Emilio Acerbi – Luciano Modica – Sergio Spagnolo

Problemi scelti di analisi matematica I

Liguori Editore

Prima edizione italiana Giugno 1985
Liguori Editore, Srl
via Posillipo 394
I 80123 Napoli
http://www.liguori.it

Acerbi, Emilio :
Problemi scelti di analisi matematica I/Emilio Acerbi, Luciano Modica, Sergio Spagnolo
Napoli : Liguori, 1985
ISBN 88 - 207 - 1408 – 6

1. Integrazione 2. Numeri complessi I. Titolo

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 3 2005 2004 2003 2002 2001 2000

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

Indice

Indice per argomenti.

A scopo solamente indicativo, raggruppiamo qui per argomenti gli esercizi proposti in questo volume. Si tenga però comunque presente che sono molti gli esercizi la cui soluzione può richiedere la conoscenza di più argomenti differenti.

Gruppo N. 1: *Numeri complessi*
Esercizi N. 1, 6, 12, 15, 19, 24, 29, 40, 45.

Gruppo N. 2: *Successioni, serie, continuità, limiti.*
Esercizi N. 8, 14, 18, 23, 36, 39, 44, 48, 49, 53, 54, 55, 56, 59, 62, 64, 71, 72, 77, 87, 90, 91, 95, 96, 107, 123, 127, 129, 131, 136.

Gruppo N. 3: *Derivazione.*
Esercizi N. 2, 13, 20, 25, 27, 28, 31, 32, 33, 35, 47, 61, 63, 67, 75, 79, 80, 82, 83, 85, 93, 99, 101, 103, 105, 108, 111, 115, 116, 119, 121, 124, 135.

Gruppo N. 4: *Esercizi di carattere teorico su proprietà generali delle funzioni di variabile reale.*
Esercizi N. 4, 5, 9, 10, 11, 34, 38, 42, 46, 51, 70, 78, 86, 89, 98, 102, 106, 117, 122, 126, 138.

Gruppo N. 5: *Integrazione.*
Esercizi N. 3, 7, 16, 17, 21, 22, 26, 30, 37, 41, 43, 50, 52, 57, 58, 60, 65, 66, 68, 69, 73, 74, 76, 81, 84, 88, 92, 94, 97, 100, 104, 109, 110, 112, 113, 114, 118, 120, 125, 128, 130, 132, 133, 134, 137.

Questo volume raccoglie tutti gli esercizi, con le relative soluzioni, che sono stati assegnati agli esami scritti del corso di Analisi Matematica, I, che io ho tenuto negli anni accademici 1974-75, 1976-77, 1978-79, 1980-81 e 1982-83 presso l'Università di Pisa.

Data l'importanza della prova scritta nell'esame di Analisi Matematica, i problemi sono stati sempre scelti con molta cura, nella speranza che fossero il più possibile originali e coprissero i principali punti del programma.

Per una consuetudine sempre rispettata, anche se mai sancita esplicitamente, ogni prova scritta conteneva, oltre ad alcuni esercizi di tipo più standard, anche un esercizio di natura teorica che mettesse alla prova la maturità raggiunta dal candidato.

Devo dire che la preparazione dei testi dei 100 e più problemi è stata possibile solo grazie alla collaborazione validissima dei vari docenti che hanno svolto anno per anno le esercitazioni del mio corso e precisamente, oltre ad E. Acerbi e L. Modica (co-autori del libro), A. Arosio, P. Baldi, L. Carbone, F. Catanese, F. Honsell e M. Pratelli. Ad essi rivolgo qui un sentito ringraziamento.

Qualcuno potrà ritenere questi problemi un po' troppo difficili, ed effettivamente alcuni lo sono, ma io penso che sia più serio giudicare un candidato dalla risoluzione anche incompleta di un esercizio impegnativo che non dallo svolgimento perfetto di un compito troppo facile. Comunque, nel rispetto della tradizione scientifica di Pisa, non pochi sono stati gli studenti che hanno risolto in modo più che soddisfacente i problemi che venivano loro proposti, qualcuno poi con soluzioni assai belle.

Fra questi ultimi, uno almeno vorrei ricordare, anche se con tristezza: il giovane Benedetto Sciarra che un male inesorabile ha strappato nel 1980 allo studio della Matematica e probabilmente ad una brillante carriera scientifica. Alla sua memoria vorrei che questo libro venisse dedicato.

Sergio Spagnolo

Istruzioni per l'uso

Consigliamo vivamente il lettore di cercare con impegno una *sua* soluzione di ogni esercizio, *prima* di leggere quella qui riportata.

Evidentemente non esiste una soluzione ottimale di ogni problema, e non sempre quella qui proposta è la prima che ci è venuta in mente, ma piuttosto quella che ci è parsa più istruttiva e originale. In questo spirito saremo grati a tutti coloro che vorranno suggerirci altre soluzioni a loro avviso interessanti.

Emilio Acerbi　　Luciano Modica　　Sergio Spagnolo

Parte prima

Testi dei problemi

1. (5/6/1975)

Trovare tutti i numeri complessi z che soddisfano il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1 \end{cases}$$

2. (5/6/1975)

Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \operatorname{sen} n)\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) .$$

3. (5/6/1975)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\, dt .$$

(a) Dimostrare che f è una funzione pari, non negativa ed uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}$.

(b) Calcolare (se esiste) il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$$

(c) Provare che per ogni numero reale x sussiste la disuguaglianza

$$f(x) \leqslant \frac{x^2}{2} .$$

4. (5/6/1975)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che si abbia, per ogni coppia di interi relativi (p,q) con $q \neq 0$ e per ogni coppia di numeri reali (x,y),

$$f\left(x \operatorname{sen}^2 \frac{p}{q} + y \cos^2 \frac{p}{q}\right) \leqslant \left(\operatorname{sen}^2 \frac{p}{q}\right) f(x) + \left(\cos^2 \frac{p}{q}\right) f(y) .$$

Dimostrare che la funzione f è necessariamente convessa. Che cosa dire del viceversa?

5. (5/6/1975)

Sia $f : \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 0\} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Supponiamo inoltre che f sia di classe C^2 su $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ e che

$$|f''(x)| \leqslant 1 \qquad \forall x > 0 .$$

(a) Dimostrare che f è di classe C^1 su $\mathbf{R}^+$.

(b) Esiste la derivata seconda in $x = 0$?

6. (30/6/1975)

Trovare tutte le radici complesse dell'equazione

$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 .$$

7. (30/6/1975)

Si calcoli l'integrale

$$\int_0^2 \frac{1}{\cos x + 3 \operatorname{sen} x} dx .$$

8. (30/6/1975)

Dire per quali valori del parametro reale t la serie

$$\sum_{\substack{n \geqslant 0 \\ n > -t}} \frac{(n+t)^{nt}}{n!}$$

è convergente.

9. (30/6/1975)

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{\operatorname{arctg} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^7 - 31x^5 + 2} \; : \; x^7 - 31x^5 + 2 \neq 0\right\} .$$

10. (30/6/1975)

Sia g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua fissata. Consideriamo la seguente proposizione:

$P =$ "se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è tale che $g \circ f$ è continua, allora anche f è continua".

(a) Dimostrare che se g è iniettiva allora P è vera.

(b) Dimostrare che se P è vera allora g è iniettiva.

(c) Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $h^3 + 2h + 1$ è una funzione continua. Dimostrare che h è continua.

11. (2/10/1975)

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che ogni punto di $\mathbf{R}$ è di massimo relativo per f.

(a) Dimostrare che se f è derivabile allora f è costante.

(b) Dimostrare che se f è continua allora f è costante.

(c) Cosa succede togliendo anche l'ipotesi di continuità su f?

12. (2/10/1975)

Siano $a, b \in C$ e consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})(bz - a\bar{z}) = 4 \\ z^2 - |z|^2 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita z. Sotto quali condizioni su a e b il sistema ha almeno una soluzione $z \in C$?

13. (2/10/1975)

Dimostrare che

$$e^{\frac{x}{2} + nx^4} \geqslant \frac{1}{2}$$

per ogni numero reale x e per ogni intero $n \geqslant 1$.

14. (2/10/1975)

Dire per quali valori di x la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{2} + nx^3}$$

converge, e calcolarne la somma.

15. (27/10/1975)

Sia $m \geqslant 1$ un intero. Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema di equazioni nell'incognita $z \in C$

$$\begin{cases} z^m = |z|^m \\ z = \dfrac{1 + it}{1 - it}\,\bar{z} \end{cases}$$

ha almeno una soluzione non nulla.

16. (27/10/1975)

Si consideri la funzione $f(x) = 2x$. Si dimostri che per ogni a, $b \in \mathbf{R}$ con $a \neq b$ si ha

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} = a + b .$$

Esistono altre funzioni continue f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con la stessa proprietà? E discontinue?

17. (27/10/1975)

Trovare il minimo valore della funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t)\,e^{-t}\,dt .$$

18. (27/10/1975)

Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$$

è divergente.

19. (30/1/1976)

Trovare i numeri complessi z tali che

$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0 .$$

20. (30/1/1976)

Dire per quali valori del parametro intero k si ha

$$e^x + x^2 - 2k^2x \geqslant 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

21. (30/1/1976)

Calcolare il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$2x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 1 .$$

22. (30/1/1976)

(a) Dimostrare che per ogni polinomio $P(x)$ esiste un unico polinomio $Q(x)$ tale che

$$\int_0^x P(t)e^t dt = Q(x)e^x - Q(0) \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

(b) L'applicazione $P \mapsto Q$ e iniettiva? E' sugettiva?

23. (20/2/1976)

Dire per quali valori del parametro reale t la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t^n + n^{-3t})$$

è convergente.

24. (20/2/1976)

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

nelle incognite $z, w \in \mathbf{C}$.

25. (20/2/1976)

Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to$ $\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$

26. (20/2/1976)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = a\ .$$

Vale anche il viceversa?

27. (13/5/1977)

Dimostrare che la successione di numeri reali

$$a_n = \frac{1}{n^2} \log(1 + 2e^n)$$

è monotona, e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

28. (13/5/1977)

Dire quante sono le radici reali del polinomio

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100 \qquad (n \text{ intero}, n \geqslant 0)\ .$$

29. (13/5/1977)

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z|^3 = (Re\ z)^3 + (Im\, z)^3 \\ |z-i| = |z| \end{cases}$$

nell'incognita $z \in \mathbf{C}$.

30. (13/5/1977)

Sia f: $[0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua non negativa. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 [f(x)]^n dx = +\infty \iff \exists\, x_0 \in [0,1]\colon f(x_0) > 1.$$

31. (10/6/1977)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax + b\cos x + ce^x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leqslant 0\ . \end{cases}$$

Determinare, al variare di a,b,c in $\mathbf{R}$, il più grande intero $k \geqslant 0$ per cui f risulta di classe C^k su $\mathbf{R}$.

32. (10/6/1977)

Determinare il più grande intero positivo k per cui

$$e^{|x|} - |x| + \cos x \geqslant k \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

33. (10/6/1977)

Fissato un numero x_0 tale che $0 < x_0 < \pi$, si consideri la successione così definita per ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{sen} x_n \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots$$

(a) Dimostrare che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

(b) Dimostrare che (x_n) è crescente.

(c) Calcolare il limite di (x_n) per $n \to \infty$.

34. (10/6/1977)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione periodica di classe C^1 tale che

$$f(x) + f'(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ .$$

Dimostrare che f è non-negativa.

35. (1/7/1977)

Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{\left(\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) \left(e^x + \dfrac{2 \log \cos x}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$$

ammette limite per $x \to 0^+$.

36. (1/7/1977)

Data la successione (x_n) definita da

$$x_0 = a$$

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{4}\, , \, x_n^2\right\} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite di (x_n) per $n \to \infty$ e calcolarlo.

37. (1/7/1977)

Definiamo le funzioni $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ed $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} g(t)\, dt\ .$$

(a) Dimostrare che f è estendibile con continuità a tutto **R**.

(b) Dire se tale estensione di f è derivabile in **R**.

38. (1/7/1977)

(a) Dimostrare che non esiste alcun polinomio P tale che

$$x^x = P(x) \qquad \forall x > 0 .$$

(b) Dimostrare più in generale che, dati due polinomi Q ed R con $Q(x) > 0$ per ogni $x > 0$, se esiste un polinomio P tale che

$$[Q(x)]^{R(x)} = P(x) \qquad \forall x > 0$$

allora o Q o R è un polinomio costante.

39. (5/10/1977)

Calcolare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e il limite della successione

$$a_n = n + \frac{1}{2n} - \sqrt{n^2+1} \qquad (n = 1,2,3,...) .$$

40. (5/10/1977)

Sia z un numero complesso tale che

$$0 \leqslant Im\, z \leqslant \frac{1}{4} .$$

Provare che il numero $z^3 - 3z + i$ non è reale.

41. (5/10/1977)

Si consideri la successione (x_n) definita da

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \int_0^{x_n} e^{-t^2}\, dt .$$

Provare che (x_n) è monotona e calcolarne il limite.

42. (5/10/1977)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$|f(x)| \leqslant x^2 \qquad \forall x \in \mathbf{R};$$

(a) f è continua nel punto $x = 0$?

(b) f è continua in un intorno del punto $x = 0$?

(c) f è derivabile nel punto $x = 0$?

43. (26/10/1977)

Si consideri la funzione f: $]0, +\infty[\ \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \log x + \int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt .$$

(a) Tracciare un grafico approssimativo di f.

(b) Esiste un prolungamento continuo (o addirittura derivabile) di f alla semiretta chiusa $[0, +\infty[$?

44. (26/10/1977)

Sia (a_n) una successione tale che

$$a_1 > 0 \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{n}\, a_n \ .$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n^2)}}{(a_n)^2} \ .$$

45. (26/10/1977)

Consideriamo la funzione f: **C** → **C** definita da

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Qual è l'immagine di f?

(b) La funzione f è iniettiva?

(c) La funzione f è continua?

46. (26/10/1977)

Sia f: **R** → **R** una funzione di classe C^1 e limitata. Dimostrare che f è periodica se e solo se f' è periodica.

47. (20/1/1978)

Sia n un numero naturale. Consideriamo l'equazione

$$x^n = \cos \frac{x}{n} \ .$$

(a) Dimostrare che tale equazione ha un'unica soluzione positiva x_n.

(b) Dimostrare che la successione (x_n) è limitata.

(c) Calcolare il limite di (x_n) per $n \to \infty$.

48. (20/1/1978)

Sia f_0: $[0,1[\ \to$ **R** la funzione definita da

$$f_0(x) = 7 - 4x^2 \ .$$

Definiamo per induzione su n le funzioni

$$f_n \ : \ [2^{n-1}, 2^n[\ \to \mathbf{R}$$

ponendo

$$f_n(x) = \frac{1}{2} f_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Sia infine f: $[0,+\infty[\ \to$ **R** la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se} \quad x \in [0,1[\\ f_n(x) & \text{se} \quad x \in [2^{n-1}, 2^n[\quad (n = 1,2,\ldots) \ . \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua su $[0, +\infty[$.

49. (20/1/1978)

Dire per quali valori di $\alpha > 0$ la successione

$$a_n = \frac{(\operatorname{sen} n) \log(5+e^{2n})}{n^\alpha} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

è limitata, e per quali valori ha limite.

50. (20/1/1978)

Calcolare

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\log[(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}]}{\operatorname{tg} x}\, dx \,.$$

51. (27/1/1978)

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e}\,)^{\operatorname{sen} x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x}\,)]^2} \,.$$

52. (27/1/1978)

Per $n = 1,2,3,\ldots,$ si ponga

$$a_n = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^n \, dx \,.$$

Provare che (a_n) è decrescente e che $a_n + a_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$ per ogni $n \geqslant 3$. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

53. (27/1/1978)

Dimostrare che

$$x^x \geqslant \operatorname{sen} x \qquad \forall x > 0 \,.$$

54. (27/1/1978)

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme di numeri reali

$$A = \left\{ x + \frac{1}{x^n} : x > 0 \;,\quad n \in \mathbf{N} \right\}.$$

55. (11/5/1979)

Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \log\left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{2} + e^x\right).$$

56. (11/5/1979)

(a) Si consideri la successione (a_n) di numeri reali definita per ricorrenza da

$$a_1 = \lambda \quad , \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$$

con $\lambda \geqslant 0$ numero reale fissato. Calcolare $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

(b) Che cosa si può dire se $\lambda < 0$?

57. (11/5/1979)

Studiare la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1 + t \log t} \, dt$$

sulla semiretta $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 0\}$, tracciandone un grafico approssimativo. Inoltre, trovare il più piccolo intero positivo k tale che $f(x) \leqslant k$ per ogni $x \geqslant 0$.

58. (11/5/1979)

Sia f una funzione di classe C^2 su $\mathbf{R}$ tale che

$$f''(x) \leqslant -f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

con $L \in \mathbf{R}$. Si dimostri che $L \leqslant 0$.

59. (15/6/1979)

Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{n}{3} \right) \operatorname{sen} \frac{1}{n} \ .$$

60. (15/6/1979)

Calcolare una primitiva della funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2) \ .$$

61. (15/6/1979)

Fissiamo $\lambda \in \mathbf{R}$.

(a) Calcolare il limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = e^{(a_n/e)} \end{cases}$$

(b) Dimostrare che esiste, finito o infinito, il limite di tutte le successioni definite per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = b^{a_n} \end{cases}$$

qualunque sia $b \in \mathbf{R}$ con $b > 1$.

62. (15/6/1979)

Sia (x_n) una successione di numeri reali tale che

$$x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Dimostrare che ogni numero reale compreso tra $\min\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\max\lim_{n\to\infty} x_n$ è limite di una sottosuccessione di (x_n).

63. (2/7/1979)

Trovare il volume massimo che può avere un cono retto contenuto in una sfera di raggio r.

64. (2/7/1979)

(a) Calcolare

$$\sup_{n \geqslant 1} (n\ 2^n - n!\ )$$

(b) Poniamo, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = \sup_{k \geqslant 1} (n\ 2^k - k!\ ) .$$

Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

65. (2/7/1979)

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x}\left(x - \int_1^x e^{1/t}\,dt\right) .$$

66. (2/7/1979)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$x\,(f''(x) + [f'(x)]^2) = 1 - e^{-x}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

(a) Si dimostri che f non ha punti di massimo relativo.

(b) Si dimostri che f non è limitata.

67. (4/10/1979)

Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{1+y^2} + |x-y| .$$

68. (4/10/1979)

Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{k \to +\infty} 2^k \int_0^{\pi/2} x\, e^{-kx^2}\, dx$

(b) $\lim_{k \to +\infty} 2^k \int_0^{\pi/2} e^{-kx^2}\, \operatorname{sen} x\, dx$.

69. (4/10/1979)

(a) Ricordando la formula di Taylor della funzione esponenziale e il fatto che $2{,}5 < e < 3$, dimostrare che

$$e^{1/e} < \frac{3}{2} \quad .$$

(b) Trovare la parte intera del numero

$$\int_1^3 x^{1/x}\, dx$$

70. (4/10/1979)

Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0 \quad .$$

Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} [f(n+1) - 2f(n) + f(n-1)] \quad .$$

71. (24/10/1979)

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} [\log (e + x)]^{\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} \quad .$$

72. (24/10/1979)

Dimostrare che

$$n^k \leqslant \frac{9}{8} (\min \{n, k\})^{\max \{n, k\}}$$

per ogni $n, k \in \mathbf{N}$ con $n \geqslant 2, k \geqslant 2$.

73. (24/10/1979)

Sia $\lambda > 0$ un numero reale e sia $f_\lambda \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f_\lambda(x) = x e^{x^4} + \lambda (x e^{x^4})^2 \quad .$$

(a) Tracciare un grafico approssimativo di f_λ.

(b) Calcolare

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-1}^{1} \min \{f_\lambda(x), 0\}\, dx \, .$$

74. (24/10/1979)

Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y| \qquad \forall x,\ y\in\mathbf{R}$$

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0 \qquad \forall n\in\mathbf{Z},$$

dove L è una costante reale positiva.

(a) Dimostrare che f è limitata.

(b) Trovare il più piccolo fra i numeri reali C per cui

$$|f(x)| \leqslant C \qquad \forall x\in\mathbf{R}$$

qualunque sia la funzione f soddisfacente alle ipotesi.

75. (18/1/1980)

Calcolare, al variare di α in $\mathbf{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - \alpha}{x^\alpha \operatorname{sen} x} \quad .$$

76. (18/1/1980)

Dimostrare che, per ogni $a > 0$, si ha

$$\frac{1}{ea}\,(e^{ea}-e^a) \leqslant \int_0^1 \exp(a\,e^t)\,dt \leqslant \frac{1}{a}\,(e^{ea}-e^a)\ .$$

77. (18/1/1980)

Dimostrare che esistono due costanti reali positive A e B tali che

$$1 + nA \leqslant \left(\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \leqslant nB \qquad \forall\ n\in\mathbf{N}\,.$$

78. (18/1/1980)

(a) Sia $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione di classe C^2. Dimostrare che f è un polinomio di grado minore o uguale a 2 se e solo se l'espressione

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$$

dipende solo da h e non da x.

(b) Si può estendere tale risultato al caso in cui f è solo di classe C^1?

79. (6/2/1980)

Dimostrare che la successione

$$a_n = \operatorname{sen}\,(\pi\sqrt{4n^2+\sqrt{n}}\,)$$

è infinitesima per $n\to\infty$, e calcolarne l'ordine di infinitesimo.

80. (6/2/1980)

Sia $\lambda\in R$. Definiamo la funzione $f_\lambda\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ ponendo

$$f_\lambda(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\lambda}{x} \quad .$$

(a) Tracciare un grafico approssimativo di f_λ.

(b) Trovare delle condizioni su λ affinchè l'equazione $f_\lambda(x) = 1$ abbia almeno una soluzione $x \in \mathbf{R}$.

81. (6/2/1980)

Sia $a \in \mathbf{R}$, con $a > 0$.

(a) Si dimostri che l'equazione

$$\frac{1}{1+x^{10}} = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt$$

ha un'unica soluzione $x \in [0, a]$.

(b) Indichiamo con x_a la soluzione di cui al punto precedente. Calcolare

$$\lim_{a \to 0^+} x_a \qquad , \qquad \lim_{a \to 0^+} \frac{x_a}{a} \; .$$

82. (6/2/1980)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione dispari di classe C^∞. Trovare tre numeri reali a, b, c indipendenti da f e non tutti nulli, in modo che la funzione g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$g(x) = af(x) + bf(2x) + cf(3x)$$

abbia l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ più alto possibile.

83. (11/5/1981)

Dire per quali valori del parametro reale α la funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = e^x - \alpha x^3$$

è convessa.

84. (11/5/1981)

Sia f: $]0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\int_0^1 \sqrt{x}\; |f'(x)|\, dx < +\infty \; .$$

Dimostrare che esiste $c > 0$ tale che

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in]0,1]$$

ed inoltre che

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx < +\infty \; .$$

85. (11/5/1981)

Dimostrare che

$$1 + x \leqslant e^x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

per ogni $x \in [0,1]$.

86. (11/5/1981)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e monotona. Dimostrare che l'equazione $[f(x)]^2 = x^2$ ha almeno una soluzione. Vi sono casi di infinite soluzioni?

87. (12/6/1981)

Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} [(\log \log x)^{\log x} - x\,(\log x)^{\log \log x}] \quad .$$

88. (12/6/1981)

Studiare la successione (x_n) definita per ricorrenza da

$$x_0 = a \quad , \quad x_{n+1} = 4 \int_0^{x_n} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\, dt$$

con a numero reale.

89. (12/6/1981)

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Dimostrare che l'equazione

$$e^x \operatorname{sen} x + e^{-x} \cos x = P(x)$$

ammette sempre almeno una soluzione reale.

90. (12/6/1981)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$f(\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} x_n) = \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n)$$

per ogni successione limitata (x_n) di numeri reali. Dimostrare che f è continua e monotona.

91. (14/7/1981)

Sia λ un numero reale positivo.
Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$S_\lambda = \left\{ \frac{n^\lambda + k^{1/\lambda}}{n+k} : n,\ k \in \mathbf{N} \right\},$$

92. (14/7/1981)

Dimostrare che

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leqslant 1 + \log a$$

per ogni $a \geqslant 1$.

