatti il resto n-esimo della serie è

$$r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se}\ x = 0 \\ \\ 1/(1 + x)^n & \text{se}\ x < -2 \quad \text{oppure} \quad x > 0 \,, \end{cases}$$

e

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant a} |r_n(x)| = \lim_{x \to 0} r_n(x) = 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N} \,.$$

Analogamente, si può escludere la convergenza uniforme della serie sugli intervalli $[a, -2[$ con $a < -2$. Invece, si ha convergenza uniforme sugli insiemi del tipo

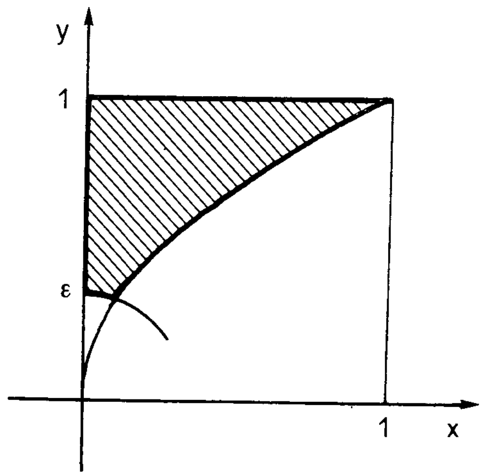
$$A_\delta =]-\infty, -2-\delta] \cup [\delta, +\infty[\quad , \quad \delta > 0 ,$$

in quanto la successione

$$\sup_{A_\delta} |r_n(x)| = \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

tende a zero per $n \to \infty$.
Il ragionamento precedente può essere raffinato per mostrare che la serie converge uniformemente (anzi totalmente) su un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ se e solo se $A \subseteq A_\delta \cup \{0\}$ per qualche $\delta > 0$.

2. L'insieme A_ϵ corrisponde alla zona tratteggiata in figura:



Poniamo $D_\epsilon = \{(x, y) \in A_\epsilon : y \geqslant \epsilon\}$: si verifica allora facilmente che $D_\epsilon \subset A_\epsilon \subset D_{\epsilon/\sqrt{2}}$; infatti

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant \epsilon^2 \\ \sqrt{x} \leqslant y \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 + y^2 \geqslant \epsilon^2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \left[2y^2 \geqslant \epsilon^2\right] \Rightarrow \left[y \geqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right]$$

D'altra parte l'integrando è positivo su A_ϵ, per cui

$$\iint_{D_\epsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy \leqslant \iint_{A_\epsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy \leqslant \iint_{D_{\epsilon/\sqrt{2}}} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy \, ,$$

e quindi basterà calcolare $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \iint_{D_\epsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy.$

Si trova facilmente che

$$\iint_{D_\epsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy = \int_\epsilon^1 \frac{1}{y} \int_0^{y^2} (x+1)\, dx\, dy = \frac{5}{8} - \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} \, ,$$

cosicché il limite cercato è $\frac{5}{8}$.

3. Posto

$$w = u + v \quad , \quad z = u - v$$

il sistema dato diventa

$$\begin{cases} w' = 0 \\ z' = -2z \, , \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $w(0) = a + b$, $z(0) = a - b$.
Si ha allora

$$w(x) = a + b \quad , \quad z(x) = (a - b)\, e^{-2x}$$

da cui, essendo $u = (w + z)/2$ e $v = (w - z)/2$,

$$u(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\, e^{-2x}$$

$$v(x) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\, e^{-2x} \, .$$

4. Osserviamo anzitutto che la soluzione $(u(x), v(x))$ è definita su tutto $\mathbf{R}$: infatti le funzioni che compaiono al secondo membro del sistema sono lipschitziane in (u, v) uniformemente rispetto ad x. Consideriamo ora la funzione

$$\delta(x) = u(x) - v(x),$$

osservando che essa è una soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta'(x) = f(-\delta(x)) - f(\delta(x)).$$

Tale equazione soddisfa le ipotesi del *teorema di Cauchy-Lipschitz* ed ha fra le sue soluzioni la costante nulla (in quanto $f(0) = 0$), pertanto, essendo $\delta(0) = 1 > 0$, si può concludere che

(1) $$\delta(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

D'altra parte l'ipotesi sulla f implica

(2) $$f(t) > 0 \quad \text{per } t > 0, \qquad f(t) < 0 \quad \text{per } t < 0,$$

quindi per (1) si ha

$$u'(x) = f(-\delta(x)) < 0$$

$$v'(x) = f(\delta(x)) > 0$$

Così, u è decrescente e v è crescente, e ricordando (1) si ha

$$0 < v(x) < u(x) < 1 \qquad \forall x > 0.$$

Le funzioni u e v ammettono allora limite finito, ℓ_u e ℓ_v, per $x \to +\infty$, e si ha

$$\ell_u \geqslant \ell_v \quad .$$

Se fosse $\ell_u > \ell_v$ si avrebbe poi

$$\lim_{x \to +\infty} u'(x) = f(\ell_v - \ell_u) < 0,$$

da cui

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = -\infty \ ,$$

quindi deve essere necessariamente $\ell_u = \ell_v$.
Osserviamo che le ipotesi su f sono sovrabbondanti: basta che f sia lipschitziana e verifichi (2).

5. Per la convergenza puntuale, si osservi che le funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)$$

sono positive su **R**, quindi la serie data risulterà convergente oppure divergente verso $+\infty$.
Usando la nota disuguaglianza

$$\log(1 + t) \leqslant t$$

con $t = x^2/\sqrt{n}$, si ottiene

$$(1) \qquad f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{x^2}{\sqrt{n}} \leqslant x^{2n+2}$$

e quindi, per il teorema del confronto, si ha la convergenza per $|x| < 1$.
D'altra parte, essendo

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1$$

si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(1 + 1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = 1 \ ,$$

pertanto la serie diverge per $x = 1$, e anche per $|x| \geqslant 1$ in quanto

$$|x| \geqslant 1 \Rightarrow f_n(x) \geqslant f_n(1) .$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, dalla (1) si ricava che, posto $A_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$ per $0 < \delta < 1$, si ha

$$\sup_{A_\delta} f_n \leqslant (1 - \delta)^{2n+2} \qquad \forall n \in \mathbf{N} ,$$

quindi si ha la convergenza uniforme su ogni intervallo A_δ con $0 < \delta < 1$. D'altra parte non si ha convergenza uniforme su $]-1,1[$, altrimenti si avrebbe convergenza anche negli estremi -1 e 1, il che non è.
Più in generale si può affermare che la serie converge uniformemente su un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ se e solo se $A \subseteq A_\delta$ per qualche $\delta \in]0, 1[$.

6. Indicando con

$$E = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$$

l'ellissoide dato, e con S la sfera unitaria di $\mathbf{R}^3$, si ha subito (usando il cambiamento di variabili $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/b$, $\tilde{z} = z/c$) che

$$\operatorname{vol}(E) = \iiint_E 1 \, dx\, dy\, dz = \iiint_S abc \, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z} = \frac{4}{3} \pi \, abc \quad .$$

Si deve ora massimizzare la quantità $f(a, b, c) = abc$ sull'insieme

$$A = \left\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a + 2b + 3c = 7\right\}.$$

Dato che A è chiuso e limitato e che f è continua, il massimo esiste. Inoltre f è non negativa, ed è $f(a, b, c) = 0$ per $a = 0$ oppure $b = 0$ oppure $c = 0$, quindi il massimo di f su A è un massimo locale di f sull'iperpiano

$$H = \left\{(a, b, c) : a + 2b + 3c = 7\right\}.$$

Usando il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, ci si riduce a ri-risolvere il sistema

$$\begin{cases} bc = \lambda \\ ac = 2\lambda \\ ab = 3\lambda \\ a + 2b + 3c = 7 \; . \end{cases}$$

E' facile vedere che deve essere

$$a = \frac{7}{3}\,, \quad b = \frac{7}{6}\,, \quad c = \frac{7}{9} \; .$$

In corrispondenza a tali valori di a, b, c si trova il volume massimo cercato che è $\dfrac{686}{243}\,\pi$.

7. Per $x \geqslant 0$ si ha

$$\sqrt{x} + z \leqslant y \iff [y - z \geqslant 0 \;\text{ e }\; x \leqslant (y - z)^2]\,,$$

dunque

$$D = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y, 0 \leqslant x \leqslant (y - z)^2\right\} .$$

Applicando il *teorema di Fubini-Tonelli* si trova allora

$$\iiint_D f(y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 f(y)\left[\int_0^y \left(\int_0^{(y-z)^2} dx\right) dz\right] dy =$$

$$= \int_0^1 f(y) \cdot \frac{y^3}{3}\, dy \; .$$

8. Detta $u(x, y)$ una soluzione del problema e fissato $y \in \mathbf{R}$, poniamo

$$v(x) = u(x, y)\ .$$

La funzione v verifica allora

$$v'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y - u(x, y) = y - v(x)\ ,$$

e quindi v risolve

$$\begin{cases} v'(x) = y - v(x) \\ v(0) = e^y \quad . \end{cases}$$

La soluzione (unica) di questo problema di Cauchy è

$$v(x) = y + (e^y - y)\, e^{-x}\ ,$$

dunque la funzione

$$u(x, y) = y + (e^y - y)\, e^{-x}$$

è l'unica soluzione del problema proposto.

9. (a) Posto per ogni $r \geqslant 0$

$$A_r = \left\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant r\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}\ ,$$

si verifica subito che

$$A_{r-1} \subset D_r \subset A_r \qquad \forall r \geqslant 1\ .$$

L'integrando è positivo, dunque il limite cercato coincide con il limite per $r \to +\infty$ della funzione crescente

$$f(r) = \iint_{A_r} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy\ .$$

Per il *teorema di Fubini-Tonelli* si ha

$$f(r) = \int_0^1 \left(\int_0^r \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx \right) dy$$

da cui, usando la sostituzione $t = x/\sqrt{1 + y^2}$,

$$f(r) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy .$$

In vista del limite per $r \to +\infty$, una buona stima della funzione $\operatorname{arctg}(r/\sqrt{1 + y^2})$ è

$$\operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{2}} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{1 + y^2}} \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \forall y \in [0, 1] .$$

Allora si ha

$$\operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} \leqslant f(r) \leqslant \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} ,$$

cosicché

$$\lim_{r \to +\infty} f(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2}) .$$

(b) Applicando ancora il *teorema di Fubini-Tonelli,* ma nell'altro verso rispetto a prima, si ottiene

$$f(r) = \int_0^r \left[\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dy \right] dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$

ovvero, eseguendo la sostituzione $1/x = \operatorname{tg} t$,

$$f(r) = \int_{\operatorname{arctg} 1/r}^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen} t}\, dt .$$

Confrontando con quanto trovato nella parte (a) si può allora concludere che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen} t}\, dt = \frac{\pi}{2} \log(1+\sqrt{2})\,.$$

10. Ricordando che $ds \wedge dr = -\, dr \wedge ds$ e sostituendo, l'integrale diventa

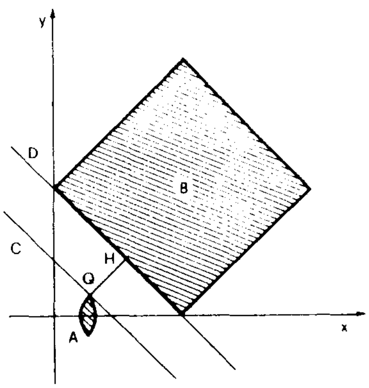
$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} [(r^2+s^2)(r-s)(dr-ds)\wedge(sdr+rds)+$$

$$+(r-s)\,rs\,(2rdr+2sds)\wedge(dr+ds)] =$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} [r^4 - s^4 + 2rs(r^2-2rs+s^2)]\, dr\wedge ds =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (r^4 + 2r^3 s - 4r^2 s^2 + 2rs^3 - s^4)\, dr\right] ds = \frac{1}{18}\,.$$

11. I due insiemi A e B sono indicati in figura:



Le equazioni degli archi di parabola che compongono il bordo di A sono le seguenti:

$$\partial_1 A = \left\{ x = \frac{3}{5} + y^2 \, , \quad |y| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$

$$\partial_2 A = \left\{ x = 1 - y^2 \quad , \quad |y| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \right\},$$

ed i punti di intersezione sono

$$P = \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \, , \quad Q = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Consideriamo la retta di coefficiente angolare -1 e passante per Q : essa ha equazione

$$y = -x + \frac{4 + \sqrt{5}}{5} \, .$$

Posto

$$C = \left\{ y \leqslant -x + \frac{4 + \sqrt{5}}{5} \right\} \quad ,$$

proviamo che $C \supset A$. Scrivendo A come

$$A = A_1 \cup A_2 = \left(A \cap \left\{ x \leqslant \frac{4}{5} \right\} \right) \cup \left(A \cap \left\{ x \geqslant \frac{4}{5} \right\} \right)$$

è chiaro che $A_1 \subset C$, perché in A_1 è $x \leqslant \frac{4}{5}$, $y \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Basta allora provare che $A_2 \subset C$: scelto $(x, y) \in A_2$ si ha

$|y| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$, e anche $x \leqslant 1 - y^2$, da cui

$$x + y \leqslant 1 + y - y^2 \, .$$

La funzione $\varphi(y) = 1 + y - y^2$ ha, sull'intervallo $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, massimo per $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$, e tale massimo vale $\frac{4+\sqrt{5}}{5}$. Allora in A_2 si ha

$$x + y \leqslant \frac{4+\sqrt{5}}{5},$$

cioè $A_2 \subset C$.

Poniamo ora

$$D = \{y \geqslant -x + 3\};$$

è chiaro che $B \subset D$, perché in B è

$$(3-x) + (3-y) \leqslant |x-3| + |y-3| \leqslant 3,$$

e quindi $x + y \geqslant 3$. Allora da $A \subset C$ e $B \subset D$ segue

$$\operatorname{dist}(A, B) \geqslant \operatorname{dist}(C, D).$$

Quest'ultima, come è facile vedere, è uguale a

$$\operatorname{dist}(C, D) = \operatorname{dist}(Q, H) = \frac{11-\sqrt{5}}{10}\sqrt{2},$$

dove H, la proiezione di Q su D, ha coordinate

$$\left(\frac{19-\sqrt{5}}{10}, \frac{11+\sqrt{5}}{10}\right).$$

D'altra parte $Q \in A$, $H \in B$, dunque

$$\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \operatorname{dist}(Q, H);$$

la distanza cercata è allora $\frac{11-\sqrt{5}}{10}\sqrt{2}$.

12. Supponiamo che f verifichi la condizione

$$(1) \qquad |Df(x)| \leqslant k \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n ,$$

dove $Df = (D_1 f, \ldots, D_n f)$ è il gradiente di f. Fissati x, y in $\mathbf{R}^n$ consideriamo la funzione (di una sola variabile reale)

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x)) .$$

Chiaramente φ è derivabile, e si ha

$$\varphi'(t) = Df(x + t(y - x)) \cdot (y - x)$$

(dove $a \cdot b$ è il prodotto scalare di a e b). Grazie alla (1) e alla *disuguaglianza di Schwarz* si ha allora

$$|\varphi'(t)| \leqslant k\,|y - x|$$

e quindi

$$|f(y) - f(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |\varphi'(t)|\,dt \leqslant k\,|y - x| ,$$

cosicché f risulta k-lipschitziana.
Viceversa, sia f una funzione k-lipschitziana di classe C^1. Avendo fissati x ed h in $\mathbf{R}^n$, consideriamo la funzione (di una variabile)

$$\psi(t) = f(x + th) .$$

Si ha

$$|\psi(t) - \psi(0)| = |f(x + th) - f(x)| \leqslant k\,|t|\,|h| ,$$

e quindi

$$|\psi'(0)| \leqslant k\,|h| .$$

D'altra parte $\psi'(t) = Df(x + th) \cdot h$, pertanto

$$|Df(x) \cdot h| \leqslant k\,|h|.$$

Per l'arbitarietà di h (si scelga $h = Df(x)$) si ottiene allora

$$|Df(x)| \leqslant k.$$

Il secondo quesito ha in generale risposta negativa. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$$

è 1-lipschitziana, in quanto

$$|Df(x)| = \frac{x}{\sqrt{1 + |x|^2}} \leqslant 1\,,$$

mentre per

$$P_1 = (2, 0, \dots, 0),\ P_2 = (0, 2, 0. \dots 0), \dots, P_n = (0, 0, \dots, 2)$$

ed $n \geqslant 2$ risulta

$$D_i f(P_i) = \frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{1}{n} \qquad \forall i \in \{1 \dots n\}\,.$$

13. (a) L'equazione ha senso per $y \neq x^2$. Siccome nel punto iniziale $(0, a)$ si ha $y > x^2$, possiamo limitarci a considerare l'equazione nell'insieme aperto

$$A = \{(x, y) : y > x^2\}\,.$$

In tale insieme la funzione $f(x, y) = 1/(y - x^2)$ è di classe C^1 e quindi localemnte lipschitziana in y. Per il teorema di Cauchy esiste allora una ed una sola soluzione $y_a(x)$ del problema, definita

in un intorno del punto $x = 0$. Inoltre, dal fatto che $f(x, y)$ è di classe C^∞ in A si deduce facilmente che anche $y_a(x)$ è di classe C^∞.
Dall'equazione si ha subito che

$$y_a'(0) = \frac{1}{a} \quad .$$

Derivando membro a membro l'equazione si ottiene poi per ogni soluzione $y(x)$

$$y'' = \frac{2x - y'}{(y - x^2)^2}$$

e anche

$$y''' = \frac{(2 - y'')(y - x^2) + 2(2x - y')^2}{(y - x^2)^3} \, ,$$

pertanto

$$y_a''(0) = -\frac{1}{a^3} \quad , \quad y_a'''(0) = \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^5} \quad .$$

(b) Sia $\lambda \in \,]0, +\infty]$ l'estremo superiore dell'intervallo massimale di definizione I di $y_a(x)$. Il grafico della funzione y_a sta tutto all'interno dell'insieme A_1 dove è $f(x, y) > 0$, dunque si ha subito che y_a è crescente su $[0, \lambda[$. In particolare esiste

$$\mu = \lim_{x \to \lambda^-} y_a(x) \, ,$$

ed è $a < \mu \leqslant +\infty$.
Proveremo che $\lambda = \mu = +\infty$, mostrando che altrimenti si perviene ad una contraddizione.
Se fosse $\lambda < +\infty$, $\mu < +\infty$ allora necessariamente il punto (λ, μ) dovrebbe appartenere alla parabola $y = x^2$ (altrimenti per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* si potrebbe prolungare ancora la soluzione y_a in un intorno destro del punto $x = \lambda$, contraddicedo la massimalità di I). Ma allora, essendo $y_a(x) > x^2$ per $x < \lambda$, si avrebbe

$$(1) \qquad \frac{\mu - y_a(x)}{\lambda - x} \leqslant \frac{\mu - x^2}{\lambda - x} = \frac{\lambda^2 - x^2}{\lambda - x} \leqslant 2\lambda \qquad \forall x < \lambda\,,$$

e d'altra parte, applicando il *teorema di Lagrange,* si ha per ogni $x < \lambda$

$$\frac{\mu - y_a(x)}{\lambda - x} = y_a'(\xi_x) = \frac{1}{y_a(\xi_x) - \xi_x^2}$$

con $x < \xi_x < \lambda$, e quindi

$$\lim_{x \to \lambda^-} \frac{\mu - y_a(x)}{} = +\infty\,,$$

in contraddizione con (1).
Se invece si avesse $\lambda < +\infty$, $\mu = +\infty$, vorrebbe dire che la retta $x = \lambda$ è un asintoto verticale per la funzione crescente y_a, quindi necessariamente

$$\limsup_{x \to \lambda^-} y_a'(x) = +\infty\,,$$

in contraddizione col fatto che

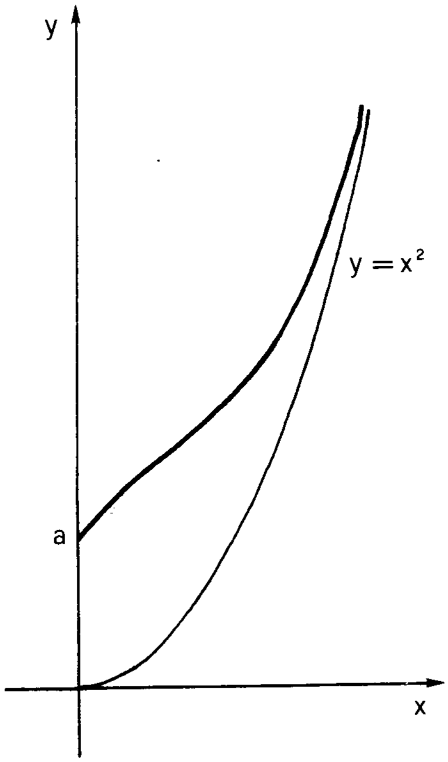
$$\lim_{x \to \lambda^-} y_a'(x) = \lim_{x \to \lambda^-} \frac{1}{y_a(x) - x^2} = 0\,.$$

Non può infine essere $\lambda = +\infty$, $\mu < +\infty$ perché $y_a(x) \geqslant x^2$ per ogni x.
In conclusione l'unico caso possibile è $\lambda = \mu = +\infty$, come si voleva dimostrare.

Si potrebbe anche provare che $y_a(x)$ è asintotica alla parabola $y = x^2$, nel senso che

$$\lim_{x \to +\infty} (y_a(x) - x^2) = 0\,.$$

Un grafico approssimativo della soluzione per $a = 1$ è il seguente:



14. (a) Per x ed y positivi si ha

$$\sqrt[n]{x^n + y^n + ny} \geqslant \sqrt[n]{x^n + y^n} \geqslant \sqrt[n]{[\max\{x, y\}]^n} = \max\{x, y\},$$

e quindi

$$\sqrt[n]{f_n(x, y)} \leqslant \frac{1}{\max\{x, y\}} \quad . \tag{1}$$

Per il *criterio della radice*, si ha allora la convergenza della serie per ogni (x, y) tale che

(2) $$\max\{x, y\} > 1 \,,$$

cioè al di fuori del quadrato $T = [0, 1] \times [0, 1]$. Viceversa, per $(x, y) \in T$ si ha

$$x^n + y^n + ny \leqslant 2 + n \,,$$

quindi $f_n(x, y) \geqslant 1/(2 + n)$ e la serie è divergente. Allora la (2) è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie data.

(b) Cerchiamo ora i sottoinsiemi $A \subseteq Q$ per cui sia

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_A f_n < +\infty \,.$$

Dato che la convergenza totale (3) implica la convergenza uniforme e quindi la convergenza puntuale, occorrerà anzitutto che A sia esterno al quadrato T. Dalla disuguaglianza (1) segue poi facilmente la (3) non appena esista un $\delta > 0$ per cui

(4) $$\max\{x, y\} \geqslant 1 + \delta \qquad \forall (x, y) \in A \,,$$

cioè se A ha distanza positiva da T. Viceversa, se la (4) è violata vuol dire che si può trovare una successione di punti (x_h, y_h) in A tali che per $h \to \infty$

$$(x_h, y_h) \to (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{con} \quad \max\{\bar{x}, \bar{y}\} \leqslant 1 \,.$$

Ma allora per la continuità di f_n si ha

$$\sup_A f_n \geqslant \sup_h f_n(x_h, y_h) \geqslant f_n(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \forall n \in \mathbf{N} \,,$$

e

$$f_n(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \frac{1}{2 + n} \,,$$

quindi non si può avere la (3).
In conclusione si ha la (3) se e solo se vale (4).

15. Sia $f(x, y)$ una funzione continua tale che

(1) $$\int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = ab \qquad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 .$$

Derivando ambo i membri di (1) rispetto alla variabile a, ed utilizzando il *teorema di Fubini-Tonelli* e il *teorema fondamentale del calcolo integrale,* si ha allora

$$\int_0^b f(x, a)\, dx = b \qquad \forall a \in \mathbf{R} \quad \forall b \in \mathbf{R}$$

da cui, derivando rispetto a b ,

$$f(b, a) = 1 \qquad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 ,$$

che è la tesi.
Supponiamo ora che

(2) $$f(x, y) = -f(y, x) \qquad \forall (x, y) .$$

Eseguendo il cambiamento di variabili $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$ si ottiene

$$\int_0^a \int_0^a f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^a f(\tilde{y}, \tilde{x})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y} = -\int_0^a \int_0^a f(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y} ,$$

da cui

(3) $$2 \int_0^a \int_0^a f(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad \forall a \in \mathbf{R} ,$$

che è la tesi.
La (3) può essere verificata anche da funzioni che violano (2): ad esempio, la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } \; xy < 0 \\ 0 & \text{se } \; xy \geqslant 0 \end{cases}$$

è nulla nel primo e nel terzo quadrante, quindi verifica (3), ma $f(x, y) = f(y, x)$.
Si possono dare esempi anche con funzioni il cui supporto interseca questi quadranti, come

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{2\pi x}{y} & \text{se } \; y > x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Se è $a > 0$, si ha infatti

$$\int_0^a \left(\int_0^a f(x, y)\, dx \right) dy = \int_0^a y \left(\int_0^y \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{y}\, dx \right) dy = 0 .$$

16. (a) La curva C è di classe C^1 ed ha per tangente in $(x(t_0), y(t_0))$ la retta

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) . \end{cases}$$

Poiché

$$x'(t) = 1 + \operatorname{sen} t \;, \quad y'(t) = 2 \cos 2t ,$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ si ha

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0 \qquad \text{per } \; t = \bar{t} \\ y'(t) &= 0 \qquad \text{per } \; t = t_1, t_2, t_3, t_4 \end{aligned}$$

con

$$\bar{t} = \frac{3}{2}\pi \;, \quad t_1 = \frac{1}{4}\pi , \quad t_2 = \frac{3}{4}\pi , \quad t_3 = \frac{5}{4}\pi , \quad t_4 = \frac{7}{4}\pi .$$

I punti della curva che corrispondono ai valori 0, t_1, t_2, t_3, $\bar{t}$, t_4 e 2π del parametro t sono (nell'ordine):

$$A = (-1, 1)\,,\quad P_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right),\quad P_2 = \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$P_3 = \left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right),\quad \bar{P} = \left(\frac{3}{2}\pi\,, 1\right), P_4 = \left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

e

$$A' = (2\pi - 1, 1)\,.$$

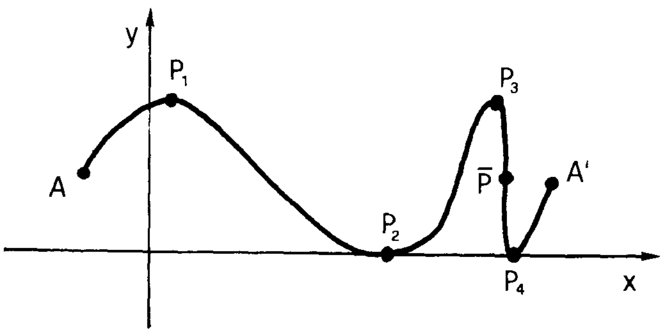
Nei punti P_1, P_2, P_3 e P_4 la tangente alla curva è orizzontale, mentre nel punto $\bar{P}$ è verticale. Si ha poi

$$x'(t) > 0 \qquad \text{per} \quad t \in [0, 2\pi] \setminus \{\bar{t}\}$$

$$y'(t) > 0 \qquad \text{per} \quad t \in [0, t_1[\ \cup\ ]t_2, t_3[\ \cup\ ]t_4, 2\pi]$$

$$y'(t) < 0 \qquad \text{per} \quad t \in]t_1, t_2[\ \cup\ ]t_3, t_4[\,.$$

Il grafico della curva C è allora simile a quello in figura (in particolare C è un grafico cartesiano rispetto a x).



b) La retta normale alla curva C nel punto $(x(t_0), y(t_0))$ ha coefficiente angolare uguale a $x'(t_0)/y'(t_0)$, se è $y'(t_0) \neq 0$, dunque le normali in A e B hanno equazioni

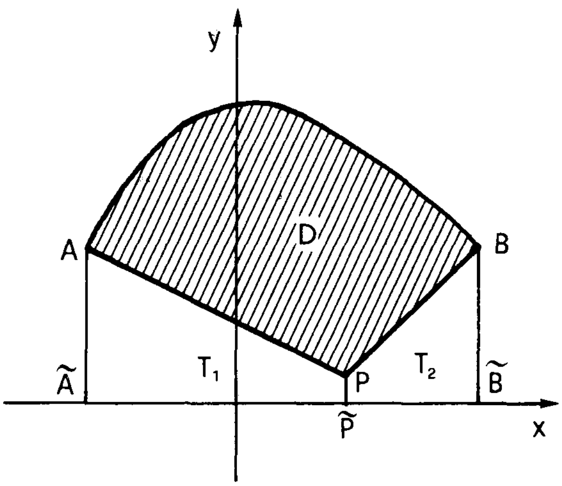
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad , \quad y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

rispettivamente.

c) L'intersezione fra le due normali è il punto

$$P = \left(\frac{\pi - 1}{3}, \frac{4 - \pi}{6}\right),$$

dunque il dominio D racchiuso fra la curva C e i segmenti AP, PB è del tipo indicato in figura:



Si ha allora

$$\text{area}\,(D) = \text{area}\,(\tilde{D}) - \text{area}\,(T_1 \cup T_2)$$

ove $\tilde{D}$ è il dominio racchiuso dalla curva C e dai segmenti $A\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$ e $B\tilde{B}$ mentre T_1 e T_2 sono i due trapezi $A\tilde{A}\tilde{P}P$ e $P\tilde{P}\tilde{B}B$. Entrambi questi trapezi hanno la base maggiore uguale ad 1 e la base minore uguale a $(4 - \pi)/6$, mentre le loro altezze hanno somma $1 + \pi/2$: si ha allora

$$\text{area}\,(T_1 \cup T_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4 - \pi}{6}\right)\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{24}\,.$$

Per calcolare l'area del dominio $\widetilde{D}$ possiamo usare la formula seguente:

$$\text{area}\,(\widetilde{D}) = \int_{\partial D} y\,dx\,.$$

Sui segmenti $A\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}B$ si ha x = costante, mentre su $\widetilde{A}\,\widetilde{B}$ è $y = 0$, dunque la forma differenziale $y\,dx$ è nulla su questi tre segmenti, e di conseguenza si ha

$$\text{area}\,(\widetilde{D}) = \int_{\Gamma} y\,dx\,,$$

ove Γ indica l'arco della curva C di estremi A e B. Si ha dunque:

$$\text{area}\,(\widetilde{D}) = \int_0^{\pi/2} y(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + \text{sen}\,2t)\,(1 + \text{sen}\,t)\,dt = \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2}\,.$$

In conclusione

$$\text{area}\,(D) = \frac{11}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{24}\,.$$

17. (i) La funzione $|y - x|$ che compare al secondo membro dell'equazione differenziale è lipschitziana in y con costante di Lipschitz 1: infatti si ha

$$\big||y_1 - x| - |y_2 - x|\big| \leqslant |(y_1 - x) - (y_2 - x)| = |y_1 - y_2|\,.$$

Di conseguenza, per ogni valore di a, il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione, definita su tutto **R**.

(ii) Ponendo

$$z\,(x) = y(x) - x\,,$$

il problema dato si traduce in

$$(1) \qquad \begin{cases} z' = |z| - 1 \\ z(0) = a \end{cases}$$

L'equazione $z' = |z| - 1$ ammette le due soluzioni costanti $z = 1$ e $z = -1$, che rappresentano le soluzioni di (1) nei casi $a = 1$ ed $a = -1$ rispettivamente. Di conseguenza ogni altra soluzione di (1) avrà un grafico che non interseca le due rette $z = 1$ e $z = -1$, grazie al *teorema di unicità.*
Così, se è $a > 1$, la soluzione di (1) resta sempre maggiore di 1, e quindi è anche soluzione dell'equazione

$$(2) \qquad z' = z - 1 \; ,$$

e analogamente se è $a < 1$ si ha $z(x) < 1$, quindi z risolve

$$(3) \qquad z' = -z - 1 \; .$$

Ora si verifica facilmente che le soluzioni di (2) e di (3) sono rispettivamente le funzioni della forma

$$(4) \qquad z(x) = 1 + C_1 e^x$$

e

$$(5) \qquad z(x) = -1 + C_2 e^{-x}$$

al variare delle costanti C_1 e C_2.
Utilizzando la condizione iniziale $z(0) = a$ si trova che

$$(6) \qquad z(x) = 1 + (a-1)\,e^x \qquad \text{se } \; a > 1$$

$$(7) \qquad z(x) = -1 + (a+1)\,e^{-x} \quad \text{se } \; a < 1 \; .$$

Resta da esaminare il caso in cui $-1 < a < 1$.
Detta z_a la soluzione di (1), si ha $|z_a(x)| < 1$ per ogni x, e quindi $z_a'(x) = |z_a(x)| - 1 < 0$. Dunque z_a è decrescente su $\mathbf{R}$, fra i due valori

$$\ell_1 = \lim_{x \to -\infty} z_a(x) = \sup z_a \quad , \quad \ell_2 = \lim_{x \to +\infty} z_a(x) = \inf z_a \; .$$

Ma allora da (1) si ricava

$$\lim_{x \to -\infty} z_a'(x) = |\ell_1| - 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} z_a'(x) = |\ell_2| - 2 \; ,$$

e quindi necessariamente (v. il *teorema dell'asintoto* nell'Appendice).

$$|\ell_1| = |\ell_2| = 1 \; .$$

In conclusione, essendo $\ell_1 > \ell_2$, si ha $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = -1$, cioè la funzione $z_a(x)$ decresce da 1 a -1 quando x varia da $-\infty$ a $+\infty$. In particolare esiste uno ed un solo punto x_a per cui è

$$z_a(x_a) = 0 \; ,$$

e quindi z_a è della forma (4) per $x \leqslant x_a$ (cioè dove è positiva), e della forma (5) per $x \geqslant x_a$.
Più precisamente, se è $a \geqslant 0$, deve essere $x_a \geqslant 0$, e quindi $z_a(x)$ e data dalla (6) per $x \leqslant x_a$, mentre per $a \leqslant 0$ si ha $x_a \leqslant 0$, cosicché $z_a(x)$ è data dalla (7) per $x \geqslant x_a$.
Allora si ha, in particolare,

$$x_a = \begin{cases} \log \dfrac{1}{1-a} & \text{se} \quad 0 \leqslant a < 1 \\ \\ \log(1+a) & \text{se} \quad -1 < a \leqslant 0 \; . \end{cases}$$

Infine, ricavando le costanti C_1 e C_2 in (4) e (5), si trovano facilmente le espressioni di $z_a(x)$ per $x \geqslant x_a$ quando $a > 0$ e per $x \leqslant x_a$ quando $a \leqslant 0$.
In conclusione, ricordando la posizione iniziale $y = x + z$, si ha

$$\text{per} \quad a \geqslant 1 \; , \qquad y(x) = x + 1 + (a-1)e^x \; ;$$

$$\text{per} \quad 0 \leqslant a < 1 \; , \quad y(x) = \begin{cases} x + 1 - (1-a)e^x & \text{per} \quad x \leqslant \log \dfrac{1}{1-a} \\ \\ x - 1 + \dfrac{1}{1-a} e^{-x} & \text{altrimenti} \; ; \end{cases}$$

$$\text{per} \quad -1 < a < 0 \,, \quad y(x) = \begin{cases} x + 1 - \dfrac{1}{a+1}\, e^x & \text{per} \quad x \leqslant \log(1+a) \\ x - 1 + (1+a)\, e^x & \text{altrimenti ;} \end{cases}$$

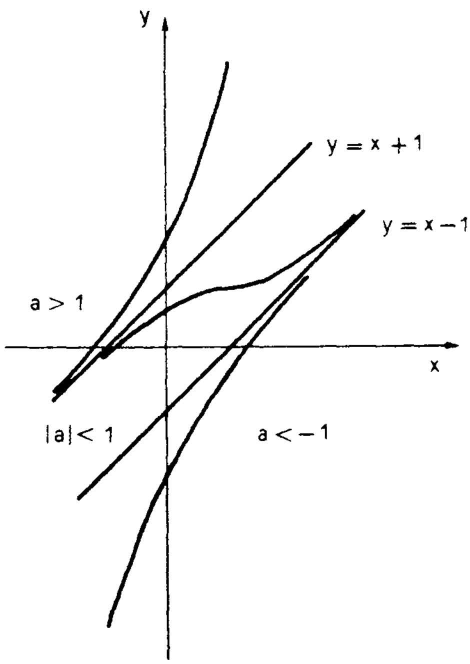
$$\text{per} \quad a \leqslant -1 \,, \qquad y(x) = x - 1 + (1+a)\, e^{-x} \,.$$

(iii) Per $|a| \leqslant 1$ si ha $x - 1 \leqslant y(x) \leqslant x + 1$ e quindi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = 1$.

Per $a > 1$, si ha invece $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$.

mentre per $a < -1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$.

Un grafico approssimativo delle soluzioni è il seguente.



18. Derivando membro a membro la prima equazione e sostituendovi la seconda, si ricava

$$u''' = (u' - au) + av' ,$$

da cui, procedendo allo stesso modo, si perviene alla seguente equazione del quarto ordine nella sola incognita u:

$$u^{\mathrm{IV}} - u'' + a^2 u = 0 . \tag{1}$$

Fra le soluzioni di (1) vi sono le esponenziali (complesse)

$$u(x) = e^{\lambda x} ,$$

dove λ è una radice (complessa) dell'equazione

$$\lambda^4 - \lambda^2 + a^2 = 0 . \tag{2}$$

Queste esponenziali sono tutte periodiche se e solo se (2) ha solo radici immaginarie pure (cioè $\lambda = ib$, con $b \in \mathbf{R}$). Se $a \neq 0$, l'equazione (2) non ha radici immaginarie, perché

$$(ib)^4 - (ib)^2 + a^2 = b^4 + b^2 + a^2 > 0 .$$

Se $a = 0$, l'equazione (1) ha come soluzioni tutti i polinomi di primo grado, che non sono periodici se non sono costanti.
In conclusione, non è possibile trovare alcun valore reale del parametro a per il quale tutte le soluzioni del sistema siano periodiche.

(ii) Cominciamo col caso $a \neq 0$. Se $N \geqslant 1$ è il grado di un polinomio, la sua derivata ha grado $N - 1$.
Sia (u, v) una soluzione polinomiale del sistema, e sia N il grado di u. Dall'equazione

$$v'' = u' - au$$

segue che v'' ha grado N, quindi v ha grado $N + 2$. Ma dall'altra equazione si ottiene che u'' ha grado $N + 2$, quindi u ha grado $N + 4$, assurdo. Il caso $a = 0$ è analogo .

