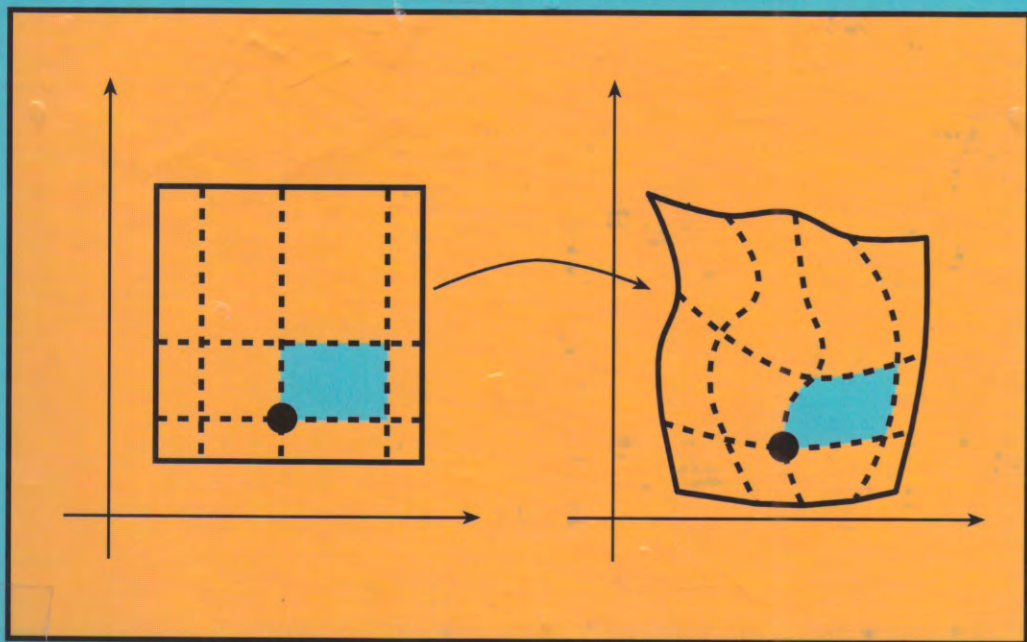


Emilio Acerbi • Giuseppe Buttazzo

Secondo corso di
**ANALISI
MATEMATICA**



Pitagora Editrice Bologna

Emilio Acerbi • Giuseppe Buttazzo



Secondo corso di
**ANALISI
MATEMATICA**



Pitagora Editrice Bologna



ib wvuo3 obvovozt
1211A7A
A7TAM7TAM



ISBN 88-371-1921-6

© Copyright 2016 by Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.
Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Editore.

Stampa: Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy
Codice: 51/25

<http://www.pitagoragroup.it>
e-mail: pited@pitagoragroup.it

Presentazione

A quasi vent'anni dalla sua uscita, il fortunato volume "Primo corso di Analisi Matematica" viene affiancato oggi dal "Secondo corso di Analisi Matematica". Questo libro contiene gli argomenti che solitamente vengono svolti in un corso universitario di *Analisi Matematica 2*; l'impostazione che abbiamo dato alla presentazione dei vari capitoli si adatta a tutti gli studenti che seguono un percorso scientifico o tecnologico, senza distinzioni tra corsi di laurea. Inoltre il volume, per come è strutturato, può essere utilizzato sia dagli studenti più brillanti che vogliono approfondire determinati argomenti di analisi matematica, che dagli studenti che invece vogliono limitarsi alla comprensione dei concetti essenziali.

Ogni capitolo è organizzato in tre parti: nella prima abbiamo esposto gli argomenti fondamentali, cercando di evitare i dettagli troppo spinosi e limitando le dimostrazioni all'indispensabile. I concetti e le definizioni sono corredati da numerosi esempi ed osservazioni; abbiamo inoltre inserito molte figure allo scopo di illustrare meglio i punti più delicati e aiutare lo studente nella comprensione attraverso la componente visiva, che risulta assolutamente essenziale soprattutto dove gli argomenti trattati coinvolgono curve e superfici.

Nella seconda parte di ogni capitolo abbiamo raccolto numerosi esercizi proposti, dai più semplici a quelli che richiedono un notevole impegno da parte dello studente; insieme a quelli inseriti nel testo ed ai vari esempi svolti in dettaglio, gli esercizi costituiscono un elemento fondamentale per la comprensione di argomenti delicati, come sono tutti quelli di un corso di analisi di più variabili. Consigliamo vivamente a tutti gli studenti di svolgere un buon numero di esercizi, iniziando dai più semplici, ma anche di cimentarsi con qualcuno dei più impegnativi.

La terza parte di ogni capitolo costituisce un'appendice contenente vari esempi e applicazioni, insieme agli approfondimenti di alcuni concetti e qualche argomento complementare. Sugeriamo a tutti di provare a leggere le appendici che abbiamo inserito, dopo aver assimilato gli argomenti di base presenti nella prima parte. Nelle appendici si trovano anche dimostrazioni delicate, anche di risultati che difficilmente si trovano in un libro di testo di *Analisi Matematica 2*.

Abbiamo cercato di curare al massimo tutti i dettagli, dall'indice dei capitoli e delle sezioni posto nelle prime pagine all'indice analitico alla fine del volume, per rendere più agevole la lettura; un elenco dei simboli principali utilizzati nel testo completa la presentazione.

Per rendere più immediata la lettura abbiamo usato le seguenti notazioni:

- ☞ per i richiami a figure, teoremi o formule collegate: ad esempio, "...base canonica di \mathbb{R}^n " ☞ Sezione 1.1, possiamo ...";
- ☞ per indicare che a quel punto è opportuno svolgere un certo esercizio: ad esempio, "...piuttosto che a un altro (☞ es. 4.3) o che, addirittura ...";
- ☞ per indicare che è stata inserita un'appendice con un approfondimento dell'argomento, o con un argomento collegato: ad esempio, "...deriva dalla forma di una catena appesa (☞ appendice 5.10); questa è il grafico ...";
- [] questa coppia di simboli è usata per indicare un'alternativa: ad esempio, la frase "... $k + 1$ [$k + 2$] se invece è radice semplice [doppia] ..." va intesa come "... $k + 1$ se invece è radice semplice e $k + 2$ se è radice doppia ...";
- indica la fine di una dimostrazione.

Infine, abbiamo raccolto diversi suggerimenti di colleghi e studenti sulla maniera più efficace di suddividere e presentare gli argomenti. Il volume ci sembra largamente sufficiente per poter seguire con profitto le lezioni di un corso di Analisi Matematica 2 e siamo certi che anche questa edizione incontrerà il gradimento degli studenti.

Parma e Pisa, 6 febbraio 2016

Emilio Acerbi e Giuseppe Buttazzo

Indice

Presentazione	v
Indice	vii
Capitolo 1 - Da una a più dimensioni	1
1.1 - Spazi lineari a più dimensioni	1
1.2 - Prodotto vettoriale	7
1.3 - Esempi fondamentali	11
1.4 - Traslazioni e rotazioni di coordinate	23
1.5 - Coordinate polari	27
1.6 - Elementi di topologia	30
1.7 - Successioni a valori vettoriali	38
1.8 - Funzioni continue	40
1.9 - Limiti in più variabili	50
1.10 - Risultati in una variabile	61
Esercizi relativi al capitolo 1	64
Appendice al capitolo 1	68
1.1 - Centri di massa e minimi	68
1.2 - Problemi di spazio	71

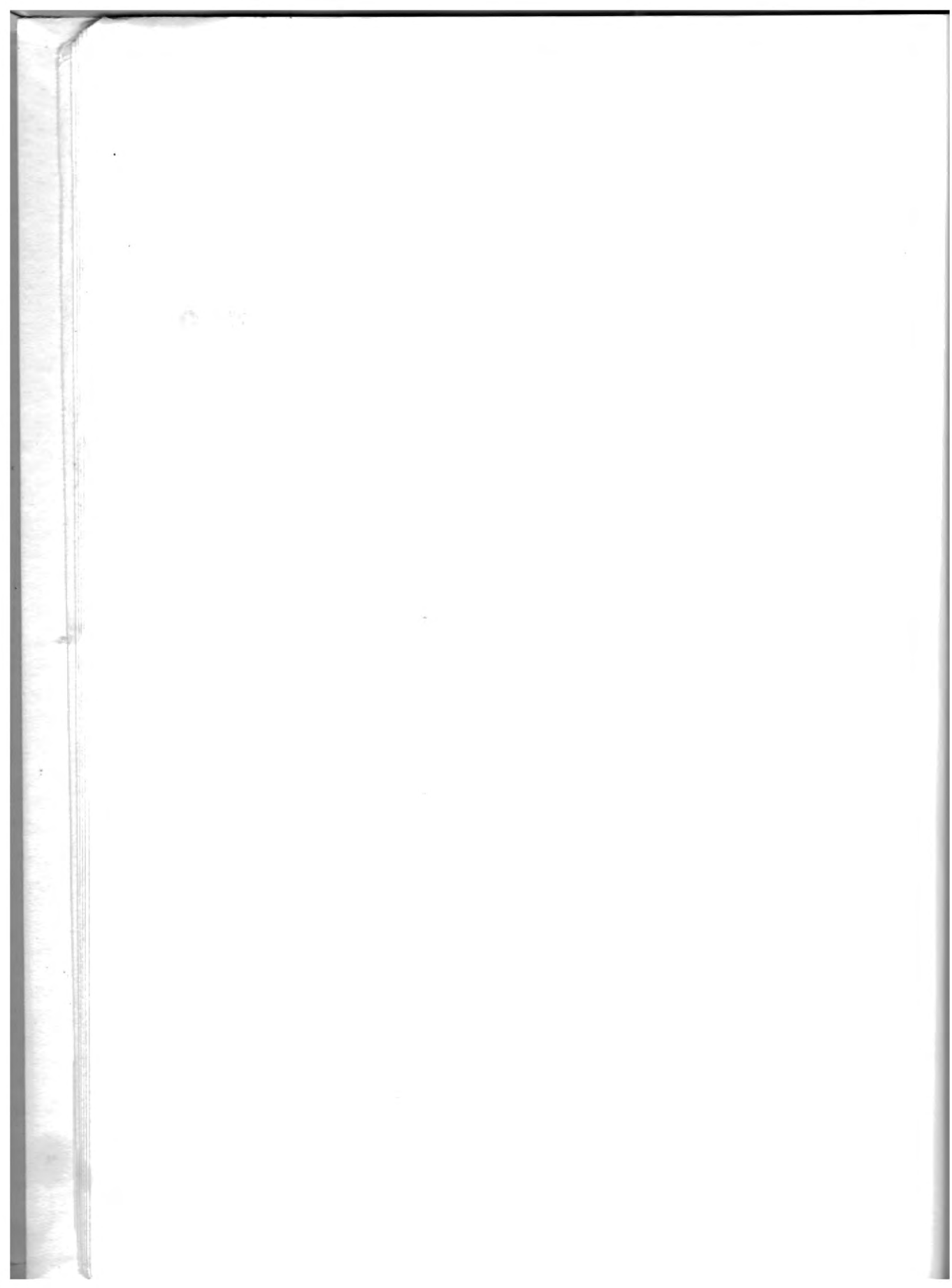
Capitolo 2 - Curve	73
2.1 - Funzioni vettoriali di una variabile	73
2.2 - Curve e riparametrizzazioni	76
2.3 - Curve in coordinate polari	86
2.4 - Velocità e accelerazione	89
2.5 - Curvatura	98
2.6 - Lunghezza di una curva e parametro d'arco	102
2.7 - Studio di una funzione su una curva	112
2.8 - Integrali su una curva e somma di curve	117
Esercizi relativi al capitolo 2	129
Appendice al capitolo 2	133
2.1 - Raccordi autostradali	133
2.2 - Altre curve celebri	135
2.3 - Applicazione ai motori	143
2.4 - Ellissi, astroidi e garages	143
 Capitolo 3 - Calcolo differenziale in più variabili	147
3.1 - Derivate parziali	147
3.2 - Derivate direzionali	152
3.3 - Differenziale	153
3.4 - Operazioni con le derivate parziali	159
3.5 - Derivate successive	164
3.6 - Formula di Taylor	166
3.7 - Massimi e minimi locali	167
3.8 - Funzioni convesse in \mathbb{R}^n	176
3.9 - Superfici k dimensionali in \mathbb{R}^n	178
3.10 - Funzioni implicite	187
3.11 - Moltiplicatori di Lagrange	195
Esercizi relativi al capitolo 3	201
Appendice al capitolo 3	205
3.1 - Medie numeriche	205
3.2 - Funzioni omogenee	207
3.3 - Un minimo o no?	209
3.4 - Centri di massa e minimi	210
3.5 - Cambiamenti di variabile e operatori differenziali	212
3.6 - Il Teorema del Dini in meccanica	214
 Capitolo 4 - Integrali multipli	217
4.1 - Integrale su un rettangolo	217
4.2 - Integrale su un insieme normale	223
4.3 - Cambiamenti di variabile	232
4.4 - Coordinate polari	238