93. (14/7/1981)

Calcolare

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{4})} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}\,2x}$$

94. (14/7/1981)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Dimostrare che esiste una funzione g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che

$$x\,g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

95. (1/10/1981)

Studiare la successione (x_n) definita per ricorrenza da

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = a > 0$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2$$

calcolandone, se esiste, il limite.

96. (1/10/1981)

Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{sen}\,n^6}{\mathrm{arctg}\,n} \log(\cos n^{-3}) \ .$$

97. (1/10/1981)

Studiare la funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t^2}\, dt$$

tracciandone un grafico approssimativo.

98. (1/10/1981)

Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione

$$e^x = 1 - x + 2\lambda$$

ha una ed una sola soluzione $x(\lambda)$.

Dimostrare che la funzione $\lambda \mapsto x(\lambda)$ è continua e calcolare $x(0)$.

Dimostrare che $x(\lambda)$ è derivabile per $\lambda = 0$ e calcolare $x'(0)$.

99. (15/10/1981)

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \log(1+x)^{1/x} \ .$$

100. (15/10/1981)

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\, dt \ .$$

101. (15/10/1981)

Definiamo per ricorrenza la successione (x_n):

$$x_1 = a > 0$$

$$x_{n+1} = \log(1 + x_n) .$$

Calcolare il limite di (x_n).

102. (15/10/1981)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione che verifica

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|$$

per ogni $x,y \in \mathbf{R}$, con $L > 0$ costante reale. Dimostrare che per $0 \leqslant \epsilon < \frac{1}{L}$ la funzione f_ϵ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f_\epsilon(x) = x + \epsilon f(x)$$

è bigettiva.

103. (16/1/1982)

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen} x}}$$

104. (16/1/1982)

Sia $\alpha > 0$ fissato; calcolare

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1 - x^{2\alpha}}}\, dx .$$

105. (16/1/1982)

Sia $a \geqslant 0$ e consideriamo la funzione f_a: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f_a(x) = e^{-x^2} \sqrt{|a^2 - x^2|} .$$

Tracciare un grafico approssimativo di f_a. In particolare osservare che f_a ha massimo e, indicando tale massimo con $M(a)$, calcolare $\lim_{a \to 0^+} M(a)$.

106. (16/1/1982)

Sia

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti reali. Supponiamo che tutte le radici di P siano numeri reali. Dimostrare che anche la derivata di P ha solo radici reali e che

$$(n-1)a_{n-1}^2 \geqslant 2n\,a_{n-2} .$$

107. (30/1/1982)

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\operatorname{sen} n)^{1/n}(2+\operatorname{sen} n)^n}{n!} .$$

108. (30/1/1982)

Attraverso uno studio della funzione

$$f(x) = e^{ax} - a^2 x$$

sulla semiretta $x \geqslant 0$, dire per quali valori del parametro reale a essa è monotona.

109. (30/1/1982)

Calcolare

$$\int_1^2 x^\alpha \log x \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

110. (30/1/1982)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che

$$f(0) = f(1) = 0 ,$$

$$|f'(x)| \leqslant 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Trovare le più piccole costanti A, B (indipendenti da f) per cui si ha

$$|f(x)| \leqslant A \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leqslant B .$$

111. (13/5/1983)

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$$

al variare del parametro reale α.

112. (13/5/1983)

Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\, dx .$$

113. (13/5/1983)

Studiare la funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t \, dt & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

114. (13/5/1983)

Dimostrare che, tra tutte le funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, la funzione $x \mapsto |x|$ è l'unica a soddisfare contemporaneamente le seguenti proprietà:

(i) f è convessa;

(ii) $f(-1) = f(1) = 1$;

(iii) $f(0) = 0$;

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1.$

115. (10/6/1983)

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} (1 - x)^{1/\cos(x - \frac{\pi}{2})}$$

116. (10/6/1983)

Studiare la funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = |x|^{1/x} \quad ,$$

tracciandone un grafico approssimativo.

117. (10/6/1983)

Sia f: $]1, +\infty[\to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x \log x} = L \quad ,$$

con $L \in \mathbf{R}$.

Dimostrare che, se è $L \neq 0$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = c \qquad \forall c > 0 \, .$$

Questa affermazione è ancora valida nel caso $L = 0$?

118. (10/6/1983)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 e si definisca per $x \neq 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \, .$$

(a) Dimostrare che è possibile definire $\varphi(0)$ in modo che φ risulti di classe C^2.

(b) Dimostrare che, se f è convessa, anche φ lo è. E' vero il viceversa?

119. (4/7/1983)

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione

$$f(x) = 4^{1-\cos\sqrt{x}} - 2^x \ .$$

120. (4/7/1983)

Sia (a_h) la successione definita da

$$a_h = \int_0^\pi e^{-hx} \operatorname{sen}(h^2 x)\, dx \qquad (h = 0,1,2,...).$$

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di (a_h), precisando se si tratta di massimo e minimo.

121. (4/7/1983)

Dimostrare che

$$e^{-x} > 1 - \operatorname{sen} x \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

122. (4/7/1983)

Sia f: $[0, +\infty[\ \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. Si ponga per ogni $x \geqslant 0$

$$g(x) = \sup\left\{ f(t) \ : \ 0 \leqslant t \leqslant x \right\} \ .$$

Dimostrare che se f è continua allora g è continua. Vale anche l'affermazione inversa? Vale l'implicazione

$$f \in C^1 \quad \Rightarrow \quad g \in C^1 \ ?$$

123. (6/10/1983)

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} (1 - e^{1/n}) \log(n!\ ) \ .$$

124. (7/10/1983)

Dimostrare che esiste un numero reale C tale che

$$x^2 e^{-x^2} \geqslant \operatorname{sen} x + C \qquad \forall x \in \mathbf{R} \ ,$$

e calcolare la più grande costante C per cui vale la precedente disuguaglianza.

125. (7/10/1983)

Definiamo una funzione $f : \ ]0, +\infty[\ \to \mathbf{R}$ ponendo

$$f(t) = \int_0^1 \frac{x^2}{(t^2 + x^2)^3}\, dx \ .$$

Dimostrare che $\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$ e calcolare l'ordine di infinito di f per $t \to 0^+$.

126. (7/10/1983)

Siano λ_1, λ_2 e λ_3 tre numeri reali diversi tra loro e siano p_1, p_2, p_3: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tre funzioni periodiche limitate. Dimostrare che se

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x} + p_3(x)e^{\lambda_3 x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

allora

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0 .$$

127. (21/10/1983)

Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k$$

al variare del parametro $a > 0$.

128. (21/10/1983)

Studiare la funzione f: $[0,1[\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}}\, ds$$

tracciandone un grafico approssimativo.

129. (21/10/1983)

Sia a un numero reale non negativo e sia (x_n) la successione definita da

$$x_n = a^n + \frac{1}{n} \qquad (n = 1,2,...) .$$

Calcolare il limite di (x_n) e dire per quali valori di a si ha che

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} x_n = x_1 .$$

130. (21/10/1983)

Sia f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1 tale che per ogni $x \geqslant 0$ si abbia

$$(*) \qquad f'(x) \geqslant [f(x)]^2 .$$

(a) Dimostrare che $f(x) \leqslant 0$ per ogni $x \geqslant 0$.

(b) Esistono funzioni C^1 non identicamente nulle che verificano (*) per ogni $x \in \mathbf{R}$?

131. (13/1/1984)

Studiare, al variare del parametro reale a nell'intervallo $[0,1]$, il comportamento della successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - x_n^3 \end{cases} .$$

132. (13/1/1984)

Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{\int_0^x \sqrt{1 + e^{2t^2}}\, dt}{\int_0^x e^{t^2}\, dt} - 1 \right]$$

133. (13/1/1984)

Sia f: $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt \, .$$

(a) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Provare che $\sup\limits_{]0,+\infty[} f = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

134. (13/1/1984)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e tale che per ogni $T > 0$ e per ogni $a,b \in \mathbf{R}$ con $a < b$ si abbia

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\, dx > \int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Provare che f è crescente.

135. (3/2/1984)

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x[\operatorname{arctg}(\log x) - \operatorname{arctg} x] \, .$$

136. (3/2/1984)

Studiare, al variare del parametro reale a, il comportamento della successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2 \end{cases}$$

137. (3/2/1984)

Calcolare i due limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x+t^2}\, dt \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x+t^2}\, dt \, .$$

138. (3/2/1984)

Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione dispari di classe C^3. Dire quando è possibile trovare due costanti reali λ, μ in modo che risulti

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \lambda f(\mu x)}{x^3} = 1 \, .$$

Parte seconda

Risoluzione dei problemi

1. Dalla seconda equazione si deduce che $z = 0$ non è una soluzione del sistema, quindi possiamo dividere per $\bar{z}$ la prima equazione, ottenendo

$$z^2 - z + 1 = 0 \, .$$

Risolvendo quest'ultima equazione si ricava

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \, .$$

Ma

$$(z_1^3 + \bar{z}_1)^3 = \left(e^{i\pi} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(-1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 1 \, ,$$

e anche, osservando che $z_2 = \bar{z}_1$,

$$(z_2^3 + \bar{z}_2)^3 = (\bar{z}_1^3 + z_1)^3 = \overline{(z_1^3 + \bar{z}_1)^3} = 1 \, .$$

Allora z_1 e z_2 sono le due soluzioni del sistema proposto.

2. Poiché $\operatorname{sen} x \leqslant x$ per ogni $x \geqslant 0$, la serie è a termini positivi, dunque o converge o diverge a $+\infty$. Per la *formula di Taylor* si ha

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{6}\cos\xi_x \quad \text{con } 0 < \xi_x < x ,$$

quindi

$$\operatorname{sen}x \geqslant x - \frac{x^3}{6} \qquad \forall x \in [0,1].$$

Allora

$$0 \leqslant (n - \operatorname{sen}n)\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{n+1}{6n^3} \leqslant \frac{2n}{6n^3} = \frac{1}{3n^2}$$

e, per il *criterio del confronto*, la serie proposta converge.

3. (a) Proviamo che $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$: effettuando la sostituzione $s = -t$ si ha

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\operatorname{sen}t}{1+t^2}\,dt = \int_0^x -\frac{\operatorname{sen}(-s)}{1+(-s)^2}\,ds =$$

$$= \int_0^x \frac{\operatorname{sen}s}{1+s^2}\,ds = f(x) .$$

Per dimostrare che f è non negativa basta allora provare che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \geqslant 0$. Per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* si ha

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{1+x^2} ,$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = h\pi$, con $h \in \mathbf{N}$. D'altra parte si vede che $f''(h\pi)$ è positiva per h pari e negativa per h dispari, dunque i punti di minimo locale per f sono tutti e soli i numeri del tipo $x = 2k\pi$. Osservando che

$$\inf\left\{f(x) : x \geqslant 0\right\} = \lim_{k\to+\infty} \min\left\{f(x) : 0 \leqslant x \leqslant 2k\pi\right\} ,$$

per provare che f è non negativa basta mostrare che $f(2k\pi) \geqslant 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$.
Si può scrivere

$$f(2k\pi) = (A_1 + B_1) + \dots + (A_k + B_k) ,$$

dove si è posto

$$A_n = \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\operatorname{sen}t}{1+t^2}\,dt \quad , \qquad B_n = \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\operatorname{sen}t}{1+t^2}\,dt .$$

Eseguendo il cambiamento di variabili $t = s + \pi$ e ricordando che $\operatorname{sen}(s+\pi) = -\operatorname{sen}s \leqslant 0$ per $(2n-2)\pi \leqslant s \leqslant (2n-1)\pi$, si ottiene

$$B_n = \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{-\operatorname{sen}s}{1+(s+\pi)^2}\,ds \geqslant \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{-\operatorname{sen}s}{1+s^2}\,ds = -A_n ;$$

allora $A_n + B_n \geqslant 0$ per ogni n, quindi $f(2k\pi) \geqslant 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$.
Mostriamo infine che f è uniformemente continua: notiamo che

$$|f'(x)| = \frac{|\operatorname{sen}x|}{1+x^2} \leqslant 1 ,$$

quindi, fissando $\epsilon > 0$ ed applicando il *teorema di Lagrange*, si ottiene per $\delta = \epsilon$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x-y|\,|f'(\xi)| \leqslant |x-y| < \delta = \epsilon .$$

(b) Poichè $f(0) = 0$, possiamo applicare il *teorema dell'Hôpital* ottenendo

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}x}{2x(1+x^2)} = \frac{1}{2} .$$

Dato che f è pari, basta provare che per ogni $x \geqslant 0$ si ha

$$\frac{x^2}{2} - f(x) \geqslant 0$$

Poniamo

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - f(x) .$$

Poichè

$$g'(x) = x - \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2} \geqslant \frac{x - \operatorname{sen} x}{1+x^2} \geqslant 0 \qquad \forall x \geqslant 0 ,$$

g è non decrescente, quindi $g(x) \geqslant g(0) = 0$ per ogni $x \geqslant 0$.

4. Fissati $x,y \in \mathbf{R}$ e $\lambda \in [0,1]$, vogliamo mostrare che

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) .$$

Poniamo $\alpha = \operatorname{arcsen} \sqrt{\lambda}$, e sia $\dfrac{p_n}{q_n}$ una successione di numeri razionali tendente ad α

Posto $\lambda_n = \operatorname{sen}^2 \dfrac{p_n}{q_n}$ si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \operatorname{sen}^2 \alpha = \lambda ;$$

d'altra parte

$$1 - \lambda_n = \cos^2 \frac{p_n}{q_n} ,$$

quindi per l'ipotesi su f

$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n) y) \leqslant \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y) ,$$

da cui passando al limite per $n \to \infty$ e sfruttando la continuità di f si ottiene la formula desiderata. Il viceversa è vero: la formula

data è infatti un caso particolare della condizione di convessità, con $\lambda = \operatorname{sen}^2 \dfrac{p}{q}$.

5. (a) Basta dimostrare che f è derivabile in $x = 0$ e che inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni $h > 0$ esiste $\xi_h \in]0,h[$ tale che

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi_h) ,$$

pertanto se esiste finito

$$L = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

si ha necessariamente

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f'(\xi_h) = L$$

e la tesi è verificata.
Per dimostrare che $f'(x)$ ha limite finito per $x \to 0^+$ applichiamo il *criterio di Cauchy*: fissato $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$x,\ y \in]0,\delta[\ \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon .$$

Scegliendo $\delta = \epsilon$, se $x, y \in]0,\delta[$ si ha $|x-y| < \delta$, e inoltre esiste ξ, compreso tra x ed y, tale che

$$|f'(x) - f'(y)| = |x-y|\,|f''(\xi)| \leqslant \delta\, |f''(\xi)| \leqslant \delta = \epsilon .$$

(b) La risposta è in generale negativa. Per il controesempio si pensi che $g = f'$ deve essere una funzione continua, non derivabile in $x = 0$ ma con derivata g' compresa tra -1 ed 1 per $x > 0$.
Un tentativo potrebbe essere la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

ma per $x > 0$ la sua derivata è

$$g'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

che non è limitata. Sostituendo $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ con $\operatorname{sen}\log x$ si ottiene

$$g(x) = x \operatorname{sen}\log x,$$

e quindi

$$g'(x) = \operatorname{sen}\log x + \cos\log x.$$

Si ha allora $|g'(x)| \leqslant \sqrt{2}$, mentre

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \operatorname{sen}\log h$$

non ha limite per $h \to 0^+$. Basta allora scegliere

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^x g(t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^x \operatorname{sen}\log t\,dt.$$

6. Usando la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado si

trova che le radici dell'equazione data sono

$$z_1 = -\frac{i}{2} + \frac{\alpha}{2}, \qquad z_2 = -\frac{i}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

dove α è una radice quadrata di $-1-i\sqrt{3}$. Osserviamo che

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

quindi

$$\alpha = \sqrt{2}\, e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2},$$

e infine

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-2}{4}, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+2}{4}.$$

7. Dato che la funzione $x \mapsto \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ è monotona su $[0, \pi[$, si può effettuare la sostituzione:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^2 \frac{1}{\cos x + 3 \operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^{\operatorname{tg}1} \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 3\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \int_0^{\operatorname{tg}1} \left(\frac{1}{t-3+\sqrt{10}} - \frac{1}{t-3-\sqrt{10}}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \log \frac{(\sqrt{10} - 3 + \operatorname{tg} 1)\ (\sqrt{10} + 3)}{(\sqrt{10} + 3 - \operatorname{tg} 1)\ (\sqrt{10} - 3)} \quad .$$

8. Osserviamo che per $n > 0$

$$\frac{(n+t)^{nt}}{n!} = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{nt} \quad \frac{n^{nt}}{n!} \quad ;$$

il primo fattore tende ad e^{t^2} per $n \to \infty$, quindi, essendo $e^{t^2} > 0$, basta studiare la serie

$$\sum_{\substack{n \geqslant 0 \\ n > -t}} \frac{n^{nt}}{n!} \quad .$$

Se $t \geqslant 1$ si ha $n^{nt} \geqslant n^n \geqslant n!$ e quindi la serie diverge. Se invece $t < 1$, applicando il *criterio del rapporto* si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)t}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{nt}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nt} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1-t}} = 0 \, ,$$

quindi la serie converge.

9. Dato che la funzione arcotangente è crescente, basterà calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$B = \left\{ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^7 - 31x^5 + 2} \; : \; x^7 - 31x^5 + 2 \neq 0 \right\} \quad .$$

Poniamo per brevità

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad , \quad g(x) = x^7 - 31x^5 + 2 \; .$$

Osserviamo che è

$$g(0) = 2 > 0 \quad , \quad g(1) = -28 < 0 \; ,$$

pertanto esiste $\xi \in]0,1[$ tale che $g(\xi) = 0$. Inoltre

$$g'(x) = 7x^6 - 155x^4 = 7x^4 \left(x^2 - \frac{155}{7}\right) ,$$

quindi $g'(x) < 0$ in $]0,1[$: ne segue che

$$g(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leqslant x < \xi$$

$$g(x) < 0 \quad \text{per} \quad \xi < x \leqslant 1 \; .$$

Tenendo conto del fatto che $f(x) > 0$ in $]0,1[$, si ha

$$\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \; .$$

Allora $\sup B = +\infty$ ed $\inf B = -\infty$, quindi

$$\sup A = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \inf A = -\frac{\pi}{2} \; .$$

10. Supponiamo che g sia iniettiva, e sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $g \circ f$ è continua. Siccome g è definita e continua sull'intervallo $\mathbf{R}$, anche la sua funzione inversa

$$g^{-1} : g(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

risulta continua. Allora $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ è continua.

(b) Supponiamo per assurdo che g non sia iniettiva, cioè che esistano $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, con $x_0 \neq y_0$, tali che $g(x_0) = g(y_0)$. Consideriamo allora la funzione discontinua:

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x < 0 \\ y_0 & \text{se } x \geqslant 0 \,; \end{cases}$$

si ha $(g \circ f)(x) = g(x_0)$ per ogni x, quindi $g \circ f$ è continua, e questo è in contraddizione con P.

(c) Se $g(x) = x^3 + 2x + 1$, si ha $h^3 + 2h + 1 = g \circ h$. Osserviamo che g è continua ed è crescente (perchè $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$), quindi è iniettiva. Per la parte (a), anche h è allora continua.

11. (a) Dall'ipotesi segue che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, dunque f è costante.

(b) Supponiamo che f non sia costante; scegliamo allora $a, b \in \mathbf{R}$ con $f(a) < f(b)$. Poniamo

$$A = \{x \in \mathbf{R} : f(x) \leqslant f(a)\}.$$

Intanto A non è vuoto perché $a \in A$; inoltre, A è chiuso perché $A = f^{-1}(]-\infty, a])$ ed f è continua. Infine, per l'ipotesi fatta su f, per ogni $x \in A$ esiste un intorno U_x di x tale che:

$$f(y) \leqslant f(x) \leqslant f(a) \qquad \forall\, y \in U_x \,,$$

quindi $U_x \subset A$. Ciò prova che A è anche aperto; l'unico sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che sia aperto, chiuso e non vuoto è $\mathbf{R}$ stesso, cioè $A = \mathbf{R}$, che è assurdo perchè $b \in A$.

(c) Senza ipotesi di continuità, il risultato è generalmente falso: basta considerare ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \,. \end{cases}$$

12. La seconda equazione equivale a:

$$z(z - \bar{z}) = 0 \,;$$

dato che $z = 0$ non è una soluzione della prima equazione, si ottiene $z = \bar{z}$, cioè z è reale. Sostituendo nella prima equazione, si ricava

$$(az - bz)(bz - az) = 4$$

cioè

$$(a - b)^2 = -\frac{4}{z^2} \,,$$

quindi, ricordando che $z \in \mathbf{R}$, il numero $a-b$ deve essere immaginario puro non nullo, cioè

$$a - b = it \qquad \text{con } t \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \,.$$

In tal caso il sistema è risolubile, ed ha le due soluzioni

$$z = \pm \frac{2}{t} \,.$$

13. Si ha subito

$$e^{\frac{x}{2} + nx^4} \geqslant e^{\frac{x}{2} + x^4}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed $n \geqslant 1$, quindi basta dimostrare che

$$e^{\frac{x}{2} + x^4} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R} \,,$$

ovvero

$$x^4 + \frac{x}{2} \geqslant -\log 2 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \,.$$

Posto $f(x) = x^4 + \frac{x}{2}$ si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,,$$

dunque f ha minimo, ed il minimo viene raggiunto nell'unico punto in cui si annulla f', cioè in $x = -\frac{1}{2}$. E' sufficiente provare che $f\left(-\frac{1}{2}\right) \geqslant -\log 2$, cioè che

$$-\frac{3}{16} \geqslant -\log 2 \ ,$$

ovvero

$$2^{16} \geqslant e^3 \ ,$$

disuguaglianza che è ovvia perchè $e^3 < 4^3 = 2^6$.

14. Si noti che

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{2}+nx^3} = e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{x^3})^n \ ,$$

quindi la serie converge per $e^{x^3} < 1$, cioè per $x < 0$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x^3})^n = e^{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{x^3})^n = \frac{e^{x^3}}{1-e^{x^3}} \ .$$

quindi per $x < 0$ la somma della serie data è:

$$e^{\frac{x}{2}+x^3} (1-e^{x^3})^{-1} \ .$$

15. Cerchiamo una soluzione $z = \rho e^{i\vartheta}$ con $\rho > 0$ e $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$. Si ha

$$\begin{cases} \rho^m e^{im\vartheta} = \rho^m \\ \rho e^{i\vartheta} = \dfrac{1+it}{1-it} \rho e^{-i\vartheta} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} e^{im\vartheta} = 1 \\ e^{2i\vartheta} = \dfrac{1+it}{1-it} \end{cases}$$

(si noti che ρ rimane indeterminato: infatti, se z_0 è una soluzione del sistema, lo è anche cz_0, per ogni $c \geqslant 0$).
Dalla prima equazione si ricava

$$\vartheta = \frac{2k\pi}{m} \ , \quad k = 0,1,\dots,(m-1) \ .$$

Osserviamo poi che

$$\frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\,\frac{2t}{1+t^2}$$

e quindi, ponendo $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$,

$$\frac{1+it}{1-it} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi} \ .$$

Dalla seconda equazione del sistema si ricava allora successivamente

$$e^{2i\vartheta} = e^{i\varphi}$$

$$e^{i(2\vartheta-\varphi)} = 1$$

$$2\vartheta - \varphi = 2h\pi \quad , \quad h \in \mathbf{Z} \ ,$$

da cui

$$\varphi = 2\vartheta - 2h\pi \quad , \quad h \in \mathbf{Z}$$

e infine

$$t = \mathrm{tg}(\vartheta - h\pi) = \mathrm{tg}\,\vartheta .$$

Pertanto il sistema ha soluzioni non nulle se e solo se t è un numero reale della forma

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{2k\pi}{m} \quad , \quad k = 0, \ldots, (m-1) .$$

16. Poichè $\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2$, la prima parte è ovvia. Supponiamo che f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia una funzione continua tale che per ogni $a,b \in \mathbf{R}$

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = a+b$$

Allora per ogni $a,b \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = b^2 - a^2 .$$

Posto

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

si ha allora

$$F(x) = x^2 \qquad \forall x \in R ,$$

e, per la continuità di f,

$$f(x) = F'(x) = 2x ,$$

pertanto l'unica funzione continua con la proprietà richiesta è la funzione $2x$.
Se non si richiede la continuità di f, basta porre (ad esempio)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

per avere $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2$ per ogni a,b senza che f coincida con la funzione $2x$.