19. (i) La funzione $|y| + x^2$, che compare al secondo membro della equazione differenziale (*), è chiaramente lipschitziana in y, con costante di Lipschitz uguale ad 1. Pertanto le soluzioni di (*) sono definite su tutto $\mathbf{R}$. Si ha poi, se $y(x)$ è una di tali soluzioni,

$$y'(x) > 0 \qquad \forall x \neq 0 ,$$

cosicché $y(x)$ è una funzione strettamente crescente su $\mathbf{R}$. In particolare, se y_a è la soluzione che si annulla nel punto $x = a$, si avrà

$$y_a(x) < 0 \quad \text{per } x < a \quad , \qquad y_a(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > a .$$

Di conseguenza y_a risolve le equazioni lineari

$$y' = -y + x^2 \qquad \text{per } x \leqslant a, \qquad y' = y + x^2 \qquad \text{per } x \geqslant a ,$$

e quindi con facili calcoli si trova

$$y_a(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2) - (a^2 - 2a + 2)\, e^{a-x} & \text{per} \quad x \leqslant a \\ \\ -(x^2 + 2x + 2) + (a^2 + 2a + 2)\, e^{x-a} & \text{per} \quad x \geqslant a . \end{cases}$$

(ii) Come si è visto, ogni soluzione di (*) è crescente su $\mathbf{R}$.
Da (*) si ricava poi, per ogni soluzione $y(x)$,

$$\lim_{x \to -\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty ,$$

e quindi necessariamente

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty \ .$$

Allora esiste uno (ed un solo) numero reale a per cui $y(a) = 0$. In altre parole $y(x)$ è del tipo individuato in (i).

20. Indicata con K l'unione del paraboloide $\{z \geqslant x^2 + y^2\}$ e del suo simmetrico $\{z \leqslant -x^2 - y^2\}$, il solido $K(s, t)$ è la parte di K com-

presa fra i piani $z = s$ e $z = t$. La sezione di $K(s, t)$ all'altezza z è un cerchio di raggio $\sqrt{|z|}$, dunque il volume di $K(s, t)$ è

$$V(s, t) = \int_s^t \pi\,|z|\,dz = \frac{\pi}{2}\,[z\,|z|]_s^t = \frac{\pi}{2}\,(t^2 + s^2) \ .$$

La superficie laterale $S(s, t)$ è uguale a $S(0, t) + S(0, -s)$. Dato che $K(0, t)$ è generato dalla rotazione intorno all'asse z del dominio $\{(x, z) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{t}, x^2 \leqslant z \leqslant t\}$, si ha

$$S(0, t) = \int_0^{\sqrt{t}} 2\pi x \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \frac{\pi}{6}\,[(\sqrt{1 + 4t})^3 - 1]$$

e quindi

$$S(s, t) = \frac{\pi}{6}\,[(\sqrt{1 + 4t})^3 + (\sqrt{1 - 4s})^3 - 2] \ .$$

Di questa funzone dobbiamo cercare massimo e minimo sulla varietà $\{(s, t) : s < 0 < t,\ V(x, t) = 1\}$.
Applicando il *metodo dai moltiplicatori di Lagrange* si ottiene

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 4t} &= 2\lambda t \\ \sqrt{1 - 4s} &= -2\lambda s \\ s^2 + t^2 &= \frac{2}{\pi} \\ s < 0 &< t \end{aligned}$$

da cui $\lambda \neq 0$ e $t = -s = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. L'unico punto stazionario è

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Sul bordo della varietà si ha

$$S\left(0,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)=S\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}},0\right)=\frac{\pi}{6}\left[\left(\sqrt{1+4\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\right)^3-1\right],$$

che è minore di

$$S\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{\pi}{3}\left[\left(\sqrt{1+\frac{4}{\sqrt{\pi}}}\right)^3-1\right].$$

La massima superficie laterale si ha dunque per $-s=t=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$,

mentre il minimo non esiste: c'è solo l'estremo inferiore

$$S\left(0,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

21. Essendo

$$f_n(x,y)=e^{n|y|}\,e^{nx}=(e^{x+|y|})^n\ ,$$

la serie converge in un punto (x, y) se e solo se $\exp(x+|y|)<1$, cioè per

$$x+|y|<0\ .$$

Studiamo ora la convergenza uniforme su un generico insieme $A\subseteq\mathbf{R}^2$.
Supponiamo dapprima che

$$\sup_{(x,y)\in A}(x+|y|)=-\delta<0\ . \tag{1}$$

Si ha allora

$$f_n(x,y)\leqslant(e^{-\delta})^n\qquad\forall(x,y)\in A\ ,$$

e quindi la convergenza su A è uniforme, anzi totale.
Viceversa, supponiamo che (1) sia violata. Si ha allora, grazie al

fatto che la funzione esponenziale è crescente,

$$\sup_{(x,y)\in A} f_n(x, y) = \exp\left[n \sup_{(x,y)\in A} (x + |y|)\right] \geqslant e^0 = 1 ,$$

e quindi non può aversi convergenza uniforme su A, perché questa comporta in particolare la convergenza a zero della successione $(\sup_A f_n)$.

In conclusione la (1) è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme su A.

22. Per ogni fissato (x, y) consideriamo la funzione

$$g(t) = f(tx, ty) ;$$

tale funzione risulta di classe C^1 e si ha

$$g'(t) = x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty) .$$

Essendo $g(0) = f(0, 0) = 0$, si può scrivere

$$f(x, y) = g(1) = \int_0^1 g'(t)\, dt = x A(x, y) + y B(x, y) ,$$

dove

$$A(x, y) = \int_0^1 f_x(tx, ty)\, dt , \quad B(x, y) = \int_0^1 f_y(tx, ty)\, dt .$$

Le funzioni A e B sono continue in quanto f_x ed f_y sono continue, e quindi siano nelle condizioni di applicare il seguente ben noto teorema: se $\psi(t, z)$ è una funzione continua su $[a, b] \times \Omega$ con Ω aperto di $\mathbf{R}^k$, allora la funzione

$$\varphi(z) = \int_a^b \psi(t, z)\, dt$$

è continua su Ω .

23. Osserviamo subito che si tratta di una equazione differenziale non in forma normale.
Sia $y(x)$, una sua soluzione C^1, definita in un intervallo I e tale che $y(x) > 0$ per ogni x. Poiché è

$$(y' - x)(y' + xy) = 0 ,$$

in ogni punto $x \in I$ si deve avere

$$y'(x) = x \tag{1}$$

oppure

$$y'(x) = -xy(x) . \tag{2}$$

Dato che x e $-xy(x)$ hanno segno opposto se $x \neq 0$, in ogni punto di $I \setminus \{0\}$ è verificata una sola tra (1) e (2). Sia dunque $x_0 \in \in I \setminus \{0\}$, e per fissare le idee supponiamo $x_0 > 0$. Se in x_0 è verificata (1) si ha $y'(x_0) > 0$, se è verificata (2) allora $y'(x_0) < 0$. Ma y' è continua, e non può annullarsi altro che per $x = 0$, pertanto ha segno costante su $I \cap \{x > 0\}$: ciò significa che la stessa equazione verificata in x_0 deve essere verificata in tutto $I \cap \{x > 0\}$.
Analoghe considerazioni mostrano che in tutto $I \cap \{x < 0\}$ è verificata una sola tra (1) e (2).
Le soluzioni positive di (1) sono le funzioni

$$y(x) = A - \frac{x^2}{2} \quad , \quad |x| < \sqrt{2A} \quad , \tag{3}$$

con $A > 0$, mentre quelle di (2) sono le funzioni

$$y(x) = Be^{x^2/2} \tag{4}$$

con $B > 0$.
Le soluzioni dell'equazione di partenza saranno allora le funzioni del tipo (3) e del tipo (4), e inoltre tutte quelle funzioni di classe C^1 che si ottengono raccordando in $x = 0$ funzioni del tipo (3) con funzioni del tipo (4).
Perché il raccordo sia una funzione continua, occorre che sia $A = B$. La derivata risulta automaticamente continua anche in $x = 0$, perché è nulla sia per funzioni di tipo (3) che di tipo (4).

In conclusione, per un dato punto (x_0, y_0) con $y_0 > 0$ passano 4 soluzioni di classe C^1: due sono

$$y_1(x) = A_0 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } |x| < \sqrt{2A_0} \ ,$$

$$y_2(x) = B_0\, e^{x^2/2} \ ,$$

ove $A_0 = \dfrac{x_0^2}{2} + y_0$ e $B_0 = y_0\, e^{-x_0^2/2}$. Le altre due, per $x_0 \geqslant 0$ sono

$$y_3(x) = \begin{cases} A_0\, e^{x^2/2} & \text{per } x \leqslant 0 \\ A_0 - \dfrac{x^2}{2} & \text{per } 0 < x < \sqrt{2A_0} \end{cases}$$

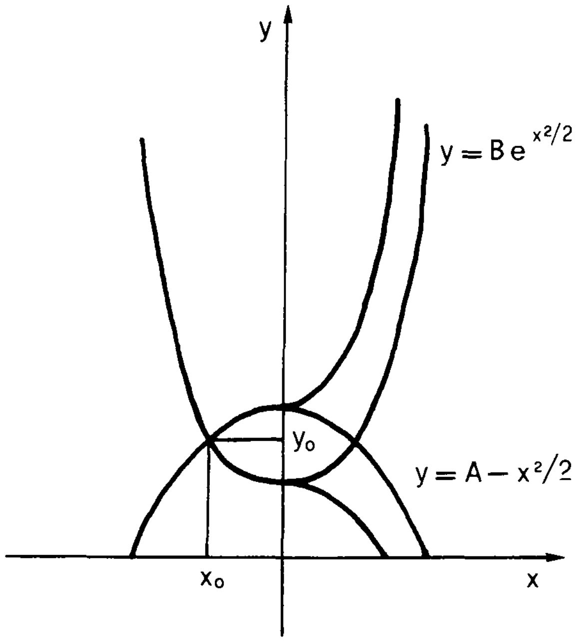
$$y_4(x) = \begin{cases} B_0 - \dfrac{x^2}{2} & \text{per } -\sqrt{2B_0} < x \leqslant 0 \\ B_0\, e^{x^2/2} & \text{per } x > 0 \end{cases} \ ,$$

mentre per $x_0 < 0$ sono

$$y_3(x) = \begin{cases} A_0 - \dfrac{x^2}{2} & \text{per } -\sqrt{2A_0} < x \leqslant 0 \\ A_0\, e^{x^2/2} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$y_4(x) = \begin{cases} B_0\, e^{x^2/2} & \text{per } x \leqslant 0 \\ B_0 - \dfrac{x^2}{2} & \text{per } 0 < x < \sqrt{2B_0} \ . \end{cases}$$

Le quattro soluzioni sono indicate in figura, nel caso $x_0 < 0$.



24. (a) Posto

$$\varphi(z) = \int_0^z e^{-t^2}\, dt\,,$$

si ha $f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$. La funzione φ è di classe C^∞, dunque lo è anche f. Si ha inoltre

$$|f(x, y)| = \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} e^{-t^2}\, dt < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}\,,$$

(1) $$\lim_{n\to+\infty} f(n, -n) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = -\sqrt{\pi}$$

(2) $$\lim_{n\to+\infty} f(-n, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

L'estremo superiore e l'estremo inferiore di f sono allora $\sqrt{\pi}$ e $-\sqrt{\pi}$.

(b) Dato che $Df(x,y) = (-e^{-x^2}, e^{-y^2})$ non è mai nullo, i punti di massimo e minimo per f si trovano sul bordo Γ del cerchio. Cominciamo con il massimo. Scelto $(x, y) \in \Gamma$, se $x > 0$ allora (x, y) non può essere di massimo, in quanto $(-x, y) \in \Gamma$ e

$$f(-x, y) = \varphi(y) - \varphi(-x) > \varphi(y) - \varphi(x) = f(x, y),$$

per la crescenza di φ. Possiamo allora limitarci a considerare i punti di Γ per cui $x \leqslant 0$. Se ora è $y < 0$, come prima si ottiene $f(x, -y) > f(x, y)$. Il punto di massimo si trova quindi sull'arco $\Gamma \cap \{x \leqslant 0, y \geqslant 0\}$: questo può essere parametrizzato come

$$\left\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) : \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}.$$

Ora,

$$\frac{d}{d\theta} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = -(e^{-\cos^2\theta} \operatorname{sen}\theta + e^{-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta) \tag{3}$$

e dobbiamo trovare per quali valori di θ tale derivata si annulla, sempre nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Osservato che ciò non accade per $\theta = \frac{\pi}{2}$, possiamo dividere per $e^{-\cos^2\theta}\cos\theta$ ottenendo la condizione

$$\operatorname{tg}\theta + e^{\cos 2\theta} = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta per $\theta = \frac{3\pi}{4}$, e la funzione $\operatorname{tg}\theta + e^{\cos^2\theta}$ è crescente (perché somma di funzioni crescenti) su $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, dunque $\theta = \frac{3\pi}{4}$ è l'unico zero della derivata (3): il punto di massimo cercato è allora $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Per quanto riguarda il minimo, basta notare che $f(x, y) = -f(y, x)$, dunque $\min f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\max f$.

(c) Il limite non esiste, come si ricava da (1), (2). Altre dimostrazioni (più rapide) del punto (b) si possono ottenere con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* oppure sfruttando la concavità di f sul secondo quadrante e la sua simmetria rispetto alla retta $x + y = 0$.

25. Anzitutto si vede immediatamente che la serie converge in ogni punto delle tre rette

$$S_0 = \{y = 0\} \ , \quad S_\pi = \{y = \pi\} \ , \quad S_{2\pi} = \{y = 2\pi\} \ .$$

Inoltre, scrivendo la serie nella forma sen $y \sum_n x^n$, si vede che essa converge anche in ogni punto del rettangolo

$$Q = \{0 < x < 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\} \ ,$$

mentre diverge per $x \geqslant 1$ se $y \notin \{0, \pi, 2\pi\}$.
In conclusione l'insieme dei punti di convergenza della serie è l'insieme

$$B = S_0 \cup S_\pi \cup S_{2\pi} \cup Q \ ,$$

e la somma della serie è la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \in \{0, \pi, 2\pi\} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} y}{1 - x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme si constata facilmente che essa ha luogo su ogni insieme A tale che per qualche $\delta \in$ $\in]0, 1[$ risulti

(1) $$A \subseteq S_0 \cup S_\pi \cup S_{2\pi} \cup Q_\delta \ ,$$

dove

$$Q_\delta =]0, 1 - \delta] \times [0, 2\pi] \ .$$

Infatti per un tale insieme A si ha

$$\sup_{(x,y)\in A} |x^n \operatorname{sen} y| \leqslant (1-\delta)^n$$

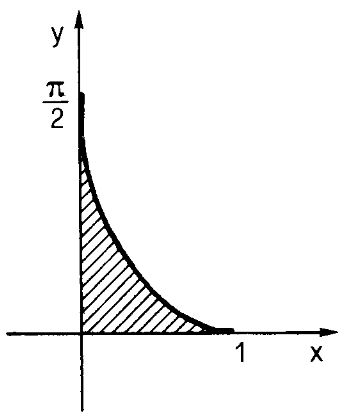
e quindi si ha convergenza totale in A.
D'altro canto, la serie non converge uniformemente sull'intero insieme B, perché in tal caso essa convergerebbe anche su $\bar{B}\backslash B$, che non è vuoto.
Non è facile individuare tutti gli $A \subseteq B$ sui quali la serie converge uniformemente. In ogni caso ve ne sono altri, oltre a quelli che verificano (1): ad esempio la serie converge uniformemente sull'insieme

$$C = \left\{(x,y) : 0 < x \leqslant 1 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arcsen}(1-x)^2 \right\} .$$

Infatti se $(x, y) \in C$ si ha (con qualche calcolo)

$$x^n \operatorname{sen} y \leqslant x^n (1-x)^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \leqslant \frac{4}{(n+2)^2}$$

dunque la serie converge totalmente sull'insieme C, rappresentato in figura:



26. (a) Dire che $f(t, x)$ è separatamente continua su $[0, 1] \times [0, 1]$ significa dire che le funzioni

$$(1) \qquad x \mapsto f_t(x) \qquad \text{per } t \in [0, 1] \text{ fissato}$$

$$(2) \qquad t \mapsto f_t(x) \qquad \text{per } x \in [0, 1] \text{ fissato}$$

sono entrambe continue su $[0, 1]$. Ora, la continuità della funzione (1) non è altro che la continuità di f_t, mentre la continuità della (2) in $t = t_0$ si esprime dicendo che

$$f_{t_n}(x) \to f_{t_0}(x) \qquad \text{se} \quad t_n \to t_0 \ .$$

Dunque l'equivalenza proposta nel punto (a) è ovvia.

(b) Se f è continua su $[0, 1] \times [0, 1]$ essa è anche uniformemente continua, cioè $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ per cui

$$(3) \qquad |f(t'', x'') - f(t', x')| \leqslant \epsilon \quad \text{per} \quad |t'' - t'| + |x'' - x'| \leqslant \delta \ .$$

Sia ora $(t_n) \subseteq [0, 1]$ tale che $t_n \to t_0$ per $n \to \infty$; per ogni $\delta > 0$ esisterà allora $\bar{n}$ per cui

$$|t_n - t_0| \leqslant \delta \qquad \forall n \geqslant \bar{n} \ .$$

Dalla (3), con $t'' = t_n$, $t' = t_0$ e $x'' = x' = x$, si ricava allora

$$|f_{t_n}(x) - f_{t_0}(x)| = |f(t_n, x) - f(t_0, x)| \leqslant \epsilon$$

per ogni $n \geqslant n$ ed ogni $x \in [0, 1]$. Ciò mostra che

$$(4) \qquad f_{t_n} \to f_{t_0} \qquad \text{uniformemente su } [0, 1] \ .$$

Viceversa, supponiamo che valga (4) per ogni $t_n \to t_0$ e che le funzioni f_t siano tutte continue.

Per ogni successione $(t_n, x_n) \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ tale che

$$(t_n, x_n) \to (t_0, x_0) \qquad \text{per } n \to \infty \ ,$$

si ha

$$|f(t_n, x_n) - f(t_0, x_0)| \leqslant |f(t_n, x_n) - f(t_0, x_n)| + |f(t_0, x_n) -$$

$$- f(t_0, x_0)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f_{t_n}(x) - f_{t_0}(x)| + |f_{t_0}(x_n) - f_{t_0}(x_0)| .$$

Ora, entrambi gli addendi di quest'ultimo termine sono infinitesimi per $n \to \infty$, dunque f risulta globalmente continua su $[0, 1] \times [0, 1]$.

27. Indichiamo con π il piano dato e con $r(x, y, z)$ la funzione $x^2 + y^2 + z^2$. Se $(x, y, z) \in \pi$ si ha

$$2f(x, y, z) + r(x, y, z) = (x + y + z)^2 = 9 ,$$

cioè $f(x, y, z) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} r(x, y, z)$, e quindi

$$\sup_\pi f = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \inf_\pi r \quad ,$$

e analogamente

$$\inf_\pi f = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \sup_\pi r \quad .$$

Osserviamo che $\sup_\pi r = +\infty$, perché $(n, -n, 3) \in \pi$ per ogni n, quindi l'estremo inferiore di f (che naturalmente non è un minimo) è $-\infty$.
Per calcolare $\inf_\pi r$, osserviamo che per la disuguaglianza

$$(1) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

si ha su π

$$9 = (x + y + z)^2 \leqslant 3\, r(x, y, z)\,,$$

quindi

$$\inf_{\pi} r \geqslant 3\,.$$

La disuguaglianza (1) diviene un'uguaglianza solo se $x_1 = \ldots = x_n$; essendo $(1, 1, 1) \in \pi$, si ha allora

$$\min_{\pi} r = r(1, 1, 1) = 3\,,$$

dunque

$$\max_{\pi} f = 3$$

e il punto $(1, 1, 1)$ è l'unico in cui tale estremo viene raggiunto.

28. Per ogni $(x, y) \in D$ si ha $y \geqslant 2x^2$ e $x \geqslant \dfrac{1}{y}$, quindi il dominio D è contenuto nel quadrante aperto $Q = \{x > 0, y > 0\}$. Vista la struttura di D, eseguiamo il cambiamento di coordinate

$$(1) \qquad \frac{x^2}{y} = \xi \quad , \quad xy = \eta\,.$$

Detta $\Phi : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ la trasformazione definita da (1), si vede subito che

$$\Phi(D) = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\,, \frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant 1\right\}.$$

Inoltre Φ è invertibile su Q e

$$|J\Phi(x, y)| = \det \begin{bmatrix} 2x/y & -x^2/y \\ y & x \end{bmatrix} = \frac{3x^2}{y}\,,$$

da cui

$$|J\Phi^{-1}(\xi,\eta)| = \frac{1}{|J\Phi(\Phi^{-1}(\xi,\eta))|} = \frac{1}{3\xi} \ .$$

In conclusione

$$\iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy}\, dx\, dy = \iint_{\Phi(D)} \xi e^{\eta}\, |J\Phi^{-1}(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{1/3}^{1/2} \left[\int_{1/2}^{1} \frac{e^{\eta}}{3}\, d\eta \right] d\xi = \frac{e - \sqrt{e}}{18} \ .$$

29. Possiamo supporre $|h| \leqslant 1/2$, di modo che i punti $(2h, e^{-1/h^2})$, $(h, e^{-1/h^2})$ appartengono al quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Sia poi $M > 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leqslant M \, , \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leqslant M \qquad \forall (x,y) \in Q \, .$$

Applicando il *teorema di Lagrange* si ha

$$(1) \quad |f(2h, e^{-1/h^2}) - f(2h, 0)| = e^{-1/h^2} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(2h, \xi_h) \right| \leqslant M e^{-1/h^2} ,$$

e analogamente

$$(2) \qquad |f(h, e^{-1/h^2}) - f(h, 0)| \leqslant M e^{-1/h^2} \ .$$

Ricordando che

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h^2} = 0 \, ,$$

da (1) e (2) si ricava

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h, e^{-1/h^2}) - 2f(h, e^{-1/h^2}) + f(0,0)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2h, 0) - 2f(h, 0) + f(0,0)}{h^2} .$$

Applicando due volte il *teorema dell'Hôpital* si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h, 0) - 2f(h, 0) + f(0,0)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(2h, 0) - 2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(h, 0)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2h, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h, 0) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) .$$

30. (a) La funzione $f(x, y)$ che compare al secondo membro dell'equazione è definita ed è di classe C^1 nell'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\}$, cioè nel piano privato della circonferenza unitaria. Ne segue che f è localmente lipschitziana rispetto ad y nell'insieme A, quindi per ogni $(x_0, y_0) \in A$ la soluizone del problema dato iesiste ed è unica in un intorno di x_0.

(b) Siccome il punto (0, 0) sta all'interno del cerchio unitario, cioè appartiene all'insieme

$$A^- = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

dove f è negativa, la soluzione del problema rimane tutta all'interno di A^- ed è decrescente. Indicando con $]a, b[$ l'intervallo massimale di esistenza di questa soluzione $y(x)$, cominciamo col dimostrare che $a = -b$, provando che $y(x)$ è dispari.
Infatti la funzione $z(x) = -y(-x)$ verifica la condizione iniziale $z(0) = 0$, e inoltre

$$z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, -y(-x)) = f(x, z(x)) ;$$

di conseguenza $z(x)$ è un'altra soluzione del problema, e quindi $y(x) = z(x)$ per il *teorema di unicità*, cioè $y(x)$ è dispari.
Ci rimane solo da provare che $b < \sqrt{2}/2$.
Osserviamo che $f(x, y) < -1$ su $A \setminus \{(0, 0)\}$, pertanto $y'(x) < -1$ in $]0, b[$, quindi, integrando tra 0 e x, si ottiene $y(x) < -x$ per $x \in]0, b[$, e anche

$$\lim_{x \to b^-} y(x) < -b \,. \tag{1}$$

D'altra parte la soluzione non esce dal cerchio unitario, dunque

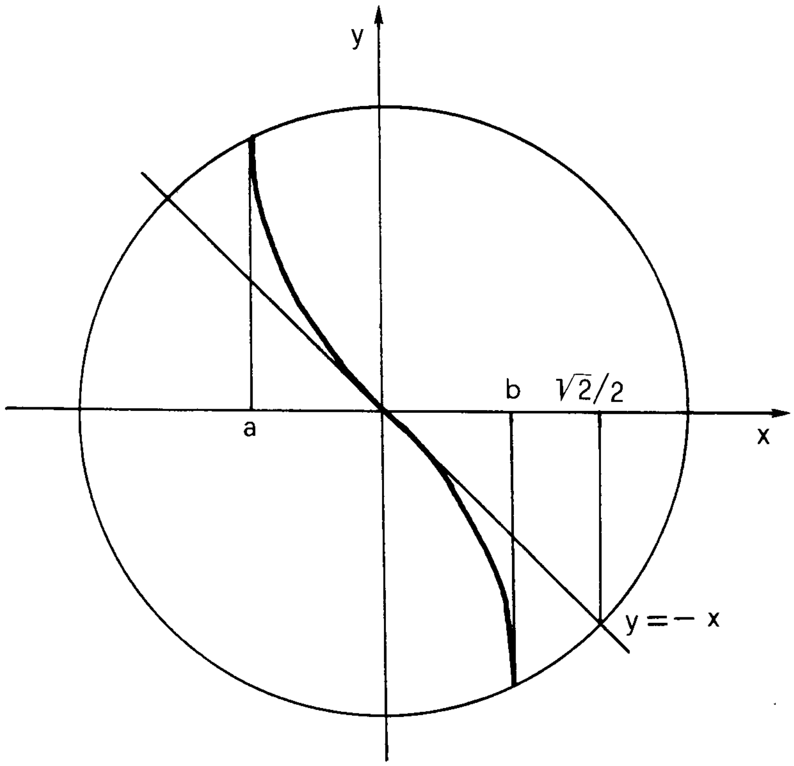
$$y(x) > -\sqrt{1 - x^2} \qquad \forall x \in [0, b[\;,$$

da cui

$$\lim_{x \to b^-} y(x) \geqslant -\sqrt{1 - b^2} \,.$$

Confrontando questa disuguaglianza con la (1) si ottiene subito che $b < \sqrt{2}/2$.

Un grafico approssimativo della soluzione è il seguente:



(c) Quando $x_0 > 1$ e $y_0 < -1$, il punto (x_0, y_0) si trova all'esterno del cerchio unitario, cioè nell'insieme $A^+ = \{x^2 + y^2 > 1\}$, e quindi la soluzione $y(x)$ rimane sempre in A^+. Allora $y(x)$ è crescente, e in particolare sta sempre all'esterno dell'insieme

$$B = \{(x, y) : x < x_0 \, , y > y_0\} \, .$$

Su $\mathbf{R}^2 \backslash B$ si ha poi

$$0 \leqslant f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} \leqslant \frac{1}{\max(x_0, -y_0) - 1} = M < +\infty \, ,$$

cosicché la funzione $y'(x)$ si mantiene limitata.
Ma allora, per il *teorema di esistenza globale* (v. Appendice) l'intervallo di definizione di $y(x)$ è tutto **R**.

31. La curva è simmetrica rispetto al piano $\{z = 0\}$, al quale appartiene anche il punto (0, 1, 0), dunque possiamo limitarci a considerare la parte γ di curva in cui è $z \geqslant 0$.
La seconda equazione data è quella di un cilindro la cui sezione sul piano $\{z = 0\}$ è la circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$.
Posto dunque

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \, , \qquad y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \, ,$$

usando la prima equazione data si ricava

$$z^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos t) \, .$$

La parte γ della curva si parametrizza allora con

$$x = \frac{1}{2} (1 + \cos t) \, , \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \, , \quad z = \frac{1}{2} (1 - \cos t) \, , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \, .$$

Per ogni punto di γ si ha

$$\operatorname{dist}\,[(x, y, z), (0, 1, 0)] = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + z^2} =$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)-2y+1}=\sqrt{2-2y}\,,$$

dunque le minime e massime distanze cercate sono

$$\min_{\gamma}\sqrt{2-2y}=\min_{[0,2\pi]}\sqrt{2-\operatorname{sen} t}=1$$

$$\max_{\gamma}\sqrt{2-2y}=\max_{[0,2\pi]}\sqrt{2-\operatorname{sen} t}=\sqrt{3}\,.$$

32. La funzione integranda

$$\varphi(x,y)=\frac{e^{-xy}}{1+y^2}$$

è continua, dunque per un noto teorema (vedi esercizio 22) anche f_n risulta continua su **R**.

(b) Osserviamo che l'integrando è positiivo, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste.

Per $x<0$, si ha $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(x,y)=+\infty$ e quindi anche $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty$.

Se invece è $x\geqslant 0$, si ha $\varphi(x,y)\leqslant\dfrac{1}{1+y^2}$, dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}\,,$$

cioè la successione $(f_n(x))$ converge. La convergenza è poi uniforme su tutta la semiretta $[0,+\infty[$, in quanto per $x\geqslant 0$ si ha

$$|f_n(x)-\lim_{n\to\infty} f_n(x)|=\int_n^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy\leqslant\int_n^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\,,$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per $n\to\infty$.

33. (a) Mediante la sostituzione $z(x) = y(x) - x$, ci si riporta all'equazione

$$z'(x) = z(x)\,[z(x) - 2] \tag{1}$$

Questa ha ovviamente le soluzioni costanti $z = 0$ quando $\lambda = 0$ e $z = 2$ quando $\lambda = 2$. Inoltre, per il *teorema di unicità,* se è $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 2$ si ha $z(x) \neq 0$ e $z(x) \neq 2$ per ogni x, dunque nella (1) si può dividere per $z(z - 2)$ e separare le variabili:

$$\frac{z'}{z(z-2)} = 1 \; .$$

Integrando fra 0 e x si ricava

$$\int_0^x \frac{z'(t)\,dt}{z(t)\,[z(t) - 2]} = x \; ,$$

cioè, ricordando che $z(0) = \lambda$,

$$\int_\lambda^{z(x)} \frac{dz}{z(z-2)} = x \; ,$$

ovvero (con facili calcoli)

$$z(x) = \frac{2}{1 - \dfrac{\lambda - 2}{\lambda}\, e^{2x}} \; .$$

Ritornando a y si ha l'espressione esplicita

$$y_\lambda(x) = x + \frac{2}{1 - \dfrac{\lambda - 2}{\lambda}\, e^{2x}} \; , \tag{2}$$

che per $\lambda = 1$ diventa

$$y_1(x) = x + \frac{2}{1+e^{2x}} ,$$

e questa funzione è chiaramente definita su tutto **R**.

Per il teorema di unicità, la parte (a) è provata.

(b) Quando $\lambda = 0$ o $\lambda = 2$ le soluzioni sono $y_0(x) = x$ e $y_2(x) = = x + 2$, che non sono limitate.
Se è $0 < \lambda < 2$, si ha da (2) che y_λ è definita su **R** e

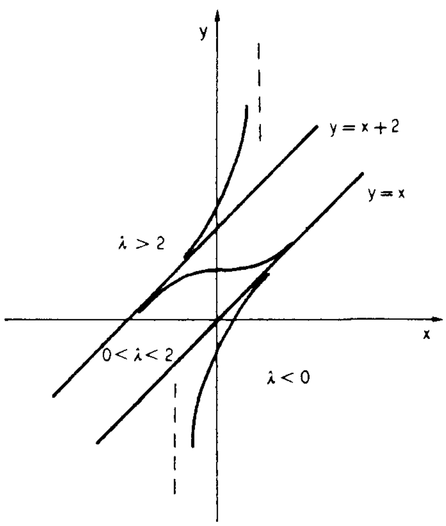
$$x < y_\lambda(x) < x + 2 \qquad \forall x ,$$

per il teorema di unicità, dunque y_λ non è limitata.
Se $\lambda > 2$ si ha che

$$1 + \frac{\lambda - 2}{\lambda} e^{2x} > 0 \iff x < \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2} ,$$

pertanto y_λ è definita sulla semiretta $\left]-\infty , \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2}\right[$ e non è limitata perché tende a $+\infty$ per $x \to \left(\frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{\lambda - 2}\right)^-$.

Se $\lambda > 0$, si ha poi che y_λ è definita per $x > -\frac{1}{2} \log \frac{\lambda - 2}{\lambda}$ e non è limitata.
In conclusione, il problema non ha mai soluzioni limitate.
Un grafico approssimativo delle soluzioni è il seguente:



34. Fissiamo $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. La condizione su $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ci assicura l'esistenza su tutto $\mathbf{R}$ della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

Per ipotesi $y(x)$ è T-periodica, quindi anche la sua derivata $y'(x)$ lo è. In particolare si ha

$$f(x_0, y_0) = y'(x_0) = y'(x_0 + T) = f(x_0 + T, y(x_0 + T)) =$$

$$= f(x_0 + T, y(x_0)) = f(x_0 + T, y_0) ,$$

il che, al variare di (x_0, y_0), mostra che $f(x, y)$ è T-periodica in x, per ogni y.
Il viceversa non è vero: ad esempio se $f(x, y) = 1$ le soluzioni di (*) sono le funzioni $y(x) = ax + b$.

35. Per il *teorema di derivazione sotto segno di integrale* si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_1^y e^{xt}\, dt \geqslant 0 \qquad \forall y \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{e^{xy}}{y} \geqslant 0 \qquad \forall y > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Ne segue che f è crescente in ambedue le variabili, per cui

$$\max_A f = f(2, 2) = \int_1^2 \frac{e^{2t}}{t}\, dt , \quad \min_A f = f(1, 1) = 0 .$$

36. Poniamo

$$f(x, y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2} \quad , \quad g(x, y) = \frac{rx + sy}{x^2 + y^2} \; .$$

Affinché la forma $\omega = f dx + g dy$ sia esatta accorre anzitutto che sia chiusa, cioè che

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \qquad \forall (x, y) \neq (0, 0) \, .$$

Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{qx^2 - 2pxy - qy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-rx^2 - 2sxy + ry^2}{(x^2 + y^2)^2} \; ,$$

per il principio di identità dei polinomi la condizione (1) equivale a

$$(2) \qquad q = -r \quad , \quad p = s \, .$$

D'altra parte, ω è esatta su un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ se e solo se

$$(3) \qquad \int_\Gamma \omega = 0 \qquad \forall \, \Gamma \text{ curva chiusa} \, , \quad \Gamma \subset \Omega \; .$$

Questa condizione è certamente verificata se ω è chiusa e $\Gamma = \partial D$ con $D \subset \Omega$.
In conclusione, se vale (2), la forma ω è esatta se e solo se (3) è verificata per qualche curva $\Gamma = \partial D$ con D dominio contenente l'origine, ad esempio per la circonferenza

$$\Gamma = \left\{ (\cos t, \, \operatorname{sen} t) : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \right\}$$

Con tale scelta di Γ si ha

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} [(p \cos t - r \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) +$$

$$+ (r \cos t + p \operatorname{sen} t) \cos t] \, dt = 2\pi r^2 \quad ,$$

ovvero la (3) diventa

$$r = 0 .$$

In conclusione, ω è esatta se e solo se

$$q = r = 0 , \qquad p = s . \tag{4}$$

Una funzione ψ è una primitiva di ω se

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f \ , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g \qquad \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} . \tag{5}$$

Dalla prima delle (5) segue (usando (4))

$$\psi(x, y) = \int_0^x f(t, y)\, dt + \varphi(y) = \int_0^x \frac{p\, t}{t^2 + y^2}\, dt + \varphi(y) =$$

$$= \frac{p}{2} \log(x^2 + y^2) + \varphi(y) ;$$

dalla seconda delle (5) segue allora

$$\frac{p y}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = \frac{p y}{x^2 + y^2} \ ,$$

cioè $\varphi'(y) = 0$.
In conclusione le primitive di ω sono le funzioni

$$\psi(x, y) = \frac{p}{2} \log(x^2 + y^2) + C .$$

37. Posto $z(x) = y(x) - x$, il problema dato si traduce in

$$\begin{cases} z' = z^3 - 1 \\ z(0) = 0 \end{cases} .$$

Per tale problema esiste certamente una ed una sola soluzione $z(x)$, definita su un intervallo I: infatti la funzione $z \to z^3 - 1$ è di classe C^1 (e quindi localmente lipschitziana).
Supponiamo che I sia l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione, e poniamo

$$\xi = \inf I \, ;$$

proveremo che $\xi = -\infty$.
A questo proposito osserviamo che la costante 1 è una soluzione dell'equazione $z' = z^3 - 1$, e che $z(0) < 1$, dunque per il *teorema di unicità locale* dovrà essere

$$z(x) < 1 \qquad \forall x \in I,$$

e quindi

$$z'(x) = z^3(x) - 1 < 0 \qquad \forall x \in I.$$

Dunque $z(x)$ è decrescente su I ed è minore di 1, quindi esiste finito il numero

$$\lambda = \lim_{x \to \xi^+} z(x) \, .$$

Se per assurdo ξ fosse un numero reale, risolvendo localmente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^3 - 1 \\ z(\xi) = \lambda \end{cases}$$

si potrebbe prolungare in modo C^1 la soluzione $z(x)$ in un intorno sinistro di ξ, contro l'ipotesi di massimalità di I. Dunque necessariamente

$$\inf I = -\infty \, .$$

Essendo $z^3 - 1 \neq 0$, da (1) si ha

$$\int_0^{z(x)} \frac{dz}{z^3 - 1} = \int_0^x dt \, ,$$

da cui, con qualche calcolo, si ricava

$$(1) \qquad \frac{1}{3}\log\frac{1-z}{\sqrt{z^2+z+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=x.$$

La soluzione in forma implicita si ottiene sostituendo $y(x)-x$ al posto di z. Da (1) si ricava pure che l'intervallo di definizione I è

$$I=\left]-\infty,\ \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right[.$$

38. (a) Fissato arbitrariamente un punto $(\bar{x},\bar{y})\in\partial B$ si ha, per ogni $(x,y)\in B$ ed ogni $f\in\mathcal{L}$,

$$|f(x,y)|=|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})|\leqslant L\,|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|\leqslant 2L$$

e quindi, essendo mis $(B)=\pi$,

$$\left|\iint_B f(x,y)\,dx\,dy\right|\leqslant 2\pi L.$$

(b) Data la simmetria del dominio B, è naturale cercare la funzione f tra quelle radiali, cioè del tipo

$$(1) \qquad f(x,y)=\tilde{f}(\rho), \qquad 0\leqslant\rho\leqslant 1,$$

dove come di consueto si è posto

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|(x,y)|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|\geqslant||(x_1,y_1)|-|(x_2,y_2)||,$$

si vede subito che una funzione f del tipo (1) appartiene alla classe $\mathcal{L}$ se e solo se

$$\begin{cases} |\tilde{f}(\rho_1)-\tilde{f}(\rho_2)| \leqslant L\,|\rho_1-\rho_2| & \forall\,\rho_1,\rho_2 \in [0,1] \\ \tilde{f}(1)=0\,. \end{cases}$$

Fra tutte le funzioni $\tilde{f}$ che verificano tali condizioni, la più grande è $\tilde{f}_0(\rho)=L\,(1-\rho)$, alla quale corrisponde la funzione

$$f_0(x,y)=L\,(1-\sqrt{x^2+y^2})\,.$$

Passando a coordinate polari si ottiene

$$\iint_B f_0(x,y)\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 \tilde{f}_0(\rho)\,\rho\,d\rho = L\,\frac{\pi}{3}\,,$$

dunque f_0 verifica la proprietà richiesta.