4.5 - Integrali in tre dimensioni e più	242
4.6 - Integrali impropri	253
4.7 - Integrali di superficie	263
Esercizi relativi al capitolo 4	268
Appendice al capitolo 4	271
4.1 - Integrali ed energie	271
4.2 - Baricentri e navi	272
4.3 - Integrali superficiali multidimensionali	275
4.4 - Integrali ed energie di superficie	277
 Capitolo 5 - Equazioni differenziali	279
5.1 - Introduzione alle equazioni differenziali	279
5.2 - Il problema di Cauchy: esistenza	284
5.3 - Il problema di Cauchy: unicità	303
5.4 - Teoremi di confronto	308
5.5 - Equazioni lineari del primo ordine	312
5.6 - Equazioni a variabili separabili	317
5.7 - Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti	320
5.8 - Equazioni di ordine superiore al secondo	328
5.9 - Condizioni diverse da quelle di Cauchy	332
Esercizi relativi al capitolo 5	336
Appendice al capitolo 5	344
5.1 - Un sistema che collassa	344
5.2 - Curve di inseguimento	346
5.3 - Oscillazioni di un'altalena	348
5.4 - Caduta di un corpo in un campo di gravità	349
5.5 - Traiettorie balistiche	352
5.6 - Periodo di un pendolo	353
5.7 - Oscillazioni smorzate	355
5.8 - Dinamica di popolazioni	357
5.9 - Soluzioni particolari di equazioni di ordine superiore al secondo	359
5.10 - Catene e bolle di sapone	362
5.11 - Qualche equazione alle derivate parziali	367
5.12 - Dimostrazione del Teorema di esistenza di Peano	370
 Capitolo 6 - Potenziali e integrali curvilinei	375
6.1 - Primitive e potenziali	375
6.2 - Il teorema della divergenza	387
6.3 - La formula di Stokes	390
Esercizi relativi al capitolo 6	393
Appendice al capitolo 6	396
6.1 - Calcolo di aree e di volumi	396

6.2 - Forme differenziali	401
Capitolo 7 - Successioni e serie di funzioni	407
7.1 - Successioni di funzioni e convergenza	407
7.2 - Serie di funzioni	424
7.3 - Serie di potenze	430
7.4 - Serie di Fourier	436
Esercizi relativi al capitolo 7	449
Appendice al capitolo 7	452
7.1 - Serie ed equazioni differenziali	452
7.2 - Serie di Fourier ed equazioni differenziali	455
7.3 - Serie di Fourier ed equazioni differenziali alle derivate parziali	456
7.4 - La funzione di Weierstrass	457
 Lista dei simboli	 459
 Indice analitico	 461

Secondo corso
di Analisi matematica

*Dedicato agli studenti
che, mossi i primi passi
nell'Analisi matematica,
si accingono a esplorarne
orizzonti più vasti*



Capitolo 1

Da una a più dimensioni

In questo capitolo richiamiamo le notazioni e alcuni enti matematici noti dal corso di Geometria, presentiamo alcuni esempi fondamentali, vediamo come le nozioni elementari di topologia si adattano al caso di più variabili e applichiamo queste nozioni alla continuità e ai limiti in più variabili. Inoltre per comodità riportiamo un breve elenco di risultati di Analisi Matematica 1.

1.1 - Spazi lineari a più dimensioni

Gli elementi di \mathbb{R}^n , il prodotto cartesiano di n esemplari della retta reale, sono i **punti** o **vettori**

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n),$$

dove gli n numeri reali X_1, \dots, X_n sono le **componenti** di \mathbf{X} . In due o tre dimensioni, le componenti di un vettore saranno talvolta indicate, come d'abitudine, con notazioni del tipo di

$$\mathbf{A} = (x, y), \quad \mathbf{B} = (x, y, z), \quad \mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z).$$

Talvolta, se $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_h) \in \mathbb{R}^h$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathbb{R}^k$, useremo la notazione (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) per indicare il punto di \mathbb{R}^{h+k}

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X_1, \dots, X_h, Y_1, \dots, Y_k). \quad (1.1)$$

Gli elementi della **base canonica** di \mathbb{R}^n sono i vettori

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

(ai quali si applica la convenzione precedente: in \mathbb{R}^2 potremo scrivere e_1, e_2 oppure e_x, e_y).

In questo libro trattiamo gli elementi di \mathbb{R}^n indifferentemente come punti o come vettori (che sono *indicazioni di spostamento*). La somma di vettori segue la regola del parallelogramma, e in particolare se $X, Y \in \mathbb{R}^n$ la differenza $X - Y$ (che è quello che va aggiunto a Y per ottenere X) è un vettore che parte da Y per arrivare a X .

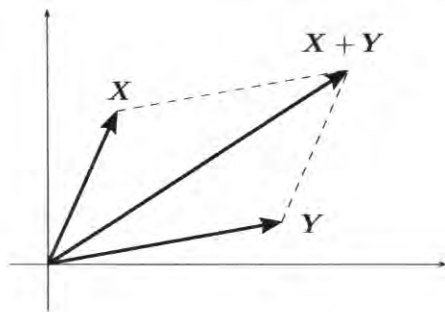


Fig. 1.1 : somma di vettori

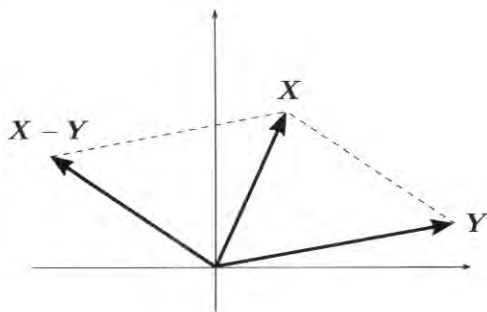


Fig. 1.2 : differenza di vettori

A ogni $X \in \mathbb{R}^n$ associamo la **norma**

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2},$$

che non è altro che la lunghezza (calcolata con il teorema di Pitagora) del segmento che congiunge l'origine $0 = (0, \dots, 0)$ al punto X . La norma di X è la distanza di X da 0 , pertanto la distanza fra due punti $X, Y \in \mathbb{R}^n$ è $\|X - Y\|$. In coordinate, se

$$X = (X_1, \dots, X_n), \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n)$$

allora la **distanza** fra X e Y è (es. 1.1)

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + \dots + (X_n - Y_n)^2}. \quad (1.2)$$

Vediamo già ora che la norma in \mathbb{R}^n prende alcuni dei ruoli che erano del valore assoluto. In effetti, ricordando che $|x| = \sqrt{x^2}$, in una dimensione la norma coincide con il valore assoluto. Le prime proprietà della norma sono le seguenti.

Proposizione 1.1 : per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$

- 1) $\|X\| \geq 0$
- 2) $\|X\| = 0 \iff X = 0$
- 3) $\|tX\| = |t| \cdot \|X\|$

Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, definiamo il loro **prodotto scalare**

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n.$$

È molto facile provare le proprietà del prodotto scalare.

Proposizione 1.2 : per ogni $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$

- 1) $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$
- 2) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Z} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z})$
- 3) $(t\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} = t(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$
- 4) $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \|\mathbf{X}\|^2$.

Dato che la norma di un vettore è sempre maggiore o uguale a zero, abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$, usando le proprietà appena elencate,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|t\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 = (t\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \cdot (t\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \\ &= (t\mathbf{X} \cdot t\mathbf{X}) + (t\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) + (\mathbf{Y} \cdot t\mathbf{X}) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}) \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})t + \|\mathbf{Y}\|^2. \end{aligned}$$

L'ultimo membro è un trinomio di secondo grado in t che è sempre maggiore o uguale a zero, ma sappiamo che

$$at^2 + 2bt + c \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 \leq ac,$$

perciò

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 \leq \|\mathbf{X}\|^2 \cdot \|\mathbf{Y}\|^2 = (\|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|)^2$$

da cui ricaviamo la **disuguaglianza di Schwarz**

$$|\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|. \quad (1.3)$$

Utilizziamola per vedere che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^2 &= (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X}\|^2 + 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) + \|\mathbf{Y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{X}\|^2 + 2\|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2 = (\|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|)^2 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la **disuguaglianza triangolare**

$$\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|. \quad (1.4)$$

Da questa si può ricavare la meno frequentemente usata **seconda disuguaglianza triangolare**

$$\|\mathbf{X}\| - \|\mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|. \quad (1.5)$$

Osserviamo che, per il teorema di Pitagora e la disuguaglianza triangolare, per ogni $A \in \mathbb{R}^n$ e per ciascun $i = 1, \dots, n$

$$|A_i| \leq \|A\| \leq |A_1| + \dots + |A_n|, \quad (1.6)$$

e quindi per ogni $A, B \in \mathbb{R}^n$

$$|A_i - B_i| \leq \|A - B\| \leq |A_1 - B_1| + \dots + |A_n - B_n|. \quad (1.7)$$

Dati due punti $X, Y \in \mathbb{R}^n$ diversi da 0 , chiamiamo \widehat{XY} l'angolo fra i vettori X e Y , cioè l'angolo fra i segmenti $0X$ e $0Y$. Si può precisare la disuguaglianza di Schwarz provando che

$$X \cdot Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos \widehat{XY}.$$

In particolare due vettori *non nulli* hanno prodotto scalare zero se e solo se formano un angolo retto, cioè se sono **perpendicolari**.