17. Dal *teorema fondamentale del calcolo integrale* si ottiene che

$$f'(x) = (x^3 - 2x)\,e^{-x} = x(x^2-2)\,e^{-x} ,$$

quindi

$$f'(x) \geqslant 0 \iff (-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{oppure} \quad x \geqslant \sqrt{2}) .$$

La funzione f ha allora minimi relativi in $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, decresce per $x < -\sqrt{2}$ e cresce per $x > \sqrt{2}$, per cui

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min \left\{ f(-\sqrt{2}),\, f(\sqrt{2}) \right\} .$$

Osserviamo ora che

$$f(-\sqrt{2}) = \int_0^{-\sqrt{2}} (t^3 - 2t)\,e^{-t}\,dt = \int_0^{\sqrt{2}} (s^3 - 2s)\,e^s\,ds ;$$

dato che $s^3 - 2s < 0$ ed $e^s > e^{-s}$ per $0 < s < \sqrt{2}$, si ha

$$f(-\sqrt{2}) = \int_0^{\sqrt{2}} (s^3 - 2s)\,e^s ds < \int_0^{\sqrt{2}} (s^3 - 2s)\,e^{-s} ds = f(\sqrt{2}),$$

quindi

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f(-\sqrt{2}) \ .$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$f(x) = 4 - (x^3 + 3x^2 + 4x + 4)\, e^{-x},$$

quindi il minimo valore di f è $4 + (6\sqrt{2} - 10)\, e^{\sqrt{2}}$.

18. Si ha

$$\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \ ;$$

dato che

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} > 0 \ ,$$

si avrà per n sufficientemente grande

$$\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}} \geqslant \frac{e^{-3}}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3}}{2n}$ diverge, quindi per il *criterio del confronto* anche la serie proposta è divergente.

19. Una soluzione è $z = 0$. Per cercare le altre, moltiplichiamo l'equazione per z: si ottiene

$$z^2\, |z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})\, i\, |z|^2 = 0 \quad ,$$

da cui, dividendo per $|z|^2$,

$$z^2 = (1 + 4\sqrt{3})\, i = (1 + 4\sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Quest'ultima uguaglianza è verificata se e solo se

$$z = \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}\; e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

Le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$z = 0 \quad , \quad z = \pm \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}\, (1 + i) \ .$$

20. Nel caso $k = 0$ la disuguaglianza è ovvia perchè

$$e^x + x^2 \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \ .$$

Quando poi $k = \pm 2, \pm 3, \ldots$ si vede subito che la disuguaglianza non può essere verificata su tutto $\mathbf{R}$, perchè per $x = 1$ si riduce a

$$e + 1 \geqslant 2k^2 \ ,$$

mentre $2k^2 \geqslant 8 > e + 1$ se $|k| \geqslant 2$.

Il caso più delicato è dunque $k^2 = 1$. Si tratta di verificare se la funzione

$$f(x) = e^x + x^2 - 2x$$

è non negativa su $\mathbf{R}$.
Dato che $e^x \geqslant 1 + x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$f(x) \geqslant x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} .$$

La risposta è dunque: $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$.

21. Posto

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 1 \quad ,$$

le soluzioni dell'equazione data sono i numeri reali x tali che $f(x) = 0$. Notiamo che f è una funzione continua e derivabile; dato che

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

ed $e^{-x^2} \leqslant 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha

$$f'(x) \geqslant \frac{3}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

La funzione f è allora strettamente crescente sull'intervallo $\mathbf{R}$, quindi è iniettiva.
Inoltre, $f(0) = -1 < 0$, mentre

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t)\, dt \geqslant f(0) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad ,$$

pertanto la funzione continua f si annulla in un punto $\bar{x} \in]0,1[$ che per l'iniettività di f è l'unica soluzione dell'equazione di partenza.

22. (a) Dimostriamo l'esistenza di Q per induzione sul grado di P: se P è di grado zero, cioè se

$$P(x) = a \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

per qualche $a \in \mathbf{R}$, si ha

$$\int_0^x a e^t\, dt = a e^x - a \ ,$$

cioè basta scegliere $Q(x) = a$.
Supponiamo di aver dimostrato la tesi per tutti i polinomi di grado n, e dimostriamola per quelli di grado $n + 1$; sia P un polinomio di grado $n + 1$: integrando per parti si ha

$$\int_0^x P(t) e^t\, dt = [P(t) e^t]_0^x - \int_0^x P'(t) e^t\, dt \ .$$

Poichè P' è un polinomio di grado n, si ha per l'ipotesi induttiva

$$\int_0^x P'(t) e^t dt = Q_0(x) e^x - Q_0(0) \ ,$$

con Q_0 polinomio. Allora

$$\int_0^x P(t) e^t dt = P(x) e^x - P(0) - Q_0(x) e^x + Q_0(0) =$$

$$= (P - Q_0)(x) e^x - (P - Q_0)(0) \quad ,$$

e la tesi è dimostrata con $Q = P - Q_0$.
Resta da provare che Q è unico. Supponiamo che sia

$$\int_0^x P(t) e^t dt = Q_1(x) e^x - Q_1(0) = Q_2(x) e^x - Q_2(0) \ .$$

Allora la funzione $(Q_1(x) - Q_2(x))\, e^x = Q_1(0) - Q_2(0)$ è costante.
D'altra parte, per ogni polinomio non nullo $R(x)$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} |R(x) e^x| = +\infty \quad ,$$

pertanto deve essere

$$Q_1 - Q_2 = 0 \ .$$

(b) Entrambe le domande hanno risposta affermativa. Cominciamo dall'iniettività: se

$$\int_0^x P_1(t)\, e^t dt = \int_0^x P_2(t)\, e^t dt$$

si ha

$$\int_0^x (P_1 - P_2)(t)\, e^t\, dt = 0$$

Derivando rispetto ad x si deduce che

$$(P_1 - P_2)(x)\, e^x = 0$$

e quindi $P_1 = P_2$.
Per provare la surgettività, sia Q un polinomio. Allora

$$Q(x)\, e^x - Q(0) = Q(x) e^x - Q(0)\, e^0 =$$

$$= \int_0^x \frac{d}{dt}\,(Q(t)\, e^t)\, dt$$

$$= \int_0^x (Q + Q')(t)\, e^t\, dt \ .$$

Poichè $Q + Q'$ è un polinomio, posto $P = Q + Q'$ si ha

$$\int_0^x P(t)\, e^t dt = Q(x)\, e^x - Q(0) \ ,$$

quindi l'applicazione $P \mapsto Q$ è anche surgettiva.

23. Studiamo separatamente le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3t} \ .$$

La prima è una serie geometrica che converge per $|t| < 1$, diverge per $t \geqslant 1$, è indeterminata per $t \leqslant -1$. La seconda invece è una serie armonica, e converge per $3t > 1$ mentre diverge per $3t \leqslant 1$. Possiamo dire subito che:

– se $\frac{1}{3} < t < 1$, entrambe le serie convergono, quindi converge anche la loro somma;

– se $-1 < t \leqslant \frac{1}{3}$ oppure se $t \geqslant 1$, una delle serie converge e l'altra diverge, pertanto la loro somma è divergente.
Nel caso $t \leqslant -1$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} n^{-3t} = +\infty \qquad , \qquad t^n \geqslant 0 \quad \text{per} \quad n \text{ pari,}$$

quindi il termine generico della serie data non è infinitesimo, ed essa non converge.
Più precisamente si può verificare che:

– se $t = -1$, la serie armonica diverge e le somme parziali dell'altra sono limitate, quindi la serie proposta diverge;

– se $t < -1$, la serie è indeterminata.

24. Dalla seconda equazione si ricava

$$0 = z^2 + w^2 = (z + iw)\,(z - iw)$$

quindi deve essere $z = \pm\, iw$ (e, in particolare, la prima equazione è superflua).

Se è $z = iw$, dalla terza equazione si ottiene successivamente

$$iw + w = 1$$

$$w = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$$z = iw = \frac{1+i}{2} \quad .$$

Se invece è $z = -iw$, nello stesso modo si ottiene

$$w = \frac{1+i}{2} \qquad , \qquad z = \frac{1-i}{2} \quad .$$

Pertanto il sistema dato ha le due soluzioni simmetriche

$$z = \frac{1+i}{2} \;,\; w = \frac{1-i}{2} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{1-i}{2} \;,\; w = \frac{1+i}{2}$$

25. Studiamo anzitutto il segno di $\frac{1-x}{1+x}$. Poichè

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x^2}{(1+x)^2} \quad ,$$

si ha che $\frac{1-x}{1+x} > 0$ per $|x| < 1$, mentre $\frac{1-x}{1+x} < 0$ per $|x| > 1$.
Osserviamo inoltre che

$$0 < f(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \neq 1 \; .$$

Cominciamo a studiare f sulla semiretta $[1, +\infty[$: si ha

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$$

e dunque

$$f(1) = 0 \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \; .$$

La derivata di f per $x > 1$ è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x-1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x+1}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad ,$$

per cui f è crescente e inoltre

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty \; .$$

Uno studio analogo può essere condotto sulla semiretta $]-\infty,-1]$, oppure si può osservare che per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

quindi

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}} = \frac{\pi}{2} - f(x) \; ,$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x < -1 \qquad , \qquad \lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty \quad .$$

Rimane da studiare il comportamento di f nell'intervallo $]-1,1[$, dove si ha $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ e quindi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} < 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \ .$$

Un grafico approssimativo di f è allora il seguente:

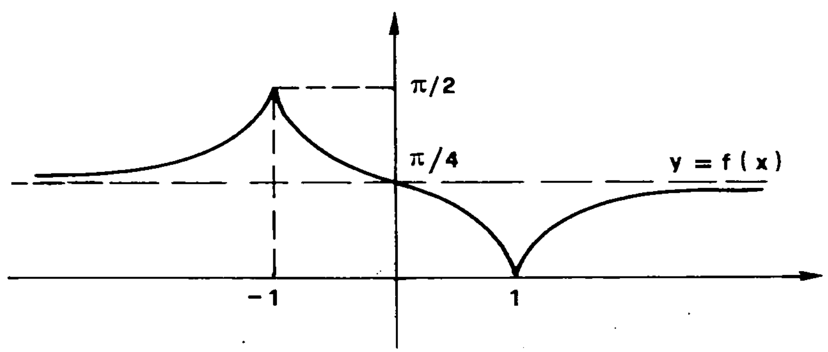

Figura 1

26. Se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste M_ϵ tale che

$$x \geqslant M_\epsilon \quad \Rightarrow \quad a - \epsilon < f(x) < a + \epsilon \ .$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Se $x \geqslant M_\epsilon$ si ha

$$(a-\epsilon) = \int_x^{x+1} (a-\epsilon)\,dt \leqslant \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+1} (a+\epsilon)\,dt = a+\epsilon \ ,$$

cioè

$$\left| a - \int_x^{x+1} f(t)\,dt \right| < \epsilon \qquad \text{per} \quad x \geqslant M_\epsilon \ .$$

Questo significa che

$$\lim_{x\to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = a \ .$$

Il viceversa non è vero: si pensi alla funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) \ .$$

Si ha

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \ ,$$

ma chiaramente f non ha limite per $x \to +\infty$.

27. Visto che la funzione logaritmo è crescente, basta provare la monotonia della successione

$$b_n = (1 + 2e^n)^{1/n^2} \ .$$

Si ha

$$b_{n+1} = (1 + 2e^{n+1})^{1/(n+1)^2} < e^{1/(n+1)^2} \, (1 + 2e^n)^{1/(n+1)^2} =$$

$$= b_n \, e^{1/(n+1)^2} \, (1+2e^n)^{-(2n+1)/n^2(n+1)^2} =$$

$$= b_n \left(\frac{e}{(1+2e^n)^{(2n+1)/n^2}} \right)^{1/(n+1)^2} <$$

$$< b_n \left(\frac{e}{(e^n)^{1/n}} \right)^{1/(n+1)^2} = b_n \, ,$$

quindi (b_n) ed (a_n) sono decrescenti. Inoltre

$$0 < a_n < \frac{\log(3e^n)}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{\log 3}{n^2} \, ,$$

pertanto $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

28. Se n è dispari, allora $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ e

$$P'(x) = x^n - 10 \, ,$$

per cui P' si annulla solo per $x = \sqrt[n]{10}$, e questo punto è ovviamente un punto di minimo assoluto. Resta da calcolare il valore minimo di P:

$$\min P = P(\sqrt[n]{10}) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot 10^{\frac{n+1}{n}} - 10 \cdot 10^{\frac{1}{n}} + 100 =$$

$$= 100 - \frac{n}{n+1} \cdot 10^{\frac{n+1}{n}}$$

Visto che $\dfrac{n+1}{n} \leqslant 2$, si ha

$$\min P \geqslant 100 - \frac{n}{n+1} \, 100 = \frac{100}{n+1} > 0 \, ,$$

quindi P è sempre strettamente positivo e non ha radici reali. Supponiamo invece che n sia pari: se $n = 0$, P ha l'unica radice $\dfrac{100}{9}$; se $n > 0$, è

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \, ,$$

quindi P ha almeno una radice reale. Inoltre la sua derivata P' si annulla solo per $x = \pm \sqrt[n]{10}$; il punto $x = -\sqrt[n]{10}$ è un massimo relativo, mentre $x = \sqrt[n]{10}$ è un minimo relativo: sappiamo già che $P(\sqrt[n]{10}) > 0$, quindi P non ha radici tra $-\sqrt[n]{10}$ e $+\infty$, e ne ha una (ed una sola, essendo crescente) tra $-\infty$ e $-\sqrt[n]{10}$. In questo caso, il grafico di P è:

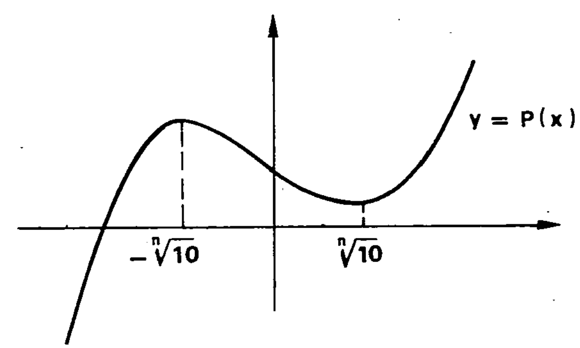

Figura 2

29. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$(\sqrt{x^2+y^2})^3 = x^3+y^3$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2 \ ,$$

quindi

$$y = \frac{1}{2} \quad ;$$

sostituendo nella prima equazione si trova successivamente

$$\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(x^3 + \frac{1}{8}\right)^2$$

$$x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{64} = x^6 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{64}$$

$$\frac{x^2}{16}\,(12x^2-4x+3) = 0$$

e quindi $x = 0$ oppure $12x^2 - 4x + 3 = 0$. Questa seconda equazione non ha soluzioni reali, quindi l'unico numero complesso che risolve il sistema è

$$z = \frac{i}{2} \ .$$

30. Supponiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 [f(x)]^n\,dx = +\infty$. Per la continuità di f

esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = \max\limits_{[0,1]} f(x)$. Dato che $f(x) \geqslant 0$, si ha anche $[f(x_0)]^n = \max\limits_{x\in[0,1]} [f(x)]^n$ per ogni n. Allora, dato che

$$\int_0^1 [f(x)]^n\,dx \leqslant \max_{[0,1]} [f(x)]^n \ ,$$

si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x_0)]^n = +\infty$, e ciò è possibile solo se $f(x_0) > 1$.

Viceversa, supponiamo che sia $f(x_0) > 1$ per qualche $x_0 \in [0,1]$ e sia $\epsilon = f(x_0) - 1$. Per la continuità di f esiste un intervallo aperto $]a,b[\ \subset [0,1]$, con $a < b$, tale che per ogni $x \in]a,b[$

$$f(x) \geqslant f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Allora

$$\int_0^1 [f(x)]^n\,dx \geqslant \int_a^b [f(x)]^n\,dx \geqslant (b-a)\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^n$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 [f(x)]^n\,dx = +\infty \ .$$

31. Per qualunque scelta di a, b, c la funzione è di classe C^∞ su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, pertanto basta esaminare il suo comportamento in 0. Dato che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \ldots = 0 \ ,$$

perchè f sia di classe C^k su tutto $\mathbf{R}$ occorrerà che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \ldots = \lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0 \ .$$

Ma

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1+b+c \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a+c \quad ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = -b + c \ ,$$

per cui:

f è continua se e solo se $1 + b + c = 0$;

f è di classe C^1 se e solo se

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} ;$$

f è di classe C^2 se e solo se

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} .$$

Quest'ultimo sistema ha solo la soluzione $a = \frac{1}{2}$, $b = c = -\frac{1}{2}$.

La funzione corrispondente

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - \cos x - e^x)$$

non è di classe C^3, poichè

$$\lim_{x\to 0^+} f'''(x) = -\frac{1}{2} \ .$$

Il massimo k per cui qualche f del tipo indicato è di classe C^k è dunque $k = 2$.

32. Osserviamo che la funzione $e^{|x|} - |x| + \cos x$ è pari, pertanto per trovare il suo minimo su **R** basta studiare il minimo per $x \geqslant 0$ della funzione

$$f(x) = e^x - x + \cos x$$

Si ha

$$f'(x) = e^x - 1 - \operatorname{sen} x$$

e

$$f''(x) = e^x - \cos x \geqslant 0 \ ,$$

quindi f' è crescente. Essendo $f'(0) = 0$, si ha

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \geqslant 0 \ ,$$

quindi anche f è crescente in $[0,+\infty[$, e infine

$$\inf_{x\geqslant 0} f(x) = f(0) = 2 \ .$$

La risposta è dunque $k = 2$.

33. (a) Ricordiamo che per ogni $t > 0$ si ha $\operatorname{sen} t < t$, quindi se $0 < x < \pi$ si ha

$$0 < \operatorname{sen} x < x$$

e inoltre

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x) < \pi - x \ .$$

Da queste due disuguaglianze segue che

$$0 < x_n < \pi \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \operatorname{sen} x_n > x_n > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \operatorname{sen} x_n < x_n + \pi - x_n = \pi \ , \end{cases}$$

quindi, essendo $0 < x_0 < \pi$, la (a) è provata per induzione.

(b) E' stata provata nel corso di (a).

(c) Da (a) e (b) segue che (x_n) ha limite finito L, che verifica $0 \leqslant L \leqslant \pi$ ed $L = L + \operatorname{sen} L$, cioè $\operatorname{sen} L = 0$. Dato che $x_n \geqslant x_0 > 0$, non può essere $L = 0$, quindi necessariamente $L = \pi$.

34. Sia T un periodo di f; basterà studiare f ristretta all'intervallo $[0,T]$. Poichè f è continua, esiste un punto $x_0 \in [0,T]$ di minimo per f, tale cioè che

$$f(x) \geqslant f(x_0) \qquad \text{per} \qquad 0 \leqslant x \leqslant T .$$

Naturalmente x_0 è di minimo per f su tutto $\mathbf{R}$, quindi, essendo f derivabile, si ha $f'(x_0) = 0$ e infine

$$f(x) \geqslant f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \geqslant 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

35. Usiamo i seguenti *sviluppi di Taylor*:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Allora

$$e^x + \frac{2 \log \cos x}{x^2} = 1 + x + o(x) + \frac{2}{x^2} \log \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 + x + o(x) + 2x^{-2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= x + o(x) .$$

Visto che $|\operatorname{sen} t| \leqslant 1$ per ogni t, si ha

$$|f(x)| \leqslant \frac{x + o(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) ,$$

dunque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

36. Osserviamo che è

$$(x_1)^2 = \left[\max\left\{\frac{1}{4}, a^2\right\}\right]^2 = \max\left\{\frac{1}{16}, a^4\right\} ,$$

cosicchè

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{4}, x_1^2\right\} = \max\left\{\frac{1}{4}, a^4\right\} ,$$

essendo ovviamente $\frac{1}{4} > \frac{1}{16}$.

Si dimostra facilmente per induzione che

$$x_n = \max\left\{\frac{1}{4}, a^{2^n}\right\} \qquad \forall n \geqslant 1 ,$$

e tenendo presente che è

$$\lim_{n\to\infty} a^{2^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } |a| = 1 \\ +\infty & \text{se } |a| > 1 \end{cases}$$

si può concludere come segue:

– se $|a| < 1$ è $x_n = \frac{1}{4}$ per n sufficientemente grande, quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{4}$;

– se $|a| = 1$, è $x_n = 1$ per ogni n, dunque $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$;

– se $|a| > 1$, è $x_n = a^{2^n}$ per ogni n, quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

37. (a) Poichè la funzione g è continua si ha $\lim_{x\to 0} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0$, quindi per il *teorema dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \,[g(x) + g(-x)] = 2 .$$

Allora la funzione f si può estendere con continuità nell'origine ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(b) Siccome f è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, basta controllare la derivabilità di $\tilde{f}$ in $x = 0$. Si ha

$$\frac{\tilde{f}(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} g(t)\,dt - 2\right] = \frac{1}{h^2}\left(\int_{-h}^{h} g(t)\,dt - 2h\right).$$

Applicando il *teorema dell'Hôpital*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(\int_{-h}^{h} g(t)\,dt - 2h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) + g(-h) - 2}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2} = 0 ,$$

quindi $\tilde{f}$ è derivabile anche in $x = 0$, e $\tilde{f}'(0) = 0$.

38. (a) Sia P un polinomio di grado n. Per ogni $x \geqslant n + 1$ si ha $x^x \geqslant x^{n+1}$, pertanto

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{|P(x)|}{x^x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{|P(x)|}{x^{n+1}} = 0 .$$

Quindi non può essere vero che $P(x) = x^x$ per ogni x.

(b) Siano Q, R non costanti, e sia P un polinomio tale che $P(x) = [Q(x)]^{R(x)}$. Dall'ipotesi $Q > 0$ segue che

$$Q(x) \geqslant cx \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

per opportuni valori di $c > 0$ ed $x_0 \geqslant 0$. In particolare,

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty .$$

Per quanto riguarda R, si hanno due casi:

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = -\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to+\infty} R(x) = +\infty .$$

Nel primo caso è

$$\lim_{x\to+\infty} [Q(x)]^{R(x)} = 0 \quad ,$$

quindi deve essere $P = 0$, da cui necessariamente $Q = 0$, assurdo. Nel secondo caso, indicato con n il grado di P, si ha $R(x) \geqslant n+1$ per x abbastanza grande, quindi

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{|P(x)|}{[Q(x)]^{R(x)}} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{|P(x)|}{c^{n+1}\, x^{n+1}} = 0 \ ,$$

contro l'ipotesi che $P(x) = [Q(x)]^{R(x)}$.

39. L'esercizio si risolve facilmente osservando che

$$a_n = \frac{1}{2n} + \frac{(n-\sqrt{n^2+1})\,(n+\sqrt{n^2+1})}{(n+\sqrt{n^2+1})} =$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{(n+\sqrt{n^2+1})-2n}{2n\,(n+\sqrt{n^2+1})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n\,(n+\sqrt{n^2+1})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)\,(\sqrt{n^2+1}+n)}{2n\,(n+\sqrt{n^2+1})^2} =$$

$$= \frac{1}{2n\,(n+\sqrt{n^2+1})^2} \ .$$

Il denominatore di questa frazione cresce e tende a $+\infty$ al crescere di n, pertanto la successione (a_n) è decrescente ed ha limite zero. Per la monotonia di (a_n) si ha allora

$$\begin{cases} \sup a_n = a_1 = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} \\ \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ . \end{cases}$$

40. Se scriviamo $z = x+iy$ si ha

$$Im\,(z^3 - 3z + i) = 3x^2y - y^3 - 3y + 1 \ ,$$

e occorre provare che se $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{4}$ questa quantità non può essere nulla: infatti,

$$3x^2y - y^3 - 3y + 1 = 1 + y\,(3x^2 - y^2 - 3) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + y\left(-\frac{1}{16} - 3\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{49}{16}\right) > 0 \ .$$

41. Osserviamo che $0 < e^{-t^2} \leqslant 1$ per ogni t. Siccome $x_1 > 0$ e

$$x_n > 0 \;\Rightarrow\; x_{n+1} = \int_0^{x_n} e^{-t^2}\, dt > 0 \,,$$

si deduce per induzione che la successione (x_n) è positiva. Allora

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} e^{-t^2}\, dt \leqslant \int_0^{x_n} 1\, dt = x_n \quad ,$$

quindi (x_n) è monotona non crescente ed ammette limite $L \geqslant 0$. Questo numero deve verificare la relazione

$$L = \int_0^L e^{-t^2}\, dt \,.$$

Se fosse $L > 0$, dal *teorema del valor medio integrale* si otterrebbe $L = L\, e^{-\xi^2}$, con $0 < \xi < L$, ma ciò implica $e^{-\xi^2} = 1$, ovvero $\xi = 0$, il che è impossibile. Ne segue che il limite cercato L è zero.