(c) Usando le stesse notazioni del punto (b), si vede che per ogni $f\in\mathcal{L}$ ed ogni $(x,y)\in B\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y)| = \left|f(x,y)-f\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)\right| \leqslant L\,(1-\rho)\,.$$

Per la continuità di f, tale disuguaglianza vale anche in $(0,0)$. In altri termini, ogni funzione della classe $\mathcal{L}$ è maggiorata dalla funzione f_0. Di conseguenza

$$\left|\iint_B f\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_B f_0\,dx\,dy = \frac{\pi}{3}\,L\,.$$

Notiamo che le funzioni lipschitziane sono in particolare continue, e per ogni f continua si ha che

$$f\leqslant f_0 \quad\Rightarrow\quad \iint_B f\,dx\,dy < \quad {}_B\, f_0\,dx\,dy\,,$$

a meno che f coincida con f_0 su B. Allora possiamo dire che f_0 è l'unica funzione della classe $\mathcal{L}$ che verifica la proprietà richiesta nel punto (b).

39. Per $a = 0$ l'insieme $D(a)$ si riduce al solo punto $\{(0, 0)\}$, ed ha quindi area nulla.
Per $a > 0$ è conveniente eseguire il cambiamento di variabili

$$\sqrt{x} = a\,\xi \quad , \quad \sqrt{y} = a\eta \,.$$

Infatti $\Phi : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ è un diffeomorfismo fra $D(a)$ e l'insieme

$$\widetilde{D} = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \;:\; \xi + \eta \leqslant 4,\, \xi\eta \geqslant 3,\, \xi \geqslant 0,\, \eta \geqslant 0\right\},$$

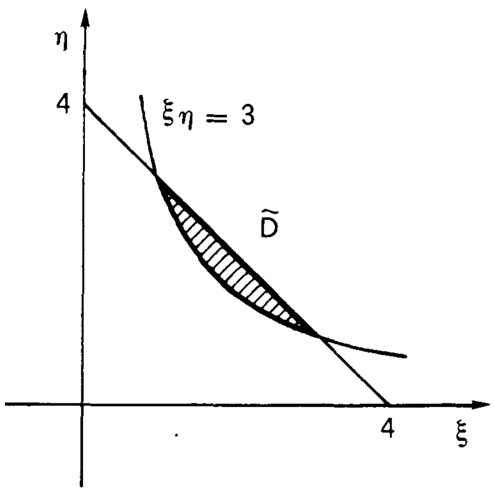
con

$$|\,J\,\Phi^{-1}(\xi, \eta)| = 4\,a^4\,\xi\eta \,,$$

cosicché si ha

$$\text{area}\,[D(a)] = \iint_{D(a)} 1\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} 4\,a^4\,\xi\eta\,d\xi\,d\eta \,.$$

L'insieme $\widetilde{D}$ può essere rappresentato così:



Usando il *teorema di Fubini - Tonelli* si ottiene allora

$$\text{area}\,[D(a)] = 4a^4 \int_1^3 \xi\left(\int_{3/\xi}^{4-\xi} \eta\,d\eta\right)d\xi = 4a^4\left(\frac{22}{3} - \frac{9}{2}\log 3\right).$$

In particolare,

$$\max_{0 \leqslant a \leqslant 1} \text{area}\,[D(a)] = \text{area}\,[D(1) = \frac{88}{3} - 18 \log 3 \; .$$

40. Per $x = 0$ tutti i termini della serie sono nulli.
Se è $x > 0$ la serie si può scrivere $x \; \Sigma \; n^{-x}$, ed è ben noto che la serie armonica $\Sigma \dfrac{1}{n^x}$ converge per $x > 1$, diverge per $x \leqslant 1$.
In conclusione, la serie data converge in $\{0\} \cup \,]1, +\infty[$. Se A è un insieme di convergenza uniforme, la serie converge puntualmente nell'insieme $\bar{A}$ dei punti di aderenza di A, pertanto $x = 1$ non può essere di aderenza per A : ciò implica che

(1) $\qquad A \subseteq \{0\} \cup [1 + \delta, +\infty[\quad$ per qualche $\delta > 0$.

Viceversa, se A soddisfa questa condizione, la serie converge uniformemente su A. Infatti la funzione $f_n(x) = x n^{-x}$ ha come derivata

$$f'_n(x) = \frac{1 - x \log n}{n^x} \; ,$$

che è negativa su $]1, +\infty[$ non appena $\log n > e$, cioè per $n \geqslant 3$.
Dunque, per $n \geqslant 3$, se A verifica (1) si ha

$$\sup_A |f_n| \leqslant f_n(1 + \delta) \; ,$$

e quindi dalla convergenza puntuale della serie in $x = 1 + \delta$ segue la convergenza totale su A.

41. La funzione $f(x, y) = |y| - x^2$ è lipschitziana rispetto ad y con costante di Lipschitz 1, dunque il problema ammette una ed una sola soluzione $y(x)$, che è definita su tutto **R**.
Osserviamo che la funzione $\tilde{y}(x) = -\, y(-\, x)$ è pure soluzione del problema, e che $\tilde{y}(0) = y(0)$. Allora, grazie al *teorema di unicità*, si ha $\tilde{y}(x) = y(x)$, cioè la soluzione $y(x)$ è una funzione dispari,

e quindi è sufficiente determinarla su $[0, +\infty[$. Notiamo ora che è

$$y'(x) \leqslant |y(x)| ,$$

mentre la costante $z(x) = 0$ risolve l'equazione

$$z'(x) = |z(x)| .$$

Inoltre $z(0) = y(0)$. Applicando il *teorema di confronto* (v. Appendice) si ha allora $y(x) \leqslant z(x)$ per $x \geqslant 0$, cioè

$$y(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \geqslant 0 .$$

Da ciò segue che $y(x)$ è la soluzione di

$$\begin{cases} y'(x) = - y(x) - x^2 & \text{per } x \geqslant 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

da cui, con facili calcoli, si trova l'espressione esplicita

$$y(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x - 2 \quad \text{per } x \geqslant 0 ,$$

mentre (ricordando che $y(t)$ è dispari) si ha

$$y(x) = - 2e^{x} + x^2 + 2x + 2 \quad \text{per } x \leqslant 0 .$$

42. Fra i due fatti non intercorre, in generale, alcuna relazione: si possono infatti trovare delle funzioni che verificano (a) ma non (b), e delle funzioni che verificano (b) ma non (a).
Ad esempio la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non è hölderiana, in quanto non è neppure continua, mentre la

funzione $g^2(x)$ è ovviamente lipschitziana.
Invece, la funzione

$$h(x) = 1 + \sqrt{|x|}$$

è hölderiana di esponente $\frac{1}{2}$, in quanto lo è la funzione $\sqrt{|x|}$, mentre la funzione $h^2(x) = 1 + x + 2\sqrt{|x|}$ non è lipschitziana, perché in tal caso lo sarebbe anche la funzione $2\sqrt{|x|}$ (differenza delle due funzioni lipschitziane $h^2(x)$ e $1 + x$).

43. Per $(x, y) = (0, 0)$ si ha $f_n(x, y) = 0$ per ogni n; d'altra parte, essendo

$$f_n(x, y) = \frac{x + y}{2^{-n} + n(x^2 + y^2)},$$

si vede facilmente che $f_n(x, y) \to 0$ anche per $(x, y) \neq (0, 0)$. In conclusione si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y).$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, possiamo intanto escludere che essa abbia luogo su tutto $\mathbf{R}^2$. Infatti scegliendo (ad esempio)

$$x_n = y_n = 1/n$$

si ottiene

$$f_n(x_n, y_n) = \frac{1}{2(n\,2^{-n} + 2)},$$

e quindi

$$\lim_{n \to \infty} \sup |f_n| \geqslant \lim_{n \to \infty} f_n(x_n, y_n) = 1/4.$$

Non é facile dire esattamente per quali insiemi $A \subseteq \mathbf{R}^2$ la convergenza è uniforme. Una famiglia di insiemi per cui ciò si verifica è quella degli A tali che

$$(1) \qquad A \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus B_\delta \qquad \text{per qualche} \quad \delta > 0\,,$$

dove B_δ è la palla $\{x^2 + y^2 \leqslant \delta^2\}$. Infatti, si ha

$$(2) \qquad |x + y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

e quindi, posto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, se A è del tipo (1) si ottiene per ogni $(x, y) \in A$

$$|f_n(x, y)| \leqslant \frac{\rho\sqrt{2}}{2^{-n} + n\rho^2} \leqslant \frac{\rho\sqrt{2}}{n\rho^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n\delta}\,,$$

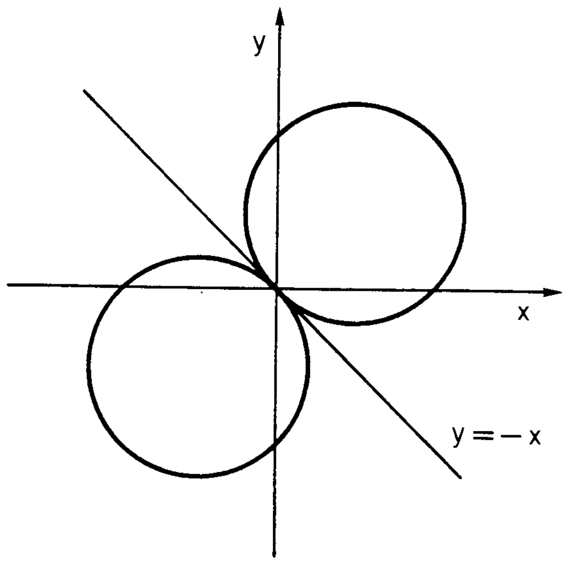
cosicché si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_A |f_n| = 0\,.$$

Naturalmente gli insiemi A del tipo (1) non sono i soli su cui la convergenza è uniforme: basta osservare che abbiamo in realtà usato solo (2), quindi un'altra condizione sufficiente è che per qualche $C > 0$

$$(3) \qquad |x + y| \leqslant C\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \forall\,(x, y) \in A\,.$$

Un insieme del tipo (3), con $C = \sqrt{2}$, è rappresentato in figura.



44. Passando in coordinate polari si ha

$$\text{area}\,(D) = \iint_{\tilde{D}} \rho \, d\rho \, d\theta \quad ,$$

dove

$$\tilde{D} = \left\{ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \, , \; \rho \geqslant 0 \, , \; \rho^6 \leqslant 4\rho^4 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta \right\} =$$

$$= \left\{ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \, , 0 \leqslant \rho \leqslant \operatorname{sen} 2\theta \right\} .$$

Allora

$$\text{area}\,(D) = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{4} \left[\frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8} \, .$$

45. Indichiamo con $f(x, y)$ il secondo membro dell'equazione, e poniamo $\varphi(x) = 1/(1 + x^2)$. Osserviamo che f si annulla per $y = \pm\, \varphi(x)$, è positiva per $|y| < \varphi(x)$ e negativa altrove. Osserviamo poi che la funzione $z(x) = 0$ verifica

$$z(0) = 0 \leqslant a \; , \qquad z'(x) < f(x, z(x)) \; ,$$

pertanto se $y_a(x) : [0, \lambda[\to \mathbf{R}$ risolve il problema di Cauchy con $a \geqslant 0$ si ha

$$z(x) \leqslant y_a(x) \qquad \forall\, x \in [0, \lambda[\; ,$$

cioè $y_a(x)$ è non negativa. Inoltre si ha

$$y_a'(x) = f(x, y_a(x)) \leqslant [\varphi(x)]^2 \leqslant 1 \qquad \forall x \in [0, \lambda[\, .$$

quindi, integrando su $[0, x]$,

$$0 \leqslant y_a(x) \leqslant a + x \qquad \forall x \in [0, \lambda[\, .$$

Allora per il *teorema di esistenza globale* tutte le soluzioni possono essere estese alla semiretta $[0, +\infty[$.
Cominciamo a supporre $0 \leqslant a < 1$. La funzione $\varphi(x)$ è decrescente, mentre $y_a(x)$ è crescente finché $y_a(x) < \varphi(x)$; inoltre $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \leqslant y_a(0)$, dunque necessariamente esiste un punto $x_0 > 0$ per cui

$$y_a(x_0) = \varphi(x_0) \, .$$

Allora per il *teorema di monotonia* (v. Appendice)

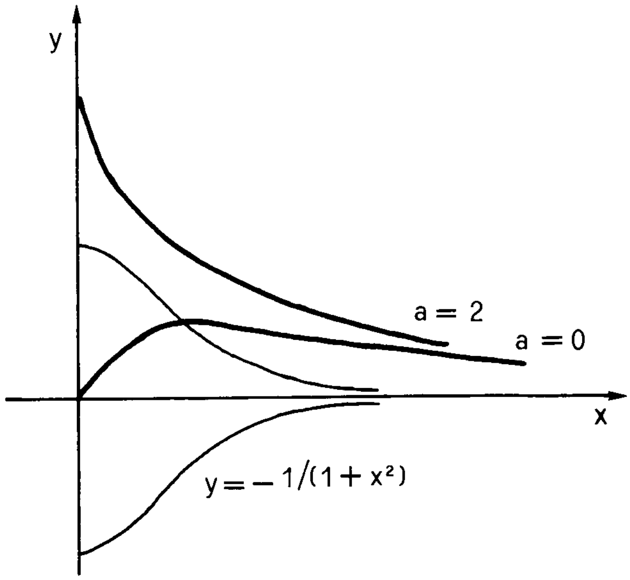
$$y_a'(x) > 0 \quad \text{per } 0 \leqslant x < x_0 \, , \quad y_a'(x) < 0 \quad \text{per } x > x_0 \, .$$

In particolare esiste finito il limite

$$\lim_{x \to +\infty} y_a(x) = \mu \geqslant 0 \, .$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = -\mu^2$, si ha necessariamente $\mu = 0$.

Un grafico approssimativo della soluzione per $a = 0$ (e per $a = 2$) è indicato nella figura:



Possiamo ora al caso $a \geqslant 1$: sempre per il *teorema di monotonia,* deve essere $y_a(x) > \varphi(x)$ per ogni $x > 0$. La soluzione è allora decrescente e, come prima, tende a zero per $x \to +\infty$.

46. La funzione $h = f \circ g$ soddisfa l'uguaglianza

$$(1) \qquad h''(x) = f''(g(x))\,[g'(x)]^2 + f'(g(x))\,g''(x)\,.$$

Una funzione di classe C^2 è convessa se e solo se la sua derivata seconda è non negativa, quindi se f è convessa e crescente e g è convessa si ha subito dalla (1) che anche h è convessa.
Se f non è crescente, non è detto che il termine destro di (1) sia non negativo: ad esempio le due funzioni

$$f(x) = -x \;\;,\quad g(x) = x^2$$

sono entrambe convesse, mentre la loro composizione $h(x) = -x^2$ è strettamente concava.
Ancora, le funzioni

$$f(x) = e^{-x} \;\;,\quad g(x) = x^2$$

forniscono un esempio di due funzioni strettamente convesse la cui composizione $h(x) = e^{-x^2}$ non è convessa su $\mathbf{R}$.
Osserviamo che se f è convessa e crescente e g è convessa allora $f \circ g$ è convessa, anche se f e g non sono C^2. Si ha infatti, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ e $\lambda, \mu \in [0, 1]$ con $\lambda + \mu = 1$,

$$g(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda g(x) + \mu g(y)\,,$$

da cui

$$f(g(\lambda x + \mu y)) \leqslant f(\lambda g(x) + \mu g(y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + \mu f(g(y))\,.$$

47. Indichiamo con $f_n(x)$ il termine n-esimo della serie.
Per $x \geqslant 1$ si ha $x + 1/n \geqslant 1$ e quindi

$$f_n(x) \geqslant 1\,,$$

dunque non può aversi la convergenza della serie.
Se $0 < x \leqslant 1 - \delta$ per qualche $\delta > 0$, si ha invece

$$x + \frac{1}{n} \leqslant 1 - \frac{\delta}{2} \qquad \forall n \geqslant \frac{2}{\delta},$$

pertanto

$$(1) \qquad f_n(x) \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{n + x/n} \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n .$$

Di conseguenza la serie converge se e solo se $0 < x < 1$.
La disuguaglianza (1) mostra inoltre che la convergenza è uniforme (anzi totale) su tutti gli insiemi A per cui

$$A \subseteq \,]0, 1 - \delta] \quad \text{per qualche} \quad \delta \in \,]0, 1[\,.$$

D'altra parte non può aversi convergenza uniforme su alcun altro insieme $A \subseteq \,]0, 1]$, perché ciò comporterebbe la convergenza puntuale anche in $x = 1$.

48. Il piano tangente alla superficie $f(x, y, z) = 0$ nel punto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ha equazione

$$f_x(\bar{P})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{P})(y - \bar{y}) + f_z(\bar{P})(z - \bar{z}) = 0,$$

dunque nel nostro caso l'equazione del piano T sarà

$$3x + 7y - 21z + 11 = 0 .$$

Si noti ora che nel cilindro è $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, dunque i punti di intersezione di T col cilindro verificano

$$21z = 3x + 7y + 11 \geqslant 11 > 0 .$$

Il solido di cui cerchiamo il volume è allora

$$D = \left\{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{3x + 7y + 11}{21}\right\},$$

e si ha subito

$$\operatorname{vol}(D) = \iint_C \frac{3x + 7y + 11}{21} \, dx \, dy \, ,$$

dove C è il cerchio $\{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\}$. Introducendo le coordinate polari

$$x = 1 + \rho \cos \theta \quad , \quad y = 1 + \rho \operatorname{sen} \theta$$

si trova, con facili calcoli, che

$$\operatorname{vol}(D) = \int_0^1 \rho \left(\int_0^{2\pi} \frac{3(1 + \rho \cos\theta) + 7(1 + \rho \operatorname{sen}\theta) + 11}{21} \, d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho \left(\int_0^{2\pi} [1 + \frac{9}{21} (3 \cos \theta + 7 \operatorname{sen} \theta)] \, d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \, d\rho = \pi \, .$$

Osserviamo che allo stesso risultato si poteva giungere notando che, per evidenti ragioni di simmetria, il dominio D ha lo stesso volume del cilindro

$$\tilde{D} = \{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1 \, , \, 0 \leqslant z \leqslant \bar{z}\} \, ,$$

dove $\bar{z}$ è l'altezza del punto di intersezione di T con l'asse del cilindro, cioè con la retta $\{x = 1, y = 1\}$. Si ha dunque $\bar{z} = 1$ e, dato che la base di D ha area π, il volume di D è uguale a π.

49. L'ellisse Γ è centrata nell'origine ed ha semiassi $\sqrt{\lambda}$ e $\sqrt{\mu}$; è allora ovvio che affinché C stia entro Γ occorre che

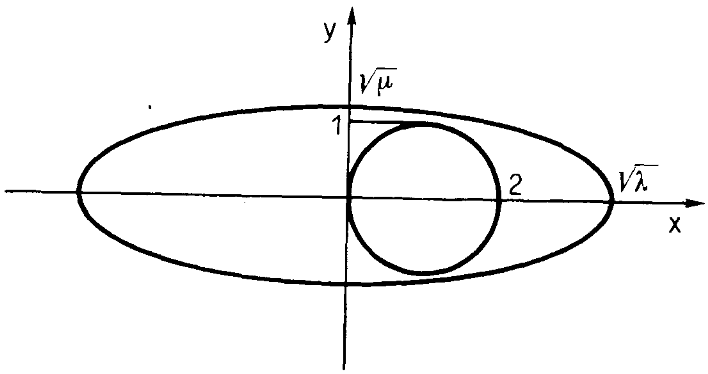
$$(1) \qquad \mu > 1 \, , \, \lambda \geqslant 4 \, .$$

Per la simmetria del problema, detta Γ_+ la parte di Γ che sta nel primo quadrante, occorre trovare per quali valori di (λ, μ) la distanza di $(1, 0)$ da Γ_+ è maggiore o uguale ad 1. Se $(x, y) \in \Gamma_+$, il quadrato della sua distanza $(1, 0)$ è dato da

$$(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+\mu\left(1-\frac{x^2}{\lambda}\right)=1+\varphi(x)\,,$$

dove si è posto

$$\varphi(x)=\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)x^2-2x+\mu\,.$$



Inoltre su Γ_+ è $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\lambda}$. Bisogna allora trovare per quali (λ, μ) si ha

$$\min\left\{\varphi(x) : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\lambda}\right\} \geqslant 0\,.$$

Intanto, occorre che sia $\varphi(0) \geqslant 0$, $\varphi(\sqrt{\lambda}) \geqslant 0$, ma queste condizioni sono sempre verificate se valgono le (1), cosa che supporremo d'ora in poi.

Se è $\dfrac{\mu}{\lambda} \geqslant 1$, la funzione φ è concava, pertanto il minimo su $[0, \sqrt{\lambda}]$ è raggiunto agli estremi, ed è dunque non negativo. Una prima condizione sufficiente è dunque

(2) $$\mu \geqslant \lambda \geqslant 4\,.$$

Passiamo al caso $\mu < \lambda$. Il grafico di φ è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto.

Il vertice della parabola ha ascissa $\lambda/(\lambda-\mu)$, che è positiva. Se

$\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu} \geqslant \sqrt{\lambda}$, la funzione φ è decrescente su $[0, \sqrt{\lambda}]$, dunque le (1) assicurano che il minimo $\varphi(\sqrt{\lambda})$ è non negativo. Si ottiene allora un'altra condizione sufficiente:

$$\frac{\lambda}{\lambda-\mu} \geqslant \sqrt{\lambda}$$

ovvero (ricordando che è $\mu < \lambda$)

$$\lambda > \mu \geqslant \lambda - \sqrt{\lambda}\ , \qquad \lambda \geqslant 4\ . \tag{3}$$

Infine, nel caso $\mu < \lambda - \sqrt{\lambda}$ il vertice della parabola cade nell'intervallo $]0, \sqrt{\lambda}[$, e occorre che l'ordinata del vertice sia non negativa: imponendo

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu}\right) = -\frac{\mu^2 - \lambda\mu + \lambda}{\lambda - \mu} \geqslant 0$$

si ottiene

$$\mu^2 - \lambda\mu + \lambda \leqslant 0\ ,$$

da cui si ricava

$$\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2} \leqslant \mu \leqslant \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}$$

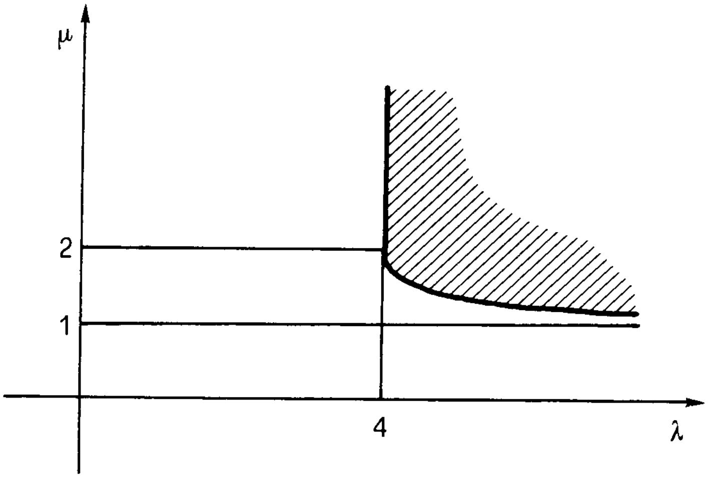
Ricordando che deve essere $\mu < \lambda - \sqrt{\lambda}$ si ottiene l'ultima condizione sufficiente:

$$\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2} \leqslant \mu < \lambda - \sqrt{\lambda}\ . \tag{4}$$

Riassumendo (2), (3), (4) si ottiene la condizione

$$\lambda \geqslant 4\ , \quad \mu \geqslant \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}$$

che è chiaramente la condizione necessaria e sufficiente cercata. L'insieme dei (λ, μ) accettabili può essere rappresentato graficamente come segue:



Per quanto riguarda l'area minima, basta chiaramente cercare il minimo per $\lambda \geqslant 4$ della funzione

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}) = \frac{2}{\pi^2}\,[\text{area}\,(\Gamma)]^2 \ .$$

Con facili calcoli si ha

$$f'(\lambda) = \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}} \cdot (3 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}) \ ,$$

cioè

$$f(\lambda) = \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}} \ \frac{2\lambda - 9}{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} + \lambda - 3} \ .$$

Il punto di minimo cercato è $\lambda = \dfrac{9}{2}$, da cui si ricava

$$\mu = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2} = \frac{3}{2} \ .$$

50. La funzione che compare al secondo membro dell'equazione è definita sui semipiani $\{(x, y) : x > 0\}$ e $\{(x, y) : x < 0\}$, ed è lineare in y. Dalla teoria delle equazioni lineari possiamo allora concludere che il corrispondente problema di Cauchy ha una e una sola soluzione $y(x)$, definita su $]0, +\infty[$ se $x_0 > 0$ oppure su $]-\infty, 0[$ se $x_0 < 0$.
Eseguendo la trasformazione $z(x) = y(x)\, e^x$, oppure applicando direttamente le tecniche standard di risoluzione delle equazioni lineari, si trova poi la formula risolutiva cercata:

$$(1) \qquad y(x) = e^{-x} \left(\int_{x_0}^{x} e^t \log |t|\, dt + y_0\, e^{x_0} \right) \quad .$$

Questa è valida per $x > 0$ se $x_0 > 0$, per $x < 0$ se $x_0 < 0$.
Osserviamo che la funzione $\psi(t) = e^t \log |t|$ è integrabile in ogni intorno del punto $t = 0$, in quanto, per le note proprietà del logaritmo, si ha

$$|\psi(t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{|t|}} \qquad \forall t \in [-1, 1], \quad t \neq 0$$

per un'opportuna costante $M > 0$, e quindi

$$\int_{-1}^{-\epsilon} |\psi(t)|\, dt + \int_{\epsilon}^{1} |\psi(t)|\, dt \leqslant 4M \qquad \forall \epsilon \in]0, 1[\; .$$

Di conseguenza per ogni soluzione della forma (1) esiste finito $\lim_{x \to 0^+} y(x)$ oppure $\lim_{x \to 0^-} y(x)$, a seconda del segno di x_0. Possiamo concludere che le soluzioni dell'equazione sono le funzioni del tipo

$$(2) \qquad y(x) = e^{-x} \left(\int_{0}^{x} e^t \log |t|\, dt + c \right),$$

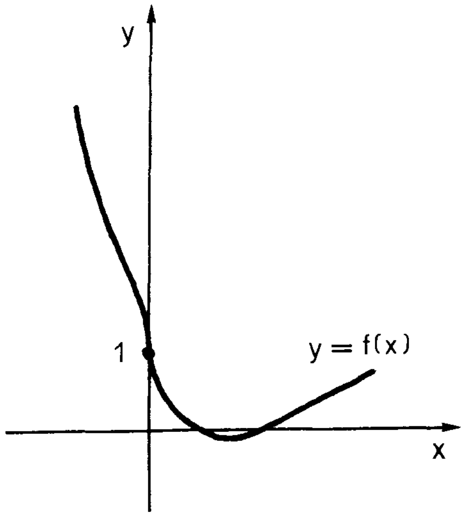
dove c è un'arbitraria costante reale. Come al solito, si intende che sono definite solo per $x > 0$ o per $x < 0$, in quanto si vede subito che per ogni funzione del tipo (2) si ha

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = -\infty \quad ,$$

cioè queste funzioni non sono derivabili in $x = 0$.
Da (2) si deduce $y(0) = c$, pertanto, scelta $c = 1$, la funzione

$$f(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^t \log|t|\,dt + 1\right)$$

gode di tutte le proprietà richieste.
Inoltre f è chiaramente unica, in quanto se $g(x)$ fosse un'altra funzione con le stesse proprietà, per $x > 0$ essa dovrebbe avere la forma (2), con $c = g(0)$, pertanto $c = 1$ e $g = f$.
Un grafico della funzione $f(x)$ è il seguente:



51. (a) Anzitutto $\Gamma \neq \phi$ perché $(0, 0, 0) \in \Gamma$. Inoltre Γ è una curva regolare, perché la matrice jacobiana dell'applicazione

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z,\ x + y + z)$$

è data da

$$(D\Phi)(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango massimo (cioè 2) in ogni punto di Γ: infatti essa ha rango 1 solo per $x = y = -\dfrac{1}{2}$, ma su Γ non esiste alcun punto con tali coordinate perché si dovrebbe avere contemporaneamente

$$z = x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = -x - y = 1 \,.$$

Per calcolare la retta tangente a Γ, si noti che essa è data dall'intersezione tra il piano tangente alla superficie $\{z = x^2 + y^2\}$ e il piano $\{x + y + z = 0\}$. Analiticamente, se $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, la retta tangente a Γ in (x_0, y_0, z_0) ha equazioni

$$\begin{cases} 2x_0\,(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \\ x + y + z = 0 \,. \end{cases}$$

Se la si vuole esprimere nella forma parametrica

$$(x_0, y_0, z_0) + t\,(a, b, c) \;,$$

si noti che (a, b, c) deve appartenere a entrambi i piani citati, quindi deve essere ortogonale sia a $(2x_0, 2y_0, -1)$ sia a $(1, 1, 1)$. Prendiamo dunque come (a, b, c) il prodotto vettoriale $(2x_0, 2y_0, -1) \wedge (1, 1, 1)$, cioè

$$a = 2y_0 + 1 \,, \qquad b = -2x_0 - 1, \qquad c = 2x_0 - 2y_0 \,.$$

(b) Cominciamo ad osservare che Γ è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^3$. Infatti Γ è chiuso perché $\Gamma = \Phi^{-1}(\{0, 0)\})$, ed è anche limitato: infatti, su Γ si ha

$$(-z)^2 = (x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2) = 2z \,,$$

da cui $z^2 - 2z \leqslant 0$, cioè $0 \leqslant z \leqslant 2$. Allora è anche $x^2 + y^2 \leqslant 2$, ovvero Γ è limitato.
Per trovare i punti di massima e minima quota in Γ, che esistono certamente perché Γ è compatto, applichiamo il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* alla funzione $f(x, y, z) = z$. Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda x + \mu \\ 0 &= 2\lambda y + \mu \\ 1 &= -\lambda + \mu \\ z &= x^2 + y^2 \\ x &+ y + z = 0 \,. \end{aligned}$$

Dalle prime tre equazioni si deduce $\lambda \neq 0$, quindi dalle prime due si ricava $x = y$. Usando le ultime due equazioni si ottiene allora $z = 2x^2$ e $z = -2x$, da cui $x = 0$ oppure $x = -1$. Concludendo, i punti stazionari sono $(0, 0, 0)$ e $(-1, -1, 2)$, e naturalmente il primo è quello di minima quota, il secondo quello di massima.

52. Ponendo $x = e^t$ si ottiene

$$\text{area}\,(D) = \iint_{\tilde{D}} e^t \, dt\, dy \,,$$

dove

$$\tilde{D} = \left\{(t, y) : |t| \leqslant 1 \,,\ |y - te^t| \leqslant 1\right\}.$$

Allora

$$\text{area}\,(D) = \int_{-1}^{1} e^t \left(\int_{te^t - 1}^{te^t + 1} dy \right) dt = \int_{-1}^{1} 2e^t \, dt = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

53. Ogni termine della serie è non negativo, dunque dobbiamo stabilire per quali x si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < +\infty \,.$$

Per $x \leqslant 0$ si ha $e^{-xy^2} \geqslant 1$, e quindi

$$f_n(x) = +\infty \qquad \forall n .$$

Per $x > 0$ si ha invece

$$e^{-xy^2} \leqslant e^{-nxy} \qquad \forall y \geqslant n ,$$

e quindi, integrando su $[n, +\infty[$ rispetto ad y,

$$f_n(x) \leqslant \left[-\frac{1}{nx} \, e^{-nxy} \right]_{y=n}^{y=+\infty} = \frac{e^{-n^2 x}}{nx} \leqslant \frac{1}{x} \, (e^{-x})^{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \, (e^{-x})^n ,$$

perché $e^{-x} < 1$ per $x > 0$. La serie $\Sigma \, (e^{-x})^n$ è finita per $x > 0$, quindi per il *teorema del confronto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < +\infty \qquad \forall x > 0 .$$

Sia ora $A \subseteq \mathbf{R}$ un insieme sul quale la serie data converge uniformemente: poiché ciò comporta la convergenza anche su $\bar{A}$, dovrà essere $\bar{A} \subseteq \,]0, +\infty[$, cioè

(1) $$A \subseteq [\delta, +\infty[\qquad \text{per qualche } \delta > 0 .$$

Viceversa, se A soddisfa la condizione (1) si ha

$$e^{-xy^2} \leqslant e^{-\delta y^2} \qquad \forall x \in A$$

e quindi, per quanto provato in (a), si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_A f_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) < +\infty ,$$

cioè la serie converge totalmente su A.

54. Poiché l'equazione è lineare ed ha coefficienti continui su **R**, il problema di Cauchy proposto ha una ed una sola soluzione $y(x)$, definita su tutto **R**.
Ponendo

$$y(x) = e^x z(x)$$

si trova che

$$z'(x) = e^x \operatorname{sen} x .$$

D'altra parte, eseguendo successivamente due integrazioni per parti, si ha

$$z(x) - z(0) = \int_0^x e^t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2} ,$$

pertanto l'espressione esplicita della soluzione $y(x)$ è la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + \left(\frac{1}{2} + a\right) e^{-x} .$$

Da questa si deduce facilmente che $y(x)$ è limitata su $[0, +\infty[$ e non ha limite per $x \to +\infty$, quale che sia il valore di a.

55. Osserviamo che si ha

(1) $$\lim_{y \to +\infty} f(y) = 0 ,$$

pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0 \qquad \forall x > 0 ,$$

cioè la successione (f_n) converge puntualmente a zero su tutta la semiretta $\{x > 0\}$.
Per quanto riguarda la convergenza uniforme, osserviamo che da (1) segue

$$\lim_{r \to +\infty} \left(\sup_{y \geqslant r} |f(y)| \right) = 0 ,$$

e di conseguenza

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \geqslant \delta} |f_n(x)| \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{y \geqslant n\delta} |f(y)| \right) = 0$$

per ogni $\delta > 0$. Dunque si ha convergenza uniforme su ogni insieme A tale che

$$(2) \qquad A \subseteq [\delta, +\infty[\qquad \text{per qualche} \quad \delta > 0 .$$

D'altra parte si può provare che non vi sono altri sottoinsiemi di $]0, +\infty[$, oltre a quelli del tipo (2), sui quali si ha convergenza uniforme. Infatti, se $A \subseteq]0, +\infty[$ non verifica (2), esiste una successione $(x_h) \subset A$ che converge a zero: si ha allora, per ogni fissato $n \in \mathbf{N}$, che $\lim\limits_{h \to \infty} (nx_h) = 0$, e quindi

$$\lim_{h \to \infty} |f_n(x_h)| = \lim_{h \to \infty} |f(nx_h)| = \lim_{y \to 0} |f(y)| = +\infty ,$$

da cui in particolare

$$\sup_A |f_n| = +\infty \qquad \forall n .$$

Ciò esclude ovviamente che vi sia convergenza uniforme a zero su A.

Studiamo ora la convergenza della successione di integrali

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx .$$

Osserviamo preliminarmente che tali integrali sono finiti: a questo proposito notiamo che

$$|f(y)| \leqslant |\log y| = -\log y \qquad \forall y \in]0, 1[,$$

e quindi

$$(3)\qquad \int_0^{1/n} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 |f(y)|\,dy \leqslant \frac{1}{n}[y - y\log y]_0^1 = \frac{1}{n},$$

cosicchè, ricordando che f_n è continua (e quindi integrabile) su $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, si ottiene

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx < +\infty \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Pertanto ciascuno degli I_n esiste finito. Per calcolarne il limite per $n \to \infty$ notiamo che per $y \geqslant 1$ si ha

$$0 \leqslant f(y) \leqslant (y-1)\,e^{-y}\,,$$

quindi

$$(4)\qquad \int_{1/n}^1 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{n}\int_1^n |f(y)|\,dy \leqslant \frac{1}{n}\int_1^n (y-1)\,e^{-y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{n}\,[-y\,e^{-y}]_1^n \leqslant \frac{1}{ne}\,.$$

Da (3) e (4) segue facilmente

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0\,.$$

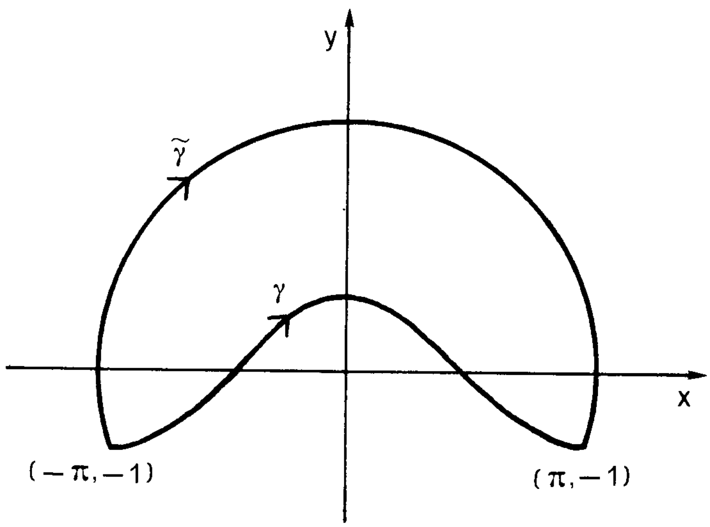
56. Posto $A(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $B(x, y) = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}$, si verifica subito che $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$, cosicché la forma $\omega = A\,dx + B\,dy$ è chiusa in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Osserviamo che la curva γ è tutta contenuta nell'insieme $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0,\ y \leqslant 0\}$, che è semplicemente connesso (Ω è il piano privato di una semiretta chiusa), dunque ω è esatta

in Ω. Di conseguenza l'integrale di ω su γ è uguale all'integrale di ω su un qualunque altro cammino $\tilde{\gamma}$ contenuto in Ω e congiungente il punto $(-\pi, -1)$ col punto $(\pi, -1)$.
Scegliamo come $\tilde{\gamma}$ l'arco di cerchio centrato in $(0, 0)$ e di raggio $\sqrt{1+\pi^2}$, che ha equazioni parametriche

$$x = -\sqrt{1+\pi^2}\cos t\,, \quad y = \sqrt{1+\pi^2}\,\operatorname{sen} t\,,$$

con

$$-\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi} \leqslant t \leqslant \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}\,.$$



Otteniamo allora

$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}}^{\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}\,.$$

57. Se f è differenziabile, in particolare esiste per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, 0) = \lim_{h=0} \frac{f_1(x+h, 0) - f_1(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

cioè φ è derivabile, e analogamente si ragiona per ψ.
Viceversa, dato che per funzioni reali di una variabile reale la derivabilità è equivalente alla differenziabilità, se φ è derivabile allora $f_1(x, y) = \varphi(x + y)$ è differenziabile, e lo stesso vale per $f_2(x, y) = \psi(x - y)$. Allora anche f è differenziabile perché lo sono le sue componenti.