Definizione : due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se $X \cdot Y = 0$.

Osservazione : due vettori sono ortogonali se e solo se si verifica una (e una sola!) delle due condizioni seguenti:

- 1) almeno uno dei due è il vettore nullo
- 2) sono perpendicolari (es. 1.2).

In tre dimensioni, consideriamo un qualunque vettore *non nullo* N , e consideriamo l'insieme dei vettori X ad esso ortogonali, cioè

$$\{X : X \cdot N = 0\}.$$

questi (visualizzateli) costituiscono un **piano** passante per l'origine, esattamente il piano per l'origine perpendicolare ad N .

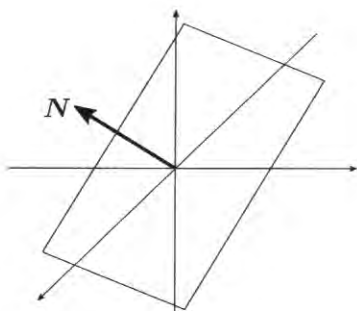


Fig. 1.3 : un piano per l'origine

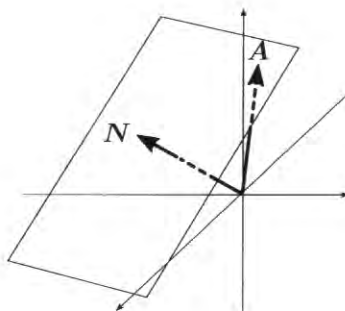


Fig. 1.4 : un piano per A

Invece dato $A \in \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\{X : (X - A) \cdot N = 0\}$$

è formato dai punti tali che il segmento da A ad X è ortogonale ad N , cioè (visualizzateli) il piano passante per A e perpendicolare ad N . In più di tre dimensioni, la situazione è la stessa, solo che l'insieme dei vettori ortogonali a un vettore fissato non è un piano, ma un **iperpiano**. E se anziché salire scendiamo di dimensione? Per $n = 2$, qual è l'insieme dei vettori perpendicolari a uno dato? È la **retta** per l'origine perpendicolare al vettore dato. Riconosciamo che l'equazione

$$(X - A) \cdot N = 0, \quad (1.8)$$

in due dimensioni, è l'equazione di una retta passante per A : indichiamo le coordinate di questi punti con

$$X = (x, y), \quad A = (x_0, y_0), \quad N = (a, b)$$

e l'equazione (1.8) diviene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \text{o anche} \quad ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$$

Dunque la retta è l'iperpiano di \mathbb{R}^2 .

Proposizione 1.3 : per $n \geq 2$, se $A, N \in \mathbb{R}^n$ con $N \neq 0$ l'equazione (1.8) rappresenta l'iperpiano passante per A e perpendicolare a N . Questo è un piano per $n = 3$, una retta per $n = 2$.

Osservazione : ogni equazione $X \cdot N = c$ con $N \neq 0$ rappresenta un iperpiano; per riconoscere quale iperpiano sia, è sufficiente scegliere un punto A che la soddisfa. Ciò significa che

$$A \cdot N = c$$

quindi, sostituendo al posto di c questa espressione, l'equazione $X \cdot N = c$ diventa

$$X \cdot N = A \cdot N \iff X \cdot N - A \cdot N = 0 \iff (X - A) \cdot N = 0.$$

Esempio : se abbiamo l'equazione $7x - y + 5z = 4$, una soluzione si trova comodamente scegliendo ad esempio (ma potremmo scegliere $x = 183$, $y = -35\pi$ e ricavare z ; certo, sarebbe più scomodo) $x = z = 0$ e ricavando $y = -4$, quindi $A = (0, -4, 0)$. L'equazione allora si può riscrivere

$$((x, y, z) - (0, -4, 0)) \cdot (7, -1, 5) = 0,$$

dunque si tratta del piano per $(0, -4, 0)$ perpendicolare a $(7, -1, 5)$ (es. 1.3)

Dati k vettori $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$, una **combinazione lineare** di X_1, \dots, X_k è una somma

$$t_1 X_1 + \dots + t_k X_k$$

dove t_1, \dots, t_k sono k numeri reali; k vettori sono **linearmente indipendenti** se l'unico modo per ottenere il vettore nullo come loro combinazione lineare è prendere tutti i coefficienti t_1, \dots, t_k nulli. In altri termini, k vettori sono linearmente indipendenti se nessuno di essi può essere ottenuto combinando linearmente i vettori rimanenti. È importante osservare che in \mathbb{R}^n ci possono essere al più n vettori linearmente indipendenti; inoltre, dati n vettori linearmente indipendenti X_1, \dots, X_n , ogni altro vettore X può essere espresso in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori X_i :

$$X = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n.$$

L'equazione della retta (in qualunque dimensione) si può scrivere anche in forma parametrica: se $A, V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$, la retta per A parallela a V è l'insieme dei punti che si ottengono aggiungendo ad A un multiplo, positivo o negativo, del vettore V , cioè è l'insieme

$$\{X : \exists t \in \mathbb{R} : X = A + tV\}.$$

Questa scrittura, corretta, è assai pesante; d'ora in poi useremo una notazione abbreviata:

$$\{X = A + tV : t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.9)$$

L'equazione

$$X = A + tV$$

è l'equazione parametrica della retta (es. 1.6).

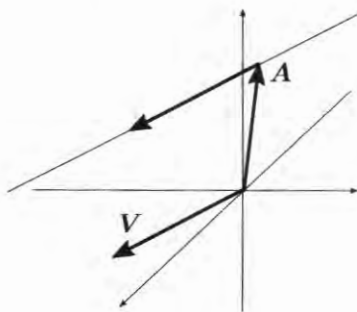


Fig. 1.5 : la retta per A parallela a V

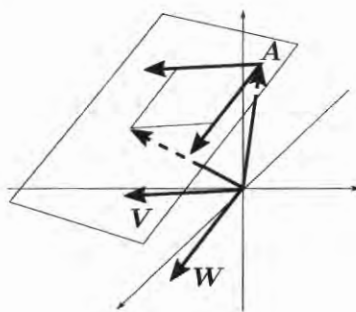


Fig. 1.6 : il piano per A generato da V, W

Anche i piani (bidimensionali) possono essere determinati mediante parametri (due, non uno solo). Consideriamo un piano π passante per un punto A , e prendiamo due vettori V, W che giacciono sul piano: ciò non significa che i punti V e W appartengono a π , ma che se ad A (che appartiene al piano) aggiungiamo V (o W)

rimaniamo nel piano stesso. Se V e W erano indipendenti, tutti i punti del piano si possono scrivere come somma di A e una combinazione lineare di V e W , cioè il piano è l'insieme

$$\{X = A + sV + tW : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

L'equazione

$$X = A + sV + tW \quad (1.10)$$

è l'equazione parametrica del piano passante per A e parallelo a V e W (o generato da V e W).

Se π è un iperpiano in \mathbb{R}^n , di equazione $(X - A) \cdot N = 0$, e P è un qualunque punto di \mathbb{R}^n , la distanza di P da π è data da (es. 1.7)

$$d(P, \pi) = \frac{|(P - A) \cdot N|}{\|N\|}. \quad (1.11)$$

Una ultima osservazione geometrica: se π è un iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} di equazione

$$(X - A) \cdot N = 0$$

e se

$$N = (N_1, \dots, N_n, N_{n+1})$$

con $N_{n+1} \neq 0$, l'iperpiano π non è parallelo all'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 0$, ma forma con esso un angolo. La tangente di questo angolo è

$$\frac{\|(N_1, \dots, N_n)\|}{|N_{n+1}|}. \quad (1.12)$$

1.2 - Prodotto vettoriale

Un particolare prodotto fra vettori, che si definisce solo in \mathbb{R}^3 , è quello vettoriale o esterno; dato che siamo in tre dimensioni, indichiamo le componenti dei vettori con gli indici x, y, z anziché $1, 2, 3$.

Definizione : siano V e W due vettori di \mathbb{R}^3 . Il loro **prodotto vettoriale** è il vettore $V \wedge W$ di componenti

$$V \wedge W = (V_y W_z - V_z W_y, -(V_x W_z - V_z W_x), V_x W_y - V_y W_x). \quad (1.13)$$

La formula dice poco, ma osserviamo che (es. 1.9)

$$V_y W_z - V_z W_y = \det \begin{pmatrix} V_y & V_z \\ W_y & W_z \end{pmatrix}, \quad V_x W_z - V_z W_x = \det \begin{pmatrix} V_x & V_z \\ W_x & W_z \end{pmatrix},$$

$$V_x W_y - V_y W_x = \det \begin{pmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{pmatrix}.$$

Da questo deduciamo intanto che il prodotto vettoriale è il vettore zero se e solo se tutti e tre i determinanti sono nulli, ma un determinante 2×2 si annulla se e solo se ogni sua riga è multipla dell'altra (oppure se l'altra è nulla). Inoltre (basta fare il conto, che è semplice e lasciato per esercizio)

$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = 0.$$

Abbiamo così dimostrato il prossimo risultato.

Proposizione 1.4 : *il prodotto vettoriale $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ è un vettore ortogonale sia a \mathbf{V} che a \mathbf{W} ; inoltre si annulla se e solo se \mathbf{V} e \mathbf{W} sono paralleli. In particolare, se non è nullo, è un vettore che sta sulla retta che passa per l'origine ed è perpendicolare al piano generato da \mathbf{V} e \mathbf{W} .*

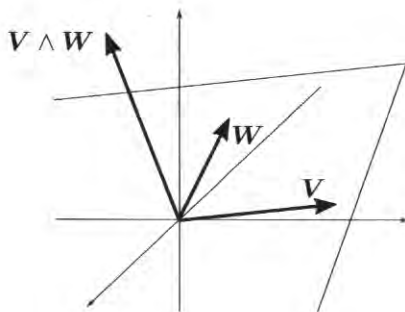


Fig. 1.7 : $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ è ortogonale al piano che li contiene

Osservazione : se siamo in \mathbb{R}^2 e vogliamo trovare un vettore perpendicolare ad uno dato, diciamo (a, b) , la soluzione è molto semplice, basta prendere $(-b, a)$. Ma in tre dimensioni, come trovare un vettore perpendicolare a *due* vettori indipendenti \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 ? Per la proposizione precedente, ci basta prendere $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$ (es. 1.10).