42. (a) Si ha naturalmente $f(0) = 0$ e d'altra parte dall'ipotesi su f segue $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, quindi f è continua in zero.

(b) Generalmente no: consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ -x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \,. \end{cases}$$

Tale funzione non è continua in alcun punto tranne lo zero.

(c) Sappiamo già che $f(0) = 0$. Allora

$$0 \leqslant \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \frac{|f(h)|}{|h|} \leqslant \frac{h^2}{|h|} = |h| \,,$$

quindi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

43. (a) Cominciamo ad osservare che per ogni $x > 0$ si ha

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \,,$$

quindi

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt \qquad \forall x > 0 \,.$$

Dal fatto che $\dfrac{e^t - 1}{t} > 0$ per ogni $t > 0$ si deduce che $f(x) > 0$ per $x < 1$ e $f(x) < 0$ per $x > 1$. Inoltre

$$f'(x) = -\frac{e^x - 1}{x} < 0 \qquad \forall x > 0 \,,$$

cioè f è decrescente.

Esaminiamo infine il comportamento di f per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$: ricordando che $e^t \geqslant 1 + t$ per ogni t, si ha $\dfrac{e^t - 1}{t} \geqslant 1$ per ogni $t > 0$, quindi

$$f(x) = -\int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt \leqslant -(x-1) \qquad \forall x \geqslant 1 \,,$$

pertanto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Dall'espressione di f' si deduce inoltre che $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.

Poniamo ora

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{se} \quad t > 0 \\ 1 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases} .$$

La funzione φ è continua su $[0, +\infty[$ e

$$f(x) = \int_x^1 \varphi(t)\, dt ,$$

per cui

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt < +\infty \quad ;$$

inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\varphi(0) = -1 .$$

Un grafico approssimativo di f è allora:

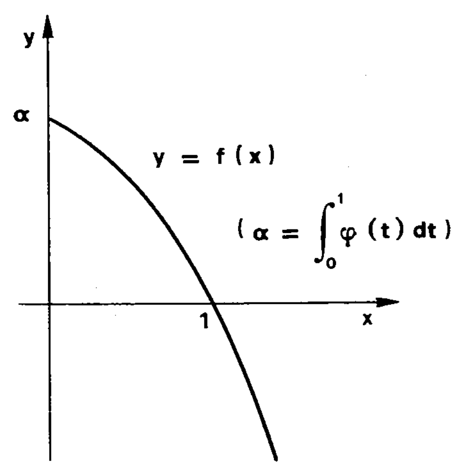

Figura 3

(b) Per prolungare in modo continuo f a $[0, +\infty[$ basta porre

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, dt & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Per quanto visto in (a), $\tilde{f}$ risulta continua; essendo poi

$$\tilde{f}(x) = \int_x^1 \varphi(t)\, dt$$

con φ continua, per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* $\tilde{f}$ è anche derivabile (da destra) in 0, e la sua derivata è continua su $[0, +\infty[$.

44. E' facile ottenere in forma esplicita l'elemento n-esimo della successione: notando che

$$a_2 = a_1 \;,\; a_3 = \sqrt{2}\, a_1 \;,\; a_4 = \sqrt{6}\, a_3 \;, \ldots,$$

si dimostra per induzione che

$$a_{n+1} = \sqrt{n!}\quad a_1 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\frac{a_{(n^2)}}{(a_n)^2} = \frac{\sqrt{(n^2-1)!}\; a_1}{(n-1)!\; a_1^2} = \frac{1}{a_1}\; \frac{\sqrt{(n^2-1)\;\ldots\; n}}{\sqrt{(n-1)\;\ldots\; 1}} =$$

$$= \frac{1}{a_1}\sqrt{(n^2-1)\ \dots\ (2n-1)\ \ \frac{2n-2}{n-1}\ \ \dots\ n}\ .$$

Per $n \geqslant 2$ tutti i fattori del prodotto sotto la radice sono maggiori di uno, quindi

$$\sqrt{(n^2-1)\ \dots\ (2n-1)\ \ \frac{2n-2}{n-1}\ \ \dots\ n} \geqslant \sqrt{n^2-1}$$

e si conclude subito che il limite cercato è $+\infty$.

45. (a) Si tratta di stabilire per quali $w \in \mathbf{C}$ l'equazione $f(z) = w$ ha almeno una soluzione $z \in \mathbf{C}$. Se $w = 0$, si potrà ovviamente scegliere $z = 0$. Se invece $w \neq 0$, si cerca $z \neq 0$ tale che

$$\frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|} = w\ ,$$

cioè, ponendo $z = x + iy$, si voule stabilire per quali $w \in \mathbf{C}$ esistono $x, y \in \mathbf{R}$ tali che

$$w = \frac{(z+\bar{z})\,(z-\bar{z})}{|z|} = \frac{2Re\,z \cdot 2i\,Im\,z}{|z|} = 4i\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Intanto w deve essere un numero immaginario puro, cioè $w = ib$ con b reale. In tal caso esistono infinite coppie (x,y) tali che

$$b = \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ad esempio $\quad x = \dfrac{b\sqrt{2}}{4}\ ,\quad y = \dfrac{|b|\sqrt{2}}{4}\ .$

L'immagine di f è dunque l'asse immaginario.
(b) La funzione f non è iniettiva: basta osservare che se z è reale oppure immaginario puro si ha $f(z) = 0$.
(c) La funzione f è continua in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, perché è composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la continuità in $z = 0$ si osservi che

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z^2| + |\bar{z}^2|}{|z|} = 2\,|z|\,,$$

quindi $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$ ed f è continua anche in 0.

46. Se f è periodica di periodo T si ha

$$f(x) = f(x+T) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

e quindi, derivando,

$$f'(x) = f'(x+T) \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè f' è periodica.
Viceversa, supponiamo che f' sia periodica di periodo T. Se, per assurdo, f non fosse periodica di periodo T, dovrebbe esistere un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che

$$f(x_0) \neq f(x_0+T)\ .$$

Poniamo $c = f(x_0+T) - f(x_0)$. Allora, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$f(x_0+nT) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+nT} f'(t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0+(i-1)T}^{x_0+iT} f'(t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + n \int_{x_0}^{x_0+T} f'(t)\,dt = f(x_0) + nc \quad ,$$

ma ciò è assurdo perchè il primo membro è limitato mentre il secondo tende a $+\infty$ o $-\infty$ per $n \to \infty$.

47. (a) Si noti che, se $x > 1$, si ha

$$x^n > 1 \geqslant \cos \frac{x}{n} \quad ,$$

quindi basta considerare la funzione

$$f_n(x) = x^n - \cos \frac{x}{n}$$

sull'intervallo $[0,1]$. Si ha

$$f_n(0) = -1$$

$$f_n(1) = 1 - \cos \frac{1}{n} > 0$$

e inoltre

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} > 0 \qquad \forall x \in \,]0,1[\;,$$

quindi f_n ha uno ed un solo zero in $[0,1]$. Questo punto è la soluzione x_n dell'equazione data.

(b) Dalla dimostrazione precedente segue che $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

(c) Dato che la funzione $x \mapsto \cos \dfrac{x}{n}$ è decrescente su $[0, 1]$ e ricordando che $0 < \cos 1 < 1$, si ha

$$1 \geqslant x_n = \sqrt[n]{\cos \frac{x}{n}} \geqslant \sqrt[n]{\cos \frac{1}{n}} \geqslant \sqrt[n]{\cos 1} \;;$$

d'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos 1} = 1 \;,$$

quindi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

48. La funzione f_0 è continua. Si dimostra poi per induzione che ognuna delle funzioni f_n è continua. Allora la funzione f è continua tranne eventualmente che nei punti $1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots$. Dimostriamo la continuità di f in questi punti cominciando dal punto $x = 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_0(x) = 3$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2} f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{7-x^2}{2} = 3,$$

quindi f è continua in 1.
Osserviamo ora che

$$\lim_{x\to (2^n)^-} f(x) = \lim_{x\to (2^n)^-} f_n(x) = \lim_{x\to (2^n)^-} \frac{1}{2} f_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to (2^{n-1})^-} \frac{1}{2} f_{n-1}(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to (2^{n-1})^-} f(x)$$

mentre

$$\lim_{x\to (2^n)^+} f(x) = f(2^n) = f_{n+1}(2^n) = \frac{1}{2} f_n(2^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to (2^{n-1})^+} f(x),$$

quindi f è continua in 2^n se e solo se lo è in 2^{n-1}. Allora, per induzione, f è continua in 2^n per ogni $n \in \mathbf{N}$.

49. Si ha facilmente

$$a_n = (\operatorname{sen} n) \frac{2n + \log(5e^{-2n} + 1)}{n^\alpha}$$

$$= (\operatorname{sen} n) \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left[2 + \frac{\log(5e^{-2n} + 1)}{n}\right]$$

Osserviamo ora che

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} (\operatorname{sen} n) = -1 \quad , \quad \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} (\operatorname{sen} n) = 1 \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[2 + \frac{\log(5e^{-2n} + 1)}{n}\right] = 2 \quad .$$

Possiamo dunque concludere che

– se $\alpha > 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dunque (a_n) ha limite ed è limitata;

– se $\alpha = 1$ si ha $\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n = -2$ e $\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n = 2$, dunque (a_n) non ha limite ma è limitata;

– se $\alpha < 1$ si ha $\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$ e $\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$, dunque (a_n) non ha limite nè è limitata.

0. Osserviamo che per $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\log[(1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}]}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x \log(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \cos x \log(1 + \operatorname{sen} x)$$

Effettuando la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$, si ha

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\log[(1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}]}{\operatorname{tg} x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x \log(1 + \operatorname{sen} x)\, dx$$

$$= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \log(1 + t)\, dt = [(1 + t)\log(1 + t) - t]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \log\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

51. Utilizzando gli *sviluppi di Taylor*

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \, ,$$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

si ottiene

$$(\sqrt{e})^{\operatorname{sen}x} = e^{\frac{\operatorname{sen}x}{2}} = 1 + \frac{\operatorname{sen}x}{2} + o(\operatorname{sen}x) ,$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x\sqrt{x}) ,$$

$$[\log(1+\sqrt{x})]^2 = [\sqrt{x} + o(\sqrt{x})]^2 = x + o(x)$$

quindi

$$\frac{(\sqrt{e})^{\operatorname{sen}x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x})]^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + o(\operatorname{sen}x) - 1 + \frac{x}{2} + o(x\sqrt{x})}{x + o(x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{x + \operatorname{sen}x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{1}{2} \; \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}x}{x} + o(1)}{1 + o(1)} ;$$

pertanto il limite proposto è uguale ad 1.

52. Per $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ si ha $0 \leqslant \operatorname{tg}x \leqslant 1$, quindi

$$0 \leqslant (\operatorname{tg}x)^{n+1} \leqslant (\operatorname{tg}x)^n \qquad \forall n \in \mathbf{N} \;, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ne segue che

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \qquad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Se ora $n \geqslant 3$, si ha

$$a_n + a_{n-2} = \int_0^{\pi/4} [(\operatorname{tg}x)^n + (\operatorname{tg}x)^{n-2}]\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg}x)^{n-2}\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

ed effettuando il cambiamento di variabile $\operatorname{tg} x = t$ si ottiene

$$a_n + a_{n-2} = \int_0^1 t^{n-2}\, dt = \left[\frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{n-1} .$$

Siccome (a_n) è decrescente e limitata inferiormente, essa ha limite finito L. Passando al limite per $n \to \infty$ nell'uguaglianza $a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ si ottiene $2L = 0$, quindi

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Quest'ultimo risultato si poteva provare direttamente osservando che, per la convessità della funzione $\operatorname{tg} x$ su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, si ha

$$0 \leqslant \operatorname{tg}x \leqslant \frac{4}{\pi}x \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

quindi

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^n dx = \frac{\pi}{4(n+1)} .$$

53. Poichè $x \geqslant \operatorname{sen} x$ per ogni $x > 0$, basterà dimostrare che

$$x^x \geqslant x \qquad \forall x > 0$$

ovvero

$$(x-1)\log x \geqslant 0 \qquad \forall x > 0 \ .$$

Ed infatti, se $x < 1$, allora $x - 1 < 0$ e $\log x < 0$, mentre se $x \geqslant 1$, allora $x - 1 \geqslant 0$ e $\log x \geqslant 0$.

54. Si noti che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x^n}\right) = +\infty \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

quindi ovviamente $\sup A = +\infty$.
Per calcolare l'estremo inferiore, cominciamo ad osservare che per ogni $x > 0$ ed ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$x + \frac{1}{x^n} \geqslant \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad , \quad x + \frac{1}{x^n} \geqslant x \quad ,$$

dunque, sia per $0 < x \leqslant 1$ sia per $x \geqslant 1$, si ha $x + \dfrac{1}{x^n} \geqslant 1$. D'altra parte, se scegliamo $x = \sqrt[n]{n}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad ,$$

pertanto $\inf A = 1$.
Un altro modo di procedere potrebbe essere quello di calcolare il valore minimo della funzione

$$f_n(x) = x + \frac{1}{x^n}$$

per $x > 0$, attraverso lo studio della sua derivata prima, e dimostrare che tale valore minimo tende ad 1 per $n \to \infty$.

55. Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1 - \cos\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad ,$$

basta calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{2} + e^x\right)}{x^2} \ .$$

Ora

$$\log\left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{2} + e^x\right) = x + \log\left(1 + \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{2e^x}\right),$$

quindi il limite proposto è zero.

56. (a) Osserviamo che $a_1 = \lambda \geqslant 0$ e che $a_n \geqslant 0$ implica $a_{n+1} \geqslant 0$, pertanto per induzione si è provato che

$$a_n \geqslant 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N} \ .$$

Ma allora $1 + a_n \geqslant 1$, quindi

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \leqslant a_n$$

e la successione, essendo non crescente e limitata inferiormente, ammette un limite finito $L \geqslant 0$, che deve verificare l'uguaglianza

$$L = \frac{L}{L+1} .$$

Il limite della successione è dunque uguale a zero.

(b) Osserviamo subito che, se $a_1 = -1$, allora a_2 non è definito, quindi occorre che sia $\lambda \neq -1$. Analogamente, se $a_1 = -\frac{1}{2}$, si ha $a_2 = -1$ ed a_3 non è definito, quindi deve essere $\lambda \neq -\frac{1}{2}$.
E' facile vedere che

$$\frac{x}{1+x} = -\frac{1}{k} \iff x = -\frac{1}{k+1} ,$$

pertanto la successione è ben definita se e solo se λ non è un numero della forma $-\frac{1}{k}$ con $k \in \mathbf{N}$.
Se $\lambda < -1$, si ha $a_2 > 0$ e si possono applicare per $n \geqslant 2$ i ragionamenti del punto (a), ottenendo che il limite di (a_n) è zero.
Rimane da trattare solo il caso $-1 < \lambda < 0$, con $\lambda \notin \{-\frac{1}{k} : k \in \mathbf{N}\}$.
Notiamo che

$$-1 < x < -\frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{x}{1+x} < -\frac{1}{k} ,$$

quindi si ottiene facilmente per induzione che

$$-\frac{1}{k} < a_1 < -\frac{1}{k+1} \Rightarrow a_{k+1} < -1 \Rightarrow a_{k+2} > 0$$

per ogni $k \in \mathbf{N}$.
Applicando la parte (a), si ottiene di nuovo che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

57. Osserviamo innanzitutto che la funzione $h(t) = t \log t$ ha minimo per $t = \frac{1}{e}$, e tale minimo vale $-\frac{1}{e}$; allora,

$$1 + t \log t \geqslant 1 - \frac{1}{e} > 0$$

per ogni $t > 0$. Inoltre $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$. Poniamo allora

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t\log t} & \text{per } t > 0 \\ 1 & \text{per } t = 0 \end{cases} ;$$

la funzione g è continua su $\mathbf{R}^+$, ed $f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt$. Dato che $g(t) > 0$ per ogni $t \geqslant 0$, la funzione f è non negativa su $\mathbf{R}^+$.

Poichè

$$f(x) = \int_0^{2x} g(t)\,dt - \int_0^{x} g(t)\,dt ,$$

per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* si ha per $x > 0$

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) =$$

$$= \frac{2}{1+2x\log(2x)} - \frac{1}{1+x\log x} =$$

$$= \frac{1-2x\log 2}{(1+2x\log(2x))\,(1+x\log x)} .$$

Ne segue che $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ e che

$$f'(x) > 0 \iff x < \frac{1}{2\log 2} ,$$

quindi $x_0 = \dfrac{1}{2\log 2}$ è punto di massimo per f. Osserviamo infine che, per $t \geqslant \dfrac{1}{e}$, la funzione h è crescente, quindi per $x \geqslant \dfrac{1}{e}$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+h(t)}\,dt \leqslant \frac{2x-x}{1+h(x)}\ ,$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x\log x} = 0\ .$$

Un grafico approssimativo di f è allora

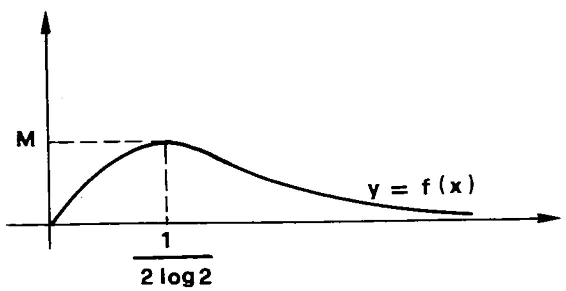

Figura 4

Dato che $f(x) \leqslant M = f\left(\dfrac{1}{2\log 2}\right)$ per ogni $x \geqslant 0$, per trovare l'intero k occorre valutare M.

Osserviamo che $\dfrac{1}{2\log 2} > \dfrac{1}{e}$, perché $\log 2 < 1 < \dfrac{e}{2}$. Allora, per la crescenza della funzione $h(t)$ in $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ si ha

$$M = \int_{\frac{1}{2\log 2}}^{\frac{1}{\log 2}} \frac{1}{1+h(t)}\,dt \leqslant \int_{\frac{1}{2\log 2}}^{\frac{1}{\log 2}} \frac{1}{1+h\left(\dfrac{1}{2\log 2}\right)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\log 2 - \log\log 2}$$

Essendo $\log x \leqslant x-1$ per ogni $x > 0$, si ha

$$\log\log 2 \leqslant \log 2 - 1$$

e quindi $\log 2 - \log\log 2 \geqslant 1$, da cui $M \leqslant 1$. Essendo d'altra parte $M > 0$, l'intero cercato è $k = 1$.

58. Supponiamo per assurdo che sia $L > 0$: allora esiste $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \geqslant x_0$

$$f(x) \geqslant \frac{L}{2}$$

e quindi

$$f''(x) \leqslant -\frac{L}{2} \qquad \text{per ogni} \quad x \geqslant x_0\ .$$

Da ciò segue che per $x \geqslant x_0$

$$f'(x) = f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant f'(x_0) + \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{L}{2}\right)dt =$$

$$= f'(x_0) - \frac{L}{2}(x-x_0)$$

da cui, integrando di nuovo,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left[f'(x_0) - \frac{L(t-x_0)}{2} \right] dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \frac{L}{4}(x-x_0)^2$$

per ogni $x \geqslant x_0$. Questo implica

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\ ,$$

che è assurdo.

59. Poichè $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1$, basterà calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} - \frac{1}{3} \right].$$

Dato che

$$\frac{1}{n}\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\ ,$$

il limite cercato è $\frac{1}{e} - \frac{1}{3}$.

60. Con una integrazione per parti si ottiene

$$\int_0^x e^{-t^2}(1-2t^2)\,dt = \int_0^x e^{-t^2}\,dt - \int_0^x 2t^2 e^{-t^2}\,dt =$$

$$= [t\,e^{-t^2}]_0^x + \int_0^x 2t^2 e^{-t^2}\,dt - \int_0^x 2t^2 e^{-t^2}\,dt =$$

$$= x\,e^{-x^2}\ .$$

61. (a) Per studiare la monotonia di (a_n), consideriamo la funzione $f(x) = e^{x/e}$, e vediamo per quali $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) \geqslant x$. Se poniamo $g(x) = f(x) - x$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty\ ,$$

e inoltre

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{e}\,e^{x/e} - 1\ ,$$

per cui $g'(x) = 0$ se e solo se $e^{x/e} = e$, ovvero $x = e$. Ne segue che e è il punto di minimo di g e quindi

$$g(x) \geqslant g(e) = 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$; allora

$$f(x) \geqslant x$$

per ogni x, e in particolare $a_{n+1} = f(a_n) \geqslant a_n$ cosicché la successione (a_n) è monotona non decrescente.
Se ne deduce che (a_n) ha limite $+\infty$, oppure ha per limite un numero L tale che $L = e^{L/e}$, cioè $g(L) = 0$, e quindi necessariamente $L = e$.

Per la crescenza di f, si ha

$$a_n \leqslant e \Rightarrow a_{n+1} = f(a_n) \leqslant f(e) = e.$$

quindi se $\lambda \leqslant e$ sarà $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. Se invece $\lambda > e$, allora $a_n > e$ per ogni n, quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

(b) Anche qui studiamo la funzione g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da

$$g(x) = b^x - x .$$

Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, e

$$g'(x) = (\log b)\, b^x - 1 ,$$

quindi il punto di minimo di g è

$$x_0 = -\frac{\log(\log b)}{\log b} .$$

Per studiare il segno di g, bisogna stabilire il segno di

$$g(x_0) = \frac{1}{\log b} + \frac{\log(\log b)}{\log b} .$$

Si vede facilmente che

$$g(x_0) \geqslant 0 \iff b \geqslant e^{\frac{1}{e}} ,$$

quindi, se $b \geqslant e^{\frac{1}{e}}$, la successione (a_n) è monotona non decrescente, e dunque ammette limite finito o infinito. Più complesso è il caso $1 < b < e^{\frac{1}{e}}$: in tal caso, infatti, $g(x_0) < 0$ dunque esistono due numeri x_1, x_2 con $0 < x_1 < x_0 < x_2$, tali che

$$g(x_1) = g(x_2) = 0 \quad , \quad g(x) < 0 \iff x_1 < x < x_2$$

Distinguiamo allora tre casi:

– se $\lambda \leqslant x_1$, allora

$$a_n \leqslant x_1 \Rightarrow a_{n+1} = f(a_n) \leqslant f(x_1) = x_1 ;$$

inoltre $a_{n+1} - a_n = g(a_n) \geqslant 0$, quindi (a_n) è monotona non decrescente, superiormente limitata da x_1 e pertanto converge ad un limite finito $L \leqslant x_1$ che verifica $g(L) = 0$, cioè

$$a_n \longrightarrow x_1 ;$$

– se $x_1 < \lambda < x_2$, con ragionamenti analoghi si prova che $x_1 < a_n < x_2$, che (a_n) è monotona decrescente e quindi che

$$a_n \longrightarrow x_1 ;$$

– se $\lambda = x_2$, è $a_n = x_2$ per ogni n;

– se $\lambda > x_2$, la successione (a_n) è crescente e quindi ha limite; poichè il suo limite non può essere x_1 nè x_2, è necessariamente

$$a_n \longrightarrow +\infty .$$

62. Sia λ un numero compreso tra $l = \min\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ed $L = \max\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (l o L o entrambi possono anche non essere finiti). Se è $\lambda = l$ o $\lambda = L$, il risultato è ben noto. Se $l < \lambda < L$, basterà dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \forall m \in \mathbf{N} \quad n \geqslant m : |x_n - l| < \epsilon .$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ ed $m \in \mathbf{N}$: non è restrittivo supporre che sia

$$l < \lambda - \epsilon < \lambda + \epsilon < L \quad , \quad m > \frac{1}{2\epsilon} .$$

Scegliamo ora $n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ tali che

$$n_2 \geqslant n_1 > m \quad , \quad x_{n_1} < \lambda - \epsilon < \lambda + \epsilon < x_{n_2} \ ;$$

questo è possibile perché $\operatorname{minlim}_{n\to\infty} x_n < \lambda - \epsilon$ e $\operatorname{maxlim}_{n\to\infty} x_n > \lambda + \epsilon$.