58. L'equazione omogenea $y'' + y = 0$ ha come soluzione generale $y(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$, pertanto cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(t) = A(t) \cos t + B(t) \operatorname{sen} t \,.$$

Applicando il *metodo di variazione delle costanti* si ha

$$\begin{cases} A'(t) \cos t + B'(t) \operatorname{sen} t = 0 \\ -A'(t) \operatorname{sen} t + B'(t) \cos t = 1/(1 + t^2) \end{cases}$$

da cui, con facili calcoli, si ricava

$$A'(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{1 + t^2} \;, \quad B'(t) = \frac{\cos t}{1 + t^2}$$

e infine

$$y(t) = \left(y(0) - \int_0^t \frac{\operatorname{sen} s}{1 + s^2}\, ds \right) \cos t +$$

$$+ \left(y'(0) + \int_0^t \frac{\cos s}{1 + s^2}\, ds \right) \operatorname{sen} t \,,$$

che è la formula risolutiva cercata.
Osserviamo ora che il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds$$

esiste finito: basta notare che se $t_1 < t_2$ allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg} t_2 - \operatorname{arctg} t_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t_1 ,$$

e applicare il criterio di Cauchy. Poniamo

$$A = y(0) - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds .$$

Calcoli analoghi valgono per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds$: poniamo allora

$$B = y'(0) + \int_0^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds .$$

Con queste scelte di A e B si ha

$$|\, y(t) - (A \cos t + B \operatorname{sen} t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_t^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{1+s^2}\, ds \right| + \left| \int_t^{+\infty} \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds \right|$$

e quindi

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - (A \cos t + B \operatorname{sen} t)] = 0 .$$

59. Poiché $e^{-nt^2} > 0$, le funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^n}{n^2} \int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\, dt$$

sono tutte positive su **R**. Effettuando la sostituzione $t = -s$, si ha poi

$$\frac{n^2}{e^n} f_n(-x) = \int_{-x-1}^{-x+1} e^{-nt^2}\, dt = -\int_{x+1}^{x-1} e^{-ns^2}\, ds =$$

$$= \int_{x-1}^{x+1} e^{-ns^2}\, ds = \frac{n^2}{e^n} f_n(x)\, .$$

Allora le funzioni f_n sono pari, pertanto ci basta studiare la serie per $x \geqslant 0$.
Distingueremo i due casi $x \geqslant 2$ e $0 \leqslant x < 2$.
Se è $x \geqslant 2$, l'intervallo $[x-1, x+1]$ è contenuto interamente nella semiretta $\{t \geqslant 1\}$, sulla quale si ha

$$e^{-nt^2} \leqslant e^{-n}\ ;$$

allora

$$\int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\, dt \leqslant 2e^{-n}\ ,$$

e quindi

$$f_n(x) \leqslant \frac{2}{n^2} \qquad \forall x \geqslant 2\, .$$

Pertanto la serie converge totalmente sulla semiretta $\{x \geqslant 2\}$.
Se invece è $0 \leqslant x < 2$, l'intervallo $[x-1, x+1]$ contiene qualche intervallo del tipo $[1-2\delta, 1-\delta]$, con $0 < \delta < 1/2$.
Si ha allora

$$\int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\,dt \geqslant \int_{1-2\delta}^{1-\delta} e^{-nt^2}\,dt \geqslant \int_{1-2\delta}^{1-\delta} e^{-n(1-\delta)^2}\,dt =$$

$$= \delta\, e^{-n(1-\delta)^2},$$

e quindi

$$f_n(x) \geqslant \frac{e^n}{n^2}\,\delta e^{-n(1-\delta)^2} = \frac{\delta}{n^2}\,e^{n\delta(2-\delta)},$$

che tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. Ciò esclude la convergenza puntuale su $[0, 2[$.

60. Per ogni numero reale ξ, la funzione

$$t \mapsto \frac{1 - e^{-\xi t^2}}{t}$$

è continua su $]0, 1]$ ed ha limite finito (uguale a zero) per $t \to 0^+$; allora l'integrale che definisce $f(x, y)$ esiste finito per ogni $(x, y) \in \in \mathbf{R}^2$.
Si ha poi

(1) $$f(x, y) = \varphi(xy),$$

dove

(2) $$\varphi(\xi) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\xi t^2}}{t}\,dt,$$

quindi per provare che f è differenziabile basta provare che φ è derivabile.
A questo scopo è conveniente effettuare nell'integrale di (2) il cambiamento di variabili $s = \xi t^2$, per $\xi \neq 0$: da

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-\xi t^2}}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1 - e^{-\xi t^2}}{\xi t^2}\,2\xi t\,dt$$

si ottiene la semplice espressione

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\frac{1-e^{-s}}{s}\,ds\,. \tag{3}$$

Questa formula vale anche per $\xi = 0$, perché da (2) si ricava $\varphi(0) = 0$.

Grazie al *teorema fondamentale del calcolo integrale,* estendendo per continuità in $s = 0$ l'integrando di (3), si ottiene che φ è derivabile e

$$\varphi'(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{se } \xi=0\\[2ex] \dfrac{1-e^{-\xi}}{2\xi} & \text{se } \xi\neq 0\,.\end{cases} \tag{4}$$

Di conseguenza, la funzione f è differenziabile e il suo differenziale è dato da

$$[(df)\,(x,y)]\,(h,k)=\varphi'(xy)\,(yh+xk)\,. \tag{5}$$

In particolare, per $(x, y) = (1, 2)$ si ha

$$[(df)\,(1,2)]\,(h,k)=\frac{1}{4}\,(1-e^{-2})\,(2h+k)\,.$$

Riguardo all'estremo superiore e all'estremo inferiore di f su $\mathbf{R}^2$, si noti che per (1) essi coincidono con l'estremo superiore e l'estremo inferiore di φ su $\mathbf{R}$.

La derivata (4) di φ è sempre positiva, dunque φ è crescente e

$$\sup\varphi=\lim_{\xi\to+\infty}\varphi(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-s}}{s}\,ds\,,$$

mentre (effettuando il cambiamento di variabili $r = -s$)

$$\inf \varphi = \lim_{\xi \to -\infty} \varphi(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^r - 1}{r} \, dr .$$

Poiché

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-s}}{s} \, ds \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-s}}{s} \, ds \geqslant \left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_1^{+\infty} \frac{ds}{s} = +\infty$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^r - 1}{r} \, dr \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^r - 1}{r} \, dr \geqslant (e - 1) \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r} = +\infty ,$$

i due estremi sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.
Infine si ha

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 ,$$

perché f è differenziabile ed è nulla in $(0, 0)$ insieme alle sue derivate prime (vedi (5)).

61. (i) Sia y una soluzione polinomiale dell'equazione (*). Se y è costante, cioè $y(x) = c$ per ogni x, si ha necessariamente $c = 0$.
Se invece y è un polinomio di grado $N \geqslant 1$, la sua derivata y' è un polinomio di grado $N - 1$, e quindi $[y'(x)]^2$ e $xy'(x)$ hanno gradi $2N - 2$ ed N rispettivamente. Di conseguenza $-\,xy'(x) + y(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale ad N, ma è uguale al polinomio $[y'(x)]^2$, cosicché

$$2N - 2 \leqslant N ,$$

cioè

$$N \leqslant 2 .$$

Vediamo allora quali polinomi del tipo

$$y(x)=ax^2+bx=c$$

risolvono (*): per questa scelta di y la (*) diviene

$$4a^2x^2+4abx+b^2+2ax^2+bx-ax^2-bx-c=0\ ,$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4a^2+a=0 \\ 4ab=0 \\ c=b^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono

$$a=-1/4 \quad , \quad b=c=0$$

e

$$a=0\ , \quad b=\lambda\ , \quad c=\lambda^2\ ,$$

con λ costante arbitraria, cosicché le soluzioni polinomiali di (*) sono la parabola

(1) $$y(x)=-\frac{x^2}{4}$$

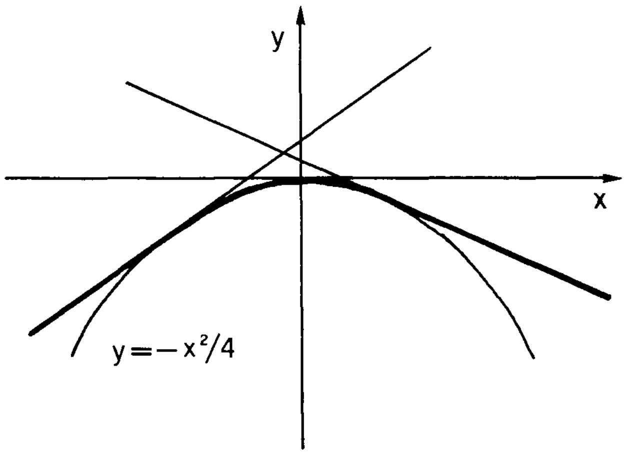
e le rette

$$y(x)=\lambda x+\lambda^2 \quad , \quad \lambda\in\mathbf{R}\ .$$

E' facile verificare che queste rette sono tutte le tangenti alla parabola $y=-x^2/4$: infatti la tangente alla parabola nel punto $(\xi, -\xi^2/4)$ ha equazione $y+\xi x/2-\xi^2/4=0$.

(ii) Vediamo ora per quali $(x_0, y_0)\in\mathbf{R}^2$ esiste qualche soluzione y di (*) tale che

(2) $$y(x_0)=y_0\ .$$



Anzitutto, se una tale soluzione esiste, il numero $z = y'(x_0)$ è una radice dell'equazione di secondo grado

$$z^2 + x_0 z - y_0 = 0 ,$$

e quindi si deve avere

(3) $$x_0^2 + 4y_0 \geqslant 0 .$$

D'altra parte se vale (3), cioè se $y_0 \geqslant -x_0^2/4$, vi sono soluzioni di (*) che verificano (2): ad esempio, le due tangenti alla parabola (1) se è $y_0 > -x_0^2/4$, la tangente alla parabola e la parabola stessa se è $y_0 = -x_0^2/4$. In conclusione, (3) è la condizione necessaria e sufficiente perché esista qualche soluzione di (*) che verifica (2). Oltre alla parabola (1) e alle sue tangenti, (*) ha come soluzioni C^1 (ma non C^2) anche le curve formate da un arco di (1) e dalle sue semirette tangenti agli estremi.

62. Per ipotesi, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui

$$|f(x, y) - 1| < \epsilon \qquad \forall (x, y) \notin B_\delta ,$$

dove B_δ è la palla $\{x^2 + y^2 \leqslant \delta^2\}$.
D'altra parte, posto

$$\varphi(r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} f\, dx\, dy\,,$$

si ha per $r \geqslant \delta$

$$\varphi(r) - 1 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} (f-1)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r \setminus B_\delta} (f-1)\, dx\, dy + \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_\delta} (f-1)\, dx\, dy\,.$$

Si ha quindi, notando che mis $(B_r \setminus B_\delta) \leqslant \pi r^2$,

$$|\varphi(r) - 1| \leqslant \epsilon + \frac{C(\delta)}{r^2}\,,$$

da cui, facendo tendere r verso $+\infty$,

$$\max\lim_{r \to +\infty} |\varphi(r) - 1| \leqslant \epsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ questo implica

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(r) = 1\,.$$

Il viceversa è falso: infatti può accadere che

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} f\, dx\, dy = 1 \qquad \forall r > 0$$

mentre il limite di $f(x, y)$ per $|(x, y)| \to +\infty$ non esiste. Questo è il caso, ad esempio, della funzione

$$f(x, y) = 1 + x\,.$$

63. Introducendo le coordinate polari, si vede che

$$1+(nx+y)^2+(x+ny)^2=1+(n^2+1)\rho^2+2n\rho^2 \operatorname{sen} 2\vartheta \geqslant$$

$$\geqslant 1+(n^2+1)\rho^2-2n\rho^2=1+(n-1)^2\rho^2 \,.$$

Pertanto, indicando con I_n gli integrali assegnati, si ha

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{\rho}{(1+(n-1)^2\rho^2)^2}\,d\rho\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \int_0^n \frac{\rho}{1+(n-1)^4\rho^4}\,d\rho \,.$$

Ponendo $(n-1)^2\rho^2=t$, si ottiene

$$I_n \leqslant \frac{\pi}{(n-1)^2}\int_0^{(n^2-n)^2}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{(n-1)^2}\,\frac{\pi}{2} \,,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0 \,.$$

64. L'equazione verifica le ipotesi del *teorema di esistenza e unicità locale*, perché la funzione $y \mapsto y(2-y)$ è di classe C^1 e quindi localmente lipschitziana. Inoltre le funzioni costanti $y=0$ e $y=2$ sono soluzioni dell'equazione.
Di conseguenza se y è un'arbitraria soluzione non costante su un intervallo I si ha necessariamente una delle tre possibilità seguenti:

(1) $\qquad 0<y(x)<2 \qquad \forall x \in I$

(2) $\qquad y(x)<0 \qquad \forall x \in I$

(3) $\qquad y(x)>2 \qquad \forall x \in I.$

Mostreremo che le soluzioni del tipo (1) sono definite su tutto **R**, mentre quelle del tipo (2) o (3) non lo sono. Infatti, sia y una soluzione del tipo (1), e supponiamo che il suo intervallo di definizione I sia massimale. Posto $\xi = \sup I$, essendo $y'(x) = y(x)(2 - y(x)) > 0$ su I, esiste finito il limite

$$\lim_{x \to \xi^-} y(x) .$$

Se per assurdo fosse $\xi < +\infty$, risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2 - y) \\ y(\xi) = \lambda \end{cases}$$

si potrebbe prolungare la soluzione y in un intorno destro del punto ξ, contro l'ipotesi di massimalità di I. Dunque deve essere $\sup I = +\infty$. In modo del tutto analogo si prova che $\inf I = -\infty$, e cioè che I coincide con tutto **R**.

Per quanto riguarda le soluzioni del tipo (2), osserviamo che esse verificano la relazione

$$y'(x) < -y^2(x) ,$$

cioè

(4) $$\left(\frac{1}{y(x)}\right)' > 1 .$$

Se y fosse definita su tutta una semiretta $]a, +\infty[$, da (4) seguirebbe

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{y(x)} = +\infty ,$$

ma per l'ipotesi (2) è $\dfrac{1}{y(x)} < 0$ per ogni x. In modo analogo si prova che una soluzione del tipo (3) non può essere definita su una semiretta $]-\infty, a[$.

Per descrivere le soluzioni del tipo (1) possiamo introdurre la condizione iniziale $y(0) = y_0$: infatti tutte le soluzioni di questo tipo attraversano l'asse y, e viceversa per ogni punto $(0, y_0)$ con $0 < < y_0 < 2$ passa una soluzione del tipo (1).
Dividendo l'equazione per la quantità positiva $2y - y^2$ si ha

$$y'(x)\left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(x) - 2}\right) = 2 \quad ,$$

da cui

$$\log \frac{y(x)}{2 - y(x)} - \log \frac{y_0}{2 - y_0} = 2x \, ,$$

cioè

$$y(x) = \frac{2y_0 \, e^{2x}}{2 - y_0 + y_0 \, e^{2x}} \quad .$$

Al variare di y_0 in $[0, 2]$ queste sono tutte e sole le soluzioni cercate.

65. Conviene osservare subito che $f(x, y)$ è decrescente in y per ogni $= > 0$ fissato, per la monotonia della funzione arctg.
Si ha allora

$$\sup_{(x,y)\in A} f(x, y) = \sup_{x \geqslant 1} f(x, 0) = \sup_{x \geqslant 1} \frac{1}{x} = 1 \quad ,$$

e anche

$$\inf_{(x,y)\in A} f(x, y) = \inf_{x \geqslant 1} \lim_{y \to +\infty} f(x, y) \quad .$$

Notiamo che $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(ty)}{t^2} = 0$ uniformemente per $t \geqslant 1$, in quanto, per ogni $y > 0$,

$$0 \leqslant \frac{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(ty)}{t^2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \;.$$

Allora

$$\lim_{y \to +\infty} f(x, y) = \frac{1}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\pi}{2t^2}\, dt = \frac{2 - \pi}{2x} \;,$$

quindi

$$\inf_{(x,y) \in A} f(x, y) = \inf_{x \geqslant 1} \frac{2 - \pi}{2x} = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot$$

Osservando che $f(1, 0) = 1$, si ha che l'estremo superiore di f è un massimo, e la tesi è completamente provata.

66. Siano $M_1 < \ldots < M_N$ i punti di massimo relativo. Per la continuità di φ, in ciascun intervallo $[M_i, M_{i+1}]$ esiste un punto m_i di minimo assoluto per φ. Nell'intervallo $[M_i, m_i]$ la funzione φ è monotona decrescente, altrimenti avrebbe un altro punto di massimo relativo. Analogamente si vede che φ è crescente in $[m_i, M_{i+1}]$; infine, se $M_1 > 0$, φ risulta monotona anche in $[0, M_1]$ e, se $M_N < a$, anche in $[M_N, a]$.

Dobbiamo provare che l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali con vertici su Γ non supera $2Nb + a$. Sia dunque P una tale poligonale, ed L la sua lunghezza. Detta P' la poligonale ottenuta aggiungendo ai vertici di P i punti $(M_i, \varphi(M_i))$, $1 \leqslant i \leqslant N$, e i punti $(m_i, \varphi(m_i))$, $1 \leqslant i \leqslant N - 1$, e detta L' la lunghezza di P', si ha chiaramente

$$L \leqslant L' \,,$$

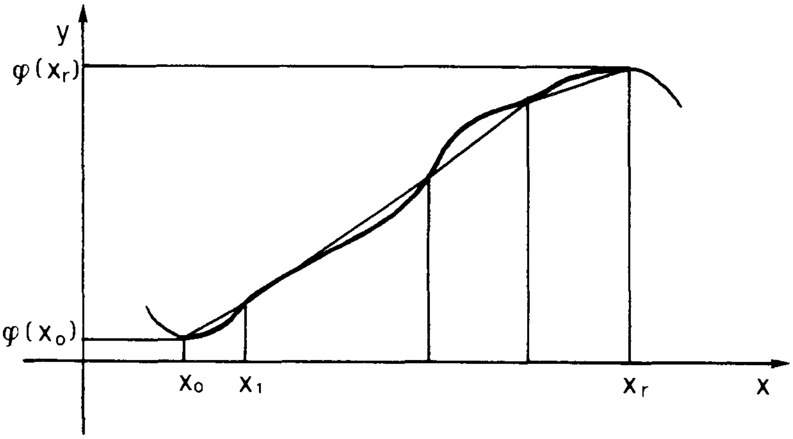
e anche

$$L' = L_1 + \ldots . + L_{2N}$$

dove $L_1, \ldots, L_{2N}$ sono le lunghezze delle parti di P' comprese negli intervalli

$$I_1 = [0, M_1], \; I_2 = [M_1, m_1], \ldots, I_{2N} = [M_N, a]$$

in cui φ è monotona (il primo e l'ultimo eventualmente ridotti a punti).



Siano $(x_0, \varphi(x_0)), \ldots, (x_r, \phi(x_r))$ i vertici di P' nell'intervallo I_k; dalla disuguaglianza $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant |a| + |b|$ si ricava allora

$$L_k = \sum_{i=1}^{r} [|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|^2 + |x_i - x_{i-1}|^2]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{r} (x_i - x_{i-1}) .$$

La prima somma, per la monotonia di φ in I_k, è uguale a $|\varphi(x_r) - \varphi(x_0)|$, e dunque non supera b essendo φ a valori in $[0, b]$. La seconda somma è uguale a $x_r - x_0$, che è proprio la lunghezza $l(I_k)$ di I_k. Dunque

$$L_k \leqslant b + l(I_k)$$

così che

$$L' \leqslant 2Nb + l(I_1) + \ldots + l(I_{2N}) = 2Nb + a\,,$$

come richiesto.

67. Se $a = 0$, la disuguaglianza è banale. Fissiamo allora $a > 0$ e poniamo

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy\;;$$

vogliamo dimostrare che

$$\inf_{x \geqslant 0, y \geqslant 0} f(x, y) \geqslant -a^3\;.$$

Cominciamo a cercare i punti stazionari di f all'interno di $D = [0, +\infty[\, \times [0, +\infty[$. In essi si dovrà annullare il gradiente di f, cioè

$$3x^2 - 3ay = 0\;,\quad 3y^2 - 3ax = 0\;.$$

Ricavando y dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene $x^3 = a^3$, cioè $x = a$, da cui $y = a$. L'unico punto stazionario di f interno a D è dunque (a, a). Notando che $f(a, a) = -a^3$, non resta che provare che (a, a) è in effetti il punto di minimo di f.
Per far ciò studiamo il comportamento di f sulla frontiera di D e all'infinito. Per $x = 0$ si ha $f(0, y) = y^3 \geqslant 0 > -a^3$, e lo stesso per $y = 0$. Inoltre

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}\;,\quad (x + y)^2 \geqslant x^2 + y^2$$

per ogni $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, quindi

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}\left(x^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} + y^2\right)$$

e

$$f(x, y) \geqslant \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{2} - 3a\,\frac{x^2 + y^2}{2}\,,$$

per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\mapsto +\infty \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = +\infty \ .$$

Si conclude facilmente che l'estremo inferiore di f è raggiunto all'interno di D, è un minimo e viene assunto in (a, a), che è ciò che volevamo dimostrare.
Un'altra dimostrazione della disuguaglianza si ottiene molto rapidamente se si utilizza la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica:

$$\frac{x^3 + y^3 + a^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^3 y^3 a^3} \ .$$

68. (a) Posto $x \sqrt[4]{\lambda} = \xi$, $y \sqrt[4]{\lambda} = \eta$ si ha

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\lambda(x^4 + y^4)}\, dx\, dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(\xi^4 + \eta^4)}\, d\xi d\eta \ .$$

(b) Passando in coordinate polari si ottiene

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^4 (\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)}\, d\rho\, d\theta \ .$$

Ora, essendo $\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta = (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta =$
$= 1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta$, si ha

$$\frac{1}{2} \leqslant \cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta \leqslant 1$$

e quindi

$$2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^4}\, d\rho \leqslant C \leqslant 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^4/2}\, d\rho \ .$$

Per valutare i due integrali in quest'ultima disuguaglianza, eseguiamo il cambiamento di variabili $\rho^2 = t$ nel primo di essi, e $\rho^2/\sqrt{2} = s$ nel secondo; allora avremo rispettivamente

$$\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^4} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^4/2} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds .$$

D'altra parte è noto che

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} ,$$

dunque possiamo concludere che

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} \leqslant C \leqslant \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2} .$$

69. Siccome nel punto iniziale $\left(a, \frac{\pi}{a}\right)$ si ha $xy = \pi$, la zona di piano in cui dobbiamo studiare l'equazione è l'insieme

$$A = \left\{(x, y) : x > 0, \ \frac{\pi}{2} < xy < \frac{3\pi}{2} \right\} .$$

La funzione $\mathrm{tg}(xy)$ è di classe C^1 in A, quindi il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione $y(x)$, definita in un intervallo massimale $]\alpha, b[$ contenente il punto $x = a$.

Tale soluzione ha derivata nulla in $x = a$, poiché il punto $\left(a, \frac{\pi}{a}\right)$ sta sulla curva $\{\mathrm{tg}(xy) = 0\}$. Inoltre nell'insieme A la funzione $\mathrm{tg}(xy)$ è crescente in x, dunque per il *teorema di monotonia* (v. appendice) si ha

$$y'(x) < 0 \ \text{ per } \alpha < x < a , \quad y'(x) > 0 \ \text{ per } a < x < b ,$$

e quindi anche

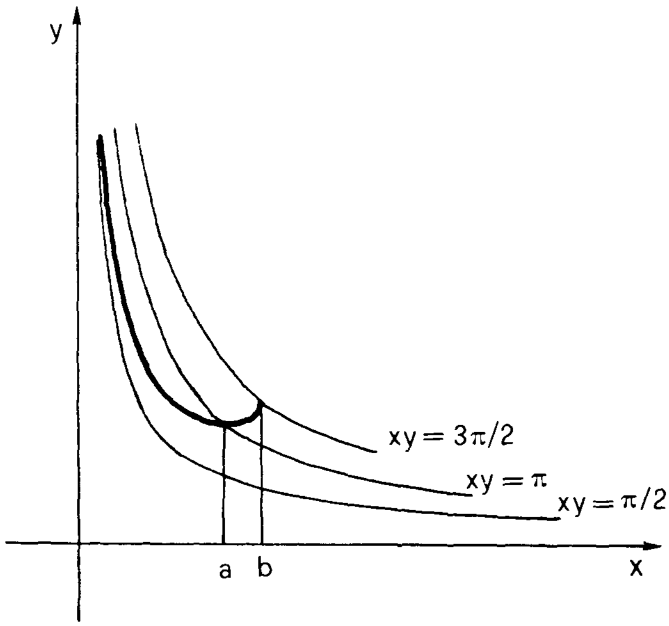
$$\text{(1)} \qquad \frac{\pi}{2x} < y(x) < \frac{\pi}{x} \qquad \text{in} \quad]\alpha, a[$$

$$\frac{\pi}{x} < y(x) < \frac{3\pi}{2x} \qquad \text{in} \quad]a, b[$$

Dato che $y(x)$ è crescente in $]a, b[$ si ha da quest'ultima disuguaglianza

$$\frac{3\pi}{2b} \geqslant \lim_{x \to b^-} y(x) > y(a) = \frac{\pi}{a} \quad .$$

cioè $b < 3a/2$.



Posto poi $\lambda = \lim_{x \to b^-} y(x)$, se $\lambda < \dfrac{3\pi}{2b}$ si può prolungare la soluzione a destra di $x = b$, contro la massimalità di $]\alpha, b[$, dunque necessariamente $\lambda = \dfrac{3\pi}{2b}$, pertanto

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = \frac{3\pi}{2b} \quad , \quad \lim_{x \to b^-} y'(x) = +\infty \, .$$

Per quanto riguarda l'estremo sinistro α, mostreremo che supponendo $\alpha > 0$ si perviene a una contraddizione. Poiché $y(x)$ è decrescente in $]\alpha, a[$, esiste

$$\lim_{x \to \alpha^+} y(x) = l \in \left[\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}\right]$$

(dove si è fatto uso di (1)).

Se è $l > \dfrac{\pi}{2\alpha}$, si può prolungare $y(x)$ a sinistra di $x = \alpha$ risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{tg}(xy) \\ y(\alpha) = l \, , \end{cases}$$

ma ciò contrasta con la massimalità di $]\alpha, b[$.

Se è $l = \dfrac{\pi}{2\alpha}$, si ha per (1)

$$(2) \qquad \frac{y(x) - l}{x - \alpha} \geqslant \frac{\dfrac{\pi}{2x} - l}{x - \alpha} = -\frac{\pi}{2\alpha x} > -\frac{\pi}{2\alpha^2} \qquad \forall x \in \,]\alpha, b[\, ,$$

e d'altra parte per il *teorema di Lagrange*

$$\frac{y(x) - l}{x - \alpha} = y'(\xi_x) = \operatorname{tg}[\xi_x \, y(\xi_x)]$$

con $\alpha < \xi_x < x$, dunque

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{y(x) - l}{x - \alpha} = -\infty$$

in contrasto con (2).

Allora necessariamente $\alpha = 0$, e da (1) si ricava

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty \ .$$

Si potrebbe anche mostrare che la soluzione $y(x)$ è asintotica per $x \to 0^+$ alla curva $xy = \frac{\pi}{2}$, nel senso che

$$\lim_{x \to 0^+} \left(y(x) - \frac{\pi}{2x} \right) = 0 \ .$$

70. Per ogni partizione $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ dell'intervallo $[0, 1]$, con

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1 \ ,$$

indichiamo con

$$l_P(f) = \sum_{i=1}^{N} [|f(x_i) - f(x_{i-1})|^2 + |x_i - x_{i-1}|^2]^{1/2} \tag{1}$$

la lunghezza della poligonale di vertici $(x_i, f(x_i))$.
Per definizione si ha allora che la lunghezza della curva $\Gamma(f)$ è uguale a

$$l(\Gamma(f)) = \sup_P l_P(f)$$

al variare di P fra tutte le partizioni di $[0, 1]$.
Pertanto per ogni n ed ogni partizione P si ha

$$l_P(f_n) \leqslant l(\Gamma(f_n)) \leqslant M \ . \tag{2}$$

D'altra parte da (1) segue immediatamente che se $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora

$$l_P(f_n) \to l_P(f) \ ,$$

cosicché per (2)

$$l_P(f) \leqslant M,$$

da cui la tesi $l(\Gamma(f)) \leqslant M$.

71. Si nota immediatamente che la serie è a termini non negativi. Posto

$$f_n(x, y) = \log(1 + x^{2n} + y^{2n})$$

si ha anche

$$f_n(x, y) \geqslant \log 2 \qquad \text{per } |x| \geqslant 1 \text{ oppure } |y| \geqslant 1 ,$$

quindi la serie diverge al di fuori del quadrato

$$Q = \{|x| < 1, \ |y| < 1\}.$$

Se $(x, y) \in Q$, dalla disuguaglianza $\log(1 + t) \leqslant t$ segue

$$(1) \qquad f_n(x, y) \leqslant x^{2n} + y^{2n} = (x^2)^n + (y^2)^n ,$$

e per il *teorema del confronto* la serie data converge.
Per quanto riguarda la convergenza uniforme, se essa ha luogo su un insieme A si ha necessariamente $\bar{A} \subseteq Q$, perché per la continuità di ogni f_n la serie converge puntualmente su $\bar{A}$.
Viceversa, per ogni A tale che $\bar{A} \subseteq Q$, si ha

$$(2) \qquad A \subseteq \{|x| \leqslant 1 - \delta , \ |y| \leqslant 1 - \delta\} \quad \text{per qualche } \delta \in]0, 1[,$$

e dunque dalla (1)

$$\sup_A f_n \leqslant 2(1 - \delta)^{2n} ,$$

quindi la serie converge totalmente su A.
In conclusione si ha convergenza uniforme su A se e solo se vale (2).

72. Osservando che

$$|x|+|y| \geqslant |(x, y)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

ed utilizzando le coordinate polari, si trova

$$e^{-r} \iint_{B_r} e^{|x|+|y|}\,dx\,dy \geqslant e^{-r} \iint_{B_r} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2\pi e^{-r} \int_0^r \rho\, e^{\rho}\, d\rho = 2\pi(r-1-e^{-r}),$$

quindi il limite cercato è uguale a $+\infty$.

73. Il secondo membro $f(x, y) = \operatorname{arctg} y - \dfrac{1}{x}$ dell'equazione è definito su $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$, dunque, essendo $\dfrac{4}{\pi} > 0$, l'equazione va studiata solo per $x > 0$. Inoltre f è di classe C^1, quindi è localmente lipschitziana in y. Per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* esiste allora un'unica soluzione $y(x)$ del problema.
Ricordando che $|\operatorname{arctg} y| \leqslant |y|$, si ha che per $x > 0$

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{1}{x} + |y|,$$

e il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) assicura che $y(x)$ è definita su tutta la semiretta $]0, +\infty[$. Osserviamo poi che il punto $\left(\dfrac{4}{\pi}, 1\right)$ si trova sull'insieme $\Gamma = \left\{(x, y) : x > 0, x = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} y}\right\}$, dove f è nulla.

Per il *teorema di monotonia* (v. appendice) si ha allora che $y(x)$ è decrescente per $x < 1$ e crescente per $x > 1$.
Se si vuol calcolare $\lim_{x \to 0^+} y(x)$, che esiste per la monotonia di

$y(x)$, si può osservare che

$$y'(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \ .$$

Integrando questa disuguaglianza sull'intervallo $]x, \frac{4}{\pi}[$, con $0 < x < \frac{4}{\pi}$, si ottiene

$$1 - y(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi} - x\right) - \log\frac{4}{\pi} + \log x$$

e quindi

$$y(x) \geqslant \frac{\pi}{2} x - 1 + \log\frac{4}{\pi} - \log x \, ,$$

da cui segue che $\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$.

Analogamente, per calcolare $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ si può osservare che, per la monotonia di $y(x)$,

$$y'(x) \geqslant \frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} \qquad \forall x \geqslant \frac{4}{\pi} \, ,$$

dunque, integrando fra $\frac{4}{\pi}$ e x, si ha

$$y(x) \geqslant \frac{\pi}{4} x - \log x + \log\frac{4}{\pi} \, ,$$

e quindi $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

Si può anche osservare che, essendo $y(x) \geqslant 1$, si ha

$$y'(x) \geqslant \frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

e quindi

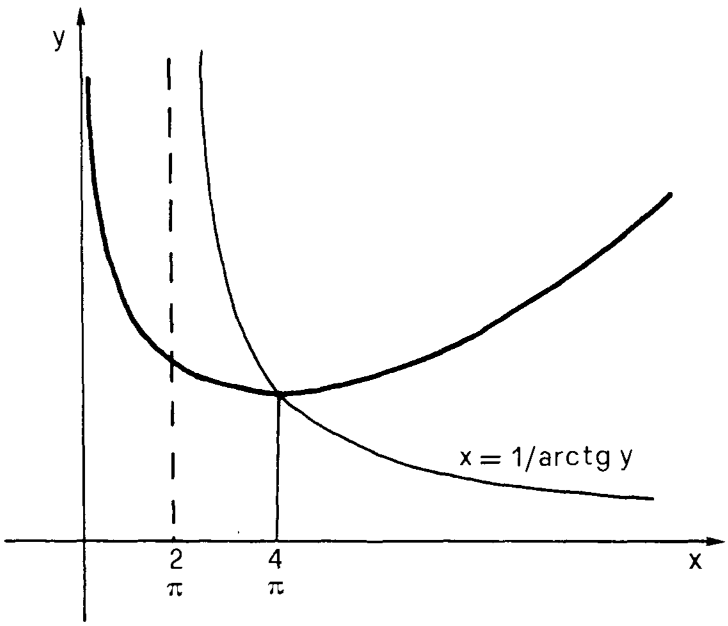
$$y''(x) = \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} + \frac{1}{x^2} \geqslant \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}}{1+y^2(x)} + \frac{1}{x^2} .$$

Posto $c = 1 + y^2(x)$, si ha

$$y''(x) \geqslant \min_{x>0} \left(\frac{\pi}{4c} - \frac{1}{cx} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{c\pi - 1}{4c^2} > 0 ,$$

pertanto $y(x)$ è convessa.

Un grafico approssimativo della soluzione è:



74. (a) Sia (x_0, y_0) uno zero di F. Poiché la matrice jacobiana $DF(x_0, y_0)$ ha determinante diverso da zero, per il *teorema di inversione*

locale esistono un intorno V di (x_0, y_0) ed un intorno W di $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ tali che $F_{|V}$ è un diffeomorfismo tra V e W. In particolare F è iniettiva in V, cosicché (x_0, y_0) è il solo zero di F in V.
Più precisamente, abbiamo provato che

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{r} F(x_0, y_0) = (0, 0) \\ \\ \det DF(x_0, y_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è uno zero isolato di } F.$$

(b) Poniamo $F(x, y) = Df(x, y)$, e sia $f(x_0, y_0) = 0$. Allora si ha, per l'ipotesi su f.

$$F(x_0, y_0) = (0, 0) \quad , \quad \det DF(x_0, y_0) \neq 0$$

e quindi per (1) esiste un intorno V di (x_0, y_0) in cui (x_0, y_0) è l'unico zero di F. Se in V vi fossero altri zeri di f, per l'ipotesi essi sarebbero anche zeri di F, pertanto (x_0, y_0) è necessariamente l'unico zero di f in V.

75. Con il cambiamento di variabili $s = t^2/n$ si ottiene

$$I_n = n \int_{1/n}^{1} \frac{e^{t^2/n} - 1}{t}\, dt = \frac{n}{2} \int_{1/n^3}^{1/n} \frac{e^s - 1}{s}\, ds\,.$$

Per il *teorema della media integrale* si ha

$$(1) \qquad I_n = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) \frac{e^{\xi_n} - 1}{\xi_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{e^{\xi_n} - 1}{\xi_n}$$

per un opportuno $\quad \xi_n \in \left]\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[\,.$

Osservando che

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

dalla (1) segue subito

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1/2 .$$

76. La forma ω è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} ,$$

cioè, integrando la funzione $-2xy(x^2+y^2)^{-2}$ rispetto alla variabile x, se e solo se

$$(1) \qquad u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

con $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ arbitraria funzione di classe C^1.
Per avere l'esattezza di ω, occorre aggiungere alla (1) la condizione seguente (vedi es. 36):

$$(2) \qquad \int_\Gamma \omega = 0 \qquad \text{con } \Gamma = \text{cerchio unitario.}$$

Nel nostro caso la (2) diventa

$$\int_0^{2\pi} [\cos t\,(-\operatorname{sen} t) + [\operatorname{sen} t + \varphi(\operatorname{sen} t)]\cos t]\, dt = 0 ,$$

cioè

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\operatorname{sen} t)\cos t\, dt = 0$$

o ancora, indicando con Φ una primitiva di φ,

$$[\Phi(\operatorname{sen} t)]_0^{2\pi} = 0 .$$

Quest'ultima condizione è ovviamente sempre verificata, dunque la forma ω è esatta se e solo se $u(x, y)$ è della forma (1), e in tal caso le primitive di ω sono le funzioni

$$\psi(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + \Phi(y)$$

con Φ primitiva di φ.