Il prodotto vettoriale si può calcolare svolgendo formalmente (solo formalmente! La prima riga contiene vettori, le altre due contengono scalari) il determinante

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{pmatrix}$$

(controllate per esercizio). Inoltre, come si dimostra nei corsi di Geometria, vale la seguente proprietà.

Proposizione 1.5 : *il prodotto vettoriale $V \wedge W$ ha norma*

$$\|V \wedge W\| = \|V\| \cdot \|W\| \cdot \sin \widehat{VW}$$

e (se non è nullo) il suo verso è tale che la terna $V, W, V \wedge W$ è **destrorsa**, cioè orientata come la terna pollice-indice-medio della mano destra.

Dalla proposizione precedente, ricordando che $V \cdot W = \|V\| \|W\| \cos \widehat{VW}$, si ottiene l'utile uguaglianza

$$\|V \wedge W\| = \sqrt{\|V\|^2 \|W\|^2 - (V \cdot W)^2}. \quad (1.14)$$

Consideriamo in un piano (intendiamo un "vero" piano bidimensionale in \mathbb{R}^3) due vettori V e W , e consideriamo il **parallelogramma generato** da V e W , cioè

$$P(V, W) = \{\alpha V + \beta W : 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

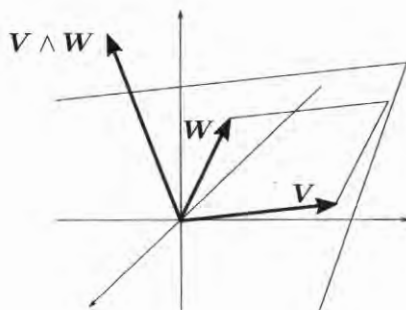


Fig. 1.8 : il parallelogramma generato da V e W

Questo ha i lati di lunghezza $\|V\|$ e $\|W\|$; inoltre l'angolo compreso fra essi è \widehat{VW} , dunque l'altezza del parallelogramma rispetto alla base V è $\|W\| \cdot \sin \widehat{VW}$ e finalmente l'area del parallelogramma è $\|V\| \cdot \|W\| \cdot \sin \widehat{VW}$. Possiamo aggiungere allora un'altra informazione (es. 1.11).

Proposizione 1.6 : *l'area del parallelogramma $P(V, W)$ generato da V e W è $\|V \wedge W\|$.*

Vediamo cosa si può dire nel (più facile) caso bidimensionale: dati due vettori $V, W \in \mathbb{R}^2$, a questi possiamo associare i due vettori di \mathbb{R}^3

$$V' = (V_x, V_y, 0), \quad W' = (W_x, W_y, 0)$$

(dunque abbiamo visto il piano \mathbb{R}^2 di partenza come il sottoinsieme $\{z = 0\}$ di \mathbb{R}^3). Il parallelogramma generato in \mathbb{R}^2 da V e W è lo stesso parallelogramma generato da

V' e W' (solo, il primo è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 mentre il secondo è un parallelogramma bidimensionale sì, ma sottoinsieme del piano $\{z = 0\}$ di \mathbb{R}^3), quindi hanno la stessa area. In particolare

$$\text{Area}[P(V, W)] = \|V' \wedge W'\|,$$

ma questo prodotto vettoriale è

$$\det \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ V_x & V_y & 0 \\ W_x & W_y & 0 \end{pmatrix} = \left(0, 0, \det \begin{pmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{pmatrix} \right),$$

quindi la sua norma è semplicemente il valore assoluto della sola componente non nulla,

$$\text{Area}[P(V, W)] = \left| \det \begin{pmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \right|. \quad (1.15)$$

Come caso particolare, dati due segmenti in \mathbb{R}^2 di estremi

$$A, B \quad \text{e} \quad C, D$$

il parallelogramma che ha i lati paralleli a questi segmenti (e con la stessa lunghezza) è quello generato da $B - A$ e $D - C$, quindi ha area

$$\left| \det \begin{pmatrix} B - A \\ D - C \end{pmatrix} \right|. \quad (1.16)$$

Questo risultato si estende a \mathbb{R}^3 : consideriamo tra vettori U, V, W e calcoliamo il volume del parallelepipedo da essi generato. Se prendiamo come base il parallelogramma generato da V, W , questo ha area $\|V \wedge W\|$, e per trovare l'altezza del parallelepipedo rispetto a questa base dobbiamo determinare la proiezione di U su una retta perpendicolare al parallelogramma di base. Ma un versore ortogonale a questo parallelogramma è $V \wedge W / \|V \wedge W\|$, quindi l'altezza cercata vale

$$\left| U \cdot \frac{V \wedge W}{\|V \wedge W\|} \right|$$

e infine il volume, area di base per altezza, è

$$\|V \wedge W\| \cdot \left| U \cdot \frac{V \wedge W}{\|V \wedge W\|} \right| = |U \cdot (V \wedge W)|.$$

Controllate per esercizio che (es. 1.12)

$$|U \cdot (V \wedge W)| = \left| \det \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \right|.$$

Useremo poi il seguente caso particolare della Proposizione 1.6: dati due vettori $V, W \in \mathbb{R}^3$, grazie a (1.13) sappiamo che

$$\|V \wedge W\|^2 = \left[\det \begin{pmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} V_x & V_z \\ W_x & W_z \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} V_y & V_z \\ W_y & W_z \end{pmatrix} \right]^2,$$

che è la somma dei quadrati di tutti (sono solo tre) i determinanti dei minori 2×2 della matrice che ha come righe le componenti dei due vettori. Il risultato si può generalizzare ad n dimensioni.

Corollario 1.7 : *l'area del parallelogramma generato dai due vettori $V, W \in \mathbb{R}^n$ è la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori 2×2 della matrice che ha come righe le componenti dei due vettori.*

1.3 - Esempi fondamentali

Nel corso di Analisi Matematica 1, tra il materiale essenziale si trovano i grafici di alcune funzioni di base e le equazioni di certe curve standard (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole). In questa sezione vediamo i grafici di alcune funzioni di due variabili, e le equazioni di alcune comuni superfici in tre dimensioni, che servono come mattoni fondamentali per visualizzare situazioni più complicate. Per funzioni di una variabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il grafico è (nei casi regolari) una linea curva in \mathbb{R}^2 , e la sua equazione si ottiene ricordando che, per definizione di grafico,

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$

quindi l'equazione del grafico di f è

$$y = f(x) \quad \text{o anche} \quad f(x) - y = 0.$$

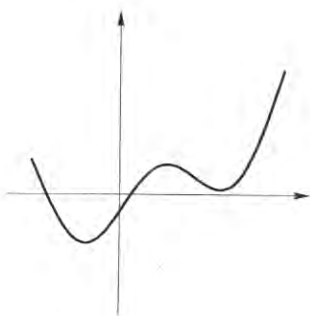


Fig. 1.9 : un grafico in una variabile

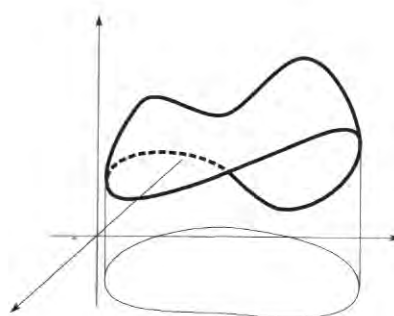


Fig. 1.10 : un grafico in due variabili

Per funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, quindi ora troveremo grafici che sono (nei casi regolari) delle superfici in \mathbb{R}^3 , e l'equazione del grafico di $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sarà

$$z = f(x, y) \quad \text{o anche} \quad f(x, y) - z = 0.$$

Studieremo in dettaglio, nel Capitolo 3, i casi in cui effettivamente i luoghi di zeri del tipo $\{F(x, y) = 0\}$ sono curve e quelli del tipo $\{F(x, y, z) = 0\}$ sono superfici.

Esempio : la funzione $f(x, y) = 3x - 2y + 2$ ha come grafico un **piano**: infatti il suo grafico ha equazione

$$3x - 2y + 2 - z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y, z) \cdot (3, -2, -1) = -2.$$

Una soluzione (cioè un punto che appartiene al piano) è ad esempio $A = (0, 1, 0)$ quindi l'equazione si riscrive

$$((x, y, z) - (0, 1, 0)) \cdot (3, -2, -1) = 0$$

e il grafico è il piano per $(0, 1, 0)$ perpendicolare a $(3, -2, -1)$.

Per il prossimo esempio avremo bisogno di un concetto nuovo. Sulle cartine topografiche, specie quelle delle zone collinose o montuose, si notano delle serie di curve, che denotano i punti che stanno alla stessa quota (rispetto al livello del mare preso come quota zero di riferimento). Ci sono la curva dei 1500 metri, quella dei 650, eccetera. La disposizione di queste curve ci dice:

- 1) in un dato punto, in che direzione camminare per stare alla stessa quota: basta seguire la curva che passa per quel punto;
- 2) dove stanno le cime delle colline: intorno alle cime, le curve di quota formano una serie di anelli concentrici (generalmente non proprio delle circonferenze, seguono l'andamento della collina);
- 3) dove sono le zone più ripide: infatti "ripido" vuol dire che la quota cambia rapidamente, quindi i cambiamenti di quota saranno più frequenti e le curve di quota più ravvicinate.

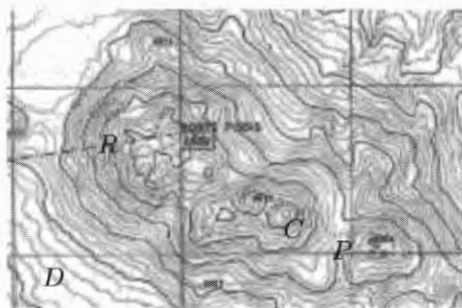


Fig. 1.11 : tratto ripido R , più dolce D , cima C , passo P

Definizione : sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, e $k \in \mathbb{R}$. La **curva di livello di f alla quota k** è l'insieme

$$f^{-1}(k) = \{(x, y) : f(x, y) = k\} \quad (1.17)$$

dei punti in cui f assume il valore k .

Osservazione : una curva di livello può essere tutt'altro che una "curva": ad esempio se k non è nell'immagine di f la curva di livello alla quota k è l'insieme vuoto; se f vale costantemente k la curva $f^{-1}(k)$ è tutto il piano. Nel caso unidimensionale, cioè per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'insieme equivalente (che per quanto stiamo per dire non si chiama curva di livello) è abitualmente composto da uno (se f è iniettiva) o più punti, ad esempio se $f(x) = x^2$ è composto da zero, uno o due punti a seconda che $k < 0$, $k = 0$, oppure $k > 0$. Per funzioni, più difficili da visualizzare, da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R} l'insieme di livello è generalmente una superficie bidimensionale. Dedicheremo alle curve di livello una parte della Sezione 3.10, quando avremo a disposizione strumenti più raffinati.

Esempio : la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha come grafico un **paraboloide circolare** (o **di rotazione**), dato che il grafico si ottiene considerando nel semipiano

$$\{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$$

il grafico della funzione $z = x^2$ per $x \geq 0$, e facendo ruotare il tutto intorno all'asse z .