Poniamo

$$n = \max \left\{ k \in \mathrm{N}: \ n_1 \leqslant k \leqslant n_2 \quad , \quad x_k \leqslant \lambda - \epsilon \right\} .$$

Allora $n < n_2$, quindi $x_{n+1} > \lambda - \epsilon$. D'altra parte

$$x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n} \leqslant \lambda - \epsilon + \frac{1}{m} < \lambda - \epsilon + 2\epsilon = \lambda + \epsilon$$

e la tesi è dimostrata.

63. Sia h, con $0 \leqslant h \leqslant 2r$, l'altezza di un cono contenuto in una sfera di raggio r. Per avere il volume massimo converrà scegliere come raggio di base $R = \sqrt{(2r - h)\, h}$, in modo che il cono risulti inscritto nella sfera (si osservi che R è l'altezza del triangolo rettangolo SPQ sull'ipotenusa).

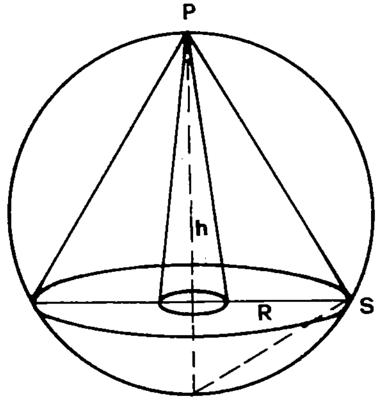

Figura 5

Il volume del cono sarà allora

$$V(h) = \frac{1}{3}\, \pi h^2 (2r - h)$$

e della funzione $V(h)$ vogliamo trovare il massimo in $[0,2r]$. Perchè $V(0) = V(2r) = 0$, basta esaminare

$$V'(h) = \frac{1}{3}\, \pi h\, (4r - 3h) \ .$$

Il massimo di V viene allora assunto per $h = \frac{4}{3}\, r$ ed è

$$V\left(\frac{4}{3}\, r\right) = \frac{32}{81}\, \pi r^3 \ .$$

64. (a) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ 2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\ 2\ \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \quad ,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} (n\ 2^n - n!\ ) = \lim_{n\to\infty}\ n! \left(\frac{n\, 2^n}{n!} - 1\right) = -\infty \ .$$

Ne segue che l'estremo superiore cercato è un massimo, e per trovarlo basta esaminare quegli n (sono solo un numero finito) per cui

$$x_n = n\, 2^n - n! > 0 \ .$$

Osserviamo che

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 6 \quad , \quad x_3 = 18 \quad ,$$

$$x_4 = 40\ , \quad x_5 = 40\ , \quad x_6 = -336\ .$$

Se riusciamo a dimostrare che

(*) $\qquad x_n \leqslant 0 \qquad$ per ogni $\quad n \geqslant 6$

potremo concludere che $\sup_{n \geqslant 1} x_n = 40$. Dimostriamo (*) per induzione: se $n \geqslant 6$ e $x_n \leqslant 0$, si ha

$$x_{n+1} = (n+1)\ 2^{n+1} - (n+1)! = (n+1)(2\ 2^n - n!\ ) \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)(n\ 2^n - n!\ ) = (n+1)x_n \leqslant 0\ ,$$

e la (*) è provata.

(b) Ragionando come in (a), si vede che $\lim_{k \to \infty} (n2^k - k!) = -\infty$, quindi l'estremo superiore $\{n2^k - k! : k \in \mathbf{N}\}$ è un massimo, e va cercato tra i k per cui $n2^k - k! > 0$. Se $n \geqslant 6$ e $k \geqslant n$, per la parte (a) si ha

$$n\ 2^k - k! \leqslant k\ 2^k - k! < 0\ ,$$

per cui

$$a_n = \max\left\{n\ 2^k - k!\ :\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\} \qquad \forall n \geqslant 6\ .$$

In particolare per $k = 1$ si ha

$$a_n \geqslant 2n - 1 \qquad \forall n \geqslant 6\ ,$$

cosicché $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Inoltre

$$0 \leqslant a_n \leqslant n\ 2^n \qquad \forall n \geqslant 6\ ,$$

quindi $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{3^n} = 0$.

65. Cominciamo a calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \int_1^x e^{1/t}\ dt\right) .$$

Ricordando che $e^s \geqslant 1 + s$ per ogni $s \in \mathbf{R}$, si ha

$$\int_1^x e^{1/t}\, dt \geqslant \int_1^x 1 + \frac{1}{t}\ dt = x - 1 + \log x$$

per ogni $x \geqslant 1$, quindi

$$x - \int_1^x e^{1/t}\ dt \leqslant 1 - \log x\ \ ,$$

per cui

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \int_1^x e^{1/t}\ dt\right) = -\infty\ .$$

Possiamo allora applicare al limite proposto il *teorema dell'Hôpital* ottenendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \displaystyle\int_1^x e^{1/t}\, dt}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{1/x}}{1/x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - e^y}{y} = -1.$$

66. (a) Si noti che per ogni $x \neq 0$

$$f''(x) + [f'(x)]^2 = \frac{1 - e^{-x}}{x} > 0\ .$$

Per $x = 0$ si ha, dato che f è di classe C^2,

$$f''(0) + [f'(0)]^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1 ,$$

quindi

$$f''(x) + [f'(x)]^2 > 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se f avesse un massimo relativo in un punto x_0, si dovrebbe avere

$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) \leqslant 0 ,$$

e quindi

$$f''(x_0) + [f'(x_0)]^2 \leqslant 0$$

che è assurdo.

(b) Notiamo anzitutto che, posto $g(x) = e^{f(x)}$, si ha

$$g''(x) = e^{f(x)} \left(f''(x) + [f'(x)]^2\right) = e^{f(x)} \frac{1-e^{-x}}{x}$$

per ogni $x \neq 0$.
Se, per assurdo, f fosse limitata, avremmo che

$$\lim_{x\to-\infty} g''(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{f(x)} \frac{1-e^{-x}}{x}\right) = +\infty$$

quindi esisterebbe $x_0 < 0$ tale che $g''(x) \geqslant 1$ per ogni $x \leqslant x_0$. Integrando due volte tra x e x_0 tale disuguaglianza, si ottiene

$$g(x) \geqslant g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

per ogni $x \leqslant x_0$, e da ciò segue

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log g(x) = +\infty$$

in contraddizione con l'ipotesi che f è limitata.

67. Dobbiamo dimostrare che

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} \leqslant |x-y| .$$

Se $x \leqslant y$, la tesi è banale; se $x > y$, posto

$$f(t) = \sqrt{1+t^2}$$

esiste per il *teorema di Lagrange* un punto $\xi \in]y,x[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \leqslant 1 ,$$

quindi

$$f(x) - f(y) \leqslant x - y = |x-y| .$$

68. (a) Effettuando nell'integrale la sostituzione $x^2 = t$ si ottiene

$$2^k \int_0^{\pi/2} x e^{-kx^2} dx = 2^k \int_0^{\pi^2/4} \frac{1}{2} e^{-kt} dt =$$

$$= 2^{k-1} \left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^{\pi^2/4} = \frac{2^{k-1}}{k} (1 - e^{-k\pi^2/4}) .$$

Dato che $\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{k-1}}{k} = +\infty$ mentre $\lim_{k\to+\infty} e^{-k\pi^2/4} = 0$, il limite cercato è $+\infty$.

(b) Nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione sen x è concava, quindi il suo grafico sta al di sopra del segmento congiungente i suoi punti di ascissa 0 e $\frac{\pi}{2}$, cioè

$$\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi} x \qquad \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Siccome $e^{-kx^2} > 0$, ne segue che

$$2^k \int_0^{\pi/2} e^{-kx^2} \operatorname{sen} x \, dx \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot 2^k \int_0^{\pi/2} x \, e^{-kx^2} \, dx$$

e per (a) anche il secondo limite è $+\infty$.

69. (a) Usiamo lo sviluppo di Taylor di e^x arrestato al termine di secondo grado, cioè

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^{\xi_x} \quad , \quad \text{con } 0 < \xi_x < x \ .$$

Calcolando in $x = \frac{1}{e}$ si ottiene

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e}\right)^3 e^{\xi}$$

con $0 < \xi < \frac{1}{e}$. Poichè $e > \frac{5}{2}$, si ha $\frac{1}{e} < \frac{2}{5}$, e allora

$$e^{\frac{1}{e}} \leqslant 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{25} + \frac{1}{6}\,\frac{8}{125} \cdot e^{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{37}{25} + \frac{4}{3 \cdot 125} e^{1/e} \ .$$

Da ciò si deduce

$$1 - \frac{4}{3 \cdot 125} e^{1/e} \leqslant \frac{37}{25}$$

da cui

$$e^{1/e} \leqslant \frac{37}{25}\,\frac{3 \cdot 125}{371} = 15 \cdot \frac{37}{371} < \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \, .$$

(b) La funzione $f(x) = x^{1/x} = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)$ vale 1 per $x = 1$, vale $\sqrt[3]{3}$ per $x = 3$ e la sua derivata

$$f'(x) = x^{1/x} \left(\frac{1 - \log x}{x^2}\right) ,$$

si annulla solo per $x = e$. Allora la funzione f ha valore massimo uguale ad $e^{1/e}$ e si ha

$$1 \leqslant x^{1/x} \leqslant e^{1/e} \qquad \forall \, x \in [1,3]$$

e anche, ricordando la parte (a),

$$2 = \int_1^3 1 \, dx \leqslant \int_1^3 x^{1/x} \, dx \leqslant \int_1^3 e^{1/e} \, dx = 2e^{1/e} < 3 \ .$$

La parte intera cercata è dunque 2.

70. Poichè

$$f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = [f(n+1) - f(n)] - [f(n) - f(n-1)],$$

esistono per il *teorema di Lagrange* due punti ξ_n ed η_n, con $n - 1 < \xi_n < n < \eta_n < n + 1$, tali che

$$f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = f'(\eta_n) - f'(\xi_n) \ .$$

Applicando di nuovo il *teorema di Lagrange,* ma stavolta ad f', si ottiene che nell'intervallo $]\xi_n, \eta_n[$ esiste un punto τ_n tale che

$$f'(\eta_n) - f'(\xi_n) = (\eta_n - \xi_n) f''(\tau_n) .$$

Basta ora osservare che $\eta_n - \xi_n < (n+1) - (n-1) = 2$ per concludere che

$$|f(n+1) - 2f(n) + f(n-1)| = (\eta_n - \xi_n)|f''(\tau_n)| \leqslant 2|f''(\tau_n)|,$$

quindi il limite richiesto è zero perchè $\tau_n > n-1$ e $\lim_{n\to\infty} f''(\tau_n) = 0$.

71. Poichè

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \log(e+x) > 1 \quad \forall x > 0,$$

si ha

$$[\log(e+x)]^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \leqslant [\log(e+x)]^{\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)} \leqslant [\log(e+x)]^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Adesso,

$$[\log(e+x)]^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\log\left[e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]\right]^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[1 + \log\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \left[1 + \log\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]^{\frac{1}{\log(1+x/e)} \cdot \frac{\log(1+x/e)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}}},$$

e dato che

$$\lim_{y\to 0^+} (1+y)^{1/y} = e$$

si ha anche

$$\lim_{x\to 0^+} [\log(e+x)]^{1/\sqrt{x}} = 1 .$$

Da ciò segue pure $\lim_{x\to 0^+} [\log(e+x)]^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$, quindi il limite cercato è 1.

72. Il caso $n \leqslant k$ è banale, perché si riduce a $n^k \leqslant \frac{9}{8} n^k$. Possiamo allora limitarci a supporre $n > k \geqslant 2$: poniamo $n = k + h$, con $h \geqslant 1$, e proviamo che

$$(k+h)^k \leqslant \frac{9}{8} k^{k+h} .$$

Questa disuguaglianza è equivalente a $\left(1 + \frac{h}{k}\right)^k \leqslant \frac{9}{8} k^h$, cioè a

$$\left(1 + \frac{h}{k}\right)^{k/h} \leqslant \left(\frac{9}{8}\right)^{1/h} k .$$

E' noto che per ogni $t > 0$ si ha $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \leqslant e < 3$, quindi se $k \geqslant 3$ è chiaro che

$$\left(1 + \frac{h}{k}\right)^{k/h} \leqslant 3 \leqslant k \leqslant \left(\frac{9}{8}\right)^{1/h} k$$

Rimane solo il caso $k = 2$, cioè dobbiamo provare che

$$(*) \qquad (2+h)^2 \leqslant \frac{9}{2} \cdot 2^h \qquad \forall h \geqslant 1$$

Questo si può facilmente fare per induzione: se $h = 1$, la (*) è ovvia; se poi supponiamo vera (*) per un certo h, abbiamo

$$(2+h+1)^2 = (2+h)^2 + 2(2+h) + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{2} 2^h + 2\frac{3}{\sqrt{2}} 2^{h/2} + 2^h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{2} \cdot 2^h + 3 \cdot 2^h + 2^h = \frac{17}{2} 2^h < \frac{9}{2} 2^{h+1} .$$

Un'altra dimostrazione della disuguaglianza $n^k \leqslant k^n$ per ogn $n > k \geqslant 3$ si ottiene osservando che essa è equivalente a

$$\frac{\log n}{n} \leqslant \frac{\log k}{k} \qquad \forall n > k \geqslant 3 ,$$

e dimostrando che la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ è decrescente su $[e, +\infty[$.

73. (a) Si ha immediatamente $f_\lambda(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$. Inoltre

$$f_\lambda'(x) = e^{x^4}(1+4x^4) + 2\lambda x e^{x^4} e^{x^4}(1+4x^4) =$$

$$= e^{x^4}(1+4x^4)(1+2\lambda x e^{x^4}) ,$$

quindi

$$f_\lambda'(x) > 0 \iff 1 + 2\lambda x e^{x^4} > 0 \iff x e^{x^4} > -\frac{1}{2\lambda} .$$

Posto $g(x) = x e^{x^4}$, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = e^{x^4}(1+4x^4) > 0 ,$$

quindi g è invertibile. In particolare esiste un unico x_λ (necessariamente negativo) tale che

$$x < x_\lambda \Rightarrow x e^{x^4} < -\frac{1}{2\lambda} \Rightarrow f_\lambda'(x) < 0$$

$$x > x_\lambda \Rightarrow x e^{x^4} > -\frac{1}{2\lambda} \Rightarrow f_\lambda'(x) > 0 .$$

Tale x_λ è il punto di minimo di f_λ. Essendo $f_\lambda(0) = 0$ e $f_\lambda'(0) > 0$, si deve avere $f_\lambda(x_\lambda) < 0$, quindi f_λ ha il seguente grafico:

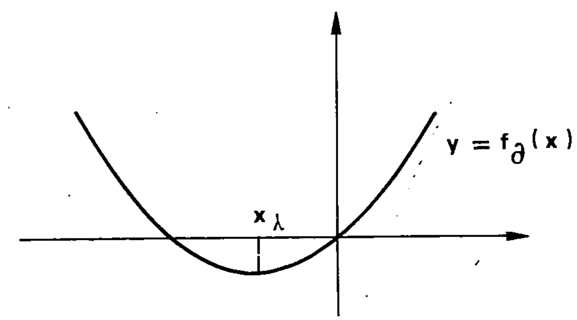

Figura 6

(b) Cominciamo con l'osservare che

$$f_\lambda(x_\lambda) \leqslant \min\{f_\lambda(x), 0\} \leqslant 0$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.
D'altra parte

$$x_\lambda e^{x_\lambda^4} = -\frac{1}{2\lambda} ,$$

per cui

$$f_\lambda(x_\lambda) = -\frac{1}{2\lambda} + \lambda \frac{1}{4\lambda^2} = -\frac{1}{4\lambda} .$$

Allora

$$0 \geqslant \int_{-1}^{1} \min \{f_\lambda(x),\ 0\}\, dx \geqslant 2\left(-\frac{1}{4\lambda}\right) = -\frac{1}{2\lambda}$$

ed il limite richiesto è zero.

74. (a) Fissiamo $x \in \mathbf{R}$, e sia n la sua parte intera: si ha

$$|f(x)| = \left|\int_n^{n+1} f(x)\,dt\right| = \left|\int_n^{n+1} [f(x)-f(t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_n^{n+1} |f(x)-f(t)|\ dt \leqslant L \int_n^{n+1} |x-t|\,dt =$$

$$= L\left(\int_n^x (x-t)\,dt + \int_x^{n+1} (t-x)\,dt\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\ [(x-n)^2 + (x-n-1)^2]\ .$$

Posto $\alpha = x - n$ (quindi $0 \leqslant \alpha < 1$) si ha allora

$$|f(x)| \leqslant \frac{L}{2}\ [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]\ .$$

Cerchiamo il massimo valore assunto in $[0,1]$ dalla funzione

$$g(\alpha) = \frac{L}{2}\ [\alpha^2 + (1-\alpha)^2] = \frac{L}{2}\ (1 - 2\alpha + 2\alpha^2):$$

si verifica facilmente che il valore massimo è $\dfrac{L}{2} = g(0) = g(1)$.

Ne concludiamo che

$$|f(x)| \leqslant \frac{L}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}\ ,$$

cioè che f è limitata.

(b) Per il punto (a) si ha intanto $C \leqslant \dfrac{L}{2}$. Se poi tentiamo di costruire una funzione che soddisfi alle ipotesi e abbia oscillazione più grande possibile, è intuitivo tentare con una funzione avente il seguente grafico:

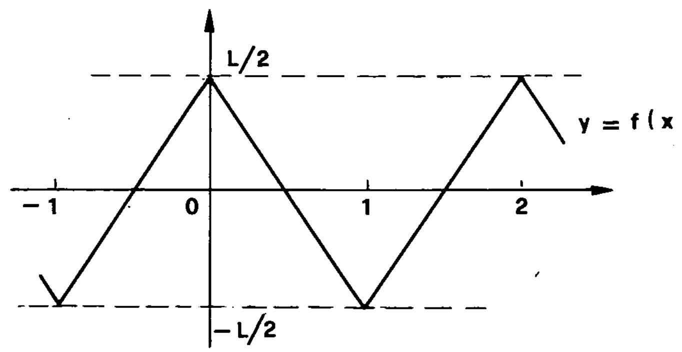

Figura 7

Effettivamente, questa funzione verifica le condizioni

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad |f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y|\ .$$

Siccome $\max |f(x)| = \dfrac{L}{2}$, concludiamo che la costante C cercata non può essere minore di $\dfrac{L}{2}$, quindi $C = \dfrac{L}{2}$.

75. Usando gli *sviluppi di Taylor* delle funzioni e^x e sen x si ottiene

$$\frac{e^x - \operatorname{sen} x - \alpha}{x^\alpha \operatorname{sen} x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) - \alpha}{x^\alpha (x + o(x^2))} =$$

$$= \frac{(1-\alpha) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^{\alpha+1}(1 + o(x))} .$$

Se $\alpha = 1$, il limite cercato è $\frac{1}{2}$. Se $\alpha \neq 1$, il numeratore tende ad $1 - \alpha$; il denominatore tende a zero se $\alpha > -1$, ad 1 se $\alpha = -1$, all'infinito se $\alpha < -1$. In conclusione:

- se $\alpha < -1$, il limite è 0;
- se $\alpha = -1$, il limite è 2;
- se $-1 < \alpha < 1$, il limite è $+\infty$;
- se $\alpha = 1$, il limite è $\frac{1}{2}$;
- se $\alpha > 1$, il limite è $-\infty$.

76. Effettuando nell'integrale la sostituzione $a e^t = x$ si ottiene

$$\int_0^1 \exp(a e^t)\, dt = \int_a^{ea} \frac{e^x}{x}\, dx .$$

Ma

$$\int_a^{ea} \frac{e^x}{ea}\, dx \leqslant \int_a^{ea} \frac{e^x}{x}\, dx \leqslant \int_a^{ea} \frac{e^x}{a}\, dx ,$$

e la tesi segue immediatamente.

77. Posto

$$\lambda_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

e

$$a_n = \frac{\lambda_n^2 - 1}{n} , \quad b_n = \frac{\lambda_n^2}{n} ,$$

osserviamo che

$$\lambda_n = \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 (2n-4)^2 \ldots 4^2\, 2^2}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 2} =$$

$$= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\, 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3} .$$

Bisogna provare che, per opportune costanti positive A, B, si ha

$$A \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant B \qquad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Proviamo dapprima che (b_n) è decrescente, cosicchè la migliore costante B sarà uguale a $b_1 = 4$. Infatti

$$b_{n+1} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+1}\, b_n = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}\, b_n < b_n .$$

Ora dimostriamo che (a_n) è crescente, quindi la migliore costante A sarà uguale ad $a_1 = 3$. Dato che $a_n = b_n - \frac{1}{n}$ e ricordando che $b_n \leqslant 4$, si ha

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}\, b_n - \frac{1}{n+1} =$$

$$= a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{(2n+1)^2}\, b_n - \frac{1}{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant a_n + \frac{1}{n} - \frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= a_n + \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} ,$$

quindi $a_{n+1} \geqslant a_n$.

78. (a) Una delle due implicazioni è facile: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, l'espressione

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = 2ah^2$$

è indipendente da x. Viceversa, sia

$$(*) \qquad f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = \sigma(h) \qquad \forall x, h \in \mathbf{R} .$$

Poichè f è di classe C^2, anche σ lo è e, derivando due volte rispetto ad h la precedente uguaglianza, si trova che

$$f''(x+h) + f''(x-h) = \sigma''(h) \qquad \forall x, h \in \mathbf{R} ;$$

in particolare, per $h = 0$,

$$f''(x) = \frac{\sigma''(0)}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Allora la funzione f, avendo derivata seconda costante, è necessariamente un polinomio di grado non superiore a 2.

(b) Se la funzione f è solo di classe C^1, la tesi è ancora vera, ma occorre un'altra dimostrazione. Ponendo $g(x) = f'(x)$, l'ipotesi (*) dà (derivando rispetto ad x)

$$g(x+h) + g(x-h) = 2g(x) \qquad \forall x, h \in \mathbf{R} ,$$

e anche, ponendo $x = (x_1 + x_2)/2$ e $h = (x_1 - x_2)/2$,

$$\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} = g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} ,$$

Dobbiamo ora mostrare che g è affine. Scelti $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$ e detta φ la funzione affine che coincide con g in $x = a$ e $x = b$, proviamo che $g - \varphi \equiv 0$ in $[a, b]$. Supponiamo per assurdo che esista $c \in \,]a, b[$ tale che $(g - \varphi)(c) \neq 0$. Posto allora

$$x_1 = \sup \{x < c : (g - \varphi)(x) = 0\} ,$$

$$x_2 = \inf \{x > c : (g - \varphi)(x) = 0\} ,$$

per la continuità di g e per l'ipotesi $(g - \varphi)(c) \neq 0$ si ha $x_1 < x_2$,

$$(g-\varphi)(x_1) = (g-\varphi)(x_2) = 0 ,$$

$$(g-\varphi)(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \,]x_1, x_2[.$$

In particolare, essendo $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in \,]x_1, x_2[$, si ha

$$(g - \varphi)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \neq 0 ,$$

cioè

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \neq \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

D'altra parte

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} = \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} ,$$

quindi

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \neq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$$

contro l'ipotesi.