77. La funzione $f(x, y) = y^2 - \operatorname{arctg}^2 x$ è di classe C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$, pertanto il *teorema di Cauchy-Lipschitz* assicura l'esistenza locale e l'unicità di una soluzione $y(x) :]\alpha, \beta[\to \mathbf{R}$ del problema dato, con $\alpha < 1 < \beta$.
Per provare che tale soluzione può essere estesa a tutto $\mathbf{R}$, mostriamo che

$$(1) \qquad |y(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in]\alpha, \beta[.$$

A questo scopo osserviamo che la costante $z(x) = 0$ verifica le condizioni

$$z'(x) > f(x, z(x)) \qquad \forall x \neq 0, \qquad z(1) = y(1),$$

pertanto per il *teorema di confronto* (v. appendice)

$$(2) \qquad y(x) > 0 \quad \text{in} \quad]\alpha, 1[$$

$$(3) \qquad y(x) < 0 \quad \text{in} \quad]1, \beta[\quad .$$

Posto ora

$$g(x, y) = y^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

si ha

$$f(x, y(x)) \geqslant g(x, y(x)) \qquad \text{in }]\alpha, \beta[;$$

inoltre le costanti $u_1(x) \equiv \frac{\pi}{2}$ e $u_2(x) \equiv -\frac{\pi}{2}$ sono soluzioni della equazione differenziale

$$u' = g(x, u)$$

e verificano le condizioni

$$u_1(1) > y(1) \quad , \quad u_2(1) < y(1) \, .$$

Applicando altre due volte il *teorema di confronto* si ottiene infine

(4) $$y(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{in }]\alpha, 1[$$

(5) $$y(x) \geqslant -\frac{\pi}{2} \quad \text{in }]1, \beta[\, .$$

Da queste e da (2), (3) segue subito (1), quindi si può applicare il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) perché da (1) si ricava

$$|f(x, y(x))| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{in }]\alpha, \beta[\, .$$

Supponiamo dunque che $y(x)$ sia definita su tutto **R**, e studiamone l'andamento. Per la (2) si ha

$$y(0) > \operatorname{arctg}(0) \quad , \quad y(1) < \operatorname{arctg}(1) \, ,$$

pertanto esiste un punto $a \in]0, 1[$ tale che

$$y(a) = \operatorname{arctg}(a) \, .$$

Possiamo applicare il *teorema di monotonia* (v. appendice) nel semipiano $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$, ottenendo che $y(x)$ è crescente in $[0, a[$ e decrescente in $]a, +\infty[$.

Per $x < 0$, la soluzione $y(x)$ non può mantenersi sempre al di sopra della curva $y = -\operatorname{arctg} x$, perché in tal caso dovrebbe essere crescente per ogni $x < 0$, pertanto si avrebbe

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) < y(0) \leqslant \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to -\infty} (-\operatorname{arctg} x) \, ,$$

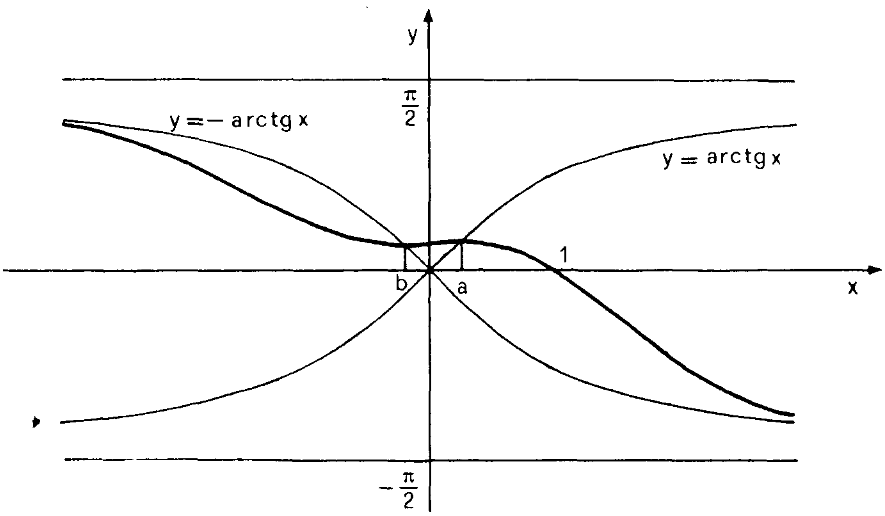
che è una contraddizione. Allora esiste un punto $b < 0$ tale che

$$y(b) = -\operatorname{arctg}(b) .$$

Applicando nel semipiano $\{(x, y) : x \leqslant 0\}$ il *teorema di monotonia* si ha che $y(x)$ è decrescente in $]-\infty, b[$ e crescente in $]b, 0]$. In conclusione

$$y'(x) > 0 \qquad \text{per} \quad b < x < a$$

$$y'(x) < 0 \qquad \text{altrove} \quad .$$



In particolare, esistono i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, e da (2), (3), (4), (5) segue

$$0 < \lim_{x \to -\infty} y(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \lim_{x \to +\infty} y(x) < 0 .$$

Una facile applicazione del *teorema dell'asintoto* (v. appendice) dà

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\frac{\pi}{2} .$$

78. (a) Per ipotesi si ha

$$f(x_n, y_n) \to 0 \qquad \text{per} \quad |(x_n, y_n)| \to +\infty .$$

Ora, se $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha

$$|(nx, ny)| = n\, |(x, y)| \to +\infty \qquad \text{per} \quad n \to \infty ,$$

e quindi

$$f_n(x, y) = f(nx, ny) \to 0 \; . \; .$$

Poiché per ipotesi

$$f_n(0, 0) = f(0, 0) = 0 ,$$

si conclude che $f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbf{R}^2$.
(b) Eccettuato il caso banale in cui è $f \equiv 0$, la convergenza non è mai uniforme su tutto $\mathbf{R}^2$.
Se infatti si ha per qualche (x_0, y_0)

$$|f(x_0, y_0)| = \lambda > 0 ,$$

allora per ogni n si ha anche

$$\sup |f_n| \geqslant \left|f_n\left(\frac{x_0}{n}, \frac{y_0}{n}\right)\right| = |f(x_0, y_0)| = \lambda .$$

Si può facilmente mostrare che la convergenza di (f_n) a zero è uniforme su ogni dominio del tipo $\{x^2 + y_2 \geqslant r^2\}$, con $r > 0$. Infatti

$$\sup_{|(x,y)| \geqslant r} |f_n(x, y)| = \sup_{|(x,y)| \geqslant nr} |f(x, y)|$$

e il termine a secondo membro è infinitesimo per $n \to \infty$, dato che $f(x, y) \to 0$ per $|(x, y)| \to +\infty$.

79. La funzione f è non negativa, e si annulla in $(0, 0)$, dunque $\min f = 0$.

Passando in coordinate polari, la funzione diventa

$$\tilde{f}(\rho,\theta)=\sqrt{\rho|\cos\theta+\operatorname{sen}\theta|}\;e^{-\rho^2}=\sqrt{\rho}\,e^{-\rho^2}\sqrt{\sqrt{2}\,\left|\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|}$$

Di $\tilde{f}$ dobbiamo cercare il massimo per $0\leqslant\rho\leqslant 1/2$ e $0\leqslant\theta<2\pi$. Dovrà ovviamente essere $|\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{4})|=1$, cioè

$$\theta=\frac{\pi}{4}\qquad\text{oppure}\qquad\theta=\frac{5\pi}{4}\;.$$

Si ha poi:

$$\frac{d}{d\rho}(\sqrt{\rho}\,e^{-\rho^2})=\left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}-2\rho\sqrt{\rho}\right)e^{-\rho^2}=\frac{2\,e^{-\rho^2}}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{1}{4}-\rho^2\right),$$

e l'ultimo termine è positivo per $0<\rho<\frac{1}{2}$, pertanto il massimo cercato si ha per $\rho=1/2$ e $\theta\doteq\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{5\pi}{4}$, da cui

$$(x,y)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \max f=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2e}}\;.$$

80. Poniamo

$$f_n(x,y)=\operatorname{arctg}\left[(x+y)^{2n}+(x-y)^{2n}\right]\;.$$

Si nota subito che per la crescenza di $t\mapsto\operatorname{arctg}t$ si ha

$$f_n(x,y)\geqslant\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\qquad\text{per }|x+y|\geqslant 1\quad\text{oppure}\quad|x-y|\geqslant 1\;,$$

quindi la serie diverge fuori dal quadrato aperto

$$Q=\{|x+y|<1\;,\;|x-y|<1\}\;.$$

In tale insieme invece, per la disuguaglianza arctg $t \leqslant t$ valida per $t \geqslant 0$, si ha

$$(1) \qquad 0 \leqslant f_n(x, y) \leqslant [(x+y)^2]^n + [(x-y)^2]^n \ ,$$

quindi per il *teorema del confronto* la serie converge in Q.
Più precisamente, se $\bar{A} \subseteq Q$, cioè se

$$(2) \quad A \subseteq \left\{ |x+y| \leqslant 1-\delta \, , \, |x-y| \leqslant 1-\delta \right\} \text{ per qualche } \delta \in]0,1[\, ,$$

dalla (1) si ricava

$$\sup_A f_n \leqslant 2(1-\delta)^{2n} \quad ,$$

quindi la serie converge totalmente su A.
Viceversa, se la serie converge uniformemente su un insieme $A \subseteq Q$ allora converge puntualmente su $\bar{A}$, pertanto $\bar{A} \subseteq Q$, cioè vale (2). In conclusione si ha convergenza uniforme su A se e solo se A verifica (2).

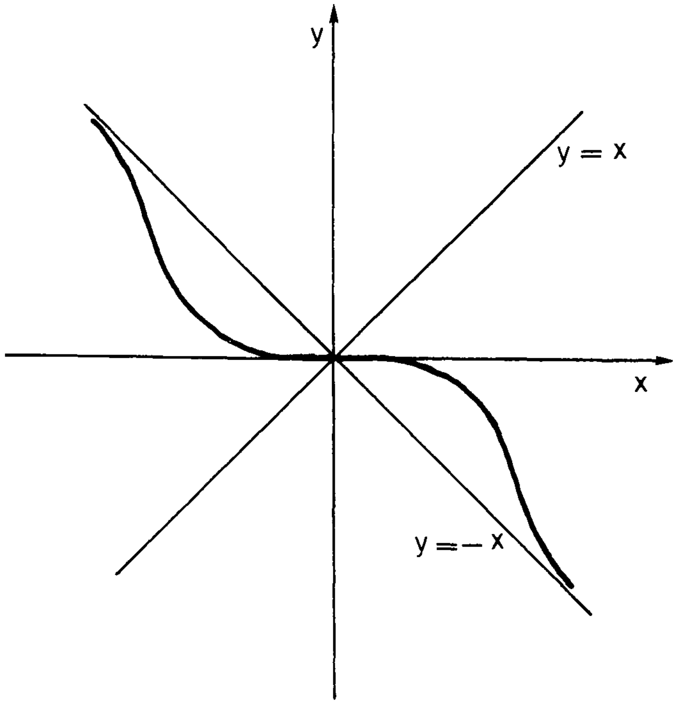
81. Il secondo membro $f(x, y) = e^{y^2} - e^{x^2}$ è di classe C^1 su tutto il piano, quindi l'esistenza locale e l'unicità della soluzione $y(x)$ sono assicurate dal *teorema di Cauchy-Lipschitz.*
Notiamo che $y(x)$ è dispari: infatti ponendo $z(x) = -y(-x)$ si ha $z'(x) = y'(-x) = e^{y^2(-x)} - e^{(-x)^2} = e^{z^2(x)} - e^{x^2}$, e anche $z(0) = 0$; per l'unicità della soluzione deve essere $z(x) = y(x)$, cioè $y(x)$ è dispari. Ci limiteremo a studiarla per $x > 0$.
Si osservi che l'insieme dove f si annulla è dato dalle due rette $y = x$ e $y = -x$.
Siccome il punto iniziale sta su tali rette e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{x^2} < 0 \qquad \forall x > 0 \, ,$$

si ha dal *teorema di monotonia* (v. appendice) che $y(x)$ è decrescente per $x > 0$, quindi in particolare

$$-x < y(x) < 0 \qquad \forall x > 0 \, .$$

Essendo allora $|y'(x)| \leqslant e^{x^2}$, la soluzione esiste su tutto **R**.



Posto poi

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = l \in [-\infty, 0[\ ,$$

si ha $l = -\infty$: infatti se fosse $l > -\infty$ si avrebbe

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = -\infty ,$$

che è in contraddizione con $l > -\infty$.
A titolo di esempio, vediamo come si può dimostrare che $y(x)$ è asintotica alla retta $y = -x$.

Mostriamo che $y(x)$ sta definitivamente al di sotto del ramo di iperbole

$$\{x \geqslant 1, \ y = -\sqrt{x^2 - 1}\}.$$

Poniamo $g(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$: si ha

$$\lim_{x \to +\infty} [g'(x) - f(x, g(x))] = \lim_{x \to +\infty} \left[e^{x^2}(1 - e^{-1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right] = +\infty ,$$

pertanto esiste $x_0 > 1$ tale che

(1) $$g'(x) \geqslant f(x, g(x)) \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Se fosse

$$y(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

si avrebbe

$$y'(x) = e^{y^2(x)} - e^{x^2} \leqslant e^{x^2 - 1} - e^{x^2} = e^{x^2}(e^{-1} - 1) ,$$

pertanto $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = -\infty$, che è assurdo perché $y(x) > -x$ per ogni x. Allora esiste $x_1 \geqslant x_0$ tale che

$$y(x_1) \leqslant g(x_1) .$$

Per la (1), si può applicare il *teorema di confronto* (v. appendice) e si ottiene

$$y(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \geqslant x_1 ,$$

pertanto in particolare

$$0 \leqslant \lim_{x \to +\infty} [y(x) - (-x)] \leqslant \lim_{x \to +\infty} [g(x) - (-x)] = 0 .$$

82. Proveremo che

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t f(x)\, e^x \, dx}{t^2} = \frac{f'(0)}{2} .$$

A tale scopo possiamo applicare il *teorema dell'Hôpital* ed il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, ottenendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_0^t f(x)\, e^x\, dx}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)\, e^t}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} =$$

$$= \frac{f'(0)}{2} .$$

Oltre all'ipotesi $f(0) = 0$, si è utilizzato soltanto il fatto che $f(x)$ è continua ed è derivabile nell'origine (e non C^2).

83. Basta osservare che l'integrando è positivo e che B_n contiene il rettangolo $[0, 1] \times [0, n - 1]$, per concludere che

$$\iint_{B_n} \frac{1}{1 + x^2 + |y|}\, dx\, dy \geqslant \int_0^1 \left(\int_0^{n-1} \frac{1}{2+y}\, dy \right) dx = \log \frac{n+1}{2} .$$

Il limite cercato è pertanto uguale a $+\infty$.

84. Osserviamo subito che f è dispari in x e pari in y, e che il dominio D è simmetrico sia in x sia in y. Basta quindi limitarsi a trovare l'estremo superiore di f nell'insieme

$$D_+ = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\} :$$

tale valore sarà l'estremo superiore cercato, mentre il suo opposto sarà l'estremo inferiore.
Notiamo poi che

$$(1) \qquad |f(x, y)| = |x| \frac{4x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \leqslant |x| ,$$

dunque f è continua in (0, 0); allora l'estremo superiore su D_+ è un massimo.
Cominciamo a cercare gli eventuali punti stazionari di f interni a D_+ : dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{20x^4y^2(x^4+y^2)^2 - 32x^8y^2(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^4} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{8x^5y(x^4+y^2)^2 - 16x^5y^3(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^4} = 0 \,, \end{cases}$$

che con facili semplificazioni si riduce a

$$\begin{cases} 3x^4 = 5y^2 \\ x^4 = y^2 \end{cases}$$

questo sistema, però, non ha soluzioni interne a D_+ (si noti che, in ogni caso, non è detto che f sia differenziabile in $(0, 0)$).
Studiamo ora il comportamento di f su ∂D_+.
Per $x = 0$ o $y = 0$ la funzione vale 0.
Per $y = 2$ si deve studiare su $0 \leqslant x \leqslant 1$ la funzione

$$g(x) = f(x, 2) = \frac{16x^5}{(x^4+4)^2}\,,$$

la cui derivata prima

$$g'(x) = \frac{16x^4}{(x^4+4)^3}\,(20 - 3x^4)$$

è sempre positiva per $0 \leqslant x \leqslant 1$. Si ha allora

(2) $$f(x, 2) \leqslant f(1, 2) \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,.$$

Per $x = 1$, infine, studiamo su $0 \leqslant y \leqslant 2$ la funzione

$$h(y) = f(1, y) = \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}\,,$$

che ha derivata prima

$$h'(y) = \frac{8y}{(1+y^2)^3}\,(1 - y^2)$$

positiva per $y < 1$ e negativa per $y > 1$. Dunque

$$(3) \qquad f(1,y) \leqslant f(1,1) \quad \text{per} \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\,.$$

Da (2) e (3) segue che

$$\max_{D_+} f = f(1,1) = 1\,,$$

per cui il massimo di f su D è 1, e il minimo è -1. Alla stessa conclusione si poteva giungere notando che per (1) è

$$|f(x,y)| \leqslant |x| \leqslant 1\,,$$

e che $f(1,1) = 1$, $f(-1,1) = -1$.

85. (a) Il secondo membro $f(x,y) = |y| - \operatorname{arctg} e^x$ è lipschitziano in y e soddisfa le ipotesi del *teorema di esistenza globale* (v. appendice), quindi il problema di Cauchy assegnato ammette una ed una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto **R**, quale che sia y_0. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} z' = z - \operatorname{arctg} e^x \\ \\ z(0) = y_0 > 0 \quad ; \end{cases}$$

anch'esso ha una soluzione $z(x)$ definita su tutto **R**, e positiva in un intorno di $x = 0$. Se $z(x)$ è sempre positiva, sarà $z(x) \equiv y(x)$; se invece $z(x)$ si annulla, sarà soluzione del problema di Cauchy assegnato nell'intorno di $x = 0$ in cui essa è positiva. Risolviamo dunque (1) : moltiplicando l'equazione per e^{-x} e integrando, si trova

$$(2) \qquad z(x) = e^x \left(y_0 - \int_0^x e^{-t} \operatorname{arctg} e^t \, dt\right) =$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2} e^x \log(1 + e^{-2x}) - e^x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} - y_0\right).$$

E' chiaro che $z(x) > 0$ su **R** qualora sia

$$y_0 \geqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} .$$

Inoltre $z(x)$ si può scrivere nella forma

$$(3) \quad z(x) = \left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{4} e^x\right) + \frac{1}{2} e^x (\log(1 + e^{-2x}) - \log 2) + y_0 e^x .$$

Tenendo presente che

$$\operatorname{arctg} t > \frac{\pi}{4} t \qquad \forall t \in]0, 1[$$

$$\log(1 + t^{-2}) > \log 2 \qquad \forall t \in]0, 1[$$

si ricava da (3) che

$$z(x) > 0 \quad \forall x \leqslant 0$$

indipendentemente da $y_0 > 0$.
Se è

$$0 < y_0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2} ,$$

da (2) si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} z(x) = -\infty ,$$

pertanto $z(x)$ si annulla in un punto $x_0 > 0$.
In quel punto è $z'(x) = -\operatorname{arctg} e^{x_0} < 0$, pertanto $y(x)$ è negativa in un intorno destro di x_0.
Risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} w' = -w - \operatorname{arctg} e^x \\ w(x_0) = 0 \end{cases}$$

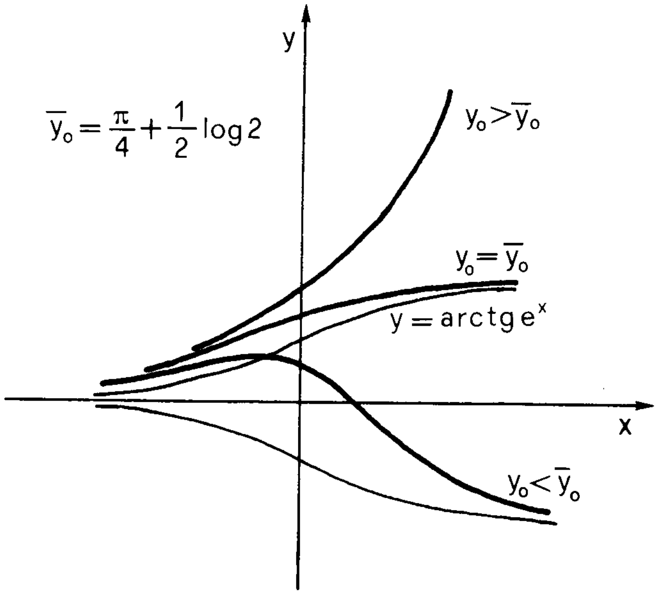
si ottiene

$$(4) \qquad w(x) = -e^{-x}[e^x \operatorname{arctg} e^x - e^{x_0} \operatorname{arctg} e^{x_0} + \log(1+e^{2x}) - $$
$$- \log(1+e^{2x_0})] ,$$

e si vede chiaramente che $w(x) < 0$ per $x > x_0$, pertanto $y(x) = w(x)$ per $x > x_0$. Si ricava allora da (4)

$$\lim_{x \to +\infty} w(x) = -\frac{\pi}{2} \quad ,$$

indipendentemente da x_0, e quindi da y_0. Un grafico approssimativo delle soluzioni $y(x)$ nei vari casi è il seguente:



(b) Si ricava da (2) che per $y_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \dot{y}(x) = \frac{\pi}{2} \ .$$

86. Derivando l'uguaglianza $f^2 + g^2 = 1$ si ottiene

$$ff' + gg' = 0\ ,$$

cioè i vettori (f, g) e (f', g') sono ortogonali. Dato che entrambi sono non nulli, esiste un coefficiente $\lambda(x)$ tale che

$$(1) \qquad (f'(x), g'(x)) = \lambda(x)\,(-g(x), f(x)) \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ ,$$

perché i vettori ortogonali a (f, g) sono tutti del tipo $(-\lambda g, \lambda f)$. Moltiplicando scalarmente la (1) per $(-g, f)$ si ottiene

$$(2) \qquad f(x)\,g'(x) - g(x) f'(x) = \lambda(x)\ ,$$

cioè λ è una funzione continua. D'altra parte, considerando le norme di ambo i membri in (1), si trova che

$$|\lambda(x)| = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ ,$$

e cioè $\lambda(x) \in \{-1, 1\}$. La funzione λ, per essere continua, deve allora essere costante. Osservando che $f(0) = g'(0) = 1$, e quindi $f'(0) = g(0) = 0$, si ha da (2)

$$\lambda(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ .$$

In conclusione la (1) equivale al sistema lineare del primo ordine

$$\begin{cases} f' = -g \\ g' = f \end{cases} ,$$

che con le condizioni iniziali su f, g, f', g' ha come unica soluzione

$$\begin{cases} f(x) = \cos x \\ g(x) = \operatorname{sen} x\ . \end{cases}$$

87. Le funzioni

$$f_n(x) = \frac{(\log n)^{nx}}{n!}$$

sono continue e positive su $\mathbf{R}$.
Usando la nota disuguaglianza

$$n! \geqslant \frac{n^n}{e^n}$$

si ha poi

$$f_n(x) \leqslant \left(\frac{e(\log n)^x}{n}\right)^n$$

Ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e(\log n)^x}{n} = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

dunque per il *criterio della radice* la serie data converge in ogni punto di $\mathbf{R}$.
Per quanto riguarda la convergenza uniforme, è facile accorgersi che essa ha luogo su ogni sottinsieme superiormente limitato $A \subseteq \mathbf{R}$. Infatti se è

$$M = \sup A < +\infty \ ,$$

osservando che $\log n > 1$ per $n \geqslant 3$ si ottiene

$$\sup_A f_n \leqslant f_n(M) \ ,$$

e quindi su A si ha la convergenza totale.
D'altra parte, se A non è superiormente limitato non è possibile che la serie converga uniformemente su A, perché per ogni n si ha

$$\sup_A f_n \geqslant \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \ .$$

88. Se $x = 0$ oppure $y = 0$, la disuguaglianza è vera per ogni costante $C \geqslant 0$.
Sia allora $x > 0$, $y > 0$; la disuguaglianza data è equivalente alla seguente:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^b + \left(\frac{y}{x}\right)^a \geqslant \frac{1}{C}$$

o anche, ponendo $t = y/x$, alla

$$(1) \qquad t^a + t^{-b} \geqslant \frac{1}{C} \qquad \forall t > 0 .$$

Posto $\varphi(t) = t^a + t^{-b}$, la funzione φ è continua e positiva per $t > 0$ e inoltre si ha

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty .$$

Allora φ ha minimo positivo su $]0, +\infty[$, e quindi la (1) è vera per qualche costante $C > 0$. Per determinare la migliore costante C occorre calcolare il minimo di φ; osservando che

$$\varphi'(t) = a t^{a-1} - b t^{-b-1} ,$$

il minimo di φ si ha per

$$t = \bar{t} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

Il valore minimo è dato da

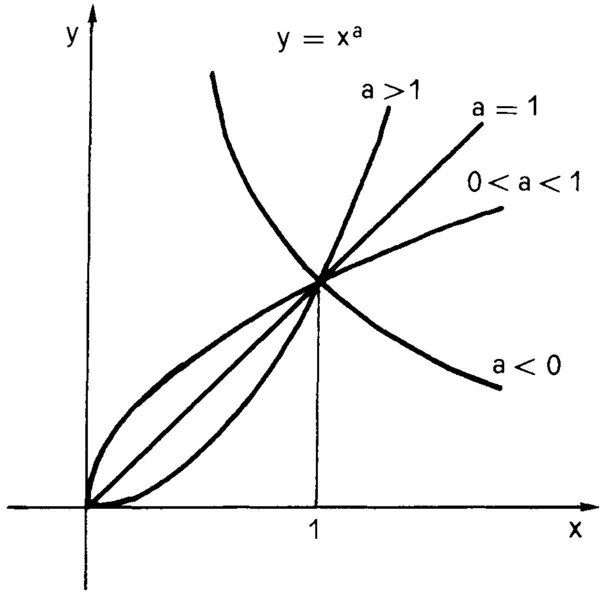
$$\min_{t>0} \varphi(t) = \varphi(\bar{t}) = \frac{a+b}{(a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}}} ,$$

quindi la migliore costante C è

$$C = \frac{(a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}}}{a+b} .$$

89. Osserviamo subito che l'integrando è positivo. A seconda del valo-

re di a, la funzione $y = x^a$ ha grafici molto differenti, dunque tratteremo separatamente i vari casi.



Se è $a \leqslant 1$, posto

$$E_1 = \left\{(\rho, \theta) : 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$$

si ha

$$\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{-N} \, dx \, dy \geqslant \iint_{E_1} \rho^{-2N+1} \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^{-2N+1} \, d\rho = +\infty$$

per ogni $N \geqslant 1$.
Se è $a > 1$, conviene distinguere i due casi $N = 1$ e $N \geqslant 2$.
Per $N = 1$, posto

$$E_2 = \left\{(\rho, \theta) : \rho \geqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\},$$

si ha

$$\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{-1}\, dx\, dy \geqslant \iint_{E_2} \rho^{-1}\, d\rho\, d\vartheta = \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho} = +\infty .$$

Supponiamo ora $N \geqslant 2$, $a > 1$; notando che $y \leqslant x^a \leqslant x$ per $0 \leqslant \leqslant x \leqslant 1$, si trova

$$\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{-N}\, dx\, dy \geqslant \int_0^1 \left(\int_0^{x^a} (x^2 + y^2)^{-N}\, dy \right) dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \left(\int_0^{x^a} (2x^2)^{-N}\, dy \right) dx = 2^{-N} \int_0^1 x^{a-2N}\, dx .$$

Se è $a - 2N \leqslant -1$, cioè $a \leqslant 2N - 1$, quest'ultimo integrale è infinito, dunque anche quello di partenza è infinito.
Se invece è $a > 2N - 1$, posto

$$E_3 = \{ (\rho, \theta) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \;, \rho \geqslant 1 \}$$

si ha, notando che è $y \geqslant 0$,

$$\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{-N}\, dx\, dy \leqslant \iint_{E_3} \rho^{-2N+1}\, d\rho\, d\theta +$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^{x^a} x^{-2N}\, dy \right) dx = \frac{\pi}{4 - 4N} + \frac{1}{a + 1 - 2N} < +\infty .$$

In conclusione, per $N = 1$ l'integrale non è mai finito, mentre per $N \geqslant 2$ l'integrale è finito se e solo se $a > 2N - 1$.

90. Il secondo membro $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$ dell'equazione è di classe C^1 (e quindi localmente lipschitziano in y) nel semipiano

$A = \{(x, y) : y > 0\}$ dove si trova il punto iniziale $(0, a)$: allora in un intorno di $x = 0$ esiste ed è unica la soluzione $y_a(x)$ del problema assegnato. Osserviamo che la funzione f si annulla in A sulla parabola $y = x^2 + 1$, pertanto distinguiamo tre casi a seconda che il punto $(0, a)$ stia all'esterno di questa parabola, nel vertice o all'interno. Se è $0 < a < 1$, la soluzione $y_a(x)$ non può intersecare la parabola in un punto di ascissa $x_0 > 0$, perché in tal caso, essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{(1 + x^2)^3} > 0 \qquad \forall x > 0 \, ,$$

per il *teorema di monotonia* (v. appendice) la funzione y_a sarebbe decrescente in $[0, x_0[$, dunque

$$y_a(0) > y_a(x_0) = 1 + x_0^2 > 1 > a = y_a(0) \, ,$$

che è una contraddizione. Allora $y_a(x) < 1 + x^2$ a destra di $x = 0$, e in particolare y_a è crescente. Dalla disuguaglianza

$$y_a(x) \geqslant y_a(0) = a \, ,$$

valida a destra di $x = 0$, segue

$$f(x, y_a(x)) \leqslant \frac{1}{a^2} \quad ,$$

pertanto la funzione y_a è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$, ed è crescente. Ora,

$$\lim_{x \to +\infty} y_a(x) = l \in \,]a, +\infty] \, ,$$

non può essere $l < +\infty$, perché altrimenti si avrebbe

$$\lim_{x \to +\infty} y_a'(x) = \frac{1}{l^2} \quad ;$$

allora si ha necessariamente $l = +\infty$, e quindi $\lim_{x \to +\infty} y_a'(x) = 0$. Per quanto riguarda l'intervallo di definizione a sinistra di $x = 0$, osserviamo che la funzione $z(x) = 1$ verifica

$$\begin{cases} z'(x) < f(x, z(x)) \\ z(0) > y_a(0) \end{cases} ,$$

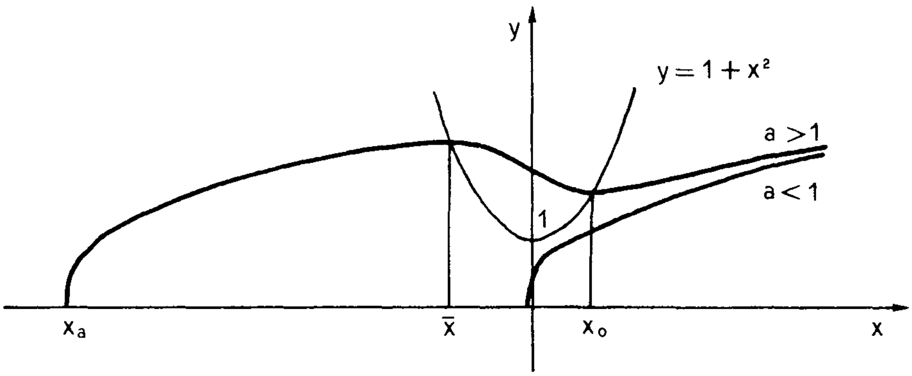
pertanto per il *teorema di confronto* $y_a(x) < z(x) < 1 + x^2$ a sinistra di $x = 0$. Allora y_a è crescente anche a sinistra di $x = 0$. Se y_a fosse definita su $]-\infty, 0]$, avrebbe limite finito $l \in [0, a[$ per $x \to -\infty$, ma in tal caso

$$\lim_{x \to -\infty} y_a'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{y_a^2(x)} = \begin{cases} 1/l^2 & \text{se } l > 0 \\ +\infty & \text{se } l = 0 , \end{cases}$$

in contraddizione col *teorema dell'asintoto* (v. appendice). Allora l'intervallo massimale di definizione di y_a è del tipo $]x_a, +\infty[$, con $x_a < 0$. E' immediato constatare che deve essere

$$\lim_{x \to x_a^+} y_a(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to x_a^+} y_a'(x) = +\infty .$$

Un grafico approssimativo della soluzione y_a, per $a = 1/2$, è riportato in figura.



Il caso $a = 1$ è molto simile al caso $a < 1$, e non lo trattiamo. Passiamo al caso $a > 1$: come prima, la funzione $z(x) \equiv 1$ verifica $z'(x) < f(x, z(x))$ e $z(0) < y_a(0)$, pertanto a destra di $x = 0$ è $y_a(x) \geqslant 1$. Allora

$$|f(x, y_a(x))| \leqslant 1 + \frac{1}{(x^2+1)^2} \leqslant 2\,,$$

quindi y_a è definita in tutto $[0, +\infty[$.
La funzione y_a non può stare sempre al di sopra della parabola $y = 1 + x^2$, perché in tal caso sarebbe decrescente e contemporaneamente tenderebbe a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Allora y_a incontra la parabola in un punto di ascissa $x_0 > 0$. Per il *teorema di monotonia*, $y_a(x)$ è decrescente in $[0, x_0[$ e crescente per $x > x_0$.
Come nel caso $0 < a < 1$, si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} y_a(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} y'_a(x) = 0\,.$$

Per $x < 0$, dato che

$$f(x, y) \geqslant -\frac{1}{(1+x^2)^2} \geqslant -1$$

si ha

$$y_a(x) \leqslant a - x$$

nell'intervallo sinistro di definizione. Poiché la retta $y = a - x$ interseca la parabola $y = 1 + x^2$, necessariamente anche y_a interseca la parabola, in un punto $\bar{x} < 0$. Sempre per il *teorema di monotonia*, y_a è crescente per $x < \bar{x}$ e decrescente in $]\bar{x}, 0]$. Come nel caso $0 < a < 1$, si vede che esiste un punto $x_a < 0$ tale che y_a è definita in $]x_a, +\infty[$ e

$$\lim_{x\to x_a^+} y_a(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to x_a^+} y'_a(x) = +\infty\,.$$

Nei casi $a = 1$ ed $a > 1$, si ha $y'_a(x_0) = 0$ per un opportuno $x_0 \geqslant 0$, e inoltre

$$y'_a(x) > 0 \quad \forall\, x > x_0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} y'_a(x) = 0\,.$$

Detto $\tilde{x}$ il punto di massimo di y'_a in $[x_0, +\infty[$, questo è un punto di flesso di y_a.

91. Si ha

$$x(\theta)=(1-\cos\theta)\cos\theta\ ,\quad y(\theta)=(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\ ,$$

da cui

$$x(\theta)\geqslant 0\ ,\ y(\theta)\geqslant 0\qquad \forall\,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

La curva Γ è dunque contenuta nel primo quadrante. Si vede subito che $\rho(\theta)$ è funzione crescente di θ su $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e che $\rho(0)=0$, $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
Inoltre si ha

$$x'(\theta)=\operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta-1)\ ,\ y'(\theta)=1+\cos\theta-2\cos^2\theta\ ,$$

da cui (essendo $t=-\frac{1}{2}$ e $t=1$ le radici dell'equazione $1+t-2t^2=0$) segue che, limitatamente all'intervallo $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

$$x'(\theta)\ =\ 0\qquad \text{per}\ \theta\ =\ 0\quad \text{o}\quad \theta\ =\ \frac{\pi}{3}$$

$$y'(\theta)\ =\ 0\qquad \text{per}\ \theta\ =\ 0\ .$$

Si noti infine che

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{y(\theta)}{x(\theta)}=\lim_{\theta\to 0^+}\operatorname{tg}\theta=0\ .$$

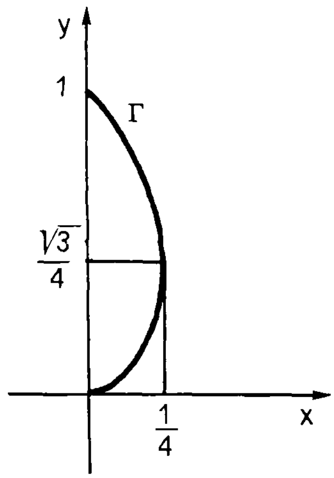
In conclusione la curva Γ è un grafico cartesiano rispetto all'asse y, con tangente orizzontale in (0, 0) e verticale nel punto

$$\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right),\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Nell'altro punto estremo (0, 1) la tangente a Γ ha coefficiente angolare uguale a

$$\frac{y'(\pi/2)}{x'(\pi/2)} = -1 .$$

Si può ora tracciare un grafico approssimativo di Γ:



Per calcolare l'area della regione D, compresa fra Γ e l'asse y, usiamo le coordinate polari. Si ha

$$\text{area}\,(D) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\rho(\theta)} \rho\, d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{8}\pi - 1 .$$

92. Se è $\operatorname{sen} x < 1$, scelto $a \in \,]\operatorname{sen} x, 1[$ si ha definitivamente

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{n} \leqslant a ,$$

e quindi

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant a^n \ ,$$

cosicché la successione converge a zero.