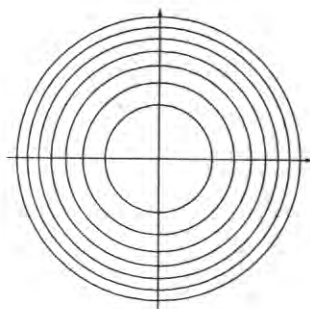


Fig. 1.12 : il grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$ Fig. 1.13 : le curve $f^{-1}(k)$ con $k = 2, 4, 6, \dots, 14$

Infatti vediamo come sono fatte le curve di livello di f :

$$f^{-1}(k) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = k\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } k < 0 \\ \{(0, 0)\} & \text{se } k = 0 \\ \{X : \|X\| = \sqrt{k}\} & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

quindi se $k > 0$ sono circonferenze centrate nell'origine. Dunque nel punto (x, y) la funzione f assume lo stesso valore che nel punto del semiasse positivo delle x che dista da $(0, 0)$ quanto (x, y) , vale a dire nel punto $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$. La sezione del grafico di f con un qualsiasi piano che contiene l'asse z è una parabola (e le sezioni sono tutte uguali). Torneremo più avanti sulle sezioni in modo più preciso (2.23).

Nel seguito, indicheremo brevemente con "il piano (x, z) " sia il piano cartesiano \mathbb{R}^2 con coordinate x e z , sia quello (usato nell'esempio) che in realtà è il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 costituito dai punti con $y = 0$, che è generato dai vettori $(1, 0, 0)$ che giace sull'asse x , e $(0, 0, 1)$ che giace sull'asse z .

Esempio : la funzione

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.18)$$

ha come grafico un **paraboloide ellittico**: infatti ponendo

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

possiamo riscrivere

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

e vediamo subito che le curve di livello, per $k > 0$, sono *ellissi* di semiassi proporzionali ad a e b (quindi tutte simili), precisamente

$$f(x, y) = k > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{(a\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{k})^2} = 1.$$

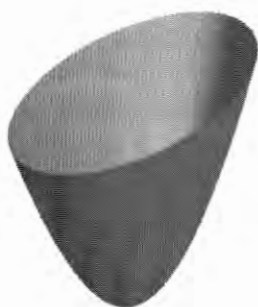


Fig. 1.14 : il grafico di $x^2 + 2y^2$

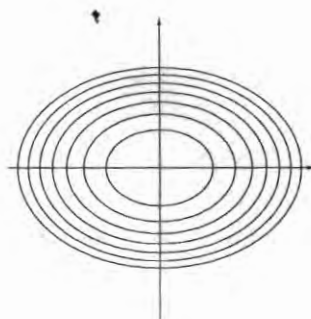


Fig. 1.15 : le curve di livello con $k = 2, 4, 6, \dots, 14$

La sezione del grafico di f con un qualsiasi piano che contiene l'asse z è una parabola (ma se $\alpha \neq \beta$ le sezioni non sono tutte uguali).

Esempio : la funzione

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \alpha, \beta < 0 \quad (1.19)$$

ha come grafico un paraboloide ellittico **con la concavità verso il basso**: infatti è la funzione opposta di quella dell'esempio precedente.

Osservazione : le due funzioni (1.18) e (1.19) sono indistinguibili se guardiamo solo il disegno delle curve di livello; bisogna ad ogni curva associare la relativa quota (e allora si vede che allontanandosi dall'origine le quote per la prima funzione salgono, per la seconda scendono) oppure indicare, magari con delle frecce, la direzione in cui le quote salgono. La situazione è la stessa che nelle cartine topografiche: vedendo una serie di linee di quota che formano anelli concentrici, se non guardiamo a che quote corrispondono non possiamo sapere se al centro degli anelli troveremo la cima di un colle oppure un laghetto!

Prima del prossimo esempio ripassiamo come è fatta una sella da cavallo: sedendocisi sopra, vediamo la sella scendere a destra e sinistra, per seguire i fianchi del cavallo, e salire davanti e dietro, per non far scivolare il cavaliere.

Esempio : la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ ha come grafico un **paraboloido iperbolico**. Prima di studiarne le curve di livello, vediamo perché il suo grafico presenta una **sella**: sezionando il grafico con il piano (x, z) , cioè prendendo $y = 0$, otteniamo come traccia il grafico della funzione x^2 , una parabola con la concavità verso l'alto, mentre sezionandolo con il piano (y, z) otteniamo il grafico della funzione $-y^2$, una parabola con la concavità verso il basso.

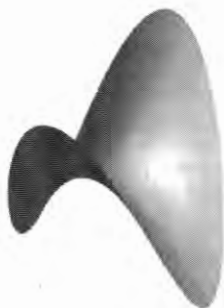


Fig. 1.16 : il grafico di $x^2 - y^2$ è una sella

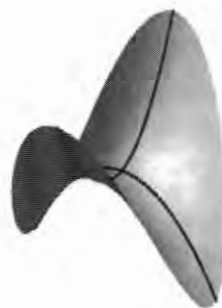


Fig. 1.17 : sezioni lungo gli assi

Dunque, ponendoci nell'origine, il grafico sale nelle due direzioni dell'asse x e scende nelle due direzioni dell'asse y , come una sella.

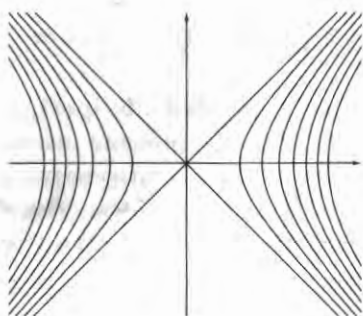
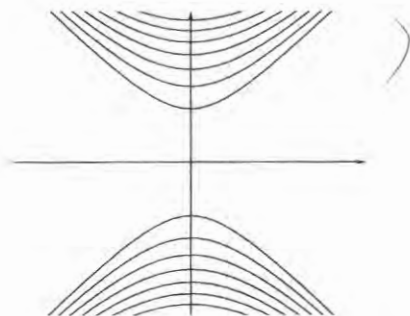
Passiamo alle curve di livello: se $k > 0$ abbiamo

$$f(x, y) = k \iff x^2 - y^2 = k \iff \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1,$$

l'equazione di una famiglia di iperboli con asintoti le rette di equazione $y = \pm x$ e che non intersecano l'asse x ; invece se $k < 0$ abbiamo

$$\left(f(x, y) = k \iff y^2 - x^2 = -k \iff \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1, \right.$$

l'equazione di una famiglia di iperboli con asintoti le rette di equazione $y = \pm x$ e che non intersecano l'asse y .

Fig. 1.18 : i livelli con $k = 0, 2, 4, 6, \dots, 14$ Fig. 1.19 : e quelli con $k = -2, -4, -6, \dots, -14$

Infine, se $k = 0$ la “curva” di livello è una croce:

$$f(x, y) = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = \pm x.$$

Un caso analogo (studiatelo da soli) si ha per la funzione

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \alpha\beta < 0$$

(cioè α e β di segno diverso).

Prima di vedere altri esempi notevoli di funzioni, introduciamo le equazioni di alcuni luoghi geometrici in tre dimensioni.

Esempio : la **superficie sferica** centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ è il luogo dei punti che distano r dall'origine, vale a dire (1.2)

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Dunque $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ è l'equazione di questa superficie sferica, spesso detta impropriamente “sfera”, mentre la vera sfera è il solido racchiuso dalla superficie sferica. La “equazione” della sfera centrata nell'origine e di raggio r , vale a dire la formula soddisfatta da tutti e soli i punti della sfera, è $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ oppure $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$, a seconda che si voglia comprendere o no la superficie esterna nella sfera (ed è una disequazione). Troveremo nella Sezione 1.6 i termini corretti per differenziare le due situazioni.

Se anziché nell'origine la superficie sferica è centrata in un punto (x_0, y_0, z_0) , l'equazione diventa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \quad (1.20)$$

Esempio : la **superficie del cilindro** di asse l'asse z e raggio r è il luogo dei punti che distano r dall'asse z o, equivalentemente, il luogo dei punti che si ottengono unendo tutte le rette parallele all'asse z e passanti per un punto della circonferenza del piano (x, y) che ha raggio r e centro nell'origine. La distanza dall'asse z di un punto (x, y, z) è semplicemente $\sqrt{x^2 + y^2}$, quindi l'equazione del cilindro è

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Potrebbe sembrare l'equazione di una circonferenza, ma ricordiamo che questa equazione è una abbreviazione per

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\} ,$$

un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 . Per esercizio, scrivete l'equazione di una superficie cilindrica il cui asse è parallelo all'asse z ma non passa per l'origine, o quella di un cilindro "pieno" (es. 1.13).

La superficie appena vista ha, in realtà, un nome un po' più complicato, dato che a rigori è la superficie del **cilindro circolare retto** di asse l'asse z e raggio r .

Definizione : sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano, sia R una retta non parallela a π e sia E un sottoinsieme di π . Il **cilindro generato da E di generatrice R** è l'unione di tutte le rette parallele ad R che intersecano E . Il cilindro si dice **retto** se R è perpendicolare a π .

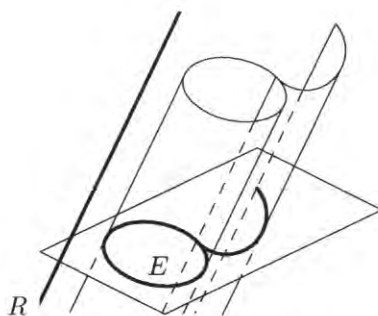


Fig. 1.20 : una porzione del cilindro generato da E (più spesso) di generatrice R

Si può parlare di cilindro anche in n dimensioni, e allora π dovrà essere un iperpiano. Se riprendendo la notazione di (1.9) l'equazione parametrica di R è

$$X = A + tV ,$$

allora il cilindro generato da E ed R è

$$\{X = B + tV : B \in E, t \in \mathbb{R}\} .$$

Potremmo dire questa sia l'equazione "parametrica" del cilindro; le virgolette sono d'obbligo dato che uno dei parametri è un numero reale, mentre l'altro è un punto di un insieme di \mathbb{R}^n . Osserviamo che la superficie cilindrica dell'esempio precedente è un cilindro secondo la definizione precedente, come pure il consueto cilindro "pieno"

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

che è generato non dalla circonferenza, ma dal *cerchio* di raggio r . Dunque l'uso della parola cilindro per la superficie cilindrica non è errato (ma bisogna stare attenti a non fare confusione tra il cilindro pieno e la sua superficie).