79. Osserviamo che

$$a_n = \operatorname{sen}\left(\pi \sqrt{4n^2 + \sqrt{n}} - 2\pi n\right) =$$

$$= \operatorname{sen} \frac{\pi \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2 + \sqrt{n}} + 2n}$$

Posto

$$b_n = \frac{\pi \sqrt{n}}{\sqrt{4n^2 + \sqrt{n}} + 2n}$$

si ha subito

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ed anche

$$\lim_{n\to\infty} b_n \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{2n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{n}}{4n^2}}\right)} = \frac{\pi}{4} .$$

Ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} b_n}{b_n} b_n \sqrt{n} = \frac{\pi}{4} ,$$

cioè (a_n) ha lo stesso ordine di infinitesimo di $\frac{1}{\sqrt{n}}$

80. (a) Notiamo che f_λ è dispari, pertanto è sufficiente studiarla per $x > 0$. Per $\lambda = 0$ si ha $f_0(x) = \operatorname{arctg} x$, il cui grafico è ben noto:

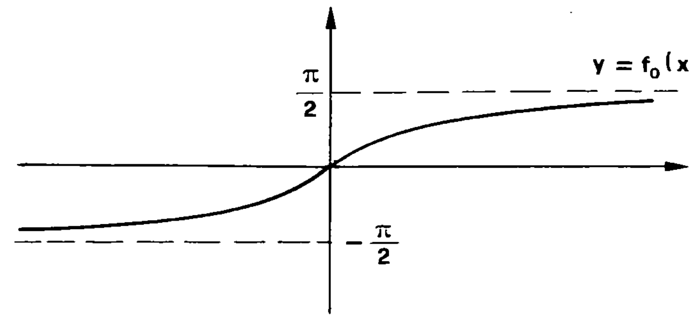

Figura 8

Se $\lambda < 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_\lambda(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f_\lambda'(x) = \frac{(1-\lambda)x^2 - \lambda}{(1+x^2)x^2} > 0 \qquad \forall x > 0 ;$$

inoltre f_λ è concava su $\mathbf{R}^+$, in quanto somma delle due funzioni $\operatorname{arctg} x$ e $\frac{\lambda}{x}$, che sono concave su $\mathbf{R}^+$. Il grafico di f_λ è dunque

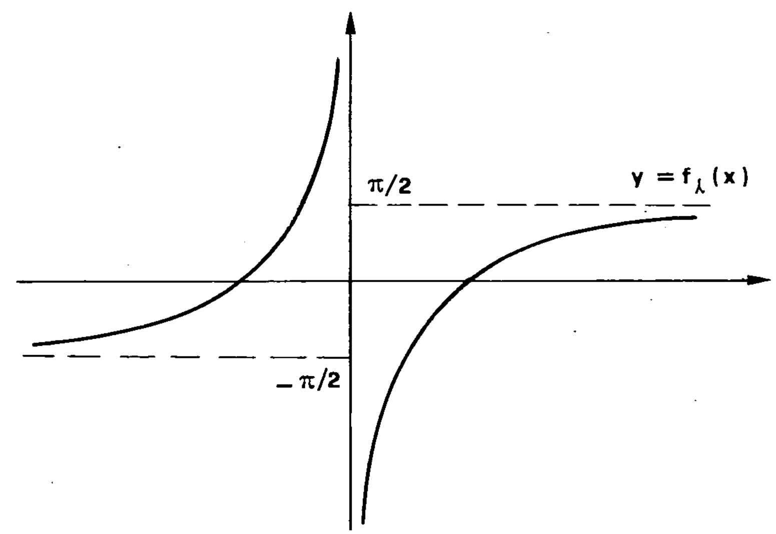

Figura 9

Studiamo ora il caso $\lambda > 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_\lambda(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f_\lambda(x) > \operatorname{arctg} x \qquad \forall x > 0$$

$$f'_\lambda(x) = \frac{(1-\lambda)x^2 - \lambda}{(1+x^2)x^2} ,$$

quindi:

– se $\lambda \geqslant 1$ si ha $f'_\lambda(x) < 0$ per ogni $x > 0$;

– se $0 < \lambda < 1$ si ha $f'_\lambda(x) < 0$ per $0 < x < \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}$,
$f'_\lambda(\sqrt{\lambda/(1-\lambda)}) = 0$ e $f'_\lambda(x) > 0$ per $x > \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}$.

Pertanto f_λ è monotona per $\lambda \geqslant 1$, mentre per $0 < \lambda < 1$ essa ha un minimo assoluto nel punto $x = \sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}$. Nei due casi, la funzione f_λ ha i seguenti grafici:

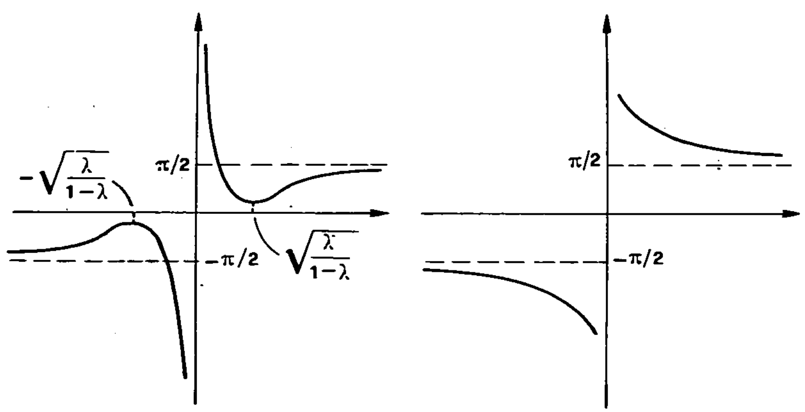

Figura 10

(b) La situazione è chiara per $\lambda < 0$ (due soluzioni), $\lambda = 0$ (una) e $\lambda \geqslant 1$ (nessuna); esaminiamo dunque il caso $0 < \lambda < 1$. Vi saranno due soluzioni se $f_\lambda\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}\right) < 1$, una se $f_\lambda\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}\right) = 1$, nessuna altrimenti. Poniamo allora

$$g(\lambda) = f_\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} + \sqrt{\lambda(1-\lambda)}$$

Si ha

$$g(0) = 0 , \quad \lim_{\lambda\to 1^-} g(\lambda) = \frac{\pi}{2} > 1 ,$$

$$g'(\lambda) = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1-2\lambda}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + \frac{1-2\lambda}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} > 0 .$$

dunque esiste un unico $\lambda_0 \in]0,1[$ tale che $g(\lambda) < 1$ per $\lambda < \lambda_0$, $g(\lambda) > 1$ per $\lambda_0 < \lambda < 1$. Con questo la risoluzione dell'esercizio è conclusa; riassumendo, l'equazione $f_\lambda(x) = 1$ ha:

– due soluzioni se $\lambda < 0$ o se $0 < \lambda < \lambda_0$;

– una soluzione se $\lambda = 0$ o se $\lambda = \lambda_0$;

– nessuna soluzione se $\lambda > \lambda_0$,

dove λ_0 è l'unica soluzione in $]0,1[$ dell'equazione

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} + \sqrt{\lambda(1-\lambda)} = 1 .$$

81. (a) Dall'equazione segue immediatamente che

$$x^{10} = \frac{a - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt}{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt}$$

Osserviamo che, essendo $\dfrac{1}{1+t^{10}} \leqslant 1$, si ha

$$a - \int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt \geqslant 0,$$

quindi l'equazione proposta ha un'unica soluzione in $[0,+\infty[$, e cioè

$$x_a = \sqrt[10]{\frac{a - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt}{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt}}\ .$$

Resta solo da verificare che $x_a \leqslant a$, ovvero (dopo facili calcoli) che

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^{10}}\, dt \geqslant \frac{a}{1+a^{10}}\ ,$$

ma ciò è ovvio poiché $\dfrac{1}{1+x^{10}} \geqslant \dfrac{1}{1+a^{10}}$ se $t \in [0, a]$.

(b) Essendo $0 \leqslant x_a \leqslant a$, si ha ovviamente $\lim\limits_{a\to 0^+} x_a = 0$.
Vista l'espressione di x_a, per trovare il secondo limite richiesto converrà calcolare il limite di $\dfrac{x_a^{10}}{a^{10}}$: applicando il *teorema dell'Hôpital*

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{x_a^{10}}{a^{10}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{a - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt}{a^{10} \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt} =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{1 - \dfrac{1}{1+a^{10}}}{10a^9 \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt + \dfrac{a^{10}}{1+a^{10}}} =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+a^{10}}}{\dfrac{10}{a} \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt + \dfrac{1}{1+a^{10}}} = \frac{1}{11}$$

dato che

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{1+t^{10}}\, dt = 1\ .$$

In conclusione

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{x_a}{a} = \sqrt[10]{\frac{1}{11}}\ .$$

82. Per una funzione di classe C^∞, dire che

$$g(x) = o(x^k) \qquad \text{per } x \to 0$$

equivale a dire che

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(k)}(0) = 0\ .$$

Basta allora cercare a, b, c in modo che

$$g'(0) = (a + 2b + 3c) f'(0) = 0$$

$$g'''(0) = (a + 8b + 27c) f'''(0) = 0$$

$$g^{(5)}(0) = (a + 32b + 243c) f^{(5)}(0) = 0$$

per ogni f dispari. Ciò è possibile solo se

$$a + 2b + 3c = 0$$

$$a + 8b + 27c = 0$$

$$a + 32b + 243c = 0$$

Si verifica subito che il sistema formato dalle prime tre equazioni ha solo la soluzione nulla, pertanto dobbiamo accontentarci di risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a + 8b + 27c = 0 \end{cases}$$

Ogni soluzione di questo sistema dà origine ad una funzione g che è infinitesima di ordine superiore a 4 per $x \to 0$. Un esempio è $a = 5$, $b = -4$, $c = 1$, che dà

$$g(x) = 5f(x) - 4f(2x) + f(3x) .$$

83. Siccome f è di classe C^∞, la convessità equivale a $f'' \geqslant 0$, cioè

$$e^x \geqslant 6\alpha x \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Per $\alpha < 0$, si ha $\lim_{x \to -\infty} (e^x - 6\alpha x) = -\infty$, ed f'' non può essere non negativa su tutto $\mathbf{R}$. Per $\alpha = 0$, si ha $f(x) = e^x$ quindi f è convessa. Resta da esaminare il caso $\alpha > 0$. In tal caso si ha certamente $e^x \geqslant 6\alpha x$ per $x \leqslant 0$, così possiamo restringerci ai soli valori positivi di x e quindi vedere se

$$g(x) = \frac{e^x}{6x} \geqslant \alpha \qquad \forall x > 0 .$$

Cerchiamo il minimo di g su $]0,+\infty[$. Tale minimo esiste perchè g è continua e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. La derivata di g è

$$g'(x) = \frac{e^x}{6x^2}(x-1) ,$$

che si annulla solo per $x = 1$: tale punto è necessariamente il punto di minimo di g, quindi

$$\min_{]0,+\infty[} g = g(1) = \frac{e}{6} .$$

La funzione f è convessa se e solo se

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{e}{6} .$$

84. Per provare che $|f(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{x}}$ scriviamo

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)\, dt$$

$$= f(1) - \int_x^1 f'(t)\, dt .$$

Allora per ogni $x \in]0,1]$ si ha

$$|f(x)| = \left| f(1) - \int_x^1 f'(t)\,dt \right| \leqslant |f(1)| + \int_x^1 |f'(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant |f(1)| \frac{1}{\sqrt{x}} + \int_x^1 \frac{\sqrt{t}\,|f'(t)|}{\sqrt{x}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|f(1)| + \int_0^1 \sqrt{t}\,|f'(t)|\,dt}{\sqrt{x}},$$

quindi si può prendere

$$c = |f(1)| + \int_0^1 \sqrt{x}\,|f'(x)|\,dx .$$

Inoltre

$$\int_x^1 |f(t)|\,dt \leqslant \int_x^1 \frac{c}{\sqrt{t}}\,dt = 2c\,(1 - \sqrt{x}\,) \leqslant 2c \qquad \forall x \in]0,1]$$

dunque $\int_0^1 |f(x)|\,dx < +\infty$.

85. Posto

$$f(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 1 - x ,$$

dobbiamo dimostrare che $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [0,1]$: per far ciò, cerchiamo di calcolare il minimo di f su $[0,1]$. Per quanto riguarda i minimi relativi interni, studiamo la funzione

$$g(x) = f'(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right) - 1 .$$

Si ha

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(1) = \frac{e}{4} - 1 < 0 \quad ,$$

e

$$g'(x) = -\frac{e^x}{4}\,(x^2 + 4x - 2) .$$

Controllando il segno di $x^2 + 4x - 2$, si verifica subito che g è crescente per $0 < x < \sqrt{6} - 2$, decrescente per $\sqrt{6} - 2 < x < 1$:

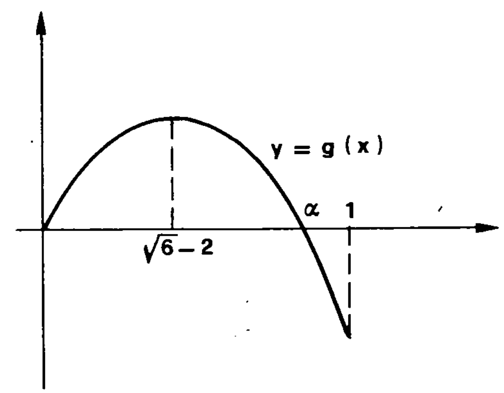

Figura 11

Ciò comporta che la funzione $g = f'$ ha un solo zero tra 0 ed 1, in un punto che chiameremo α. Essendo poi $g'(\alpha) = f''(\alpha) < 0$, si deduce che α è un punto di massimo relativo per f. Inoltre f non ha minimi relativi interni, quindi

$$\min_{[0,1]} f = \min\left\{ f(0),\, f(1) \right\} = \min\left\{ 0,\, \frac{3}{4}\,e - 2 \right\} .$$

Dato che

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3}$$

si ha $\frac{3}{4}e - 2 > 0$, quindi $\min\limits_{[0,1]} f = 0$.

Una dimostrazione più rapida si ottiene verificando con metodi analoghi che

$$e^x \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{1+x} \geqslant 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

86. Poichè $[f(x)]^2 = x^2$ equivale a $f(x) = \pm x$, si tratta di provare che il grafico di f incontra almeno una delle due bisettrici degli assi coordinati, e ciò è intuitivo in virtù delle ipotesi di continuità e monotonia di f. Per dare una dimostrazione rigorosa, procediamo per assurdo supponendo che $[f(x)]^2 - x^2 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Questo implica che

$$f(x) + x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(x) - x \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Le due funzioni $g(x) = f(x) + x$ ed $h(x) = f(x) - x$ sono continue su $\mathbf{R}$, quindi, se non si annullano mai, devono essere sempre positive o sempre negative. Esaminiamo i vari casi.

1) $g(x) > 0$ ed $h(x) > 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

Allora $f(x) > x$ e $f(x) > -x$, quindi $f(x) > |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$: ciò è impossibile perchè, essendo f monotona, almeno uno dei due limiti $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ deve essere minore di $+\infty$.

2) $g(x) > 0$ ed $h(x) < 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

Allora per $x = 0$ si ha $f(0) = g(0) > 0$ e $f(0) = h(0) < 0$, che è assurdo.

3) $g(x) < 0$ ed $h(x) > 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$: analogo al caso 2).

4) $g(x) < 0$ ed $h(x) < 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$: analogo al caso 1).

Naturalmente vi possono essere infinite soluzioni: basta pensare alla funzione $f(x) = x$.

87. Ponendo per semplicità $\log x = y$, si ottiene

$$(\log\log x)^{\log x} - x(\log x)^{\log\log x} = (\log y)^y - e^y y^{\log y} =$$

$$= e^{y \log\log y} - e^y e^{(\log y)^2} =$$

$$= e^{y \log\log y}\,[1 - e^{y + (\log y)^2 - y\log\log y}]\ .$$

Poichè

$$y + (\log y)^2 - y\log\log y = y\left[1 + \frac{(\log y)^2}{y} - \log\log y\right],$$

si ha

$$\lim_{y \to +\infty} [y + (\log y)^2 - y \log\log y] = -\infty\ ,$$

quindi il limite richiesto è uguale a $+\infty$.

88. Cominciamo con l'osservare che l'integrando $\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$ è positivo quindi x_{n+1} ha lo stesso segno di x_n. E' allora evidente che la successione è costituita tutta di termini positivi se $a > 0$, negativi se $a < 0$, nulli se $a = 0$. L'integrando è anche una funzione pari: questo comporta che i termini della successione che ha come dato iniziale $x_0 = -a$ sono gli opposti dei termini della successione che ha come dato iniziale $x_0 = a$. Basta allora studiare il caso $a > 0$. Osserviamo che la condizione di monotonia $x_{n+1} \leqslant x_n$ è equivalente a

$$\int_0^{x_n} \frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt \leqslant x_n$$

e, siccome $x_n > 0$, basterà verificare che l'integrando non supera 1. Ed infatti

$$\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \leqslant 1 \iff (e^{2t}+1)^2 \geqslant 4e^{2t} \iff (e^{2t}-1)^2 \geqslant 0$$

ed il segno di uguaglianza vale solo per $t = 0$. Questo dimostra che (x_n) è decrescente. Dato che (x_n) è anche inferiormente limitata da zero, esiste finito $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ed è $L \geqslant 0$. Inoltre L deve verificare l'uguaglianza

$$L = \int_0^L \frac{4\,e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt\ .$$

Poichè $\dfrac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} < 1$ per ogni $t > 0$, si ottiene facilmente che

$$\int_0^x \frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt < x \qquad\qquad \forall x > 0\,,$$

quindi dovrà essere $L = 0$.

In conclusione, per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

89. Osserviamo che

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty}\,[e^x \operatorname{sen} x + e^{-x}\cos x - P(x)] =$$

$$= \operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty}\; e^x \left[\operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{e^{2x}} - \frac{P(x)}{e^x}\right] = +\infty\ ,$$

dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^{2x}} = 0$$

mentre $\operatorname*{maxlim}\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 1$.

Analogamente,

$$\operatorname*{minlim}_{x\to+\infty}\,[e^x \operatorname{sen} x + e^{-x}\cos x - P(x)] = -\infty\ ,$$

quindi la funzione $f(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^{-x}\cos x - P(x)$ assume sia valori positivi che negativi ed allora, essendo continua, si deve necessariamente annullare almeno una volta.

90. Per provare che f è continua in un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ basta dimostrare che, se (x_n) converge a x_0, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\ .$$

Sia allora (x_n) una successione che tende a x_0: naturalmente è anche $x_0 = \operatorname*{maxlim}\limits_{n\to\infty} x_n$, quindi dall'ipotesi segue che

$$\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\ .$$

Per provare che è anche

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\ ,$$

osserviamo che, per definizione di minimo limite, esiste una sottosuccessione $(f(x_{n_k}))$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} f(x_n)\ .$$

Ma la successione (x_{n_k}) tende a x_0, quindi

$$f(x_0) = f(\operatorname*{maxlim}_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} f(x_n)$$

e la continuità di f è dimostrata.

Dimostriamo la monotonia: siano $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$. Definiamo la successione (x_n) con

$$x_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è pari} \\ b & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Ovviamente $\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} x_n = b$, mentre

$$\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n) = \max\{f(a), f(b)\},$$

così dall'ipotesi deduciamo che

$$f(b) = f(\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} x_n) = \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n) = \max\{f(a), f(b)\} \geqslant f(a),$$

cioè f è non decrescente.

91. Nel caso in cui $\lambda = 1$, si ha $S_\lambda = \{1\}$ e quindi sia l'estremo superiore sia l'estremo inferiore sono uguali ad 1.
Se $\lambda > 1$, osserviamo che

$$\frac{n^\lambda + k^{1/\lambda}}{n+k} > 0 \qquad \forall n, k \in \mathbf{N},$$

mentre (per $n = 1$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 + k^{1/\lambda}}{1+k} = 0,$$

quindi $\inf S_\lambda = 0$. Analogamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\lambda + 1}{n+1} = +\infty,$$

cosicché $\sup S_\lambda = +\infty$.

Se $\lambda < 1$, basta osservare che $S_\lambda = S_{1/\lambda}$ e $1/\lambda > 1$, quindi di nuovo $\inf S_\lambda = 0$ e $\sup S_\lambda = +\infty$.

92. La funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, dunque l'espressione

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

ha senso. Per $a \geqslant 1$ si ha

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_1^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

e, ricordando che $\operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $\operatorname{sen} x \leqslant x$ per $x \geqslant 0$, si conclude che

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx + \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 1 + \log a.$$

93. Scrivendo

$$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{(\operatorname{tg} 2x)(\log \operatorname{tg} x)},$$

possiamo limitarci a calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{sen} 2x)(\log \operatorname{tg} x)}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

L'ultimo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$: applicando il *teorema dell'Hôpital* possiamo ridurci a calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{(\mathrm{tg}x)\,(\cos^2 x)}}{-2\,\mathrm{sen}\,2x} = -1 \,.$$

Il limite richiesto è dunque $\frac{1}{e}$.

94. La definizione di g è obbligata per $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \,.$$

Se poi vogliamo che g sia continua in $x = 0$, dovrà esistere finito

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \,.$$

Ponendo

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \,,$$

dal *teorema fondamentale del calcolo integrale* e dal *teorema dell'Hôpital* si ricava che

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} F'(x) = f(0) \,.$$

Definiamo allora

$$g(0) = f(0)$$

e proviamo che g è di classe C^1. Per $x \neq 0$ non ci sono problemi, in quanto g è composizione di funzioni derivabili, e

$$g'(x) = \frac{x f(x) - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

è continua per $x \neq 0$.
Per provare che g è di classe C^1 basta allora mostrare che esiste $g'(0)$ e che $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$.

Poichè per il *teorema del valor medio di Lagrange* si ha

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} g'(\xi_h)$$

con ξ_h compreso tra 0 e h, basterà anzi dimostrare che esiste finito $\lim_{x\to 0} g'(x)$.

Se applichiamo all'espressione di g' il *teorema dell'Hôpital* siamo portati a calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + xf'(x) - f(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \,,$$

e non possiamo concludere perchè non è detto che questo ultimo limite esista. Conviene allora ricordare che, per la derivabilità di f, si ha

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) \,,$$

quindi

$$g'(x) = \frac{xf(0) + x^2 f'(0) + o(x^2) - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2} \,,$$

e

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \left[f'(0) + \frac{xf(0) - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2} \right] .$$

Applicando ora il *teorema dell'Hôpital* al secondo addendo si ha

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = f'(0) + \lim_{x\to 0} \frac{f(0)-f(x)}{2x} =$$

$$= f'(0) - \frac{1}{2} f'(0) = \frac{f'(0)}{2}$$

95. Si noti che la successione (x_n) è monotona non decrescente, in quanto $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2 \geqslant x_n$, quindi ammette limite, finito o uguale a $+\infty$. Se il limite fosse un numero reale L, si avrebbe

$$L = L + L^2 ,$$

da cui $L = 0$, ma ciò è impossibile perché è $x_n \geqslant x_1 = a > 0$ per ogni $n \in \mathrm{N}$. Allora (x_n) ha limite $+\infty$.

96. Dato che $\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n^3} = 1$, $|\operatorname{sen} n^6| \leqslant 1$ per ogni n

e

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} ,$$

il limite richiesto è zero.