Invece per sen $x = 1$, cioè $x = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

che, come è noto, tende ad e.
Allora (f_n) converge puntualmente in $[0, \pi]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \neq \pi/2 \\ e & \text{se } \ x = \pi/2 \, . \end{cases}$$

Poiché ogni f_n è continua su $[0, \pi]$, mentre f è discontinua in $x = \pi/2$, la convergenza non può essere uniforme su alcun insieme $A \subseteq [0, \pi]$ tale che $\pi/2$ sia di accumulazione per A.
Viceversa, se $A \subseteq [0, \pi]$ è tale che $\dfrac{\pi}{2} \notin \bar{A}$, allora

$$(1) \qquad A \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \delta, \pi\right] \text{ per qualche } \ \delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\, .$$

Scelto a tale che

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) < a < 1 \ ,$$

si ha

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \frac{1}{n} \leqslant a \qquad \forall\, n \geqslant n_a \quad ,$$

quindi

$$\sup_A f_n \leqslant a^n \qquad \forall\, n \geqslant n_a \ ,$$

e la serie converge totalmente in A.
In conclusione la serie converge uniformemente sugli insiemi del tipo

$$B = A \cup \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{con } A \text{ verificante (1)} \quad .$$

93. Con il cambiamento di variabili $x + y(x) = z(x)$ l'equazione diventa

$$z'(x) = 2 - \log z(x) \,. \tag{1}$$

Il secondo membro $f(z) = 2 - \log z$ è definito per $z > 0$, ed è localmente lipschitziano perché di classe C^1. Per il *teorema di Cauchy-Lipschitz*, per ogni punto (x_0, z_0) con $z_0 > 0$ passa allora una ed una sola soluzione di (1).
La costante $z(x) \equiv e^2$ è una soluzione particolare, dunque per ogni altra soluzione sarà sempre $z(x) < e^2$ oppure sempre $z(x) > e^2$. Cominciamo a studiare il primo caso: sia $z_0(x)$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $z(0) = 1$. Poiché $1 < e^2$, la funzione z_0 è crescente; inoltre per $x \geqslant 0$ si ha $1 \leqslant z_0(x) \leqslant e^2$, pertanto

$$0 \leqslant f(z_0(x)) \leqslant 2 \,.$$

Allora z_0 è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$, ed essendo crescente ammette limite:

$$\lim_{x \to +\infty} z_0(x) = l \in \,]1, e^2] \quad . \tag{2}$$

Non può essere $l < e^2$, perché in tal caso si avrebbe $\lim_{x \to +\infty} z_0'(x) = 2 - \log l > 0$, che è in contraddizione con (2). Allora $l = e^2$, e $\lim_{x \to +\infty} z_0'(x) = 0$. Invece, z_0 non può essere definita su tutto $]-\infty, 0]$: infatti z_0 è concava, perché da (1) segue

$$z''(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)} \quad ,$$

e sia z_0 sia z_0' sono positive; allora $z_0(x)$ sta sempre al di sotto della sua retta tangente nel punto $x = 0$, che è la retta $z = 2x + 1$; essa interseca l'asse x per $x = -\frac{1}{2}$, pertanto l'intervallo massimale di definizione di z_0 è del tipo $]x_0, +\infty[$, con $-\frac{1}{2} < x_0 < 0$. E' facile vedere che deve essere

$$\lim_{x \to x_0^+} z_0(x) = 0$$

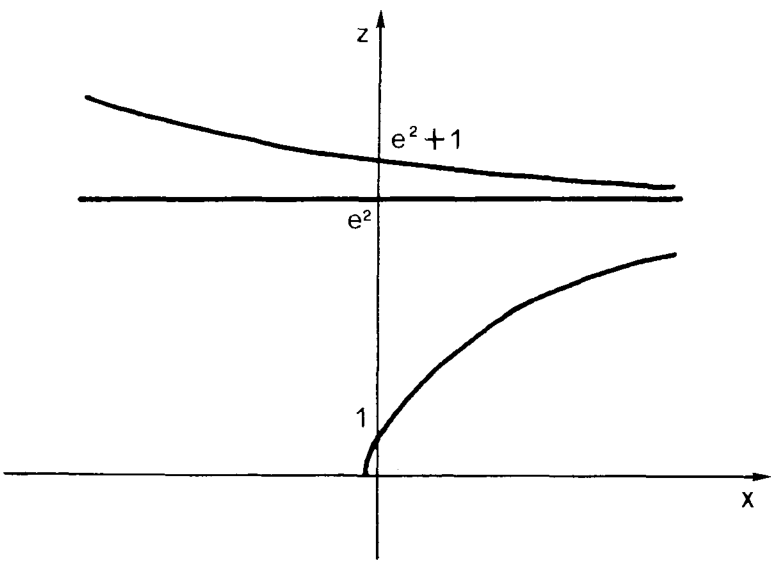
e quindi

$$\lim_{x \to x_0^+} z_0'(x) = +\infty \ .$$

Sia ora (a, b) un punto della striscia $\{(x, z) : 0 < z < e^2\}$. Lo studio di z_0 ci permette di affermare che esiste un punto x_b in cui $z_0(x_b) = b$. Poniamo

(3) $$z(x) = z_0(x + x_b - a) :$$

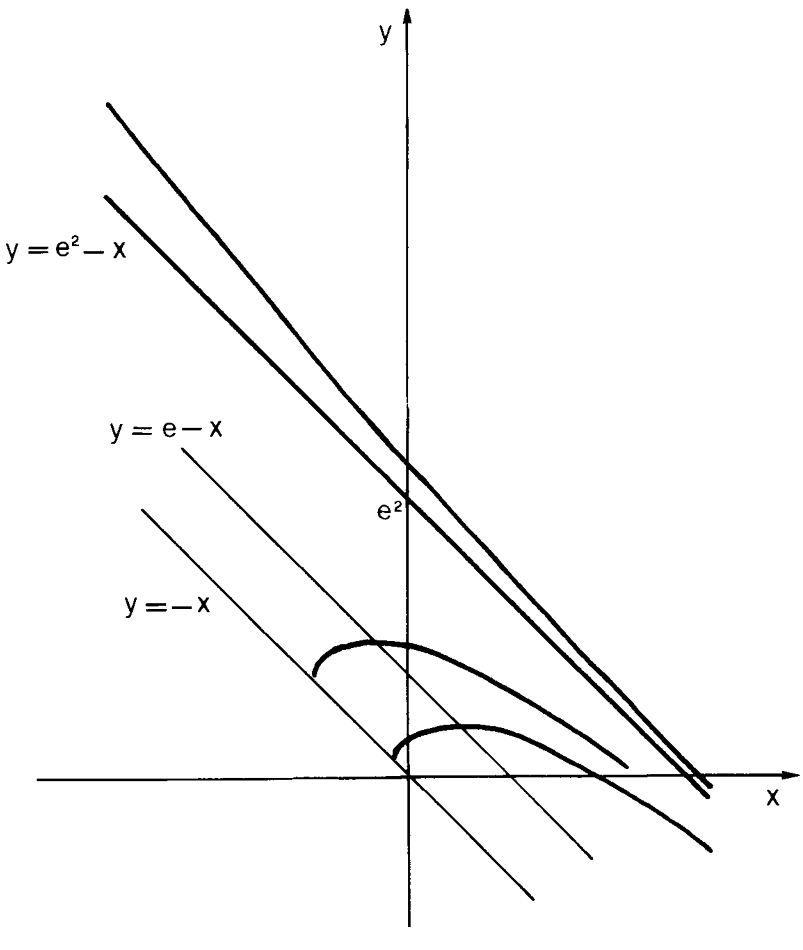
allora si verifica facilmente che $z(x)$ risolve (1), e che $z(a) = b$, quindi la (3) è la soluzione di (1) passante per (a, b).



Consideriamo ora la soluzione $z_1(x)$ di (1) passante per $(0, e^2 + 1)$: questa è decrescente e maggiore di e^2, pertanto dalla disuguaglianza $\log t \leqslant t - 1$ si ottiene

$$3 - z_1(x) \leqslant f(z_1(x)) \leqslant 0 \,,$$

dunque per il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) la soluzione z_1 è definita su tutto **R**.
Come prima, si verifica che



$$\lim_{x \to +\infty} z_1(x) = e^2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} z_1'(x) = 0$$

e, sempre con ragionamenti analoghi, che

$$\lim_{x \to -\infty} z_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} z_1'(x) = -\infty.$$

Come nel caso precedente, tutte le soluzioni di (1) che stanno sopra la retta $z = e^2$ sono traslate di $z_1(x)$.
E' facile a questo punto disegnare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione assegnata, facendo l'unica osservazione che $y'(x) = 0$ sulla retta $y = e - x$.

94. Fissato un punto (x_0, y_0), consideriamo il problema di Cauchy

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Grazie all'ipotesi di lipschitzianità uniforme in $\mathbf{R}^2$, questo problema ha una soluzione (unica)

$$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

In particolare si ha

$$\text{(2)} \qquad \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Fissato $c \in \mathbf{R}$, poniamo

$$\psi(x) = \varphi(x + c):$$

per ipotesi ψ è soluzione dell'equazione (1), cioè

$$\text{(3)} \qquad \varphi'(x + c) = f(x, \varphi(x + c)) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Per $x = x_0 - c$, la (3) diventa

$$\varphi'(x_0) = f(x_0 - c, y_0)$$

che, confrontata con la (2), diviene

$$f(x_0 - c, y_0) = f(x_0, y_0).$$

Da quest'ultima uguaglianza, per l'arbitrarietà di x_0, y_0 e c, si ricava la tesi:

$$f(x, y) = f(0, y) \qquad\qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ,$$

e cioè f non dipende da x .

95. Cerchiamo di stabilire prima di tutto per quali valori di (x, y) il termine generico della serie è infinitesimo per $n \to \infty$. A tale scopo osserviamo che, se a e b sono due numeri reali non negativi, si ha

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} |a^n - b^n|^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ \max\{a, b\} & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

Infatti se $a = b$ si ha $|a^n - b^n| = 0$, mentre se $a \neq b$, supponendo per fissare le idee $a > b \geqslant 0$, si ha

$$|a^n - b^n|^{1/n} = a\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]^{1/n} \qquad ,$$

cosicché, notando che $\lim_{n \to \infty} (b/a)^n = 0$, si ottiene la (1).

Da (1), con $a = x^2$ e $b = y^2$, si deduce che il termine generico non è infinitesimo se (x, y) non appartiene all'insieme

$$D = \{|x| = |y|\} \ ,$$

il quale non è altro che l'unione delle due bisettrici degli assi cartesiani.

Invece su D tutti i termini della serie sono nulli, e quindi la serie converge totalmente su D.

96. Con il cambiamento di variabile $z(x) = y(x) - x$, l'equazione diventa

$$(1) \qquad\qquad z'(x) = \operatorname{sen} z(x) - 1 \ .$$

Poiché il secondo membro è limitato e di classe C^1, la soluzione di (1) passante per $(0, a)$ è unica e definita su tutto **R**. Osserviamo che le costanti

$$z(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

sono soluzioni di (1); inoltre, se $z(x)$ risolve (1) con dato iniziale $z(0) = a$, allora la funzione

$$v(x) = z(x) + 2k\pi$$

è la soluzione di (1) che passa per $(0, a + 2k\pi)$. In conclusione, possiamo limitarci a studiare il caso $-\frac{3}{2}\pi < a < \frac{\pi}{2}$, e allora la soluzione $z(x)$ rimarrà sempre fra le due costanti $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3}{2}\pi$. Da (1) si ricava subito

$$z'(x) < 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

quindi le soluzioni sono decrescenti. Posto

$$\lim_{x \to +\infty} z(x) = \ell \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

deve essere $\ell = -\frac{3\pi}{2}$, altrimenti da (1) si ricava che $z'(x)$ ha limite diverso da zero, in contraddizione con il *teorema dell'asintoto* (v. appendice). Analogamente, $\lim_{x \to -\infty} z(x) = \frac{\pi}{2}$.

Detta $z_0(x)$ la soluzione di (1) verificante

$$z_0(0) = -\frac{\pi}{2},$$

si ha che la funzione

$$(2) \qquad z(x) = -\pi - z_0(-x)$$

risolve (1) e passa per $(0, -\frac{\pi}{2})$, pertanto coincide con $z_0(x)$: si ha allora da (2)

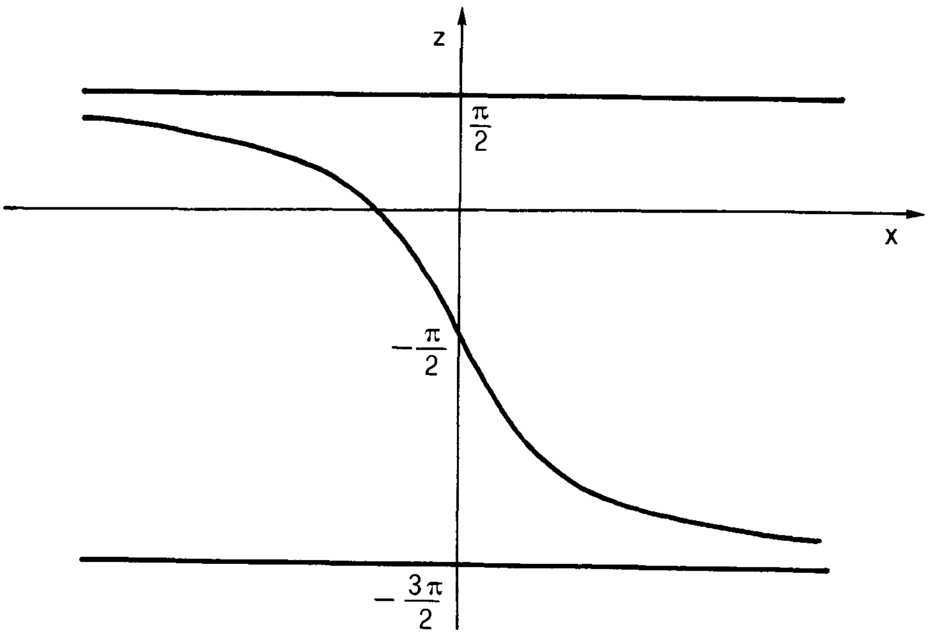
$$z_0(-x) + \frac{\pi}{2} = -\left(z_0(x) + \frac{\pi}{2}\right),$$

cioè la funzione $z_0(x) + \frac{\pi}{2}$ è dispari. Questo significa che il grafico di $z_0(x)$ è simmetrico rispetto al punto $(0, -\frac{\pi}{2})$.

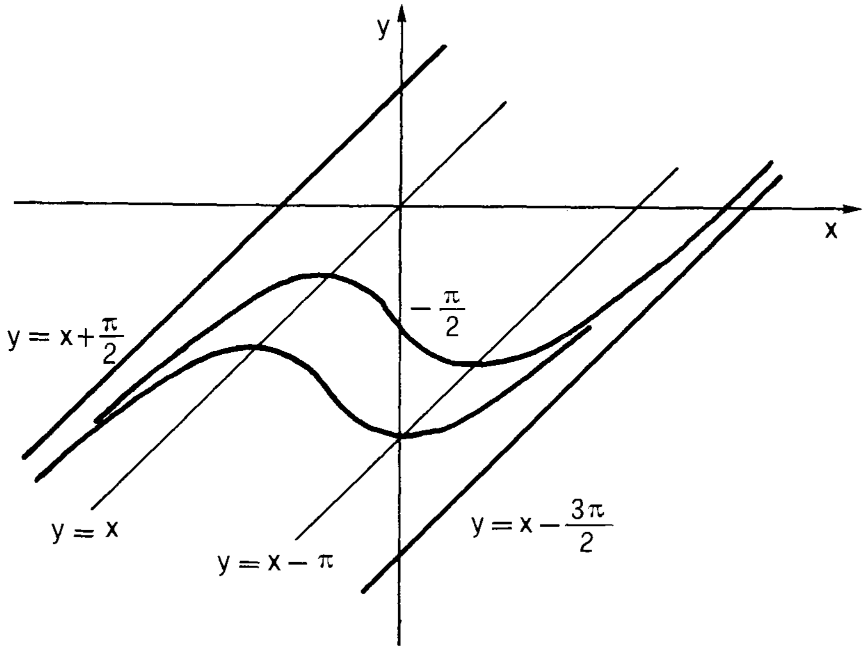
Infine, l'immagine di z_0 è $]-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}[$, quindi per ogni $a \in\ ]-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}[$ esiste un punto x_a tale che $z_0(x_a) = a$. Posto allora

$$z(x) = z_0(x + x_a)\ ,$$

la funzione $z(x)$ risolve (1) e passa per $(0, a)$: le soluzioni di (1) sono dunque tutte traslate di $z_0(x)$.



Osserviamo che l'equazione (1) si può risolvere esplicitamente, dividendo per (sen $z - 1$) e integrando rispetto ad x, ma l'espressione che si ottiene non è di facile studio. Dall'esame delle soluzioni di (1) si ricava l'andamento delle soluzioni dell'equazione di partenza; i massimi relativi sono sulle rette $y = x + 2k\pi$, i minimi relativi sulle $y = x + \pi + 2k\pi$.



97. Sommando e sottraendo termine a termine le due equazioni, dal sistema dato si passa subito al seguente:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' + 2y + 3x = 0 \\ x' - y - x = 0 \end{cases}$$

Derivando la prima equazione e usando la seconda si ottiene allora

$$y'' + 2y' + 3y + 3x = 0 ,$$

cioè, utilizzando ancora la prima equazione di (1),

$$y'' + y' + y = 0 .$$

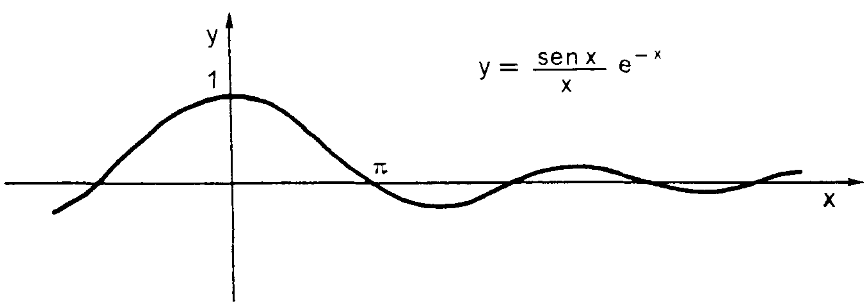
Si ha allora, con facili calcoli,

$$y(t) = \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t + B \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) e^{-t/2}$$

e quindi, ritornando alla prima delle (1),

$$x(t) = \left(\frac{-5A - B\sqrt{3}}{6} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t + \frac{-5B + A\sqrt{3}}{6} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) e^{-t/2}.$$

98. Possiamo supporre di aver esteso f per continuità, ponendo $f(0) = 1$. Un grafico approssimativo di f è il seguente (molto fuori scala: in realtà $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cong -0.002$):



Definita

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,,$$

la funzione g risulta di classe C^2, e dobbiamo massimizzare la quantità $g(b) - g(a)$.
Dato che f è pari, la funzione g è dispari, quindi

$$\sup\,[g(b) - g(a)] = \sup g - \inf g = 2 \sup g\ ;$$

inoltre, se x_0 è il punto di massimo di g, si avrà

$$\max \int_a^b f(t)\, dt = g(x_0) - g(-x_0) = \int_{-x_0}^{x_0} f(t)\, dt\,.$$

Dalle relazioni

$$g'(x_0)=0 \quad , \quad g''(x_0)\leqslant 0 \, ,$$

necessarie perché x_0 sia di massimo, si ricava

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x_0 = 0 \quad , \quad x_0 \neq 0 \\[2mm] \dfrac{\cos x_0}{x_0} \leqslant 0 \, , \end{cases}$$

dunque x_0 deve verificare la condizione

$$x_0 = k\pi \; , \; \text{con } k \in \{1, 3, 5, \ldots\} \cup \{-2, -4, -6 \ldots\} .$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, e^{-t^2}\, dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{t+\pi}\, e^{-(t+\pi)^2}\, dt =$$

$$= -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{(t+\pi)\, e^{(t+\pi)^2}}\, dt \, .$$

Poiché sen t ha segno costante in $]n\pi, (n+1)\pi[$, si ottiene

$$\left| \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t)\, dt \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{(t+\pi)\, e^{(t+\pi)^2}}\, dt <$$

$$< \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t\, e^{t^2}}\, dt = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\, dt \right| .$$

Questa disuguaglianza implica

$$\int_{\pi+2n\pi}^{3\pi+2n\pi} f(t)\, dt < 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N} \; ,$$

cosicché in particolare $g(\pi + 2n\pi) < g(\pi)$ per ogni $n > 1$, e anche

$$\int_{-2n\pi}^{-2n\pi-2\pi} f(t)\,dt < 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

(da cui $g(-2n\pi) < 0$ per ogni $n > 1$).
Allora $g(x) < 0$ per $x < 0$, e per ogni $x \in \,]\pi + 2n\pi, 3\pi + 2n\pi[$ è $g(x) < g(\pi + 2n\pi) < g(\pi)$.

Il punto di massimo cercato è dunque $x_0 = \pi$, quindi

$$\max \int_a^b f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\,.$$

99. Intanto notiamo che f non è limitata su $\mathbf{R}^2$: infatti

$$\lim_{n\to+\infty} f(n, n) = \lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{e} = +\infty\,.$$

Siccome, ponendo $f(0, 0) = 0$, la funzione risulta continua e

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)\,, \tag{1}$$

il massimo e il minimo di f su D esistono e sono raggiunti sul bordo di D : infatti se (x, y) è interno a D e $f(x, y) > 0$, basta applicare (1) con $t = \dfrac{1}{|x| + |y|} > 1$ per ottenere che (x, y) non è di massimo, e analogamente per il minimo.
Osserviamo che $f(-x, -y) = f(x, y)$, per cui è sufficiente cercare il massimo e il minimo di f sui due segmenti

$$S_1 = \{x \geqslant 0\,,\;\; y \geqslant 0\,,\;\; x + y = 1\}$$

$$S_2 = \{x \leqslant 0\,,\;\; y \geqslant 0\,,\;\; y - x = 1\}$$

o, più precisamente, il massimo su S_1 (dove f è positiva), e il minimo su S_2 (dove f è negativa). Notiamo che su S_1 è

$$f(x, y) = xy\, e^{\frac{xy}{(x+y)^2 - 2xy}} = xy\, e^{\frac{xy}{1-2xy}} = g(xy)$$

con $g(t) = t e^{t/(1-2t)}$.

Inoltre, sempre su S_1, si ha

$$0 \leqslant xy = x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1 - 1/2),$$

mentre per $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}$ la funzione $g(t)$ è crescente, in quanto la sua derivata è

$$g'(t) = \left(1 + \frac{t}{(1-2t)^2}\right) e^{\frac{t}{1-2t}} > 0.$$

In conclusione,

$$\max_D f = \max_{S_1} f = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Analogamente, si trova che il punto di minimo per f su S_2 è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi

$$\min_D f = \min_{S_2} f = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

100. Distinguiamo i due casi $|x| \leqslant 1$ e $|x| > 1$. Per $|x| \leqslant 1$ si ha

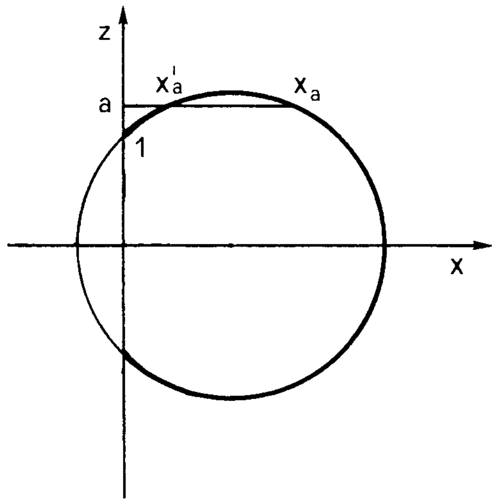
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{n^2}}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e < +\infty,$$

pertanto la serie converge totalmente su $[-1, 1]$.
Per $|x| > 1$ si ha invece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n!} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^n}{n}\right)^n = +\infty,$$

quindi la serie non può essere convergente.

101. Il cerchio assegnato ha, nel piano (x, z), centro in $(1, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$.



Per ogni $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ indichiamo con S_a l'area della regione (piana) ottenuta intersecando il solido con il piano $\{z = a\}$. Tale regione è un cerchio di raggio $x_a = 1 + \sqrt{2 - a^2}$ per $|a| \leqslant 1$, mentre per $|a| > 1$ è una corona circolare di raggi $x'_a = 1 - \sqrt{2 - a^2}$ e x_a. Pertanto si ha

$$S_a = \pi(1 + \sqrt{2 - a^2})^2 = \pi(3 - a^2 + 2\sqrt{2 - a^2}) \quad \text{se } |a| \leqslant 1$$

$$S_a = \pi[(1 + \sqrt{2 - a^2})^2 - (1 - \sqrt{2 - a^2})^2] = 4\pi\sqrt{2 - a^2}$$

$$\text{se } 1 < |a| \leqslant \sqrt{2}.$$

Il solido è simmetrico rispetto al piano $\{z = 0\}$, dunque il suo volume V è dato da

$$V = 2 \int_0^{\sqrt{2}} S_a \, da .$$

Osservando che

$$\int \sqrt{2-a^2}\,da = \operatorname{arcsen}\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a\sqrt{2-a^2}}{2},$$

si ha in conclusione

$$V = 2\pi \int_0^1 (3-a^2+2\sqrt{2-a^2})\,da + 8\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-a^2}\,da =$$

$$= 2\pi\left(\frac{11}{3}+\frac{\pi}{2}\right) + 8\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{10\pi}{2} + 3\pi^2 .$$

102. Sia $\bar{u}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(x) = f(u(x)) . \tag{1}$$

Indichiamo con $I =]\alpha, \beta[$, dove $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione u; dobbiamo provare che, nelle ipotesi fatte su f, si ha

$$\alpha = -\infty .$$

A tale scopo osserviamo che per l'equazione (1) vale il *teorema di esistenza e unicità locale,* e che la funzione identicamente nulla è una soluzione di (1). Per la crescenza di f e per l'ipotesi $f(0) = 0$ si ha poi

$$f(t) > 0 \quad \text{per } t > 0 , \quad f(t) < 0 \quad \text{per } t < 0 . \tag{2}$$

Allora necessariamente

$$\bar{u}(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in I \tag{3}$$

oppure

$$\bar{u}'(x) < 0 \qquad \forall x \in I \cdot \tag{4}$$

Nel primo caso si ha, per (2),

$$\bar{u}'(x) = f(\bar{u}(x)) \geqslant 0 ,$$

pertanto $\bar{u}$ è non decrescente, dunque per (3) esiste finito

$$u_0 = \lim_{x \to \alpha^+} \bar{u}(x) .$$

Se fosse $\alpha > -\infty$, risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(\alpha) = u_0 \end{cases}$$

potremmo prolungare $\bar{u}$ a sinistra di $x = \alpha$, contraddicendo la massimalità di I. Nel caso (4) il ragionamento è analogo, dunque necessariamente $\alpha = -\infty$.
Si osservi che relativamente ad f abbiamo usato solo la lipschitzianità e l'ipotesi (2).

103. Ricordando la disuguaglianza

$$|\operatorname{sen} \alpha| \leqslant |\alpha|$$

si ha subito che

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{|x+y|^3}{x^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|x|+|y|)^3}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(2\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2} = 8\sqrt{x^2+y^2} ,$$

per cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 .$$

Ne segue che f è continua in $(0, 0)$; siccome essa è poi ovviamente continua in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la funzione f è continua su tutto $\mathbf{R}^2$.
Osservando che

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\,[(x+y)^2 + (x-y)^2]\ ,$$

conviene porre

$$x + y = \xi \quad , \quad x - y = \eta$$

e studiare la funzione

$$g(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{in } (0,0) \\ \dfrac{2\xi \operatorname{sen} \xi^2}{\xi^2 + \eta^2} & \text{se } (\xi, \eta) \neq (0,0) \end{cases}$$

sul cerchio $C' = \{\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1\}$.
Poiché $g(-\xi, \eta) = -g(\xi, \eta)$, basterà calcolare $\max\limits_{C'} g$, in quanto $\min\limits_{C'} g = -\max\limits_{C'} g$. Inoltre su C' è $0 \leqslant \xi^2 \leqslant 1$, quindi si ha $\operatorname{sen} \xi^2 \geqslant \geqslant 0$. In conclusione

$$\max_{C'} g(\xi, \eta) = \max_{0 < \xi \leqslant 1} \frac{2\xi \operatorname{sen} \xi^2}{\xi^2}\ .$$

Ora si ha

$$\frac{d}{d\xi}\,\frac{\operatorname{sen} \xi^2}{\xi} = \frac{\cos \xi^2}{\xi^2}\,(2\xi^2 - \operatorname{tg} \xi^2) \tag{1}$$

e la funzione $2t - \operatorname{tg} t$, sull'intervallo $]0, \pi/2[$, è concava, nulla in 0 e positiva per $t = 1$ (in quanto $2 - \operatorname{tg} 1 > 2 - \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = 2 - \sqrt{3} > 0$), dunque è positiva in $]0, 1]$. Allora la derivata (1) è positiva in $]0, 1]$, e il massimo cercato è $2 \operatorname{sen} 1$, mentre il minimo è $-2 \operatorname{sen} 1$.

104. Il termine generico della serie è non negativo. Inoltre, posto

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

dalla nota disuguaglianza $\log t \leqslant t$ segue

$$\frac{|x-y|^n}{n!}\log(n+x^2+y^2)\leqslant\frac{(2r)^n}{n!}(n+r^2)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(2r)^n}{n!}(n+nr^2)=2r(1+r^2)\frac{(2r)^{n-1}}{(n-1)!}\quad .$$

La serie data converge allora in ogni punto di $\mathbf{R}^2$, anzi converge totalmente sulla palla $\{x^2+y^2\leqslant r^2\}$, e quindi su ogni sottinsieme limitato di $\mathbf{R}^2$. Si ha convergenza totale anche sulla retta $x=y$, ma non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}^2$, perché, scelto ad esempio $y=0$, per $x\to+\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!}\log(n+x^2)=+\infty\qquad\forall n\ .$$

D'altra parte vi sono altri insiemi, oltre a quelli indicati, sui quali la serie converge uniformemente: ad esempio, è facile verificare che si ha la convergenza uniforme sull'insieme

$$A=\ |x-y|\leqslant\frac{1}{1+x^2+y^2}\quad .$$

105. L'equazione ha senso per $x+y\neq 0$. Moltiplicando ambo i membri per $x+y$ si ottiene

$$yy'+xy'+y-x+2=0\ ,$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}+xy-\frac{x^2}{2}+2x\right)=0\ .$$

Si ha dunque, per le soluzioni dell'equazione, la rappresentazione implicita

$$(1) \qquad \frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^2}{2} + 2x = k\,,$$

con k costante reale.
E' facile vedere che la (1) rappresenta, al variare di k, il fascio di iperboli di centro $(1, -1)$ e di asintoti

$$y = (-1 - \sqrt{2})\,(x-1) - 1\,, \quad y = (-1 + \sqrt{2})\,(x-1) - 1\,:$$

infatti con il cambiamento di coordinate

$$x = X + 1 \quad , \qquad y = Y - 1$$

la (1) diventa

$$\frac{Y^2}{2} + XY - \frac{X^2}{2} = k - 1\,,$$

ovvero

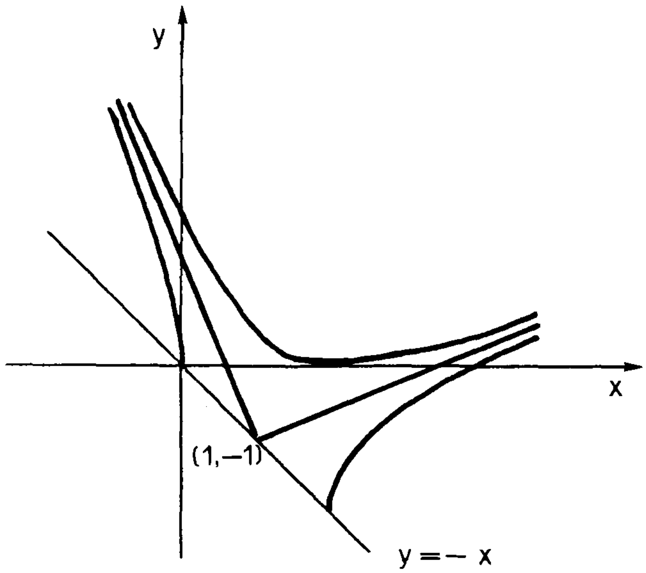
$$[Y - (-1 - \sqrt{2})X]\,[Y - (-1 + \sqrt{2})X] = 2(k-1)\,.$$

Da (1) si ricava anche la rappresentazione esplicita delle soluzioni: per $k > 1$ si hanno le soluzioni globali

$$y_1(x) = -x - \sqrt{2[(x-1)^2 + k - 1]}\,,$$

$$y_2(x) = -x + \sqrt{2[(x-1)^2 + k - 1]}\,,$$

mentre per $k \leqslant 1$ si hanno soluzioni della stessa forma, ma definite solo sulla semiretta $]-\infty\,, 1 - \sqrt{1-k}[$ oppure sulla semiretta $]1 + \sqrt{1-k}, +\infty[$. Un grafico delle soluzioni (nel solo semipiano $y > -x$) è il seguente:



106. Per definizione, f è convessa su $\mathbf{R}^2$ se e solo se per ogni (x_1, y_1), (x_2, y_2), ed ogni $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tali che $\lambda + \mu = 1$, si ha

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \leqslant \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2) .$$

Ciò equivale chiaramente a dire che tutte le restrizioni di f alle rette sono convesse come funzioni di una sola variabile, cioè che la funzione

$$\varphi : t \mapsto f(x + th, y + tk)$$

è convessa per ogni scelta di (x, y) e (h, k). La nostra ipotesi significa che sono strettamente convesse le restrizioni di f alle rette parallele agli assi cartesiani, mentre nulla si dice delle altre rette: viene naturale di pensare che f non sia, in generale, convessa. Infatti, supponendo per semplicità che f sia di classe C^2, l'ipotesi equivale a

$$(1) \qquad f_{xx} > 0 \quad , \quad f_{yy} > 0 \ ,$$

mentre la convessità di f equivale a $\varphi''(t) \geqslant 0$, cioè a

$$(2) \qquad h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} \geqslant 0 \qquad \forall (h, k).$$

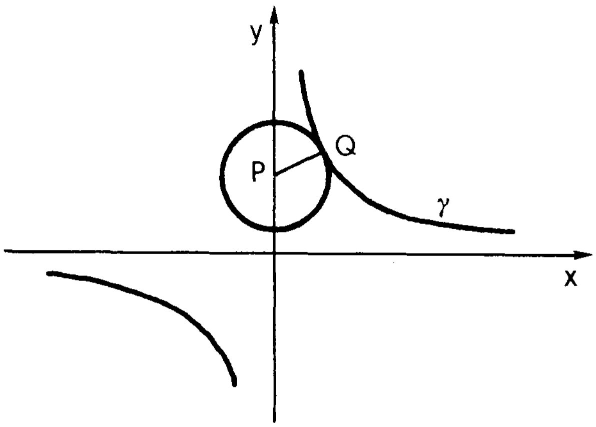
E' facile trovare esempi di funzioni che verificano (1) ma non (2): la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda xy,$$

verifica (1), ma per $\lambda < -2$ non verifica (2). Un esempio è dunque

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy.$$

107. Il problema proposto equivale a trovare il punto Q, sull'iperbole $xy = 8/9$, di minima distanza da $P = (0, 1)$.



Il punto Q si trova intanto certamente sul ramo γ dell'iperbole contenuto nel primo quadrante, in quanto ogni punto dell'altro ramo dista più di 1 da P, mentre vi sono punti su γ, come ad esempio $\left(\frac{8}{9}, 1\right)$, che distano meno di 1 da P.

Si tratta dunque di trovare

$$\min \left\{x^2 + (y-1)^2 : x > 0, y > 0, \; xy = 8/9\right\}.$$

Applicando il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y - 2 = \lambda x \\ xy = 8/9 \end{cases}.$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene $2x = \lambda(\lambda x + 2)/2$, cioé

$$(4 - \lambda^2)x = 2\lambda . \tag{1}$$

Moltiplicando questa uguaglianza per y e usando la prima e la terza equazione del sistema si ha poi

$$\frac{8}{9}(4 - \lambda^2) = (4 - \lambda^2)xy = 2\lambda y = 4x$$

cioè

$$x = \frac{2}{9}(4 - \lambda^2) . \tag{2}$$

Dovendo essere $x > 0$, si ottiene $|\lambda| < 2$, pertanto da (1) si ricava $\lambda > 0$; in conclusione deve essere

$$0 < \lambda < 2 .$$

Sostituendo (2) in (1) si ha, con facili calcoli,

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0 .$$

E' facile osservare che $\lambda = 1$ è una soluzione, ed è l'unica in $]0, 2[$; infatti la funzione $\lambda \to \lambda^4 - 8\lambda^2 - 9\lambda + 16$ è decrescente in tale intervallo dato che la sua derivata è

$$4\lambda^3 - 16\lambda - 9 = 4\lambda(\lambda^2 - 4) - 9 \leqslant -9 \qquad \forall \lambda \in]0, 2[.$$

Allora l'unico punto stazionario di $x^2 + (y - 1)^2$ su γ (e quindi necessariamente il punto di minimo) si può ricavare da (2), che dà $x = \dfrac{2}{3}$, e dall'equazione di γ, che dà $y = \dfrac{4}{3}$.

L'equazione del cerchio tangente è allora

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \cdot$$

108. Ponendo $f(x, y) = x \operatorname{sen} x - y \operatorname{sen} y$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\operatorname{sen} 1 - \cos 1 < 0 ,$$

quindi, per il *teorema del Dini,* esistono un numero positivo δ ed una funzione φ di classe C^1 tali che

$$[\,|x-1| < \delta,\ |y-1| < \delta\,,\ f(x, y) = 0\,] \iff y = \varphi(x)\,.$$

Poiché ovviamente l'uguaglianza

$$x \operatorname{sen} x - \varphi(x) \operatorname{sen} \varphi(x) = 0$$

è verificata dalla funzione $\varphi(x) = x$, e dato che $\varphi(1) = 1$, si conclude che, in un intorno di $(1, 1)$, il luogo di zeri cercato coincide con la bisettrice del primo quadrante.

109. Il secondo membro $f(x, y) = e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$ è definito e di classe C^1 sul piano privato degli assi coordinati. Siccome nel punto iniziale $(1, 2)$ è $x > 0$, $y > 0$, d'ora in poi ci restringeremo al primo quadrante. Per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* il problema proposto ha soluzione unica $y_0(x)$, definita in un intorno di $x = 1$. Poiché $f(x, y) > 0$, la soluzione $y_0(x)$ è crescente. Osserviamo che la funzione $z(x) = x$ risolve l'equazione, quindi da $y_0(1) > 1$ segue

$$y_0(x) > x \tag{1}$$

sull'intervallo di definizione di $y_0(x)$. Consideriamo la funzione (definita per $x > 0$)

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } \ y \geqslant x \\ \\ 1 & \text{se } \ y < x\,. \end{cases}$$

Essa è lipschitziana in y nel semipiano $\{x > 0\}$, e da (1) segue che $y_0(x)$ risolve anche il problema

$$(2) \qquad \begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)) \\ y(1) = 2 . \end{cases}$$

Essendo poi

$$(3) \qquad 1 < g(x, y) < e^{1/x} ,$$

per il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) la funzione $y_0(x)$, soluzione di (2), è definita su tutta la semiretta $]0, +\infty[$.
Da (1) segue subito $\lim_{x \to +\infty} y_0(x) = +\infty$, e quindi $\lim_{x \to +\infty} y_0'(x) = 1$.
Essendo però $y_0'(x) > 1$ per la (3), la funzione $y_0(x)$ si allontana dalla retta $y = x$.
Per la monotonia di y_0, esiste il limite

$$\lim_{x \to 0^+} y_0(x) = \lambda \in [0, 2[\ .$$

Se fosse $\lambda > 0$, sarebbe $y_0(x) > \lambda$ per $x > 0$, quindi

$$y_0'(x) = e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y_0(x)}} > e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{\lambda}} e^{\frac{1}{x}} > e^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{x} ,$$

da cui, integrando fra x e 1,

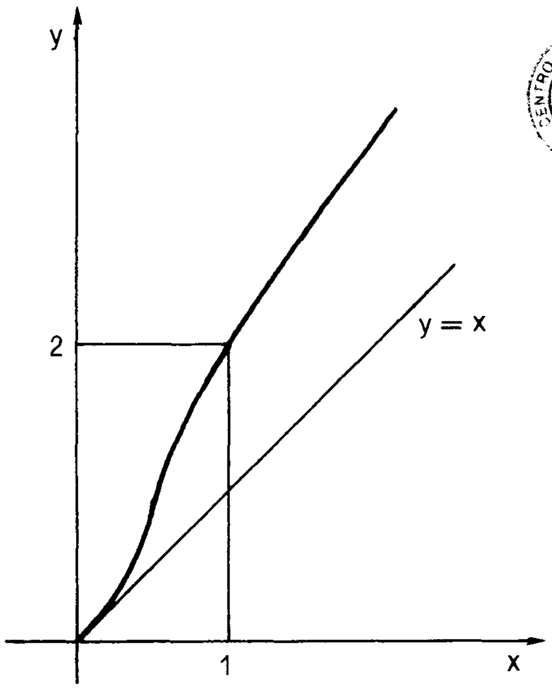
$$2 - y_0(x) > - e^{-\frac{1}{\lambda}} \log x ,$$

e infine

$$\lambda = \lim_{x \to 0^+} y_0(x) < \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{\lambda}} \log x = -\infty ,$$

che è assurdo. Allora necessariamente $\lambda = 0$.