Esempio : l'insieme

$$C = \{(x, y, z) : (x - 3)^2 + z^2/4 \leq 1\}$$

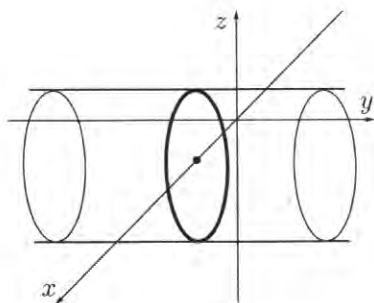


Fig. 1.21 : una porzione di C

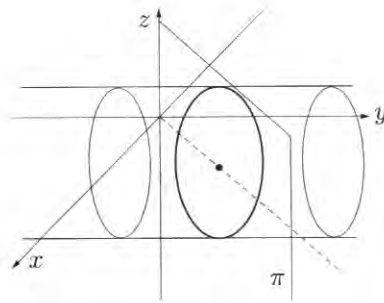


Fig. 1.22 : l'intersezione con π

è un cilindro con asse parallelo all'asse y , generato dall'ellisse (piena) che nel piano (x, z) ha equazione $(x - 3)^2 + z^2/4 \leq 1$, dunque è centrata in $(x, z) = (3, 0)$ e ha semiassi lunghi 1 nella direzione x e $\sqrt{2}$ nella direzione z . Si potrebbe chiamarlo "cilindro ellittico retto", ma la cosa non è molto importante: infatti la sua intersezione col piano π di equazione $x - y = 0$ è un cerchio E di raggio $\sqrt{2}$, quindi il cilindro in questione è anche generato dal cerchio E (dunque è un cilindro circolare) con generatrice l'asse y (che però non è perpendicolare a π , quindi visto come cilindro circolare non è retto). Nella Figura 1.22 è tratteggiata la retta di equazione $x = y, z = 0$.

Dai cilindri passiamo ora ai coni.

Esempio : la **superficie conica** di vertice l'origine, asse l'asse z e ampiezza $\pi/4$ è l'unione di tutte le rette per l'origine che formano con l'asse z un angolo di $\pi/4$. Un punto di questa superficie, dunque, dista dall'asse z quanto dista dal piano (x, y) , perciò le sue coordinate verificano

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

o anche

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Osserviamo che questa superficie può essere descritta equivalentemente come l'unione di tutte le rette per l'origine che intersecano la circonferenza

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

di raggio 1, centrata in $(0, 0, 1)$ e giacente sul piano di equazione $z = 1$.

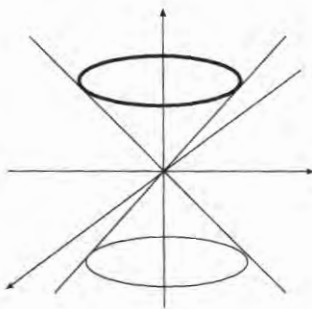


Fig. 1.23 : il (doppio) cono, più spesso la circonferenza C

Osserviamo pure che questa superficie è un “doppio cono”, mentre la sola metà della superficie che sta sopra al piano (x, y) ha equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.21)$$

In generale, per $m > 0$ l'equazione

$$m|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.22)$$

è quella di una superficie conica di vertice l'origine, asse l'asse z e ampiezza $\arctan m$ (cioè l'angolo fra l'asse del cono e le rette che formano il cono misura $\arctan m$). Nel linguaggio corrente, spesso si usa il termine “cono” intendendo la superficie conica, il che come per il cilindro non è errato vista la prossima definizione, ma attenzione a non fare confusione (es. 1.15).

Anche il cono segue la stessa sorte del cilindro: nella dizione corretta, l'esempio appena visto sarebbe la superficie del **cono circolare retto** di vertice l'origine, asse l'asse z e ampiezza $\pi/4$, ed è un caso particolare.

Definizione : sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano, sia V un punto non appartenente a π e sia E un sottoinsieme di π . Il **cono generato da E di vertice V** è l'unione di tutte le rette passanti per V che intersecano E . Se E è una circonferenza e V sta sulla perpendicolare a π passante per il centro della circonferenza E , il cono si dice **circolare retto**.

Si può parlare di cono anche in n dimensioni, e allora π dovrà essere un iperpiano. In generale possiamo scrivere l'equazione "parametrica" del cono come

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} + t(\mathbf{A} - \mathbf{V}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{A} \in E.$$

Esempio : un piano è un cilindro generato da una retta E del piano, con generatrice una qualunque retta R del piano non parallela ad E . Cosa è il cono generato da una retta E e con vertice un punto $V \notin E$?

Ora che abbiamo un po' di materiale, torniamo alle funzioni.

Esempio : la funzione $f(x, y) = x^2$ non ha come grafico una parabola, che è una linea, ma un cilindro.

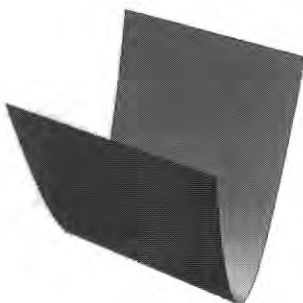


Fig. 1.24 : un paraboloide di trascinamento o cilindro parabolico, grafico di $f(x, y) = x^2$

Infatti la sua sezione con ogni piano perpendicolare all'asse y , cioè avente equazione $y = c$, è la parabola di equazione

$$y = c, \quad z = x^2$$

che è una traslata parallelamente all'asse y della parabola analoga ma giacente sul piano (x, z) . Dunque posto

$$\pi = \{(x, y, z) : y = 0\}, \quad E = \{(x, y, z) \in \pi : z = x^2\}, \quad R = \{t(0, 1, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$

il grafico di f è il cilindro generato da E con generatrice R . Lo si chiama **paraboloide di traslazione** o anche **di trascinamento**.

Esempio : la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ha come grafico l'insieme di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

che abbiamo visto essere un mezzo cono (1.21).

Prima del prossimo esempio, aggiungiamo un problema che sinora si era trascurato, quello del dominio della funzione. La prima cosa da fare quando si considera una funzione è, come per quelle di una variabile, cercare di determinarne il dominio, qualora esso non sia già stato precisato.

Definizione : sia f una funzione di n variabili, data da una espressione analitica. Qualora il dominio di f non fosse stato precisato, si sottintende che il suo dominio è il **dominio naturale**, il più grande sottoinsieme di \mathbb{R}^n in cui abbia senso calcolare il valore dell'espressione analitica stessa.

Esempio : la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è definita solo per $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, quindi il suo dominio è

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

il cerchio centrato nell'origine e di raggio 1. Per vedere le linee di livello di f osserviamo che una radice quadrata non è mai negativa, quindi l'equazione $f(x, y) = k$ non ha soluzione per $k < 0$. Per $k \geq 0$ l'equazione equivale a

$$1 - x^2 - y^2 = k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

che non ha soluzione per $k > 1$, mentre per $0 \leq k \leq 1$ ha soluzione, e la curva di livello k è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{1 - k^2}$, che si riduce alla sola origine per $k = 1$.

Chiudiamo la sezione con tre luoghi geometrici che hanno equazioni abbastanza semplici: i primi due sono **iperboloidi di rotazione**, ed entrambi si ottengono prendendo una iperbole nel piano (x, z) , con assi gli assi coordinati, e facendola ruotare intorno all'asse z . Se i due rami dell'iperbole intersecavano l'asse z e non l'asse x , si ottiene un **iperboloide a due falde**, dato che si tratta di due "tazze" una al di sopra e una al di sotto del piano di equazione $z = 0$.

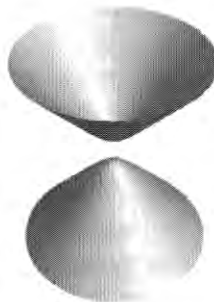


Fig. 1.25 : $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ rappresenta un iperboloide a due falde

Esempio : l'equazione

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2$$

rappresenta l'iperboloide a due falde ottenuto ruotando intorno all'asse z entrambi i rami dell'iperbole che nel piano (x, z) ha equazione $z^2 - x^2 = 1$.

Se invece i due rami dell'iperbole intersecano l'asse x e non l'asse z , si ottiene un **iperboloide a una falda**, dato che è una superficie in un pezzo solo, svasata in corrispondenza del piano di equazione $z = 0$.

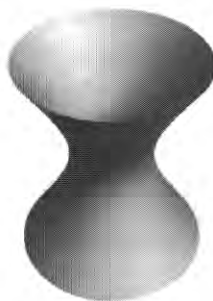


Fig. 1.26 : $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ rappresenta un iperboloide a una falda

Esempio : l'equazione

$$z^2 + 1 = x^2 + y^2 \tag{1.23}$$

rappresenta l'iperboloide a una falda ottenuto facendo ruotare intorno all'asse z uno qualunque dei due rami dell'iperbole che nel piano (x, z) ha equazione $x^2 - z^2 = 1$.

Esempio : vi sono iperboloidi non di rotazione, analoghi a quello che per il paraboloide era il paraboloide ellittico (1.18), e l'equazione di un **iperboloide ellittico** è del tipo

$$z^2 = K + \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \alpha, \beta > 0, \quad K > 0$$

(a due falde) o

$$z^2 + K = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \alpha, \beta > 0, \quad K > 0$$

(a una falda).

L'ultimo luogo geometrico che trattiamo in questa sezione è l'**ellissoide**: come per passare dalla circonferenza all'ellisse allunghiamo l'asse in una direzione (così che possiamo vedere la circonferenza come una ellisse con i due semiassi uguali), così in tre dimensioni possiamo passare dall'equazione della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

all'equazione (in cui $a, b, c > 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 :$$

questa rappresenta un ellissoide, che ha semiassi lunghi a nella direzione x , b in quella y e c nella direzione z . Se i tre parametri sono uguali, abbiamo una sfera; se due dei tre parametri sono uguali, diciamo $a = b$, abbiamo un **ellissoide di rotazione**, dato che si può ottenerlo ruotando intorno a un asse (in questo caso l'asse z , che ha il parametro "diverso") una ellisse (in questo caso l'ellisse che nel piano (x, z) ha equazione $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$). La Terra è grossomodo un ellissoide di rotazione, un po' schiacciato sui poli. Le estremità dei semiassi di un ellissoide si chiamano, guardacaso, **poli**.

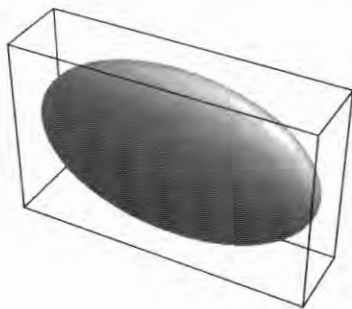


Fig. 1.27 : un ellissoide a tre assi diversi

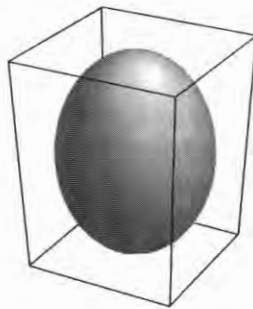


Fig. 1.28 : un ellissoide di rotazione ($a = b$)

1.4 - Traslazioni e rotazioni di coordinate

Ricordiamo come si effettua una **traslazione** di coordinate, limitandoci a due dimensioni. Se in un piano fissiamo un punto, le sue coordinate dipendono naturalmente da dove mettiamo gli assi; dunque scegliamo un punto P del piano, scegliamo sul piano un riferimento cartesiano ortogonale (x, y) e supponiamo che in quel sistema di riferimento le coordinate di P siano (x_0, y_0) . Ora determiniamo un nuovo sistema di riferimento (x', y') , traslando gli assi precedenti, in modo tale che il punto P sia l'origine dei nuovi assi, e ci chiediamo come cambiano le coordinate di un qualunque punto nel passare dal vecchio al nuovo sistema di riferimento, e viceversa. Il legame tra le vecchie coordinate (x, y) di un punto e le sue nuove coordinate (x', y') è semplicemente

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

dove, ribadiamo, (x_0, y_0) sono le coordinate "vecchie", cioè nel sistema (x, y) , del punto P che ha ovviamente "nuove" coordinate $(0, 0)$.