97. Osserviamo subito che la funzione integranda

$$g(t) = t^2 e^{-t^2}$$

è di classe C^∞, dunque anche f è di classe C^∞. Inoltre f è dispari: infatti, ponendo $s = -t$, si ha

$$f(-x) = \int_0^{-x} t^2 e^{-t^2}\, dt = -\int_0^x s^2 e^{-s^2}\, ds = -f(x) .$$

In particolare si ha $f(0) = 0$. Inoltre $g(t) \geqslant 0$ ed è $g(t) = 0$ solo se $t = 0$, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$: la funzione f è allora strettamente crescente, e quindi iniettiva. Inoltre, esistono (finiti o infiniti)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) .$$

Proviamo che questi limiti sono finiti: per $t \geqslant 1$ si ha $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ quindi per $x \geqslant 1$

$$f(x) = \int_0^1 t^2 e^{-t^2}\, dt + \int_1^x t^2 e^{-t^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 t^2\, dt + \int_1^x t^2 e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3} + [(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}]_1^x$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{e} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \frac{1}{3} + \frac{5}{e} ;$$

ed un grafico approssimativo di f è allora il seguente, con

$$\alpha = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt .$$

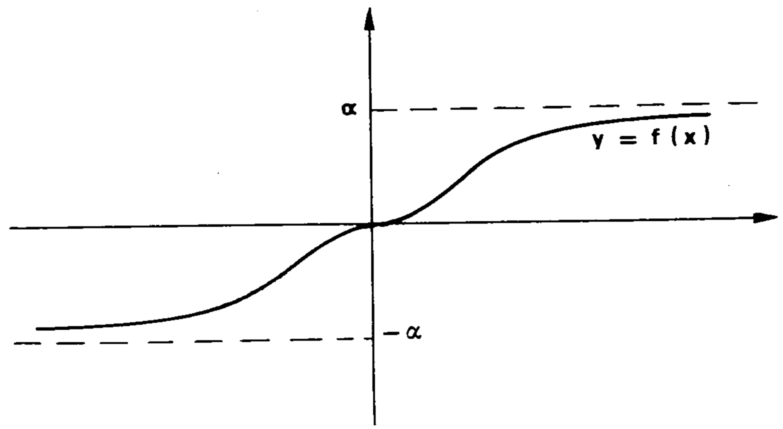

Figura 12

98. La prima tesi equivale a dimostrare che la funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x - 1 + x}{2}$$

è bigettiva: questo si prova osservando che f è continua e che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, ,$$

quindi f è surgettiva e inoltre

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \, ,$$

pertanto f è crescente e quindi anche iniettiva.
La funzione $\lambda \mapsto x(\lambda)$ non è altro che l'inversa f^{-1} di f: per un noto teorema, f^{-1} è continua, in quanto f è continua, bigettiva e definita su un intervallo.
Per calcolare $x(0)$ basta osservare che $f(0) = 0$, e quindi $f^{-1}(0) = = x(0) = 0$.
Essendo poi $f'(0) = 1$, la funzione f^{-1} è derivabile in 0, e si ha

$$x'(0) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = 1 \, .$$

99. Gli *sviluppi di Taylor* attorno a $x = 0$ di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\log(1+x)$ sono

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \, ,$$

quindi

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) - 1 +$$

$$+ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) = -\frac{5}{6}x^2 + o(x^2) \, .$$

L'ordine di infinitesimo è allora quello di x^2, cioè 2.

100. Per il *teorema del valor medio integrale* si ha

$$\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = (2x - x)\, \frac{\operatorname{sen} \xi_x}{\xi_x}$$

per un opportuno $\xi_x \in\,]x, 2x[$. Osservando che

$$\lim_{x\to0^+} \xi_x = 0$$

si ha infine

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}\xi_x}{\xi_x} = 1 \, .$$

101. Per vedere che la successione è ben definita, occorre mostrare che $1 + x_n > 0$ per ogni n. Questo è assicurato dal fatto (che si può facilmente provare per induzione) che $x_n > 0$ per ogni n. Studiamo ora la monotonia di (x_n). Si ha

$$x_{n+1} - x_n = \log(1 + x_n) - x_n \quad ,$$

quindi, posto $f(x) = \log(1 + x) - x$, esaminiamo la funzione f per $x \geqslant 0$. Si ha $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$$

per ogni $x > 0$, quindi $f(x) < 0$ per ogni $x > 0$, e dunque $x_{n+1} < x_n$ per ogni n.
La successione (x_n), essendo decrescente e limitata inferiormente, ammette un limite finito $L \geqslant 0$, che deve verificare l'uguaglianza

$$L = \log(1 + L) \ ,$$

cioè $f(L) = 0$: come abbiamo già visto, questo implica $L = 0$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \ .$$

102. Supponiamo per assurdo che f_ϵ non sia iniettiva, cioè sia

$$f_\epsilon(x_0) = f_\epsilon(y_0) \ ,$$

con $x_0 \neq y_0$. Otterremmo allora

$$x_0 + \epsilon f(x_0) = y_0 + \epsilon f(y_0) \ ,$$

da cui

$$|x_0 - y_0| = \epsilon\, |f(x_0) - f(y_0)| \leqslant \epsilon L\, |x_0 - y_0| < |x_0 - y_0| \ ,$$

che è assurdo.

Per dimostrare la surgettività, basta osservare che f_ϵ è continua e verificare che

$$\lim_{x\to-\infty} f_\epsilon(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f_\epsilon(x) = +\infty \ .$$

Infatti, se $x > 0$,

$$f_\epsilon(x) = x + \epsilon\,[f(x) - f(0)] + \epsilon f(0) \geqslant$$

$$\geqslant x - \epsilon L x + \epsilon f(0) = (1 - \epsilon L)x + \epsilon f(0) \ ,$$

quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Analogamente si procede per $x \to -\infty$.

103. Si ha

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x \operatorname{sen} x} = e^{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)/x \operatorname{sen} x}$$

Ricordando che

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\log(1 + t) = t + o(t) \ ,$$

si ottiene

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2\,\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = -\frac{1}{6} \ .$$

Il limite cercato è dunque uguale a $e^{-\frac{1}{6}}$.

104. Si noti che si tratta di un integrale improprio in 1 (per la presenza di $\sqrt{1-x^{2\alpha}}$) e, se $\alpha < 1$, anche in 0 (per la presenza di $x^{1-\alpha}$).
Osserviamo però che, posto $x^\alpha = t$, si ha

$$\int_a^b \frac{\operatorname{arcsen} x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} t)^2\right]_{a^\alpha}^{b^\alpha} = \frac{(\operatorname{arcsen} b^\alpha)^2 - (\operatorname{arcsen} a^\alpha)^2}{2\alpha} ,$$

quindi per $a \to 0^+$ e $b \to 1^-$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,dx = \frac{\pi^2}{8\alpha} .$$

105. Osserviamo subito che f_a è di classe C^∞ su $\mathbf{R}\setminus\{-a, a\}$ ed è pari, quindi basta studiarla per $x \geqslant 0$; inoltre f_a è nulla per $x = \pm a$, positiva altrove. Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{|a^2-x^2|}{x^2}}\,\frac{|x|}{e^{x^2}} = 0 .$$

La derivata di f_a è

$$f_a'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2}\left(\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right) & \text{se } |x| < a \\[2ex] -2xe^{-x^2}\left(\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right) & \text{se } |x| > a . \end{cases}$$

Se ne deduce in particolare che in $[0,+\infty[$ si ha

$$f_a'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < a \quad \text{e per} \quad x > \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to a^-} f_a'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f_a'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a'(x) = 0 .$$

Un grafico approssimativo di f_a è allora il seguente:

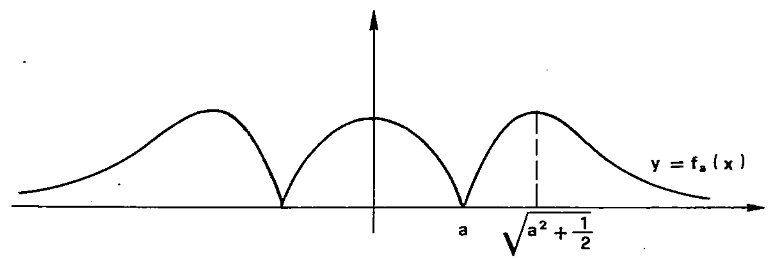

Figura 13

Il massimo di f_a è

$$M(a) = \max\left\{f_a(0),\, f_a\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}\right)\right\} = \max\left\{a,\, \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{2e}}\right\},$$

cosicchè

$$\lim_{a\to 0^+} M(a) = \max\left\{\lim_{a\to 0^+} a,\ \lim_{a\to 0^+} \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{2e}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

106. Un numero x_0 è una radice di P con molteplicità $m \geqslant 1$ quando si ha $P(x) = (x-x_0)^m Q(x)$ per qualche polinomio Q tale che $Q(x_0) \neq 0$. Derivando, si vede che

$$P'(x) = (x-x_0)^{m-1}\,(m\,Q(x) + (x-x_0)\,Q'(x)) \ ,$$

dunque ogni radice x_0 di P avente molteplicità m è radice di P' con molteplicità $m-1$ (se $m-1=0$, ciò significa che x_0 non è radice di P').
Siano dunque $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ le radici di P, con molteplicità rispettivamente $m_1, m_2, \ldots, m_k$. La somma delle molteplicità delle radici è uguale al grado del polinomio, quindi

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n \ .$$

Per quanto visto prima, la derivata P' del polinomio ha tra le sue radici anche $x_1, \ldots, x_k$, con molteplicità $m_1 - 1, \ldots, m_k - 1$, dunque abbiamo già trovato

$$\sum_{i=1}^{k} (m_1 - 1) = n - k$$

radici reali di P'. Il grado di P' è $n-1$, quindi dobbiamo provare che le altre $k-1$ radici di P' sono reali. Per il *teorema di Rolle*, tra x_i ed x_{i+1} c'è uno zero y_i di P', dunque P' ha anche le radici reali $y_1, \ldots, y_{k-1}$, che sono distinte tra loro e da $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$, e la dimostrazione è conclusa. Applicando più volte questo risultato si vede che $P', P'', \ldots, P^{(n-2)}$ hanno tutti soltanto radici reali. D'altra parte

$$P^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}\,x^2 + (n-1)!\,a_{n-1}x + (n-2)!\,a_{n-2} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{2}\,[n\,(n-1)\,x^2 + 2(n-1)\,a_{n-1}\,x + 2a_{n-2}]$$

cosicché il fatto che $P^{(n-2)}$ ha solo radici reali implica che il suo discriminante è non-negativo, cioè

$$(n-1)^2\,a_{n-1}^2 - 2n\,(n-1)\,a_{n-2} \geqslant 0 \ ,$$

che è la tesi.

107. Poiché

$$0 \leqslant (n + \operatorname{sen} n)^{1/n} \leqslant \sqrt[n]{n+1}$$

$$0 \leqslant (2 + \operatorname{sen} n)^n \leqslant 3^n \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0 \ ,$$

il limite richiesto è uguale a zero.

108. Distinguiamo i tre casi $a < 0$, $a = 0$ ed $a > 0$.
Nel caso $a < 0$ si ha

$$f(0) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$f'(x) = a\,(e^{ax} - a) < 0 \qquad\qquad \forall x \geqslant 0\ ,$$

poichè $e^{ax} > 0 > a$. Dunque f è monotona decrescente e il suo grafico è del tipo seguente:

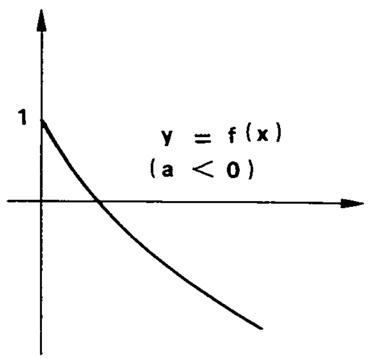

Figura 14

Per $a = 0$ la funzione f vale costantemente 1. Per $a > 0$ si ha

$$f(0) = 1\ , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ ;$$

inoltre

$$f'(x) \geqslant 0 \iff e^{ax} - a \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{\log a}{a}\ .$$

Ne segue che per $a \leqslant 1$ (che implica $\dfrac{\log a}{a} \leqslant 0$) f è monotona non decrescente ed ha un grafico del tipo:

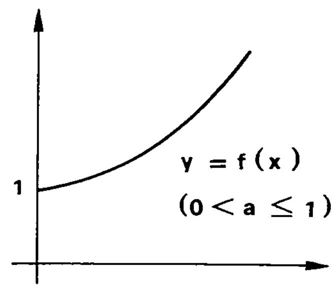

Figura 15

Invece, per $a > 1$, la funzione f decresce su $\left[0, \dfrac{\log a}{a}\right]$, cresce su $\left[\dfrac{\log a}{a}, +\infty\right[$; nel punto di minimo $\dfrac{\log a}{a}$ si ha

$$f\left(\frac{\log a}{a}\right) = a\left(1 - \frac{\log a}{a}\right),$$

per cui il grafico di f è del tipo seguente:

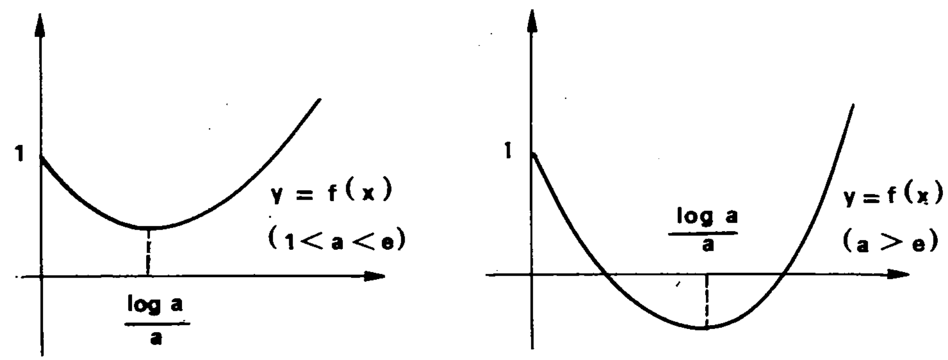

Figura 16

La funzione f è dunque monotona se e solo se $a \leqslant 1$.

109. Integriamo per parti. Se $\alpha \neq -1$, si ha

$$\int_1^2 x^\alpha \log x\, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log 2 - \frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log 2 - \frac{2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} .$$

Se invece $\alpha = -1$ si ha

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_1^2 = \frac{\log^2 2}{2} .$$

110. Notiamo che, per ogni $x \in]0, 1[$, esistono per il *teorema di Lagrange* due punti ξ_1, ξ_2 tali che $0 < \xi_1 < x < \xi_2 < 1$ e che

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi_1)\,x$$

$$f(x) = f(x) - f(1) = f'(\xi_2)\,(x-1) ,$$

dunque, essendo $|f'| \leqslant 1$, si ha

$$(*) \qquad |f(x)| \leqslant x \qquad \text{e} \qquad |f(x)| \leqslant 1 - x$$

per ogni $x \in [0,1]$.

D'altra parte, qualunque sia $x \in [0,1]$ si ha $x \leqslant \frac{1}{2}$ oppure $1 - x \leqslant \frac{1}{2}$, pertanto dalla (*) segue che

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \in [0, 1] .$$

Per mostrare che $A = \frac{1}{2}$ è la miglior costante possibile, basta costruire delle funzioni f_ϵ aventi andamento del tipo

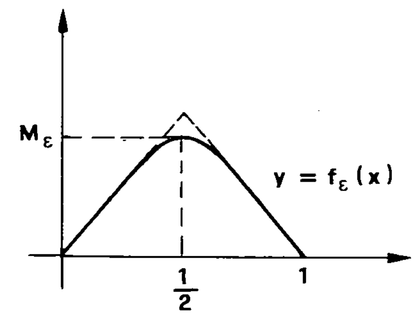

Figura 17

il cui massimo M_ϵ si avvicina ad $\frac{1}{2}$ quanto si vuole per $\epsilon \to 0$.
Una possibile espressione analitica, in cui la parte centrale del grafico è un arco di cerchio, è la seguente:

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \left|x - \dfrac{1}{2}\right| , & \text{se } \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \epsilon \\[2ex] \dfrac{1}{2} - 2\epsilon + \sqrt{2\epsilon^2 - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2} & \text{se } \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \epsilon \end{cases}$$

con $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$; infatti si verifica facilmente che ogni f_ϵ soddisfa le proprietà richieste e che

$$\max_{[0,1]} f_\epsilon = f_\epsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (2 - \sqrt{2})\,\epsilon .$$

Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza si ha

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^{1/2} x\,dx + \int_{1/2}^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{4} .$$

e d'altra parte

$$\int_0^1 f_\epsilon(x)\,dx \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{4} - \epsilon + \epsilon^2,$$

quindi $B = \dfrac{1}{4}$ è la migliore costante.

111. Se $\alpha = 0$ la successione assegnata è costantemente uguale a zero. Per $\alpha \neq 0$, ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \; ,$$

si ha che la successione

$$\frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{1}{n}} =$$

$$= \frac{e^{\alpha \log \frac{n+1}{n}} - 1}{\alpha \log \dfrac{n+1}{n}} = \alpha \, \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$$

tende ad α per $n \to \infty$. Pertanto in ogni caso il limite è α.

112. Basta notare che

$$\frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

per ottenere

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]_\epsilon^{2\pi} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\epsilon}{\epsilon} = 1 \, .$$

113. Osserviamo che la funzione f è di classe C^∞ su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; applicando il *teorema dell'Hôpital* si ottiene poi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}^2 x = 0 = f(0) \; ,$$

quindi f è continua in $\mathbf{R}$.
Notiamo poi che f è pari perchè, per $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} \operatorname{arctg}^2(-s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{-x} \int_0^{-x} \operatorname{arctg}^2 s\,ds = f(-x) \, .$$

Basta allora studiare f per $x \geqslant 0$.

Per $t \geqslant 1$ si ha $\operatorname{arctg} t \geqslant \dfrac{\pi}{4}$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt \geqslant \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 (x-1) = +\infty\ ,$$

pertanto possiamo applicare di nuovo il *teorema dell'Hôpital* ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}^2 x = \frac{\pi^2}{4}\ .$$

Per $x \neq 0$ la derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{x\operatorname{arctg}^2 x - \displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{x^2}\ ,$$

quindi per il *teorema dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{arctg} x\,\dfrac{1}{1+x^2}}{2x} = 0\ ;$$

d'altra parte, sempre per il *teorema dell'Hôpital*,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0\ ,$$

quindi f è di classe C^1 su tutto **R**.
Essendo poi arctg x una funzione crescente, per ogni $x \geqslant 0$ si ha

$$0 \leqslant t \leqslant x \quad\Rightarrow\quad \operatorname{arctg}^2 t \leqslant \operatorname{arctg}^2 x$$

e quindi

$$x\operatorname{arctg}^2 x - \int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt \geqslant 0 \qquad \forall\, x \geqslant 0\ ,$$

cioè $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \geqslant 0$. Un grafico approssimativo di f è allora il seguente:

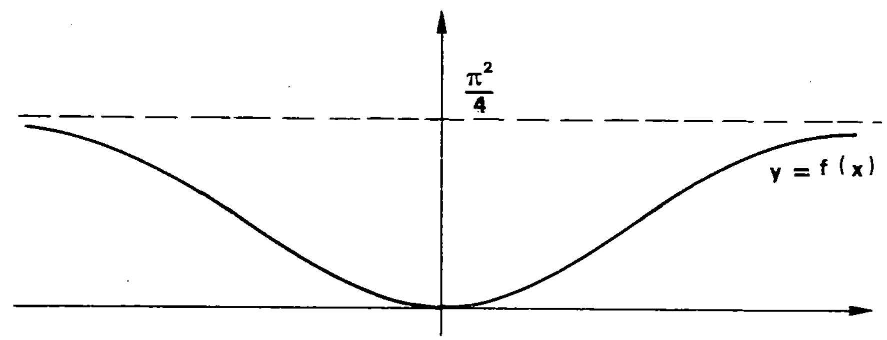

Figura 18

114. Dalla convessità di f e dal fatto che $f(-1) = 1$ ed $f(0) = 0$ segue che per ogni $\lambda\in[0,1]$

$$f(-\lambda) = f[\lambda\cdot(-1) + (1-\lambda)\cdot 0] \geqslant \lambda f(-1) + (1-\lambda)f(0) = \lambda\ ,$$

cioè

$$f(x) \leqslant -x \qquad \forall\, x\in[-1,0]\ .$$

Analogamente si prova che

$$f(x) \leqslant x \qquad \forall\, x\in[0,1]\ ,$$

quindi

$$|x| - f(x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x\in[-1,1]\ .$$

D'altra parte per la (*iv*) si ha

$$\int_{-1}^{1} (|x|-f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \ .$$

Ricordiamo che una funzione continua e non negativa può avere integrale nullo su un intervallo (non ridotto a un punto) se e solo se è identicamente nulla. La funzione f, essendo convessa in $[-1,1]$, è continua in $]-1,1[$, quindi lo è anche $|x| - f(x)$ e, per quanto detto prima,

$$|x|-f(x) = 0 \qquad \forall x \in]-1,1[\ .$$

Nei punti -1 ed 1 l'uguaglianza fra $|x|$ ed $f(x)$ è data da (ii), quindi la tesi è dimostrata.

115. Dato che $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$, si ha

$$(1-x)^{1/\cos(x-\frac{\pi}{2})} = (1-x)^{1/\operatorname{sen} x} = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\log(1-x)\right) \ .$$

Ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} = -1,$$

dunque il limite cercato vale $\frac{1}{e}$.

116. Possiamo scrivere

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\log|x|\right) \ ,$$

ottenendo subito che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \ .$$

Si ottiene inoltre

$$f'(x) = \frac{1-\log|x|}{x^2}\exp\left(\frac{\log|x|}{x}\right),$$

per cui

$$f'(x) > 0 \iff \log|x| < 1 \iff 0 < |x| < e \ .$$

Rimane da esaminare il comportamento di f' per $x \to 0^+$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}\exp\left(\frac{\log x}{x}\right) = \frac{1-\log x}{\exp\left(2\log x - \frac{\log x}{x}\right)} \ .$$

Per $x \to 0^+$ il numeratore e il denominatore tendono a $+\infty$, quindi possiamo applicare il *teorema dell'Hôpital* ottenendo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\exp\left(2\log x - \frac{\log x}{x}\right)\left(\frac{2}{x} + \frac{\log x - 1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\exp\left(2\log x - \frac{\log x}{x}\right)\left(2x + \log x - 1\right)} = 0 \ .$$

Un grafico approssimativo di f è allora il seguente:

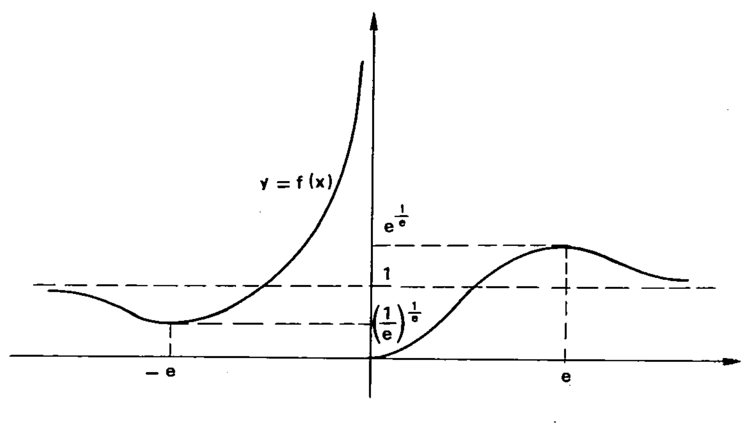

Figura 19

117. Poichè $c > 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{cx\log(cx)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{y\log y} = L \quad ;$$

d'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{cx\log(cx)}{x\log x} = c\lim_{x\to+\infty} \frac{\log c + \log x}{\log x} = c \ ,$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{cx\log(cx)} \, \frac{cx\log(cx)}{x\log x} \, \frac{x\log x}{f(x)} =$$

$$= Lc\frac{1}{L} = c \, .$$

Se $L = 0$, la tesi non è più valida in generale: presa ad esempio $f(x) = \log x$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\log x} = 0 \quad ,$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1 \qquad \forall c > 0 \, .$$

118. (a) Cominciamo a calcolare $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$: le ipotesi del *teorema dell'Hôpital* sono verificate, quindi

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \ ;$$

ponendo allora

$$\varphi(0) = f(0)$$

si ottiene che φ è continua in **R**. Dato che φ è di classe C^3 su $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, basta controllare le derivate di φ in $x = 0$. Si ha, per $x \neq 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{x f(x) - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

quindi, per il *teorema dell'Hôpital,*

$$\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x f'(x) - f(x)}{2x} = \frac{f'(0)}{2} \, .$$

D'altra parte, sempre per il *teorema dell'Hôpital*,

$$\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \varphi'(x) \ ,$$

pertanto φ è di classe C^1 su tutto **R**. Poi, dato che

$$\varphi''(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2x f(x) + 2 \int_0^x f(t)\, dt}{x^3}$$

per ogni $x \neq 0$, si può ripetere il ragionamento precedente ottenendo

$$\varphi''(0) = \lim_{x \to 0} \varphi''(x) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x f'(x) + x^2 f''(x) - 2f(x) - 2x f'(x) + 2f(x)}{3x^2} = \frac{f''(0)}{3},$$

cosicchè (a) è provata.

(b) Per dimostrare che φ è convessa basta verificare che $\varphi''(x) \geqslant 0$ per ogni x. Dato che f è convessa, si ha $f''(x) \geqslant 0$ per ogni x, quindi $\varphi''(0) = \dfrac{f''(0)}{3} \geqslant 0$. Posto

$$g(x) = x^2 f'(x) - 2x f(x) + 2 \int_0^x f(t)\, dt ,$$

si ha poi $g(0) = 0$ e, per la convessità di f, $g'(x) = x^2 f''(x) \geqslant 0$ per ogni x, di modo che $g(x) \leqslant 0$ per $x \leqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ per $x \geqslant 0$.