Con qualche calcolo si può inoltre mostrare che $y_0(x)$ è convessa per x abbastanza piccolo, e che il limite di $y_0'(x)$ per $x \to 0^+$, che esiste, non può che essere 1. Un grafico approssimativo della soluzione è il seguente:



110. Per definizione di convergenza uniforme, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_n(x)| \leqslant \epsilon \qquad \forall n \geqslant \bar{n}.$$

Scegliendo ad esempio $\epsilon = 1$ si trova allora

$$(1) \qquad |P_n(x)| \leqslant 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad \forall n \geqslant \bar{n},$$

e da ciò si deduce subito che $P_{\bar{n}}$ è costante, perché se il grado di $P_{\bar{n}}$ fosse maggiore di zero si avrebbe

$$\lim_{x \to +\infty} |P_{\bar{n}}(x)| = +\infty\ ,$$

in contrasto con (1).

111. Dato che è

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

la successione (f_n) converge puntualmente a zero su tutto $\mathbf{R}$. Inoltre è $f_n(x) \geqslant 0$ per ogni x.
Riguardo alla convergenza uniforme, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

pertanto non vi può essere convergenza uniforme su $\mathbf{R}^+$ nè su alcun sottinsieme illimitato $A \subset \mathbf{R}^+$, in quanto per un tale A si ha

$$\sup f_n = +\infty \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Se invece A è limitato, cioè se esiste $a > 0$ per cui

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad \forall x \in A,$$

si ha la convergenza uniforme su A: infatti

$$f_n'(x) = e^x - n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geqslant f_n(x) \geqslant 0,$$

cosicché la funzione f_n è crescente su $\mathbf{R}^+$, e quindi

$$\sup_A f_n \leqslant f_n(a).$$

La convergenza puntuale di $f_n(x)$ in $x = a$ comporta allora la convergenza uniforme su A.

112. Posto $D_+ = D \cap \{x \geqslant 0\}$ si ha

$$\iint_D \frac{e^x}{1+y^2}\,dx\,dy \geqslant \iint_D \frac{e^x}{2}\,dx\,dy \geqslant \frac{1}{2}\iint_{D_+} e^x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^x\left(\int_0^{e^{-x}} dy\right)dx = +\infty.$$

113. Indichiamo con $f(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$ il secondo membro dell'equazione. Passando in coordinate polari si ha

$$(1) \qquad |f(x, y)| = \frac{\rho}{1 + \rho^2} \, |\cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \; .$$

Inoltre, la funzione f è di classe C^1 su tutto il piano, quindi per ogni punto (x_0, y_0) passa una ed una soluzione dell'equazione, e ogni soluzione è definita su tutto **R**.
Osserviamo che le soluzioni decrescono quando si trovano nel semipiano $\{(x, y) : y > x\}$, crescono nel semipiano $\{(x, y) : y < x\}$. Inoltre ogni soluzione taglia la retta $y = x$; infatti, scelta una soluzione $y(x)$ passante per (x_0, y_0), se è $y_0 > x_0$ da (1) segue che

$$y(x) \leqslant y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} (x - x_0) \qquad \forall x \geqslant x_0 \; ,$$

pertanto $y(x)$ attraversa la bisettrice in un punto a destra di x_0. Se è $y_0 < x_0$, invece, sempre da (1) si ottiene

$$y(x) \geqslant y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} (x - x_0) \qquad \forall x \leqslant x_0 \; ,$$

e $y(x)$ attraversa la bisettrice a sinistra di x_0. Per il *teorema di monotonia* (v. appendice), allora, ogni soluzione $y(x)$ attraversa la bisettrice in un punto $\bar{x}$, è decrescente per $x < \bar{x}$ e crescente per $x > \bar{x}$. Studiamo il comportamento all'infinito delle soluzioni: poiché $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 + y^2(x)) = +\infty$, si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} |y'(x)| \leqslant \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2(x)}}{1 + x^2 + y^2(x)} = 0 \; .$$

Inoltre, per la monotonia di $y(x)$ sulle due semirette $]-\infty, x[$ e $]x, +\infty[$, esistono, finiti o infiniti, i limiti

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \ell' , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \ell'' .$$

Proviamo che entrambi questi limiti valgono $+\infty$: se fosse $\ell'' < < +\infty$, sarebbe

$$(2) \qquad y(x) \leqslant \ell'' \quad \forall x \geqslant \bar{x},$$

e quindi

$$y'(x) \geqslant \frac{x - \ell''}{1 + x^2 + y^2(x)} \qquad \forall x \geqslant \bar{x}.$$

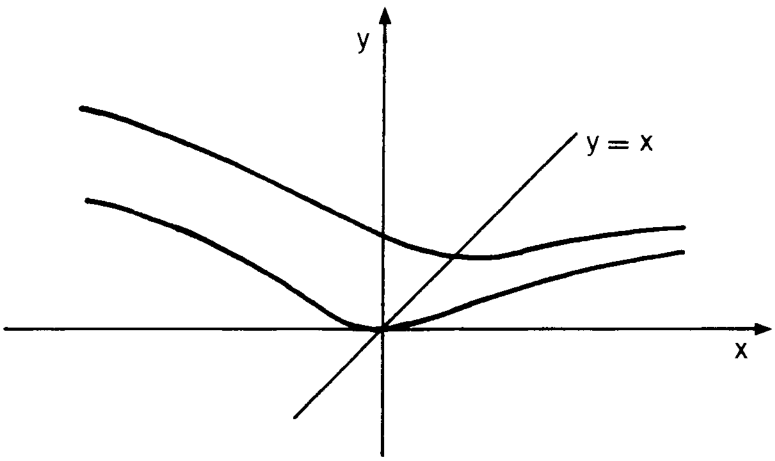
Per $x \geqslant |\bar{x}| + 1 + 2\,|\ell''|$ si ha $x - \ell'' \geqslant \frac{x}{2}$ e $1 + x^2 + y^2(x) \leqslant$ $\leqslant 3x^2$, dunque per tali valori di x si ha anche

$$y'(x) \geqslant \frac{x/2}{3x^2} = \frac{1}{6x},$$

da cui

$$y(x) \geqslant c + \frac{1}{6} \log x,$$

in contraddizione con (2). Per $x \to -\infty$ il ragionamento è analogo.
Un grafico approssimativo delle soluzioni è il seguente:



114. Osserviamo anzitutto che, se $y(x) \equiv c$ è una soluzione costante dell'equazione, necessariamente è $c = 0$.
Sia ora y una soluzione non costante dell'equazione: esisterà qualche punto x_0 nel quale è $y'(x_0) \neq 0$.
Poiché la funzione

$$\tilde{y}(x) = y(-x)$$

è un'altra soluzione dell'equazione, e $\tilde{y}'(-x_0) = -y'(x_0)$, possiamo supporre (rimpiazzando eventualmente y con $\tilde{y}$) che sia

$$y'(x_0) > 0 .$$

Proveremo che in tal caso y non può essere definita su tutta la semiretta $[x_0, +\infty[$. Infatti, se così non fosse, posto

$$z(x) = y'(x) ,$$

dall'equazione differenziale data si ricaverebbe

$$z'(x) \geqslant z^2(x) , \tag{1}$$

e quindi in particolare $z'(x) \geqslant 0$, da cui anche

$$z(x) \geqslant z(x_0) > 0 \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Possiamo allora dividere per z^2 nella (1), ottenendo

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{z(x)}\right) \geqslant 1 \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

e quindi

$$\frac{1}{z(x_0)} - \frac{1}{z(x)} \geqslant x - x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Ma da questa disuguaglianza segue

$$x \leqslant \frac{1}{z(x_0)} + x_0 - \frac{1}{z(x)} \leqslant \frac{1}{z(x_0)} + x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

che è assurdo.

115. Per $x = y = z = 0$ la condizione è soddisfatta indipendentemente da α. Posto

$$f_\alpha(x, y, z) = x^3 + \alpha y^3 + z^3$$

si ha, per ogni $(x, y, z) \in C \setminus \{(0, 0, 0)\}$,

$$(1) \qquad f_\alpha(x, y, z) = z^3 f_\alpha\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) \; ;$$

il punto $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ appartiene alla "base superiore" del cono: essendo $0 < z \leqslant 1$, la (1) permette di limitarci a verificare le disuguaglianze solo su $C \cap \{z = 1\}$, cioè di trovare per quali α si ha

$$(2) \qquad -1 \leqslant x^3 + \alpha y^3 \leqslant 1 \qquad \text{per } x^2 + y^2 \leqslant 1 \; .$$

Passando in coordinate polari, la (2) diventa

$$\rho^3 \, |\cos^3\theta + \alpha \operatorname{sen}^3\theta| \leqslant 1 \qquad \forall \rho \in [0, 1] \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[$$

e quindi è sufficiente studiare la disuguaglianza

$$(3) \qquad |\cos^3\theta + \alpha \operatorname{sen}^3\theta| \leqslant 1 \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi[\; .$$

Una condizione necessaria per (3) è $|\alpha| \leqslant 1$, altrimenti la disuguaglianza è violata per $\theta = \frac{\pi}{2}$. D'altra parte, tale condizione è anche sufficiente perché, se $|\alpha| \leqslant 1$, si ha

$$|\cos^3\theta + \alpha \operatorname{sen}^3\theta| \leqslant |\cos\theta|^3 + |\alpha|\,|\operatorname{sen}\theta|^3 \leqslant$$

$$\leqslant |\cos\theta|^3 + |\operatorname{sen}\theta|^3 \leqslant \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \; .$$

La condizione cercata è dunque $|\alpha| \leqslant 1$.

116. Per $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $t \in [0, x]$ si ha $0 \leqslant x^n t \leqslant 1$, e quindi

$$0 \leqslant \operatorname{sen}(x^n t) \leqslant x^n t .$$

Pertanto, essendo

$$\int_0^x \frac{x^n t}{t} \, dt = x^{n+1} \quad ,$$

si ottiene la disuguaglianza

$$(1) \qquad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant n^2 x^{n+1} \qquad \forall x \in [0, 1] .$$

Da ciò segue immediatamente che

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per } 0 \leqslant x < 1 .$$

Per $x = 1$, si ha invece

$$f_n(1) = n^2 \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt ,$$

che diverge per $n \to \infty$. Allora la successione converge puntualmente su $[0, 1[$.
Vediamo per quali $A \subseteq [0, 1[$ si ha convergenza uniforme. Ogni f_n è continua su $[0, 1]$, dunque, se $f_n \to 0$ uniformemente in A, deve essere $f_n \to 0$ in $\bar{A}$ e quindi $\bar{A}$ $[0, 1[$, cioè

$$(2) \qquad A \subseteq [0, 1 - \delta] \qquad \text{per qualche } \delta \in]0, 1[.$$

Viceversa, se A verifica questa condizione, da (1) si ricava che

$$\sup_A f_n \leqslant n^2 (1 - \delta)^{n+1} ,$$

e il termine destro è infinitesimo per $n \to \infty$.
In conclusione gli insiemi A su cui vi è convergenza uniforme sono quelli del tipo (2).

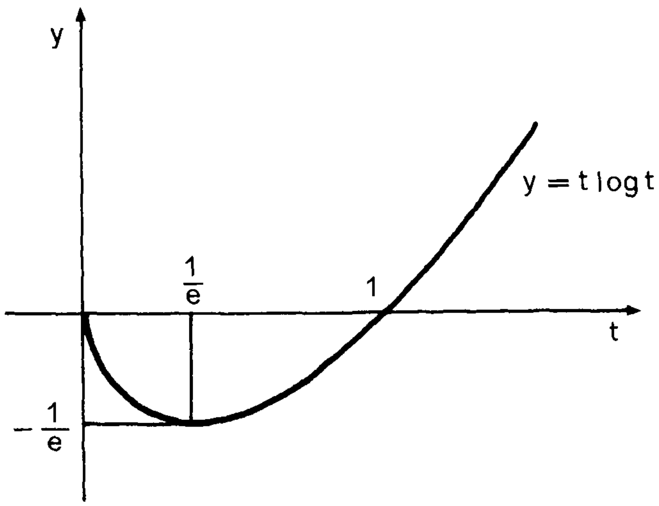
117. Studiamo intanto il luogo di zeri della funzione $f(x, y) = \dfrac{\log y}{x} - \dfrac{\log x}{y}$. Posto

$$T = \{(x, y) : x > 0, y > 0 , x \log x = y \log y\} ,$$

l'insieme T è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante, quindi possiamo limitarci a individuare

$$T_+ = \{(x, y) : y \geqslant x > 0 , x \log x = y \log y\} .$$

Notiamo subito che la semiretta $y = x$ è tutta contenuta in T_+. La funzione $\varphi(t) = t \log t$ ha un grafico del tipo seguente.

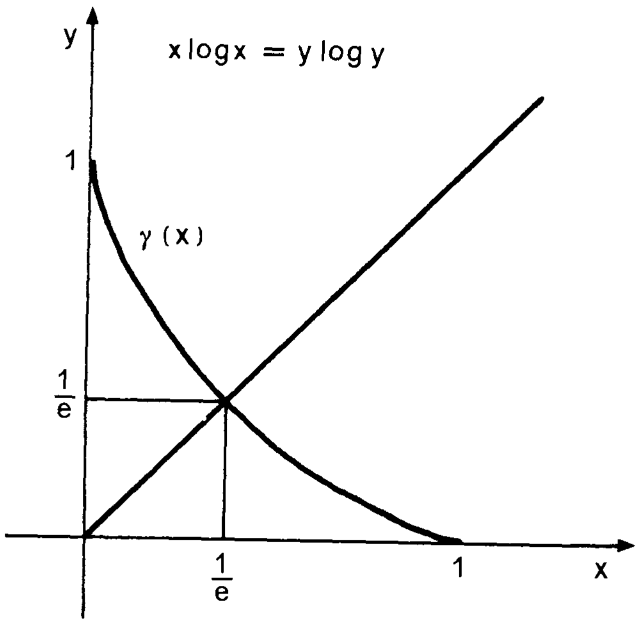


Per $x \geqslant \frac{1}{e}$, esiste un unico punto $y \geqslant x$ tale che $\varphi(y) = \varphi(x)$, e questo punto è proprio $y = x$. Per $0 < x < \frac{1}{e}$, invece, oltre alla soluzione $y = x$ l'equazione $\varphi(y) = \varphi(x)$ ha anche un'altra soluzione, $y = \gamma(x)$, con queste proprietà:

$$\frac{1}{e} < \gamma(x) < 1 , \quad \lim_{x \to 0^+} \gamma(x) = 1 , \quad \lim_{x \to (\frac{1}{e})^-} \gamma(x) = \frac{1}{e} ,$$

$$\gamma(x) \text{ è decrescente} .$$

Inoltre $\varphi'(t) = 1 + \log t$ è diversa da zero per $t \neq \frac{1}{e}$, quindi, per il *teorema del Dini,* la curva $\gamma(x)$ è di classe C^1 ; l'insieme T è allora del tipo seguente.



Passiamo ora al problema di Cauchy, il cui punto iniziale $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ è proprio il punto singolare di T. Poiché $f(x, y)$ è di classe C^1 sul primo quadrante, il problema ammette una ed una sola soluzione $y(x)$, definita in un intorno di $x = \frac{1}{e}$. Dobbiamo studiare questa soluzione nella striscia

$$S = \left\{(x, y) : 0 < x < \frac{1}{e}\ ,\ y > 0\right\}.$$

Osserviamo che si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\log y}{x^2} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^2 y}\,(-y \log y - x) = \frac{1}{x^2 y}\,(-\varphi(y) - x)$$

Poiché $\varphi(t) \geqslant -\dfrac{1}{e}$, si ha allora, in S,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \leqslant \frac{1}{x^2 y}\left(\frac{1}{e} - x\right) < 0 \, .$$

Per il *teorema di monotonia* (v. appendice), la soluzione $y(x)$ è allora decrescente per $x < \dfrac{1}{e}$, e rimane al di sotto della curva $y = \gamma(x)$. Osservando che $\dfrac{1}{e} \leqslant y(x) \leqslant 1$ per $x \leqslant \dfrac{1}{e}$, si ha poi

$$|f(x, y(x))| \leqslant \frac{|\log y|}{x} + \frac{|\log x|}{y} \leqslant \frac{1}{x} + e \; |\log x| \, ,$$

quindi il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) assicura che $y(x)$ è definita su tutto $]\,0, \dfrac{1}{e}\,]$.

Posto

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lambda \in \left]\frac{1}{e}, 1\right] ,$$

proviamo che è $\lambda = 1$: se così non fosse, scrivendo per brevità $-\log \lambda = \epsilon > 0$, si avrebbe infatti

$$\frac{1}{e} \leqslant y(x) \leqslant \lambda \, , \qquad -1 \leqslant \log y(x) \leqslant -\epsilon \qquad \forall x \leqslant \frac{1}{e}$$

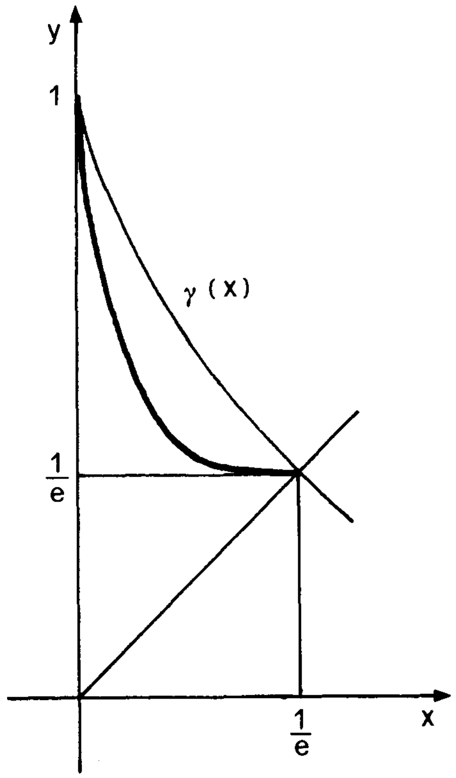
e quindi

$$y'(x) \leqslant -\frac{\epsilon}{x} - e \log x \qquad \forall x < \frac{1}{e} \quad .$$

Integrando questa disuguaglianza su $]\,x, \dfrac{1}{e}\,[$ si ricava

$$\frac{1}{e} - y(x) \leqslant \epsilon \log x + e\,(x \log x - x) + \epsilon + 2 \, ,$$

da cui $\lambda = +\infty$, che è una contraddizione. Da $\lambda = 1$ segue subito $\lim_{x \to 0^+} y'(x) = -\infty$ e il grafico di $y(x)$ è il seguente.



118. Posto

$$Y(x) = \int_0^x y(t)\,dt\,,$$

l'ipotesi nell'implicazione (*) diventa

$$(1) \qquad Y(0) = 0\,, \quad Y'(x) \leqslant a(x) + b(x)\,Y(x) \qquad \forall x \geqslant 0\,,$$

e la tesi diventa

$$(2) \qquad Y'(x) \leqslant a(x) \exp\left(\int_0^x b(t)\,dt\right) \qquad \forall x \geqslant 0\,.$$

(i) Se $a(x)$ e $b(x)$ sono costanti, la (1) implica

$$\frac{d}{dx}[Y(x)\,e^{-bx}] = [Y'(x) - b\,Y(x)]\,e^{-bx} \leqslant a e^{-bx} \quad ,$$

da cui, integrando su $[0, x]$, si ricava

$$Y(x)\,e^{-bx} \leqslant -\frac{a}{b}\,(e^{-bx} - 1)$$

e quindi

$$Y(x) \leqslant \frac{a}{b}\,(e^{bx} - 1) \ .$$

Sostituendo nella (1) si ottiene allora la (2).
(ii) Se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue e positive, ponendo

$$B(x) = \int_0^x b(t)\,dt$$

si ottiene

$$\frac{d}{dx}[Y(x)e^{-B(x)}] = [Y'(x) - b(x)\,Y(x)]\,e^{-B(x)} \leqslant a(x)\,e^{-B(x)}$$

e quindi, integrando ,

(3) $$Y(x)\,e^{-B(x)} \leqslant \int_0^x a(t)\,e^{-B(t)}\,dt \,.$$

Ora, se $a(x)/b(x)$ è una funzione non decrescente, si ha

$$a(t) = \frac{a(t)}{b(t)}\,b(t) \leqslant \frac{a(x)}{b(x)}\,b(t) \qquad \forall\, t \in [0, x]$$

e quindi, ricordando che $B(0) = 0$, da (3) segue

$$Y(x)\, e^{-B(x)} \leqslant \frac{a(x)}{b(x)} \int_0^x b(t)\, e^{-B(t)}\, dt = \frac{a(x)}{b(x)}\, [1 - e^{-B(x)}]\,,$$

cioè

$$Y(x) \leqslant \frac{a(x)}{b(x)}\, [e^{B(x)} - 1]$$

Sostituendo nella (1) si ottiene ancora (2).
(iii) Nel caso generale, l'implicazione (1) ⇒ (2) è falsa: ad esempio, se si sceglie

$$b(x) \equiv 1\,, \qquad a(x) = e^{-x}$$

la relazione (1) è verificata da $Y(x) = \operatorname{sen h} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, in quanto

$$Y'(x) = \cosh x = e^{-x} + \operatorname{senh} x = a(x) + b(x)\, y(x)\,;$$

ora

$$a(x) \exp\left(\int_0^x b(t)\, dt\right) = 1\,,$$

mentre $Y'(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

119. Posto

$$f_n(x) = 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n}$$

si ha

$$|f_n(x)| \leqslant 2^n \frac{|x|}{3^n} = |x| \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

quindi la serie data converge in ogni punto di **R**, anzi converge totalmente su ogni sottoinsieme limitato A di **R**.
Sui sottoinsiemi non limitati di **R**, invece, la convergenza non può essere uniforme: infatti, per

$$3^n \frac{\pi}{4} \leqslant \bar{x} \leqslant 3^{n+1} \frac{\pi}{4}$$

si ha

$$f_n(\bar{x}) \geqslant 2^n \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

ed essendo

$$0 < \frac{\bar{x}}{3^k} < \frac{\pi}{4} \qquad \forall k > n$$

si ha anche

$$f_k(\bar{x}) > 0 \qquad \forall k > n ,$$

di modo che

$$(1) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} f_k(\bar{x}) \geqslant 2^n \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Poniamo allora

$$I_n = \left[3^n \frac{\pi}{4} , 3^{n+1} \frac{\pi}{4} \right] .$$

Se A non è limitato superiormente (il che non è restrittivo perché ogni f_n è una funzione dispari), si ha

$$A \cap I_n \neq \phi \qquad \text{per infiniti } n ,$$

in quanto l'unione degli I_n è la semiretta $\left[\frac{\pi}{4} , +\infty \right[$. Per ogni

$\bar{n} \in \mathbf{N}$ sia $n \geqslant \bar{n}$ tale che $A \cap I_n \neq \phi$, e sia

$$\bar{x} \in A \cap I_n \ .$$

Allora per (1) si ha

$$\sup_{x \in A} \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} f_k(\bar{x}) \geqslant 2^n \frac{\sqrt{2}}{2}$$

il che implica che la serie non converge uniformemente su A. Passiamo ora al limite proposto. Essendo

$$S(0) = 0 \ ,$$

e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{S(x) - S(0)}{x} \ ,$$

basta dimostrare che S è derivabile, e calcolare $S'(0)$. Ora si ha

$$|f_n'(x)| = \frac{2^n}{3^n} \left| \cos \frac{x}{3^n} \right| \leqslant \left(\frac{2}{3} \right)^n \ ,$$

cioè la serie delle derivate di f_n converge totalmente su **R**. E' noto allora che $S(x)$ è derivabile e che

$$S'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 3 \ .$$

Il limite cercato è allora uguale a 3.

120. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \operatorname{sen} x \cos x \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} y + y \cos y \ .$$

L'equazione tg $y = -y$ possiede, nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la sola soluzione $y = 0$ (infatti la funzione tg $y + y$ è positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$), quindi nel rettangolo $\{|x| \leqslant \pi,\ |y| \leqslant \pi/2\}$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 & \text{per } x = 0,\ x = \pm\dfrac{\pi}{2},\ x = \pm\pi \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & \text{per } x = 0\,. \end{cases}$$

Nei tre punti $(0, 0)$ e $(\pm\,\pi, 0)$ la f non vale 1, mentre $f\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$, così l'insieme in esame, che chiameremo Γ, ha come punti singolari solo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

D'altra parte, osservando che

$$f(x, y) = f(x, -y) = f(-x, y)$$

e che

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x, y\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x, y\right) \qquad \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,$$

si vede che Γ è simmetrico rispetto agli assi cartesiani e alle rette $x = \pm\,\frac{\pi}{2}$, cosicché possiamo limitarci a studiare Γ sul quadrato

$$Q = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ .$$

Notiamo che la funzione $\psi(y) = y$ sen y è strettamente crescente sull'intervallo $[0, \pi/2]$, in quanto prodotto di due funzioni positive strettamente crescenti; allora, detta $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inversa di ψ, si ha su Q

$$\operatorname{sen}^2 x + y \operatorname{sen} y = 1 \Longleftrightarrow y = \varphi(\cos^2 x) .$$

Dunque $\Gamma \cap Q$ è il grafico della funzione $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ definita da

$$g(x) = \varphi(\cos^2 x) .$$

La funzione g è decrescente, in quanto φ è crescente mentre $\cos^2 x$ è decrescente; inoltre

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi(0) = 0 ,$$

perché $y \operatorname{sen} y = 0$ per $y = 0$, mentre

$$g(0) = \varphi(1) = y^* ,$$

dove y^* è tale che

$$0 \leqslant y^* \leqslant \frac{\pi}{2} , \quad y^* \operatorname{sen} y^* = 1 .$$

Si ha anche

$$g'(0) = [\varphi'(\cos^2 x) \cdot 2 \cos x \operatorname{sen} x]_{x=0} = 0 .$$

Calcoliamo infine $g'(\pi/2)$. A questo scopo osserviamo che

$$\lim_{y \to 0} \frac{\psi(y)}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y \operatorname{sen} y}{y^2} = 1$$

e quindi

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{[\varphi(t)]^2} = 1 ,$$

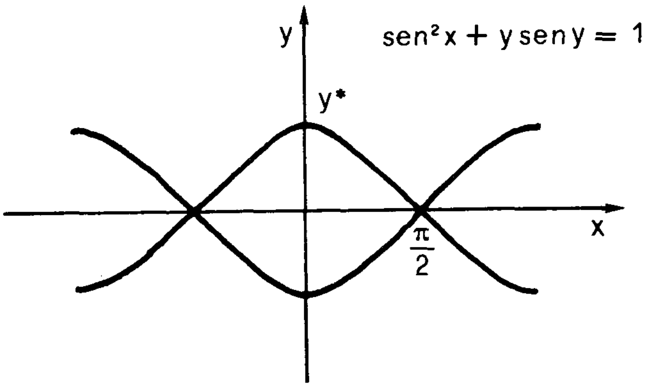
ovvero

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t)/\sqrt{t} = 1 .$$

Ma allora si ha

$$g'(\pi/2) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\varphi(\cos^2 x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\varphi(\cos^2 x)}{\cos x} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1 .$$

A questo punto si può tracciare un grafico approssimativo dell'insieme Γ .



121. (a) Non si può applicare direttamente a (*) il teorema di esistenza globale, perché si tratta di un'equazione del secondo ordine. Anziché passare ad un sistema del primo ordine, risolveremo direttamente la questione proposta. Sia $y_0(x)$ una soluzione di (*), e sia $]a, b[$ il suo intervallo massimale di definizione. Supponiamo che sia $b < +\infty$; scelto $x_0 \in]a, b[$, si ha allora

$$|y_0''(x)| \leqslant 1 + |\log x| \leqslant c \qquad \forall x \in [x_0, b[,$$

quindi la funzione $y_0'(x)$, che è continua in $[x_0, b[$ ed ha derivata limitata, è uniformemente continua su $[x_0, b[$. In particolare, $y_0'(x)$ è limitata in $[x_0, b[$, ed esiste finito

$$\lim_{x \to b^-} y_0'(x) = \beta .$$

Dalla limitatezza di y_0' segue che $y_0(x)$ è uniformemente continua in $[x_0, b[$, quindi esiste finito anche

$$\lim_{x \to b^-} y_0(x) = \alpha .$$

Risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^{-y^2} - \log x \\ y(b) = \alpha \\ y'(b) = \beta \end{cases}$$

si può allora prolungare $y_0(x)$ a destra di $x = b$, contro la massimalità di $]a, b[$, pertanto $b = +\infty$. Per provare che $a = 0$ si procede in modo analogo.

(b) Si vede subito che $\lim_{x \to +\infty} y''(x) = -\infty$. Più precisamente, per $x \geqslant e^2$ si ha

$$y''(x) \leqslant 1 - 2 = -1 ,$$

e quindi, integrando su $[e^2, x]$,

$$y'(x) \leqslant y'(e^2) - (x - e^2) \quad \forall x \geqslant e^2 .$$

Integrando di nuovo si ottiene

$$y(x) \leqslant -\frac{x^2}{2} + [e^2 + y'(e^2)]\, x + y(e^2) - \frac{e^4}{2} - e^2 y'(e^2) \quad \forall x \geqslant e^2 ,$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty .$$

122. Se è $f(x, y) = \varphi(xy)$, si ha immediatamente

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x\, y\, \varphi'(x\, y)$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y\, x\, \varphi'(x\, y) \ ,$$

e quindi $x f_x = y f_y$.

Osserviamo pure che se $f(x, y) = \varphi(xy)$ allora f è costante su ogni ramo di iperbole $\{xy = k,\ x > 0\}$.

Supponiamo ora che sia $x f_x = y f_y$, e proviamo che f è costante sulle iperboli: infatti

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x, \frac{k}{x}\right)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, \frac{k}{x}\right) - \frac{k}{x^2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \frac{k}{x}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, \frac{k}{x}\right) - \frac{1}{x}\frac{k}{x}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \frac{k}{x}\right).$$

D'altra parte per ipotesi

$$\frac{k}{x}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \frac{k}{x}\right) = x \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(x, \frac{k}{x}\right),$$

quindi

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left[f\left(x, \frac{k}{x}\right)\right] = 0 \qquad \forall x > 0 \qquad \forall k \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè f è costante sul ramo di iperbole

$$\{xy = k,\ x > 0\}\ .$$

In particolare, da (1) con $k = xy$ si deduce

$$f(x, y) = f\left(x, \frac{xy}{x}\right) = f\left(1, \frac{xy}{1}\right) = f(1, xy)\ ,$$

cioè, posto

$$\varphi(t) = f(1, t) ,$$

si ha che φ è di classe C^1, perché lo è f, e inoltre

$$f(x, y) = \varphi(xy) .$$

123. Siccome $y \geqslant x$ ed $e^{-t^2} \geqslant 0$, si ha $f(x, y) \geqslant 0$ su K. D'altra parte $f(x, y) = 0$ quando $y = x$, dunque il minimo di f su K è zero e viene assunto sulla semiretta $\{x = y, x \geqslant 0\}$.
Per quanto riguarda il massimo, osserviamo che per ogni $(x, y) \in K$ si ha $f(x, y) \leqslant f(x, 2x)$, dunque l'estremo superiore di K coincide con l'estremo superiore di f sulla semiretta $\{y = 2x, x \geqslant 0\}$.
Posto, per ogni $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt ,$$

la derivata prima di φ è la funzione

$$\varphi'(x) = 2 e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-4x^2} (2 - e^{3x^2}) ,$$

che si annulla solo per

$$x = \sqrt{\frac{\log 2}{3}} .$$

Ne segue che il punto di massimo di f è

$$\left(\sqrt{\frac{\log 2}{3}} , 2 \sqrt{\frac{\log 2}{3}}\right) .$$

124. (a) Ciascuna delle funzioni

$$f_n(x) = x^2 \sqrt{n + x^2} \; e^{-n|x|}$$

è continua, pari e non negativa, dunque basterà provare che

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < +\infty \qquad \forall x \geqslant 0 .$$

Usando la disuguaglianza

$$\sqrt{n+x^2} \leqslant \sqrt{n} + |x| ,$$

si ha

$$(2) \qquad f_n(x) \leqslant \sqrt{n}\, x^2 e^{-nx} + x^3 e^{-nx} \qquad \forall x \geqslant 0 .$$

Consideriamo i due addendi al secondo membro: entrambi sono nulli per $x = 0$ e infinitesimi per $x \to +\infty$; inoltre sono non negativi. Si ha poi

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^{-nx}) = (2x - nx^2)\, e^{-nx} ,$$

quindi $x = \dfrac{2}{n}$ è il punto di massimo assoluto per $x^2 e^{-nx}$ su $\mathbf{R}^+$. Analogamente

$$\frac{d}{dx}(x^3 e^{-nx}) = (3x^2 - nx^3)\, e^{-nx}$$

e il punto di massimo per $x^3 e^{-nx}$ è $x = \dfrac{3}{n}$. In conclusione

$$\sqrt{n}\, x^2 e^{-nx} \leqslant \frac{4e^{-2}}{n\sqrt{n}} \qquad \forall x \geqslant 0$$

$$x^3 e^{-nx} \leqslant \frac{27\, e^{-3}}{n^3} \leqslant \frac{27\, e^{-2}}{n\sqrt{n}} \qquad \forall x \geqslant 0 ,$$

e da (2) si ottiene allora

$$f_n(x) \leqslant \frac{31\, e^{-2}}{n\sqrt{n}} \qquad \forall x \geqslant 0\,,$$

che dimostra (1).

(b) La funzione f è pari, e $f(0) = 0$ (in quanto $f_n(0) = 0$ per ogni n). Allora se f è derivabile nell'origine deve essere

$$(3) \qquad f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

Ora si ha, per ogni $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = x \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n + x^2}\; e^{-nx} \geqslant x \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} =$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{x}{e^x - 1}$$

e quindi

$$\liminf_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \geqslant \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1\,,$$

in contrasto con (3).

125. Il secondo membro $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{x + y}$ dell'equazione non è definito sulla retta $y = -x$, quindi possiamo limitarci a studiare il problema nel semipiano $\{(x, y) : x + y > 0\}$ al quale appartiene il punto iniziale $(0, 1)$.

In tale semipiano la funzione f è di classe C^1, pertanto per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* esiste ed è unica la soluzione $y(x)$ del problema. Notiamo che l'equazione ha le due soluzioni costanti $y = 0$ e $y = \pi$; ne segue, per l'unicità, che si ha

$$(1) \qquad 0 < y(x) < \pi\,.$$

In particolare sen $y(x) > 0$, e quindi $y'(x) > 0$, cioè la soluzione $y(x)$ è crescente.
Esaminiamo il comportamento a destra di $x = 0$: è $y(x) \geqslant 1$, quindi

$$|f(x, y(x))| \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$$

per $x \geqslant 0$, ed il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) assicura che $y(x)$ è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$. Posto

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \ell \in]1, \pi] \ ,$$

proviamo che è $\ell = \pi$: se così non fosse, da

$$1 \leqslant y(x) \leqslant \ell \qquad \forall x \geqslant 0$$

seguirebbe

$$\text{sen}\, y(x) \geqslant \alpha > 0 \qquad \forall x \geqslant 0 \ , \tag{2}$$

dove $\alpha = \min\{\text{sen}\, 1, \text{sen}\, \ell\}$. Da (1) e (2) segue poi

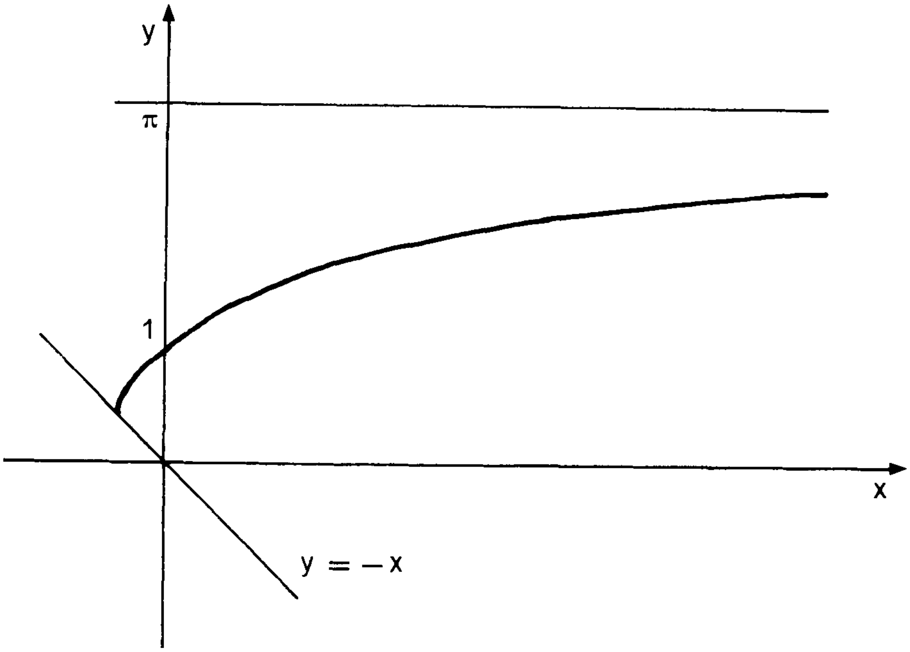
$$y'(x) \geqslant \frac{\alpha}{x+\pi} \qquad .\forall x \geqslant 0 \ ,$$

e integrando questa disuguaglianza su $[0, x]$ si giunge a

$$y(x) \geqslant 1 + \alpha \log\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \qquad \forall x \geqslant 0 \ ,$$

che è una contraddizione perché comporta che $\ell = +\infty$.