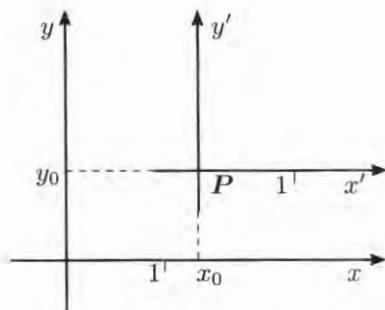


Fig. 1.29 : traslazione di coordinate

La scrittura precedente, anche se molto comune, non è particolarmente corretta: il significato della uguaglianza $x' = x - x_0$, ad esempio, è “il valore di x' associato al punto che aveva coordinate (x, y) è $x - x_0$ ”. Dunque x' è determinato in funzione delle coordinate (x, y) ed è pertanto *funzione di* (x, y) . La scrittura corretta (che useremo talvolta per chiarire la situazione) dovrebbe essere

$$x'(x, y) = x - x_0, \quad y'(x, y) = y - y_0 :$$

ora è chiaro che x' e y' sono funzioni di x e y , e analogamente

$$x(x', y') = x' + x_0, \quad y(x', y') = y' + y_0 .$$

La situazione è analoga in più di due dimensioni.

Esempio : consideriamo nel piano la funzione

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + 3(y - 4)^2 ;$$

per vedere che il suo grafico è un paraboloide ellittico, il cui vertice non è in $(0, 0)$, effettuiamo una traslazione di coordinate spostando l'origine nel punto che ha coordinate $(x_0, y_0) = (-1, 4)$: otteniamo delle nuove coordinate

$$[x' = x + 1, \quad y' = y - 4] \quad \Longleftrightarrow \quad [x = x' - 1, \quad y = y' + 4] ,$$

dove ricordiamo che l'ultima parte andrebbe scritta

$$x(x', y') = x' - 1, \quad y(x', y') = y' + 4 ,$$

e chiamiamo $h(x', y')$ la funzione f **letta nelle nuove coordinate**, cioè poniamo

$$h(x', y') = f(x, y) .$$

Come si vede, questa scrittura (che dopo il prossimo chiarimento useremo largamente dato che è molto più comoda) non è corretta, dato che uguaglia una funzione di (x', y') a una funzione di tutt'altro. La scrittura corretta sarebbe

$$h(x', y') = f(x(x', y'), y(x', y'))$$

e allora non solo è ripristinata un'uguaglianza fra funzioni delle stesse variabili, ma è chiaro che

$$\begin{aligned} h(x', y') &= f(x(x', y'), y(x', y')) = f(x' - 1, y' + 4) \\ &= ((x' - 1) + 1)^2 + 3((y' + 4) - 4)^2 = (x')^2 + 3(y')^2. \end{aligned}$$

Il grafico di h è allora un paraboloide ellittico con vertice nell'origine del sistema di riferimento (x', y') , quindi il grafico di f è un paraboloide ellittico con vertice nel punto che nel sistema di riferimento (x, y) ha coordinate $(-1, 4)$.

Esempio : l'equazione

$$z - 3 = 4\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

rappresenta la superficie di un cono circolare retto, con asse parallelo all'asse z e vertice in $(-2, 0, 3)$. Infatti traslando gli assi in modo da porre la nuova origine nel punto che nel sistema (x, y, z) aveva coordinate $(-2, 0, 3)$, cioè ponendo (y' sarebbe inutile...)

$$x' = x + 2, \quad y' = y, \quad z' = z - 3$$

nelle nuove coordinate l'equazione diventa \Leftrightarrow (1.21)

$$z' = 4\sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Dato che è la prima volta (sarà anche l'ultima!), vediamo di essere precisi. L'equazione è la parte cruciale della definizione di un insieme, che per l'appunto è la superficie conica,

$$C = \{(x, y, z) : z - 3 = 4\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}\}.$$

Noi abbiamo seguito questo percorso: con scrittura scorretta abbiamo detto

$$C = \{(x, y, z) : z' = 4\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\},$$

intendendo " C è un insieme di punti le cui coordinate (x, y, z) , se effettuiamo il cambiamento di coordinate indicato prima, soddisfano una certa equazione". La scrittura corretta, dove per un minimo di brevità scriviamo \mathbf{X} al posto di (x, y, z) e \mathbf{X}' al posto di (x', y', z') , sarebbe

$$C = \{\mathbf{X} : z'(\mathbf{X}) = 4\sqrt{(x'(\mathbf{X}))^2 + (y'(\mathbf{X}))^2}\},$$

oppure, posto

$$C' = \{(x', y', z') : z' = 4\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\},$$

anche (\S es. 1.16)

$$C = \{\mathbf{X} : \mathbf{X}'(\mathbf{X}) \in C'\}.$$

Un po' più laboriosa è la situazione per le **rotazioni** degli assi. Fissato il riferimento (x, y) , cerchiamo come si trasformano le coordinate di un punto se come nuovi assi prendiamo una coppia di rette orientate che si ottengono ruotando gli assi (x, y) di un angolo θ in senso antiorario intorno all'origine. Chiamiamo (x', y') i nuovi assi; è facile vedere che il punto e'_1 che ha coordinate

$$x' = 1, \quad y' = 0$$

(che è il punto sul semiasse x' positivo che dista 1 dall'origine) aveva coordinate

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta,$$

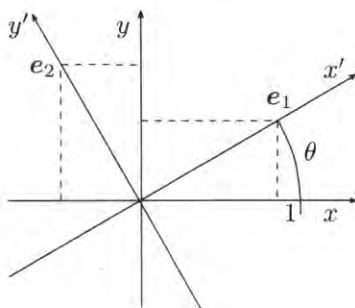


Fig. 1.30 : rotazione di coordinate

mentre il punto e'_2 di “nuove” coordinate

$$x' = 0, \quad y' = 1$$

aveva coordinate

$$x = -\sin \theta, \quad y = \cos \theta.$$

Fino al termine della sezione usiamo per i vettori la notazione in colonna (che sarebbe più corretta, ma occupa una montagna di spazio): nelle vecchie coordinate, dunque, e'_1 si scriverà

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Dato che le rotazioni sono applicazioni lineari, e il punto che nel riferimento (x', y') ha coordinate (h, k) si può scrivere

$$he'_1 + ke'_2,$$

le sue coordinate nel sistema (x, y) sono

$$h \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

dunque possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La trasformazione inversa si ottiene trovando la (facile) inversa della matrice, ed è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio : se gli assi (x', y') sono ruotati di 45° in senso antiorario rispetto agli assi (x, y) le formule precedenti diventano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}.$$

1.5 - Coordinate polari

Sappiamo già dal corso del primo anno che i punti di \mathbb{R}^2 possono essere espressi, oltre che tramite le coordinate cartesiane (x, y) , anche con le **coordinate polari** (r, θ) ; per passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane si usano i cambiamenti di variabili

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[. \quad (1.24)$$

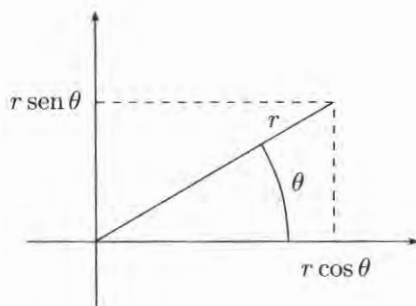
Osserviamo che r può essere letto sia come distanza dall'origine, sia come coordinata sulla semiretta che esce dall'origine nella direzione θ . Per passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari la situazione è più intricata, per la condizione $\theta \in [0, 2\pi[$. Un abbozzo di soluzione si ha considerando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}.$$

Bisogna fare attenzione all'ultima uguaglianza, valida solo nel primo quadrante; invece nel secondo e terzo quadrante si deve usare

$$\theta = \pi + \arctan(y/x)$$

e nel quarto $\theta = 2\pi + \arctan(y/x)$. Inoltre, si intende che il valore di $\arctan(y/x)$ è $\pi/2$ se $x = 0$ e $y > 0$, è $-\pi/2$ se $x = 0$ e $y < 0$, mentre non è definito se $x = y = 0$, coerentemente con il fatto che per l'origine di \mathbb{R}^2 non è possibile definire l'angolo corrispondente. La scelta $\theta \in [0, 2\pi[$ non è la sola possibile, per esercizio potete scrivere esplicitamente $\theta(x, y)$ se decidiamo che $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Fig. 1.31 : coordinate polari in \mathbb{R}^2

Osserviamo che le (1.24) esprimono x ed y in funzione di r e θ , quindi andrebbero scritte usando il linguaggio delle funzioni (cosa che tornerà utile più avanti):

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta, \end{cases} \quad (1.25)$$

dove ora x, y sono funzioni definite su $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ a valori in \mathbb{R}^2 . Non c'è nulla di male a pensarle definite in $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, permettendo a θ di assumere valori anche fuori da $[0, 2\pi[$. Addirittura, talvolta fa comodo interpretare anche le equazioni (1.24) per $r < 0$: allora r non ha più il significato di una distanza, ma di una coordinata sulla retta passante per l'origine che ha verso positivo nella direzione θ . Ad esempio a $\theta = \pi/4$, $r = -\sqrt{2}$ corrisponde il punto $(-1, -1)$, come otterremmo usando le formule (1.24). Vedremo più avanti (\Rightarrow appendice 2.2) vari esempi in cui questa estensione risulta assai utile (es. 1.17).

Anche in \mathbb{R}^3 si possono esprimere i punti tramite **coordinate polari sferiche**: in tal caso avremo bisogno del raggio e di due angoli θ, ϕ ; tradizionalmente si usano come θ la longitudine e come ϕ la co-latitudine, per cui si ha

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in [0, \pi]. \quad (1.26)$$

In tal modo il polo Nord corrisponde a $\phi = 0$ mentre il polo Sud corrisponde a $\phi = \pi$; analogamente a quanto visto sopra per \mathbb{R}^2 , anche in \mathbb{R}^3 la longitudine θ non è definita nei due poli.