Ma $\varphi''(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ per $x \neq 0$ e quindi $\varphi''(x) \geqslant 0$ per ogni $x \neq 0$.

Il viceversa non è vero. Cerchiamo il controesempio tra i polinomi: si verifica subito che quelli di 1°, 2°, 3° grado non forniscono un controesempio. Passando a quelli di 4° grado, se

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

f è convessa se e solo se $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, cioè se e solo se $\Delta = 36a^2 - 96b \leqslant 0$, ovvero

$$a^2 \leqslant \frac{8}{3} b .$$

Invece

$$\varphi(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{ax^3}{4} + \frac{bx^2}{3} + \frac{cx}{2} + d$$

è convessa se e solo se

$$a^2 \leqslant \frac{128}{45} b.$$

Dato che $\dfrac{8}{3} = \dfrac{120}{45}$, basta scegliere $b > 0$, c, d qualunque ed $a \in \left] \sqrt{\dfrac{8b}{3}}, \sqrt{\dfrac{128b}{45}} \right[$ per ottenere un controesempio (ad esempio, $f(x) = x^4 + 11x^3 + 45x^2$ non è convessa, mentre lo è $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{11x^3}{4} + 15x^2$).

119. Osserviamo che

$$f(x) = 2^{2 - 2\cos\sqrt{x}} - 2^x =$$

$$= 2^x \left(2^{(2 - 2\cos\sqrt{x} - x)} - 1\right) =$$

$$= 2^x \left[e^{(2 - 2\cos\sqrt{x} - x)\log 2} - 1\right]$$

Ricordando lo *sviluppo di Taylor*

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4),$$

si ha

$$f(x) = 2^x \, [e^{-\frac{x^2 \log 2}{12} + o(x^2)} - 1] \, .$$

Tenendo presente infine che

$$e^t = 1 + t + o(t) \, ,$$

si giunge a

$$f(x) = 2^x \left(- \frac{x^2 \log 2}{12} + o(x^2) \right) ,$$

quindi f ha lo stesso ordine di infinitesimo di x^2 per $x \to 0^+$, e si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = - \frac{\log 2}{12} \, .$$

120. Si ha intanto $a_0 = 0$. Calcoliamo il valore di a_h per $h \geqslant 1$ integrando due volte per parti:

$$a_h = \int_0^\pi e^{-hx} \operatorname{sen}(h^2 x) \, dx = \left[e^{-hx} \frac{-\cos(h^2 x)}{h^2} \right]_0^\pi +$$

$$- \int_0^\pi h e^{-hx} \frac{\cos(h^2 x)}{h^2} \, dx = \frac{1}{h^2} - \frac{e^{-h\pi} \cos(h^2 \pi)}{h^2} +$$

$$- \frac{1}{h} \left\{ \left[e^{-hx} \frac{\operatorname{sen}(h^2 x)}{h^2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi h e^{-hx} \frac{\operatorname{sen}(h^2 x)}{h^2} \, dx \right\} =$$

$$= \frac{1 - e^{-h\pi} \cos(h^2 \pi)}{h^2} - \frac{1}{h^2} \int_0^\pi e^{-hx} \operatorname{sen}(h^2 x) \, dx =$$

$$= \frac{1 - e^{-h\pi} \cos(h^2 \pi)}{h^2} - \frac{1}{h^2} a_h \, ,$$

pertanto

$$a_h = \left(1 + \frac{1}{h^2} \right)^{-1} \frac{1 - e^{-h\pi} \cos(h^2 \pi)}{h^2} = \frac{1 - e^{-h\pi} \cos(h^2 \pi)}{1 + h^2}$$

Essendo $e^{-h\pi} < 1$ e $|\cos(h^2 \pi)| = 1$, si ha subito che

$$a_h > 0 \qquad \forall h \geqslant 1 \, ,$$

pertanto

$$\inf_h a_h = \min_h a_h = a_0 = 0 \, .$$

Per calcolare l'estremo superiore notiamo che:

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-h\pi}}{1 + h^2} & \text{se } h \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{1 + e^{-h\pi}}{1 + h^2} & \text{se } h \text{ è dispari} \, , \end{cases}$$

e da questo segue immediatamente che

$$\max \left\{ a_1, a_3, a_5, \ldots \right\} = a_1 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \quad ,$$

visto che $a_1 > a_3 > a_5 > \dots$. Inoltre per $h \geqslant 2$ si ha

$$\frac{1-e^{-h\pi}}{1+h^2} \leqslant \frac{1}{1+h^2} \leqslant \frac{1}{5} \quad ,$$

mentre $a_1 > \frac{1}{2}$, quindi

$$\sup_h a_h = \max_h a_h = a_1 = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \quad .$$

121. Se poniamo per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = e^x (1 - \operatorname{sen} x) \quad ,$$

dobbiamo dimostrare che

$$f(x) < 1 \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\; .$$

Si ha

$$f(0) = 1 \quad ,$$

quindi basta provare che f è decrescente in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, cioè che

$$f'(x) = e^x (1 - \operatorname{sen} x - \cos x) < 0 \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\; .$$

Si verifica facilmente che la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x + \cos x$ assume in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ valore minimo solo negli estremi e valore massimo in $\frac{\pi}{4}$, dunque $1 < \operatorname{sen} x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$ per ogni $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e la tesi è provata.

122. Si vede subito che g è non decrescente: infatti se $0 \leqslant x \leqslant y$ si ha $[0, x] \subset [0, y]$ e quindi

$$g(x) = \sup_{[0,x]} f \leqslant \sup_{[0,y]} f = g(y) \; .$$

Allora g ha in ogni punto limite destro e (salvo che nello zero) limite sinistro. Fissiamo $x_0 \geqslant 0$ e poniamo

$$\mu = \lim_{x \to x_0^+} g(x) \quad , \qquad \lambda = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) & \text{se } x_0 > 0 \\ g(0) = f(0) & \text{se } x_0 = 0 \; . \end{cases}$$

Per la monotonia di g si ha $\lambda \leqslant \mu$, quindi per avere la continuità di g in x_0 basta dimostrare che $\mu \leqslant \lambda$.
Notiamo che si ha $f(x_0) \leqslant \lambda$: infatti, tale relazione è ovviamente vera per $x_0 = 0$, mentre per $x_0 > 0$ si ha

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant \lambda \qquad \forall x < x_0 \; ,$$

quindi $f(x_0) \leqslant \lambda$ per la continuità di f.
Fissato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in \left]x_0, x_0 + \delta\right[\; ,$$

quindi, ricordando che $f(x) \leqslant \lambda$ per ogni $x \leqslant x_0$,

$$f(x) \leqslant \lambda + \epsilon \qquad \forall x < x_0 + \delta \; .$$

Di conseguenza,

$$g(x) \leqslant \lambda + \epsilon \qquad \forall x < x_0 + \delta \; .$$

Da ciò si deduce che $\mu \leqslant \lambda + \epsilon$ e quindi, per l'arbitrarietà di ϵ, che $\mu \leqslant \lambda$: questo prova la continuità di g.
L'affermazione inversa non vale: se f è una qualunque funzione decrescente si ha $g(x) = f(0)$ per ogni x, quindi g è continua senza che f lo debba essere.

Non è nemmeno vero che g sia di classe C^1 se f lo è: scelta ad esempio $f(x) = x^2 - x$, il cui grafico è

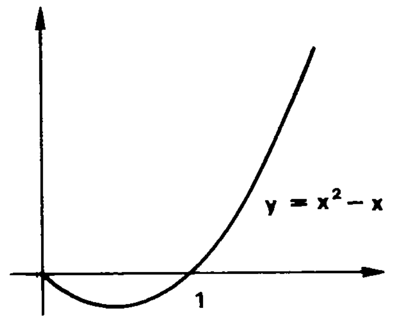

Figura 20

si ha $g(x) = 0$ per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $g(x) = f(x)$ per $x \geqslant 1$, e g non è derivabile in $x = 1$.

123. Cominciamo con l'osservare che, essendo $e \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha

$$1 - e^{1/n} \leqslant -\frac{1}{n},$$

quindi

$$(1 - e^{1/n}) \log(n!) \leqslant -\frac{1}{n} \log(n!) = -\log \sqrt[n]{n!} .$$

Dato che $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, il limite proposto è $-\infty$.

124. Poniamo

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} - \operatorname{sen} x \quad ;$$

si tratta allora di provare che f è limitata inferiormente su $\mathbf{R}$, e di calcolarne l'estremo inferiore C.
Poichè $x^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ e $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ per ogni x, si ha

$$f(x) \geqslant -1 \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

D'altra parte

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2 e^{-(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2} - 1\right] = -1 ,$$

quindi l'estremo inferiore di f su $\mathbf{R}$ è -1.

125. Effettuando la sostituzione $x = ty$ si ha

$$f(t) = \int_0^1 \frac{x^2}{(t^2 + x^2)^3}\, dx = \frac{1}{t^3} \int_0^{1/t} \frac{y^2}{(1 + y^2)^3}\, dy .$$

Per $t < 1$ si ha allora

$$f(t) \geqslant \frac{1}{t^3} \int_0^1 \frac{y^2}{(1 + y^2)^3}\, dy \geqslant \frac{1}{t^3} \int_0^1 \frac{y^2}{8}\, dy = \frac{1}{24\, t^3} ,$$

quindi $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$.
Osserviamo poi che

$$\frac{f(t)}{t^{-3}} = \int_0^{1/t} \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\, dy \quad ;$$

se proviamo che esiste (finito e diverso da zero)

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\, dy \ ,$$

avremo mostrato che $f(t)$ ha lo stesso ordine di infinito di t^{-3} (per $t \to 0^+$). Per la positività di $\dfrac{y^2}{(1+y^2)^3}$, il limite esiste ed è positivo.
D'altra parte $(1+y^2)^3 \geqslant y^2 + y^4$, quindi

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\, dy \leqslant \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} \ ,$$

e la dimostrazione è conclusa.
Con qualche calcolo, si può verificare che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{-3}} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^3}\, dy = \frac{\pi}{16} \ .$$

126. Possiamo ovviamente supporre che sia $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Dividendo la relazione data per $e^{\lambda_3 x}$ si trova

$$p_3(x) = -p_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_3)x} - p_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_3)x} \quad ;$$

osservando che $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$ e $\lambda_2 - \lambda_3 < 0$ e ricordando che p_1 e p_2 sono limitate, si ricava che

$$\lim_{x\to+\infty} p_3(x) = 0 \ .$$

Allora, se $T > 0$ è un periodo di p_3, si ha

$$p_3(x_0) = \lim_{n\to+\infty} p_3(x_0 + nT) = \lim_{x\to+\infty} p_3(x) = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbf{R} \ ,$$

cioè $p_3 = 0$.
La relazione di partenza diviene allora

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \ .$$

Dividendo per $e^{\lambda_2 x}$ e ripetendo il ragionamento di prima si ottiene allora $p_2 = 0$, e la relazione di partenza si riduce a

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \ ,$$

da cui (anche senza usare la periodicità di p_1) si ottiene che $p_1 = 0$.

127. Se $a \geqslant 1$, si ha $\left(a + \dfrac{1}{n}\right)^k \geqslant 1$ per ogni $k,n \in \mathbf{N}$, quindi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k \geqslant n$$

e il limite richiesto vale $+\infty$.
Se invece $a < 1$, dalla formula che dà la somma dei primi n termini di una progressione geometrica si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1 - \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(a + \dfrac{1}{n}\right)}$$

purché sia $\left(a+\frac{1}{n}\right)<1$, cioè sia $n>\frac{1}{1-a}\cdot$

Ma

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}a^n\left(1+\frac{1}{na}\right)^n=0\ ,$$

dunque il limite cercato è $\frac{1}{1-a}$.

128. Notiamo subito che f è di classe C^1 ed è monotona non decrescente, in quanto l'integrando è continuo e non negativo in $[0,1[$. Il limite di f per $x\to 1^-$ esiste per la monotonia di f ed è finito perchè

$$\int_0^x\sqrt{\frac{s}{1-s}}\,ds\leqslant\int_0^x\frac{ds}{\sqrt{1-s}}=[-2\sqrt{1-s}\,]_0^x=$$

$$=2-2\sqrt{1-x}\leqslant 2\ .$$

Osserviamo poi che $f(0)=0$ e che $f'(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, quindi $f'(0)=0$ e $\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=+\infty$.

Infine, per $x>0$, si ha

$$f''(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}>0\ ,$$

quindi f è convessa.
Un grafico approssimativo di f sarà allora il seguente:

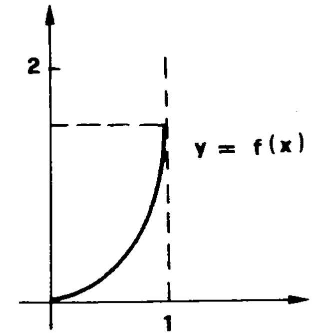

Figura 21

Si noti che, effettuando la sostituzione $s=\mathrm{sen}^2 t$, non è difficile ottenere l'espressione esplicita di f

$$f(x)=\mathrm{arcsen}\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}$$

129. Per $a>1$, il limite cercato è $+\infty$; per $a=1$ il limite è 1; per $0\leqslant a<1$ il limite è zero.
Si vede subito che per $0\leqslant a\leqslant 1$ la successione è decrescente, perchè somma di una successione non crescente e di una decrescente, quindi non può certo essere $\inf\limits_n x_n=x_1$.

Rimane il caso $a>1$: affinchè $\inf\limits_n x_n=x_1$, occorre intanto che sia $x_2\geqslant x_1$, cioè

$$(*)\qquad a(a-1)\geqslant\frac{1}{2}\ .$$

D'altra parte questa condizione assicura che (x_n) è non decrescente: infatti

$$x_{n+1}\geqslant x_n\iff a^n(a-1)\geqslant\frac{1}{n(n+1)}\ ;$$

essendo $a>1$, da (*) segue che

$$a^n(a-1)\geqslant a(a-1)\geqslant\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{n(n+1)}\qquad\forall n\in\mathbf{N}\ .$$

Dalle condizioni $a > 1$ ed $a\,(a-1) \geqslant \frac{1}{2}$ si ottiene che $\inf\limits_n x_n = x_1$ se e solo se $a \geqslant \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

130. (a) Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \geqslant 0$ tale che $f(x_0) > 0$. Essendo $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \geqslant 0$, la funzione f è non decrescente su $[0,+\infty[$ e quindi in particolare $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ per ogni $x \geqslant x_0$. Allora dalla (*) segue che

$$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \geqslant 1 \qquad \forall x \geqslant x_0 ,$$

da cui si ricava

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{[f(t)]^2}\,dt \geqslant \int_{x_0}^{x} 1\,dt = x - x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0$$

e quindi

$$\frac{1}{f(x_0)} - \frac{1}{f(x)} \geqslant x - x_0 \qquad \forall x \geqslant x_0 .$$

Passando al limite per $x \to +\infty$, si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, che contraddice il fatto che $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ per ogni $x \geqslant x_0$.

(b) La risposta è no: se infatti esistesse $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f(x_0) > 0$, basterebbe ripetere il ragionamento del punto (a) per trovare una contraddizione. Se invece fosse $f(x_0) < 0$, si avrebbe $f(x) \leqslant f(x_0) < 0$ per ogni $x \leqslant x_0$, e quindi con ragionamento analogo al precedente

$$\frac{1}{f(x)} \geqslant x_0 - x + \frac{1}{f(x_0)} \qquad \forall x \leqslant x_0 .$$

Passando al limite per $x \to -\infty$ si perviene ad una contraddizione.

131. Osserviamo che

$$0 < x_n < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x_{n+1} = x_n(1 - x_n^2) < x_n < 1 .$$

Si vede allora che, se $0 < a < 1$, si ha $0 < x_n < 1$ per ogni n; inoltre (x_n) è decrescente, quindi converge ad un limite finito L. Tale limite deve verificare la relazione

$$L = L - L^3 ,$$

pertanto $L = 0$.
Se $a = 0$ oppure $a = 1$, si ha $x_n = 0$ per ogni $n \geqslant 1$.

In ogni caso, dunque, la successione converge verso zero.

132. Riscriviamo la funzione in questo modo:

$$x\left(\frac{\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+e^{2t^2}}\,dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt} - 1\right) = x\,\frac{\displaystyle\int_0^x \left(\sqrt{1+e^{2t^2}} - e^{t^2}\right) dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt} =$$

$$= x\,\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t^2}} + e^{t^2}}\,dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt} .$$

Dato che $\sqrt{1+e^{2t^2}} + e^{t^2} \geqslant 1$, si ha per ogni $x > 0$

$$0 \leqslant x \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t^2}} + e^{t^2}}\, dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt} \leqslant x \frac{\displaystyle\int_0^x dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt} =$$

$$= \frac{x^2}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt} .$$

Applicando il *teorema dell'Hôpital* all'ultimo termine, si ottiene facilmente che il limite proposto è zero.

133. (a) Notiamo che, essendo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{x}$ tale che

$$0 < t < \bar{x} \quad \Rightarrow \quad 1 - \epsilon < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 + \epsilon .$$

Allora per $x < \frac{\bar{x}}{2}$ si ha

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt > \int_x^{2x} \frac{1-\epsilon}{t}\, dt = (1-\epsilon)\log 2$$

e

$$f(x) < \int_x^{2x} \frac{1+\epsilon}{t}\, dt = (1+\epsilon)\log 2 ,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log 2 .$$

Essendo $|\operatorname{sen} t| \leqslant 1$ per ogni t, si ha poi

$$|f(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{2x} ,$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 .$$

(b) Dalla disuguaglianza

$$\operatorname{sen} x < x \qquad \forall x > 0$$

segue subito che per ogni $x > 0$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt < \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\, dt = \log 2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) .$$

134. Fissiamo $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, e definiamo la funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ponendo

$$g(t) = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\, dx .$$

Essendo f continua, la funzione g è derivabile; inoltre per ipotesi si ha $g(T) > g(0)$ per ogni $T > 0$, pertanto $g'(0) \geqslant 0$. Dal *teorema fondamentale del calcolo* segue che

$$g'(T) = f(b+T) - f(a+T) ,$$

quindi da $g'(0) \geqslant 0$ segue

$$f(b) \geqslant f(a) ,$$

cioè f è non decrescente.

Se fosse $f(b) = f(a) = \alpha$, essendo f non decrescente dovrebbe essere $f(x) = \alpha$ per ogni $x \in [a,b]$. Scelti allora

$$\tilde{a} = a \quad , \quad \tilde{b} = \frac{a+b}{2} \quad , \quad T = \frac{a+b}{2} \quad ,$$

si avrebbe $\tilde{a} < \tilde{b}$, $T > 0$, mentre

$$\int_{\tilde{a}+T}^{\tilde{b}+T} f(x)\,dx = \alpha\,\frac{a+b}{2} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)\,dx \ ,$$

contro l'ipotesi. Pertanto f è crescente.

135. Ricordando che per ogni $t > 0$ si ha

$$\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$$

e utilizzando lo *sviluppo di Taylor*

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t) = t(1 + o(1))$$

si ha

$$x\left[\operatorname{arctg}(\log x) - \operatorname{arctg} x\right] = x\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\log x}\right] =$$

$$= x\left[\frac{1}{x}(1 + o(1)) - \frac{1}{\log x}(1 + o(1))\right] =$$

$$= 1 + o(1) - \frac{x}{\log x}(1 + o(1)) \ ,$$

e il limite proposto è uguale a $-\infty$.

136. Poichè

$$x_{n+1} - x_n = 1 - 2x_n + x_n^2 = (1 - x_n)^2 \geqslant 0 \ ,$$

la successione (x_n) è monotona non decrescente, pertanto ammette limite (finito o $+\infty$). Se tale limite è un numero reale L, deve essere

$$(*) \qquad L = 1 - L + L^2 \ ,$$

cioè necessariamente $L = 1$.
Ciò basta per concludere che se $a > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Per $a = 1$, si ha $x_n = 1$ per ogni n, quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Resta il caso $a < 1$. Osservando che

$$x_{n+1} > 1 \iff x_n^2 - x_n > 0 \iff x_n > 1 \text{ oppure } x_n < 0 \ ,$$

si vede che se $a < 0$ si ha $x_1 > 1$, quindi come prima

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ .$$

Se invece $0 \leqslant a < 1$, si ha $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$ per ogni n, quindi per la (*)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \ .$$

137. Ricordando che $0 \leqslant \operatorname{arctg} t \leqslant t$ per ogni $t \geqslant 0$, si vede che per ogni $x > 0$

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x + t^2}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t}{x + t^2}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t}{x}\,dt = \frac{x}{2} \ ,$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x + t^2}\,dt = 0 \ .$$

Per quanto riguarda l'altro limite, osserviamo intanto che, come sopra, si ottiene

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

D'altra parte si ha

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x+t^2}\,dt \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{x+x^2}\,dt =$$

$$=\frac{1}{x^2(1+x)}\left(x\operatorname{arctg} x-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)}-\frac{\log(1+x^2)}{2x^2(1+x)}\,.$$

Il limite di quest'ultima quantità per $x\to 0^+$ è $\frac{1}{2}$, quindi anche il limite richiesto è uguale a $\frac{1}{2}$.

138. In generale non è possibile: si pensi alla funzione identicamente nulla. Utilizziamo lo *sviluppo di Taylor* di f intorno a $x=0$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f'''(0)+o(x^3)\,.$$

Dato che f è dispari, si ha $f(0)=f''(0)=0$, quindi la formula si riduce a

$$f(x)=xf'(0)+\frac{x^3}{6}f'''(0)+o(x^3)\,,$$

da cui anche

$$\lambda f(\mu x)=\lambda\mu x f'(0)+\lambda\mu^3\frac{x^3}{6}f'''(0)+o(x^3)\,.$$

Allora

$$\frac{f(x)-\lambda f(\mu x)}{x^3}=\frac{(1-\lambda\mu)f'(0)}{x^2}+\frac{(1-\lambda\mu^3)f'''(0)}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\,,$$

e il limite sarà uguale ad 1 se e solo se il sistema nelle incognite λ e μ

$$(*)\qquad\begin{cases}(1-\lambda\mu)\,f'(0)=0\\ (1-\lambda\mu^3)\,f'''(0)=6\end{cases}$$

ha soluzione. E' allota indispensabile che sia $f'''(0)\neq 0$. Se poi è $f'(0)=0$, ci saranno infinite soluzioni, date dalla formula

$$\lambda\mu^3=1-\frac{6}{f'''(0)}\,.$$

Se invece $f'(0)\neq 0$, dovrà essere $\lambda\mu=1$, da cui

$$\mu^2=1-\frac{6}{f'''(0)}$$

Si vede allora che se $f'''(0)\neq 0$ e $f'(0)\neq 0$ il sistema (*) è risolubile se e solo se

$$f'''(0)<0 \qquad\text{oppure}\qquad f'''(0)>6\,,$$

e le soluzioni sono in tal caso

$$\mu=\pm\sqrt{1-\frac{6}{f'''(0)}}\,,\qquad \alpha=\frac{1}{\mu}\,.$$

In conclusione,

- se $f'''(0)<0$ oppure $f'''(0)>6$ il sistema (*) è risolubile;
- se $0<f'''(0)\leqslant 6$, il sistema (*) è risolubile se e solo se $f'(0)=0$;
- se $f'''(0)=0$, il sistema (*) non è risolubile.

Serie di matematica e fisica
(Collana fondata da G. Stampacchia e diretta da G. Vidossich)

1. J. P. Cecconi e G. Stampacchia
   Analisi matematica. Vol. I: *Funzioni di una variabile*

2. J. P. Cecconi e G. Stampacchia
   Analisi matematica. Vol. II

3. F. Treves
   Equazioni differenziali lineari e derivate parziali
   (in preparazione)

4. G. Strang
   Algebra lineare e sue applicazioni

5. L. C. Piccinini, G. Stampacchia e G. Vidossich
   Equazioni differenziali in R^n (problemi e metodi)

6. J. P. Cecconi, L. C. Piccinini, G. Stampacchia
   Esercizi e problemi di analisi matematica.
   Vol. I: *Funzioni di una variabile*
   Vol. II: *Funzioni di più variabili*

7. G. Andreatta, W. Runggaldier
   Statistica matematica