Per $x < 0$, invece, la soluzione deve stare sopra la retta $y = -x$ e sotto la $y = \pi$, quindi non può essere definita su tutto $\mathbf{R}^-$. Dovendo essere crescente, $y(x)$ incontra necessariamente la retta $y = -x$ in un punto di ascissa $k < 0$, e chiaramente si ha $\lim_{x \to k^+} y'(x) = +\infty$.
Per stimare k, osserviamo che



$$y''(x) = \frac{(\operatorname{sen} y)\left(\cos y - 1 - \dfrac{\operatorname{sen} y}{x+y}\right)}{(x+y)^2} < 0\,,$$

cioè $y(x)$ è concava: in particolare, sta al di sotto della retta $y = 1 + x \operatorname{sen} 1$, che è tangente ad $y(x)$ in $x = 0$. Poiché questa retta incontra la $y = -x$ in $x = -1/(1 + \operatorname{sen} 1)$, si ha

$$k > -1/(1 + \operatorname{sen} 1)\,.$$

Se poi nell'equazione originaria si pone $x + y = s$, si ottiene

$$s'(x) = 1 + y'(x) = 1 + \frac{\operatorname{sen} y(x)}{x + y(x)} < 1 + \frac{1}{s(x)}\,,$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\,[s(x) - \log(1 + s(x))] < 1\,.$$

Integrando questa disuguaglianza su $]k, 0[$ e ricordando che $s(0) = 1$, $s(k) = 0$, si ottiene l'altra stima

$$k < \log 2 - 1 .$$

126. Ponendo

$$z_n(x) = y_n(x)\, e^{-nx} ,$$

il problema diventa

$$\begin{cases} z_n'(x) = e^{-n^2 - nx} f(x) \\ z_n(0) = 0 , \end{cases}$$

da cui si ricava

$$z_n(x) = e^{-n^{\infty}} \int_0^x e^{-nt} f(t)\, dt .$$

Si ha dunque

$$y_n(x) = e^{-n^2 + nx} \int_0^x e^{-nt} f(t)\, dt ,$$

pertanto

$$\sup_{[0,1]} |y_n| \leqslant e^{-n^2 + n} \int_0^1 |f(t)|\, dt .$$

Si conclude allora che $y_n \to 0$ uniformemente su $[0, 1]$.

127. Il problema consiste nello stabilire se f ammetta limite finito per $(x, y) \to (0, 0)$ oppure no.
La risposta è negativa: infatti, fissato $y = 0$, si ha

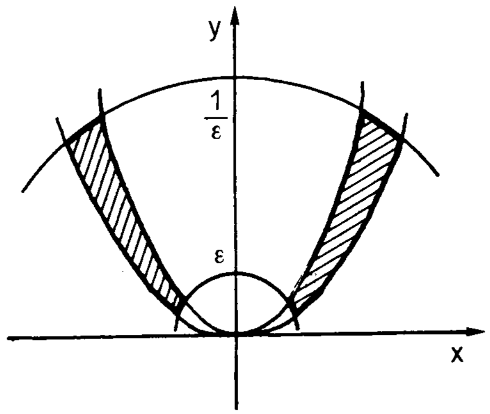
$$\lim_{x \to 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^2 \log (x-1)^2}{|x|} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \log (1-x)}{x} = -2 ,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x, 0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 \log (1-x)}{-x} = 2 .$$

128. Siccome l'integrando è non negativo e i domini D_ϵ (schematizzati in figura) crescono, al tendere di ϵ a zero, verso il dominio



$$D_0 = \left\{ \frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2x^2 \ , \ (x, y) \neq (0, 0) \right\} ,$$

il limite cercato esiste e coincide con l'integrale improprio

$$\iint_{D_0} \frac{|x|}{y(1+y^2)} \, dx \, dy .$$

Applicando il *teorema di Fubini-Tonelli* si ottiene, tenendo presente che l'integrando è pari in x,

$$\iint_{D_0} \frac{|x|}{y(1+y^2)}\,dx\,dy = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{y(1+y^2)}\left(\int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{2y}} x\,dx\right)dy =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{y(1+y^2)}\,\frac{3y}{4}\,dy = \frac{3}{4}\pi \quad .$$

129. Osserviamo subito che

$$y'' = yy' + x = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

quindi l'equazione differenziale data si può integrare membro a membro; ricordando le condizioni iniziali, il problema proposto equivale a

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y^2}{2} + C \\[2ex] y(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

Poiché il secondo membro $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + C$ è di classe C^1, per il *teorema di Cauchy-Lipschitz* il problema (1) ammette una soluzione unica $y(x)$, definita in un intorno di $x = 0$.
Mostriamo che $y(x)$ è dispari: posto $z(x) = -y(-x)$ si vede che

$$z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, -y(-x)) = f(x, z(x)) \,,$$

e inoltre $z(0) = 0$: allora $z(x)$ risolve (1) e, per l'unicità, $z(x) = y(x)$, cioè y è dispari. Ci limiteremo a studiare $y(x)$ per $x \geqslant 0$.
Cominciamo con il caso $C \geqslant 0$: si ha allora

$$y'(x) \geqslant \frac{x^2}{2} \quad ,$$

quindi $y(x) > 0$ per $x > 0$ e $y(x)$ non è limitata superiormente, Fissato $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) \geqslant 1$, dall'equazione si ha poi

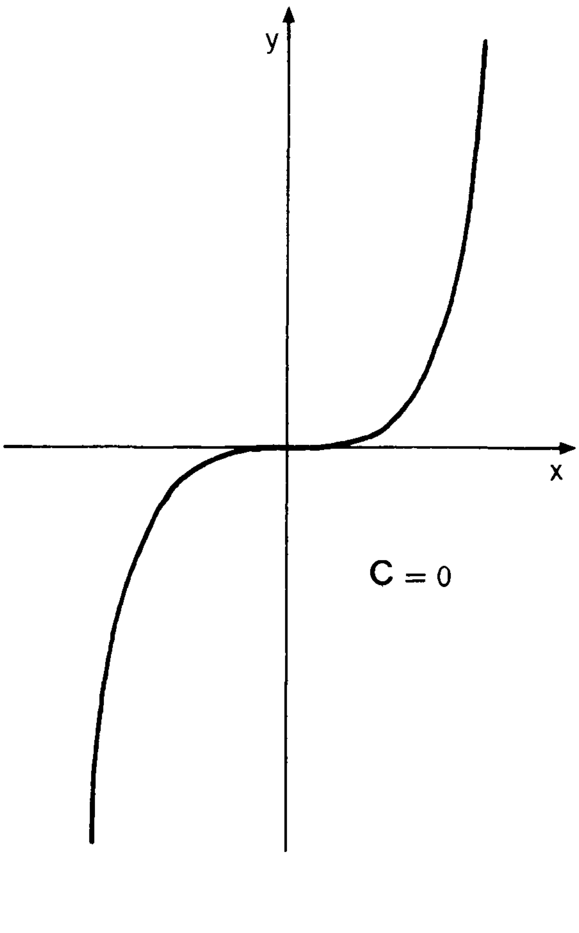
$$y'(x) \geqslant \frac{y^2(x)}{2} \qquad \forall x\,,$$

ovvero

$$\left(-\frac{1}{y(x)}\right) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall x\,.$$

Integrando questa disuguaglianza fra x_0 ed x si ha

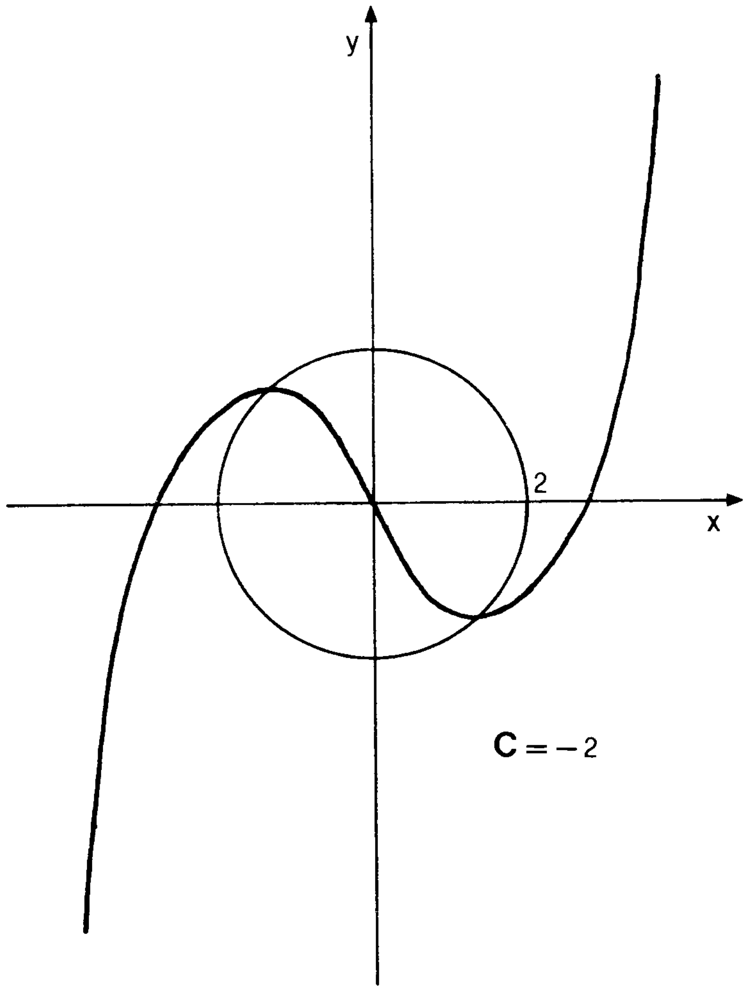
$$1 \geqslant 1 - \frac{1}{y(x)} \geqslant \frac{1}{y(x_0)} - \frac{1}{y(x)} \geqslant \frac{1}{2}(x - x_0)\,,$$



cioè

$$x \leqslant 2 + x_0 \ .$$

Ciò prova che $y(x)$ non può essere definita su tutto **R**, ma che il suo insieme di definizione è un intervallo $]-a, a[$.



Passiamo al caso $C < 0$. Inizialmente, la soluzione è decrescente, ed essa deve intersecare la circonferenza $\{x^2 + y^2 = -2C\}$ in un punto di ascissa $b > 0$. Per il *teorema di monotonia* (v. appendice), $y(x)$ è crescente per $x > b$, ed un ragionamento come quello del caso $C \geqslant 0$ prova che $y(x)$ è definita in un intervallo limitato $]-a, a[$, e che

$$\lim_{x \to a^-} y(x) = +\infty .$$

In $]0, b[$ si ha $y(x) < 0, y'(x) < 0$, pertanto

$$y''(x) = x + y(x)\, y'(x) > 0 ,$$

cioè $y(x)$ è convessa. Poiché $y'(0) = C$, possiamo dare una stima dal basso di b, e precisamente $b > \sqrt{2C/(1 + C^2)}$.

130. (a) Sia $M = \sup \{T_n\}$. La successione (T_n) è contenuta nell'intervallo chiuso e limitato $[0, M]$, dunque per il *teorema di Bolzano-Weierstrass* esiste una sottosuccessione (T_{n_k}) che converge. Sia

$$T_0 = \lim_{k \to \infty} T_{n_k} .$$

Vogliamo provare che f ha periodo T_0, se $T_0 > 0$, oppure che è costante (e quindi periodica) se $T_0 = 0$. Cominciamo con il caso $T_0 > 0$: fissato $x \in \mathbf{R}$ si ha per ogni $k \in \mathbf{N}$

$$|f(x + T_0) - f(x)| \leqslant |f(x + T_0) - f(x + T_{n_k})| + |f(x + T_{n_k}) -$$

$$- f_{n_k}(x + T_{n_k})| + |f_{nk}(x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x + T_0) - f(x + T_{n_k})| + 2 \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t) - f_{n_k}(t)| .$$

Facendo tendere k all'infinito, il primo addendo tende a zero perché f è continua, in quanto limite uniforme di funzioni continue, mentre il secondo addendo tende a zero per l'ipotesi di convergenza uniforme. Ne segue

$$|f(x + T_0) - f(x)| = 0 ,$$

e quindi T_0 è un periodo di f.
Passiamo ora al caso $T_0 = 0$. Per ogni k, indichiamo con x_k ed y_k rispettivamente il punto di minimo e il punto di massimo di f_{n_k} nell'intervallo $[0, T_{n_k}]$: si ha allora

$$(1) \quad \sup f_{n_k} - \inf f_{n_k} = \max_{[0,T_{n_k}]} f_{n_k} - \min_{[0,T_{n_k}]} f_{n_k} =$$

$$= f_{n_k}(y_k) - f_{n_k}(x_k) \leqslant 2 \sup |f - f_{n_k}| + f(y_k) - f(x_k)|.$$

Il primo addendo tende a zero per $k \to \infty$, mentre per la continuità di f si ha

$$\lim_{k \to \infty} [f(y_k) - f(x_k)] = f(0) - f(0) = 0 ,$$

in quanto

$$0 \leqslant x_k \leqslant T_{n_k} \quad , \quad 0 \leqslant y_k \leqslant T_{n_k}$$

e dunque sia (x_k) che (y_k) tendono a zero.
Allora da (1) si ottiene

$$\lim_{k \to \infty} (\sup f_{n_k} - \inf f_{n_k}) = 0 .$$

D'altra parte per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| +$$

$$+ |f_{n_k}(y) - f(y)| \leqslant 2 \sup |f - f_{n_k}| + |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup |f - f_{n_k}| + (\sup f_{n_k} - \inf f_{n_k}) .$$

Entrambi gli addendi tendono a zero per $k \to \infty$, dunque

$$f(x) - f(y) = 0 ,$$

cioè f è costante.
(b) Quando $\sup \{T_n\} = +\infty$, non è detto che f sia periodica. Un possibile esempio è il seguente: poniamo

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Ovviamente ogni f_n è continua, e il minimo periodo $T_n = 2^n \pi$ tende a $+\infty$. D'altra parte (f_n) converge uniformemente a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2^k}\right)$$

in quanto

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^n}.$$

Però f non è periodica, perché

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) > 0 \qquad \forall x \neq 0 .$$

Infatti f è pari, e per ogni $x \in \,]0, 2^n \pi[$ si ha

$$f(x) \geqslant f_n(x) \geqslant 2^{-n} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2^n}\right) > 0 .$$

131. Poniamo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e studiamo la successione di funzioni

$$g_n(r) = \frac{nr}{1 + n^2 r^2}$$

per $r \geqslant 0$. Si ha

$$g_n(r) = \varphi(nr) ,$$

dove

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 + t^2} .$$

Poiché $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$, si ha anche

$$g_n(0) = 0 \qquad \forall n$$

e

$$\lim_{n \to \infty} g_n(r) = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0 \qquad \forall r > 0,$$

pertanto (g_n) tende a zero puntualmente su $\mathbf{R}^+$, e quindi (f_n) tende a zero puntualmente su $\mathbf{R}^2$.
Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si ha

$$\sup_{\mathbf{R}^2} f_n = \sup_{\mathbf{R}^+} g_n = \sup_{\mathbf{R}^+} \varphi = \varphi(1) = \frac{1}{2},$$

quindi non c'è convergenza uniforme su $\mathbf{R}^2$.
Invece, sugli insiemi del tipo

$$(1) \qquad A \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 \leqslant \delta^2\}$$

si ha convergenza uniforme, in quanto

$$\sup_A f_n \leqslant \sup_{r \geqslant \delta} g_n(r) = \sup_{t \geqslant n\delta} \varphi(t),$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per $n \to \infty$.
Si può provare che $f_n \to 0$ uniformemente su B se e solo se

$$B = A \cup \{(0,0)\} \quad \text{con } A \text{ del tipo (1).}$$

132. L'integrale è improprio, perché l'integrando non è limitato su D. Siccome l'integrando è negativo, l'integrale ha senso e, applicando il *teorema di Fubini-Tonelli,* si ottiene

$$\iint_D \frac{\log y}{x}\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_0^{x^2} \log y\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 \log x^2 - x^2}{x}\, dx = -\frac{3}{4}.$$

133. L'equazione ha senso nel semipiano superiore, in cui il secondo membro $f(x, y) = \log y - x$ è di classe C^1, quindi il problema ammette un'unica soluzione $y(x)$, definita in un intorno di $x = 1$. Il punto iniziale $(1, e)$ si trova sulla curva $f(x, y) = 0$, che è il grafico della funzione esponenziale $y = e^x$. Poiché $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$, per il *teorema di monotonia* (v. appendice) la soluzione $y(x)$ è decrescente per $x > 1$, e crescente per $x < 1$: in particolare, per $x < 1$ deve essere

$$e^x < y(x) < e\,,$$

quindi

$$0 < f(x, y(x)) < 1 - x\,,$$

e per il *teorema di esistenza globale* (v. appendice) la soluzione $y(x)$ è definita su $]-\infty\,, 1]$. Posto

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lambda \geqslant 0\,,$$

si ha $\lambda = 0$: infatti, se fosse $\lambda > 0$, si avrebbe

$$\lim_{x \to -\infty} y'(x) = +\infty\,,$$

che è una contraddizione.
Passiamo ora a destra di $x = 1$: la funzione $y(x)$ è decrescente, quindi $y(x) \leqslant e$, pertanto

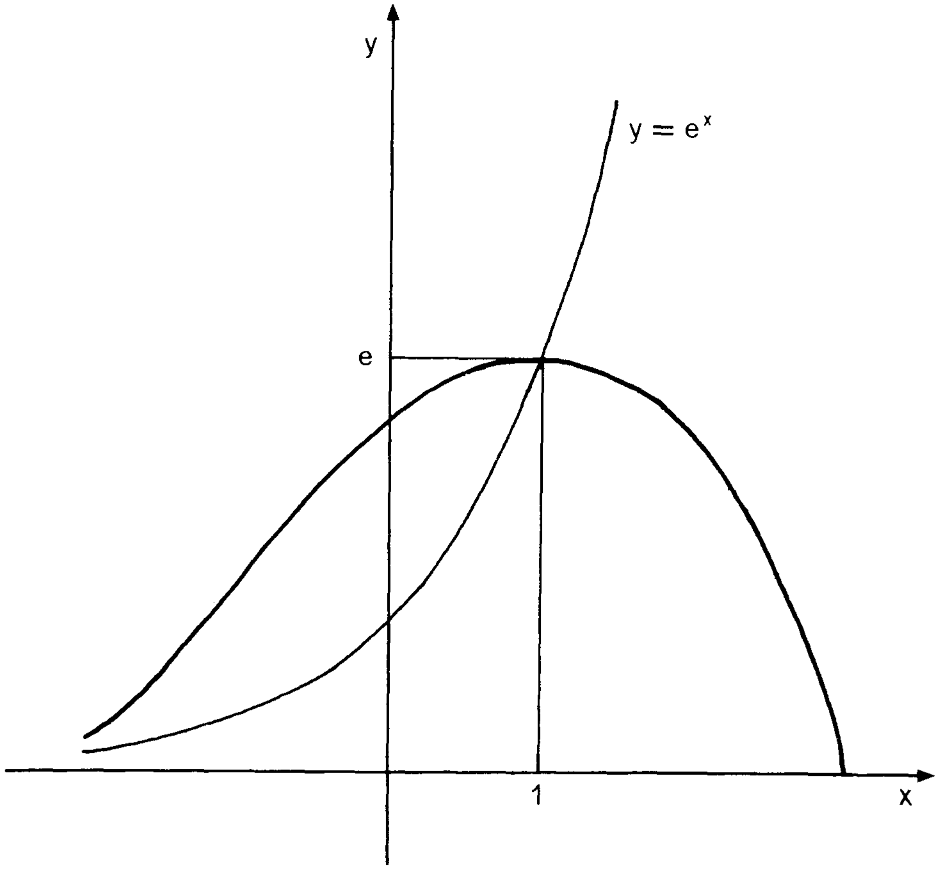
$$y'(x) \leqslant \log e - x = 1 - x\,.$$

Integrando questa disuguaglianza su $[1, x]$ si ha

$$y(x) \leqslant e - \frac{1}{2}(1 - x)^2$$

Ne segue che l'intervallo destro di definizione $[1, b[$ è limitato, e si può vedere che $b < \sqrt{2e} - 1$. Ovviamente, la curva $y(x)$ arriva all'asse x con tangente verticale, perché da $\lim_{x \to b^-} y(x) = 0$ segue

$$\lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty\,.$$



134. (a) Cerchiamo i punti stazionari di f su σ con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange:* abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x\,\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lambda \\[2ex] \log\left(1+\dfrac{1}{y}\right)+y\,\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{y}\right)}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=\lambda \\[2ex] x+y=1 \quad , \quad x>0\,,\ y>0 \end{cases} \quad ;$$

Dalle prime due equazioni si ricava intanto

$$(1) \qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=\log\left(1+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y+1}\ .$$

Se poniamo per ogni $t > 0$

$$h(t)=\log\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t+1}$$

si ottiene

$$h'(t)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t(t+1)^2}<0\,,$$

cioè h è strettamente decrescente e dunque iniettiva. Siccome la (1) può essere scritta come $h(x) = h(y)$, si ha necessariamente $x = y$; d'altra parte $x + y = 1$, quindi l'unico punto stazionario di f su σ è il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Esaminiamo il comportamento di f agli estremi di σ : essendo $y = 1 - x$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(1-x)\log\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\log(1+t)}{t}+\log 2=\log 2\,,$$

e lo stesso si ha per $x \to 1^-$.

Siccome $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log 3$, ne segue subito che $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è il punto di massimo di f su σ, e quindi $\log 3$ è il valore massimo, mentre l'estremo inferiore di f è $\log 2$.

(b) Poniamo

$$\varphi(t)=g(t)+g(1-t)\,.$$

La funzione φ è somma di funzioni strettamente concave, quindi è strettamente concava su $[0, 1]$. Inoltre $\varphi(x) = \varphi(1 - x)$, perciò in particolare $\varphi(0) = \varphi(1)$: per la concavità di φ è allora

$$\varphi(x) > \varphi(0) = \varphi(1) \qquad \forall x \in]0, 1[,$$

cioè $\varphi(0) = \min \varphi$.

Infine, fissato $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, per la concavità di φ sull'intervallo $[x, 1 - x]$ si ha

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) > \varphi(x) = \varphi(1 - x) ,$$

cioè $\frac{1}{2}$ è il punto di massimo di φ su $[0, 1]$.

Ritornando alla funzione g si ha

$$g(0) + g(1) \leqslant g(x) + g(1 - x) \leqslant 2g\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \forall x \in [0, 1]$$

pertanto

$$\min_{\sigma} f = f(0, 1) = f(1, 0) \ , \qquad \max_{\sigma} f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) .$$

Si noti che non abbiamo usato le ipotesi di derivabilità di g.

Il caso (a) discende da (b) con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x = 0 \\ x \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & \text{se } \ 0 < x \leqslant 1 . \end{cases}$$

Infatti

$$g''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 ,$$

cioè g è strettamente concava.

135. Occorre vedere per quali valori di α la funzione f ha limite finito per $(x, y) \to (0, 0)$.
Se $\alpha > 1$, scriviamo

$$f(x, y) = |y|^{\alpha - 1} \frac{x^2 |y|}{x^4 + y^2} \quad ; \tag{1}$$

dalla disuguaglianza $|2ab| \leqslant a^2 + b^2$ segue

$$\frac{x^2 |y|}{x^4 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

quindi la (1) implica

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant \frac{|y|^{\alpha - 1}}{2} \quad .$$

Ne segue subito che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 \, ,$$

dunque f è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$. Se invece $\alpha = 1$, calcolando i limiti di f per $(x, y) \to (0, 0)$ dapprima lungo l'asse x, poi lungo la parabola $y = x^2$ si ottiene

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \quad ,$$

e lo stesso si può ripetere per $0 < \alpha < 1$ ottenendo

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = +\infty \quad .$$

La funzione f è dunque estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$ se e solo se $\alpha > 1$.

136. Osserviamo che $F(tx, ty) = F(x, y)$ per ogni t. In particolare, per $t = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, si ha

$$F(x, y) = F\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Allora l'immagine di F è uguale all'immagine tramite F della sola circonferenza unitaria. Parametrizzando come di consueto, si vede che l'immagine di F è l'insieme delle coppie (s, t) tali che

$$\begin{cases} s = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta \\ t = \cos\theta \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \end{cases}$$

per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi[$. Ma da

$$(1) \qquad s = \cos 2\theta \quad , \quad 2t = \operatorname{sen} 2\theta$$

segue

$$(2) \qquad s^2 + 4t^2 = 1 \, ,$$

e viceversa per ogni (s, t) appartenente all'ellisse (2) esiste un θ che verifica (1). Pertnato l'immagine di F è l'ellisse (2).

137. La funzione $f(x, y) = \dfrac{e^y - x^2}{e^y + x^2}$ è di classe C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$, e inoltre

$$|f(x, y)| \leqslant 1 \qquad \forall (x, y) \, .$$

Dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione $y(x)$, definita su tutto $\mathbf{R}$.
Osserviamo che, posto

$$A = \{(x, y) : f(x, y) > 0\} = \{(x, y) : e^y > x^2\} \, ,$$

la frontiera di A è formata dalle due curve

$$\Gamma_1 = \{x > 0 \, , \quad y = 2 \log x\}$$

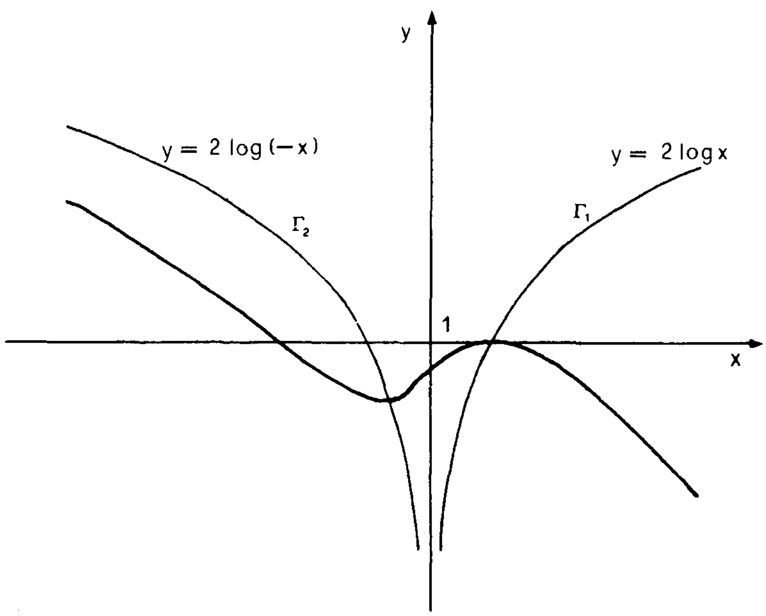
$$\Gamma_2 = \{x < 0\,, \quad y = 2\log(-x)\}\,.$$

Poiché il punto iniziale sta su Γ_1, la soluzione $y(x)$ attraversa Γ_1 con tangente orizzontale, ed è decrescente per $x > 1$. Invece $y(x)$ è crescente a sinistra di $x = 1$, e rimane crescente finché non incontra Γ_2: tale intersezione si ha certamente, perché $y(x)$ è definita su tutto **R** e non può stare sempre al di sopra di Γ_2. Detta x_0 l'ascissa del punto d'intersezione di $y(x)$ con Γ_2, la soluzione è decrescente per $x < x_0$, per il *teorema di monotonia* (v. appendice). Per la monotonia di $y(x)$, esistono

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lambda \leqslant 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = \mu > -\infty\,.$$

Se fosse $\lambda > -\infty$, si avrebbe $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = -1$, che dà una contraddizione. Allora $\lambda = -\infty$, e con lo stesso ragionamento si prova che $\mu = +\infty$.

Con qualche facile calcolo, poi, si può dimostrare che $y(x)$ è asintotica a Γ_2 per $x \to -\infty$.



138. (a) Si ha

$$f_1(x) = \int_0^x dt = x$$

$$f_2(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{x^3}{6}$$

quindi si può cercare di provare per induzione che

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \quad .$$

E infatti, se $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ si ha

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{x^n}{n!}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Sia $|\varphi(x)| \leqslant M$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e dimostriamo per induzione che

$$|f_n(x)| \leqslant M \frac{|x|^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \geqslant 0 .$$

Infatti la tesi è ovvia per $n = 0$, e se è vera per un certo n si ha (per $x > 0$)

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f_n(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |f_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt = M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad ,$$

e cioè la tesi è vera per $(n + 1)$. Lo stesso si può fare per $x < 0$.
Allora su ogni intervallo $[-r, r]$ la serie (*) converge totalmente poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{[-r,r]} |f_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x|\leqslant r} \frac{M\,|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} M\frac{r^n}{n!} = Me^r < +\infty .$$

Si ha dunque convergenza totale su ogni sottinsieme limitato di **R**.

(c) Poniamo

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) .$$

Osserviamo che per $n \geqslant 1$ si ha $f'_{n+1} = f_n$, dunque la serie delle derivate è

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \varphi'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) .$$

Siccome tale serie converge uniformemente su ogni intervallo $[-r, r]$, si ha

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \varphi'(x) + g(x) ,$$

cioè g risolve l'equazione differeziale

$$y' = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + y .$$

Si ha con facili calcoli

$$\frac{d}{dx}(y\,e^{-x}) = \operatorname{sen} x + \cos x ,$$

da cui

$$y(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x + c)\, e^x$$

con c costante reale opportuna. Visto che $f_n(0) = 0$ per ogni n, si ha $g(0) = 0$, pertanto

$$g(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x + 1)\, e^x \quad .$$

Appendice

Teorema di confronto

Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, e siano $f(x, y)$, $g(x, y)$ due funzioni continue su $I \times \mathbf{R}$ e localmente lipschitziane in y. Si considerino le equazioni differenziali su I

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

$$(2) \qquad y' = g(x, y) .$$

Siano $u(x)$ e $v(x)$ rispettivamente una sottosoluzione di (1) e una soprasoluzione di (2), cioè due funzioni derivabili in I tali che

$$u'(x) \leqslant f(x, u(x)) , \quad v'(x) \geqslant g(x, v(x))$$

per ogni $x \in I$. Supponiamo poi che risulti

$$(3) \qquad f(x, u(x)) \leqslant g(x, u(x)) \qquad \forall x \in I .$$

Allora se è

$$u(x_0) \leqslant v(x_0)$$

si ha anche

$$u(x) \leqslant v(x) \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

mentre se è

$$u(x_0) \geqslant v(x_0)$$

si ha

$$u(x) \geqslant v(x) \qquad \forall x \leqslant x_0 \,.$$

Dim.: possiamo limitarci a considerare il caso (4), e non è restrittivo supporre $I = [x_0, a]$. Posto

$$M = \max_I \,(|u(x)| + |v(x)|)\,,$$

sia L la costante di Lipschitz di $g(x, y)$, rispetto ad y, nel rettangolo $I \times [-M, M]$. Si ha allora

$$u'(x) - v'(x) \leqslant f(x, u(x)) - g(x, v(x)) \leqslant$$

$$\leqslant g(x, u(x)) - g(x, v(x)) \leqslant L\,|u(x) - v(x)|\,,$$

e la tesi segue immediatamente, con $w = u - v$, dal prossimo lemma.

Lemma

Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$, *e sia $w(x)$ una funzione derivabile su I; supponiamo che risulti*

$$w'(x) \leqslant L\,|w(x)| \qquad \forall x \in I$$

per un'opportuna costante L.
Allora, da $w(x_0) \leqslant 0$ segue $w(x) \leqslant 0$ $\forall\, x \geqslant x_0$, mentre da $w(x_0) \geqslant 0$ segue $w(x) \geqslant 0$ $\forall\, x \leqslant x_0$.

Dim. : possiamo limitarci al caso $w(x_0) \leqslant 0$. Supponiamo per assurdo che sia $w(x_1) > 0$ per qualche $x_1 > x_0$. Posto

$$\xi = \sup \left\{ x \leqslant x_1 : w(x) \leqslant 0 \right\},$$

la funzione $w(x)$ è nulla per $x = \xi$, ed è positiva nell'intervallo $J =]\xi, x_1]$. Allora per ipotesi si ha

$$w'(x) \leqslant L w(x) \qquad \text{su } J\,,$$

e quindi anche

$$(e^{-Lx}\,w(x))' = e^{-Lx}(w'(x) - Lw(x)) \leqslant 0 \qquad \text{su } J\,.$$

Pertanto, integrando fra ξ ed x_1, si ottiene

$$e^{-Lx_1}\, w(x_1) \leqslant e^{-L\xi}\, w(\xi) = 0\,,$$

in contrasto col fatto che $w(x_1) > 0$.

Caso particolare.

L'ipotesi (3) è verificata in particolare se è

$$f(x, y) \leqslant g(x, y) \qquad \forall (x, y) \in I \times \mathbf{R}\,.$$

Si possono ottenere molte altre versioni del *teorema di confronto* sostituendo alcune disuguaglianze deboli ($\leqslant, \geqslant$) dell'ipotesi con disuguaglianze strette ($<, >$), per ottenere disuguaglianze strette anche nella tesi.

Teorema di esistenza globale

Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo e $f(x, y)$ una funzione continua su $I \times \mathbf{R}$ e localmente lipschitziana in y. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y)\,. \tag{5}$$

Sia $u : J \to \mathbf{R}$ una soluzione di (5), con J intervallo massimale di definizione (tale cioè che se $J \subseteq \tilde{J}$ e $\tilde{u} : \tilde{J} \to \mathbf{R}$ è una soluzione di (5) che coincide con u su J, allora $J = \tilde{J}$ e $u = \tilde{u}$).
Se risulta

$$|f(x, u(x))| \leqslant \varphi(x) + \psi(x)\,|u(x)| \qquad \forall x \in J \tag{6}$$

per opportune funzioni continue φ, ψ definite su I, allora si ha

$$J = I\,.$$

Dim.: possiamo limitarci al caso

$$I = [x_0, a[\,, \quad J = [x_0, b[\quad \text{con } x_0 < b \leqslant a\,.$$

Supponiamo per assurdo che sia $b < a$; posto

$$M = \sup_{[x_0, b]} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|) ,$$

si ha

$$(7) \qquad |u'(x)| \leqslant M(1 + |u(x)|) \qquad \forall x \in J .$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) = M(1 + |z(x)|) \\ z(x_0) = |u(x_0)| \end{cases} .$$

Tale problema ha come unica soluzione la funzione

$$z(x) = (1 + |u(x_0)|)\, e^{M(x - x_0)} - 1 ,$$

che è limitata in J. Dalla (7) segue facilmente

$$f(x, u(x)) \leqslant M(1 + |u(x)|) \quad ,$$

quindi per il *teorema di confronto*

$$u(x) \leqslant z(x) \qquad \forall x \in J .$$

In particolare $u(x)$ è limitata superiormente in J. Ragionando allo stesso modo per il problema

$$\begin{cases} w'(x) = -M(1 + |w(x)|) \\ w(x_0) = -|u(x_0)| \end{cases}$$

si ricava che $u(x)$ è anche limitata inferiormente in J, perciò è limitata: allora, per (7), anche $u'(x)$ risulta limitata, pertanto $u(x)$ è uniformemente continua in J, e in particolare esiste finito il limite

$$\lim_{x \to b^-} u(x) = \lambda .$$

Risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(b) = \lambda \end{cases},$$

si può prolungare $u(x)$ in un intorno destro di $x = b$, contro la massimalità di J.

Caso particolare

L'ipotesi (6) è verificata in particolare se è

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x) + \psi(x)\,|y| \qquad \forall (x, y) \in I \times \mathbf{R},$$

o addirittura se f è limitata.

Teorema di monotonia

Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo ed $f(x, y)$ una funzione di classe C^1 su $I \times \mathbf{R}$; sia poi $u(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(x, u) & \text{in } I, \\ u(x_0) = y_0 & . \end{cases}$$

Supponiamo che

$$f(x_0, y_0) = 0$$

e che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) \geqslant 0 \qquad \forall x \in I. \tag{8}$$

Allora

$$u'(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \leqslant x_0 \quad , \quad u'(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant x_0 \ .$$

Dim.: Dall'equazione differenziale si deduce subito che la funzione

$$w(x) = u'(x)$$

è di classe C^1, e inoltre

$$w'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x))\, u'(x).$$

In altri termini, $w(x)$ risolve l'equazione differenziale lineare

$$w' = a(x) + b(x)w,$$

dove si è posto

$$a(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)), \qquad b(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x)).$$

Si ha poi, per ipotesi,

$$w(x_0) = 0,$$

pertanto dalla teoria delle equazioni lineari si trova

(9) $$w(x) = e^{B(x)} \int_{x_0}^{x} a(t)\, e^{-B(t)}\, dt,$$

con

$$B(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\, dt.$$

Per ipotesi, la funzione $a(t)$ è non-negativa, quindi dalla (9) segue

$$w(x) \leqslant 0 \quad \forall x \leqslant x_0, \qquad w(x) \geqslant 0 \quad \forall x \geqslant x_0,$$

che è la tesi.

Caso particolare

Se l'ipotesi (8) viene sostituita da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) > 0 \qquad \forall x \neq x_0$$

allora le disuguaglianze nella tesi diventano strette, cioè

$$u'(x) < 0 \quad \forall x < x_0 \,, \quad u'(x) > 0 \quad \forall x > x_0 \,.$$

L'ipotesi (8) è verificata in particolare se è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \geqslant 0 \qquad \forall (x, y) \in I \times \mathbf{R} \,.$$

Una variante del teorema si ha sostituendo (8) con:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \,.$$

Teorema dell'asintoto

Sia $u : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ *una funzione derivabile tale che esistono (finiti o infiniti) i due limiti*

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \ell \,, \qquad \lim_{x \to +\infty} u'(x) = m \,.$$

Se ℓ *è finito allora* $m = 0$

Dim.: se ℓ è finito allora

$$\lim_{x \to +\infty} [u(x+1) - u(x)] = 0 \quad .$$

D'altra parte, per il *teorema di Lagrange,* si ha

$$u(x+1) - u(x) = u'(\xi_x) \tag{10}$$

per un opportuno $\xi_x \in]x, x+1[$. Poiché $\lim_{x \to +\infty} \xi_x = +\infty$, si ha anche $\lim_{x \to +\infty} u'(\xi_x) = m$. Passando al limite in ambo i membri di (10) si ha la tesi.

Osservazione

Questo risultato si può modificare dicendo che se esiste finito $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ allora $\operatorname{minlim}_{x \to +\infty} |u'(x)| = 0$.