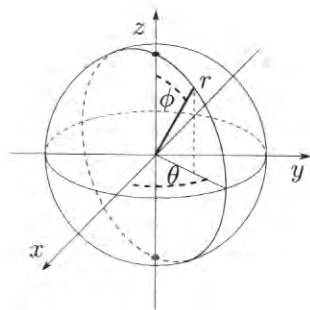


Fig. 1.32 : coordinate polari sferiche

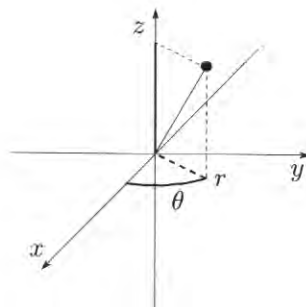


Fig. 1.33 : coordinate cilindriche

In \mathbb{R}^3 conviene talvolta usare le **coordinate cilindriche** in cui si lascia una coordinata invariata (ad esempio z) e si trasformano le rimanenti due in modo polare (piano); se chiamiamo (r, θ, z) le coordinate cilindriche, abbiamo quindi la trasformazione

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

Vediamo come usando le varie forme di coordinate polari possiamo riscrivere alcuni degli esempi fondamentali.

Esempio : il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ si può parametrizzare con le coordinate cilindriche come

$$z = r^2.$$

La coordinata θ non compare dato che il paraboloide è di rotazione. Invece il paraboloide ellittico (1.18) ha una equazione polare più complicata, $z = r^2(\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)$. Interessante il paraboloide iperbolico (il prototipo della sella) la cui equazione $z = x^2 - y^2$ in coordinate cartesiane diventa, in coordinate cilindriche,

$$z = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \cos(2\theta).$$

Esempio : in coordinate cilindriche, l'equazione del cilindro di asse l'asse z e raggio R si scrive semplicemente $r = R$. L'equazione del mezzo cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

diviene

$$z = r.$$

Esempio : in \mathbb{R}^2 , la retta di equazione $x + 2y = 1$ si scrive in coordinate polari

$$r(\cos \phi + 2 \sin \phi) = 1.$$

Evidentemente è meglio utilizzare le coordinate polari solo per qualcosa di tondo...

Anche se non sono di uso frequente, per completezza parliamo anche del caso di dimensione più alta, in cui possiamo ancora definire trasformazioni polari; avremo bisogno del raggio r , della longitudine θ , e di $n-2$ co-latitudini $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$. Ad esempio in \mathbb{R}^4 avremo per le coordinate cartesiane (x, y, z, w) le trasformazioni

$$\begin{cases} x = (r \sin \phi_2)(\sin \phi_1) \cos \theta \\ y = (r \sin \phi_2)(\sin \phi_1) \sin \theta \\ z = (r \sin \phi_2) \cos \phi_1 \\ w = r \cos \phi_2 \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, \phi_1, \phi_2 \in [0, \pi].$$

Per un n generico conviene procedere per induzione: detta G_n la funzione che trasforma le coordinate polari $(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)$ di \mathbb{R}^n nelle rispettive coordinate cartesiane (x_1, \dots, x_n) , la funzione G_{n+1} è definita da

$$G_{n+1}(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \theta) = (G_n(r \sin \phi_{n-1}, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta), r \cos \phi_{n-1}), \quad (1.28)$$

dove naturalmente abbiamo $r \geq 0$, $\phi_i \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Per esercizio potete provare a scrivere la trasformazione da coordinate polari a cartesiane in \mathbb{R}^5 .

1.6 - Elementi di topologia

Questa è essenzialmente una sezione di definizioni, i concetti sono semplici ma è necessario acquisire familiarità completa con i termini che seguono. Qualora non sia diversamente specificato, lo spazio ambiente sarà sempre \mathbb{R}^n .

Definizione : se $A \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$, si dice **palla di centro A e raggio r** l'insieme

$$\{X : d(X, A) < r\}.$$

Tale palla si indica con $B_r(A)$ o, se il centro A è chiaramente sottinteso, semplicemente con B_r . Chiameremo poi **intorno di un punto $A \in \mathbb{R}^n$** un qualsiasi insieme E che contenga una palla $B_r(A)$ per qualche $r > 0$.

Osservazione : abbiamo \square (1.2)

$$X \in B_r(A) \iff \|X - A\| < r.$$

In tre dimensioni, la palla non è altro che la sfera (piena e senza superficie esterna) di centro A e raggio r ; in due dimensioni, è il cerchio (senza circonferenza esterna); in una dimensione (dove scriviamo a al posto di A) è l'intervallo aperto $]a - r, a + r[$.

Definizione : un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n è **aperto** se per ogni punto $A \in A$ c'è una palla centrata in A tutta contenuta in A , cioè

$$\forall A \in A, \exists r > 0 : B_r(A) \subset A.$$

Osservazione : un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Esempio : una palla è un insieme aperto: infatti consideriamo una palla $B_r(A)$ e un suo punto P ; prima di procedere oltre, pensate cosa fareste, se fossimo in due dimensioni e aveste riga e compasso, per disegnare la circonferenza centrata in P e tangente internamente a quella centrata in A e di raggio r . Ora lo facciamo in formule: per definizione,

$$P \in B_r(A) \iff \|P - A\| < r.$$

Poniamo

$$r' = r - \|P - A\| > 0$$

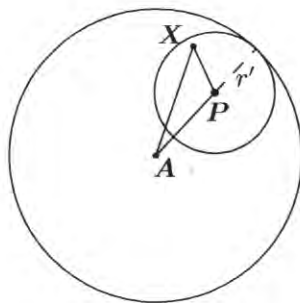


Fig. 1.34 : la palla aperta è un aperto

e verifichiamo che $B_{r'}(P) \subset B_r(A)$. Per far ciò dobbiamo provare che

$$X \in B_{r'}(P) \implies X \in B_r(A),$$

cioè che

$$\|X - P\| < r' \implies \|X - A\| < r,$$

ma per la disuguaglianza triangolare (1.4) se $\|X - P\| < r'$ si ha

$$\|X - A\| = \|(X - P) + (P - A)\| \leq \|X - P\| + \|P - A\| < r' + \|P - A\| = r,$$

come dovevamo dimostrare. Il raggio della pallina centrata in P e contenuta in $B_r(A)$ decresce, come ci aspettavamo visto il suggerimento geometrico, man mano che P si avvicina al bordo di B_r . Dato che la palla è un insieme aperto, talvolta si sottolinea il fatto chiamandola *palla aperta*, anche visto il prossimo esempio.

Esempio : la **palla chiusa**

$$C = \{X : d(X, A) \leq r\}$$

(la differenza è solo il \leq al posto di $<$), che possiamo vedere come una palla cui abbiamo unito la "buccia" esterna, non è un insieme aperto. Infatti tutti i punti P che stanno ben all'interno di C (nel senso che non sono sulla "buccia") hanno, come prima, una piccola pallina centrata in P e tutta contenuta in C , ma chiaramente se P dista esattamente r da A (dunque P appartiene ancora a C) il punto P sta sulla "buccia" della palla, e ogni pallina centrata in P conterrà sia punti dentro che punti fuori di C , dunque non può essere contenuta in C .

Fra non molto troveremo il modo di eliminare la buccia e relative virgolette.

Esempio : il complementare A della palla chiusa dell'esempio precedente è formato dai punti che *non* hanno distanza da A minore o uguale a r , cioè è

$$A = \mathbb{R}^n \setminus C = \{X : d(X, A) > r\};$$

è un insieme aperto, come potete intuire da soli prendendo (in due dimensioni) un punto P che dista da A più di r e chiedendovi che raggio deve avere una circonferenza centrata in P tangente a $B_r(A)$: il cerchio (aperto) racchiuso da questa circonferenza sta tutto dentro A . Ora siete capaci di formalizzare una dimostrazione? \Leftarrow (1.5)

Definizione : un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n è **chiuso** se il suo complementare $\mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto.

Dunque la palla chiusa è un insieme chiuso, visto l'esempio precedente.

Esempio : un qualsiasi piano π di \mathbb{R}^3 è un chiuso. Infatti se $P \notin \pi$ la sua distanza \Leftarrow (1.11) dal piano π non è zero ma un numero positivo r . Allora la palla $B_r(P)$ non interseca π (altrimenti ci sarebbe un punto di π che dista da P meno di r , quindi la distanza di P da π sarebbe meno di r), cioè è contenuta nel complementare di π . Abbiamo provato che il complementare è aperto, quindi π è chiuso.

Senza spaventare nessuno facciamo una osservazione: lo spazio \mathbb{R}^n è chiaramente aperto (contiene tutte le palle possibili), quindi il suo complementare \emptyset è chiuso. D'altra parte \emptyset è aperto, perché preso un qualunque suo punto (non ve ne sono, quindi la verifica che segue va eseguita zero volte) esiste una palla eccetera eccetera. La verifica ha *tutte le volte* dato esito positivo, quindi \emptyset è aperto e il suo complementare \mathbb{R}^n è chiuso. In alcune delle dimostrazioni che seguono, per essere precisi dovremmo considerare anche questi casi estremi, ma non lo faremo, per non sviare l'attenzione dalla parte importante.

L'unico teorema su aperti e chiusi che ci interessa è il seguente.

Proposizione 1.8 : l'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto; l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto. Di conseguenza, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi chiusi è un insieme chiuso; l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

DIMOSTRAZIONE : se P appartiene all'unione U di alcuni insiemi (aperti) vuol dire che appartiene ad almeno uno di essi, diciamo all'aperto A . Per definizione c'è una palla $B_r(P)$ contenuta in A , ma A è un sottoinsieme dell'unione di cui fa parte, quindi $B_r(P) \subset U$ che quindi è aperto perché contiene una palla centrata in un suo qualsiasi punto.

Se invece P appartiene all'intersezione $A_1 \cap \dots \cap A_k$, dato che ciascuno di questi è aperto ci sono k palle, di raggi r_1, \dots, r_k , tali che $B_{r_i}(P) \subset A_i$. Ma prendendo il più piccolo di questi k raggi, chiamiamolo r , abbiamo $r \leq r_i$ per ogni i , quindi $B_r(P) \subset B_{r_i}(P) \subset A_i$ per ogni i . Ma se $B_r(P)$ è contenuta in tutti gli A_i è contenuta nella loro intersezione, che dunque contiene una palla centrata in un suo qualunque punto P ed è pertanto un aperto.

Dato che il complementare di una intersezione è l'unione dei complementari (Proposizione 1.33, il complementare di una intersezione S di chiusi è l'unione dei complementari che sono aperti, e abbiamo appena provato che questa unione è un aperto. Ma allora il complementare di S è aperto, quindi S è chiuso. L'altra affermazione è analoga. ■

Esempio : la "buccia" della palla è un insieme chiuso. Infatti il suo complementare è l'unione della palla (che abbiamo visto essere un aperto) e del complementare della palla chiusa; ma poco fa abbiamo visto che la palla chiusa è un chiuso, quindi il suo complementare è aperto e dunque il complementare della "buccia" è unione di due aperti, pertanto è aperto. Ciò significa che la "buccia" della palla è un chiuso. Ora che l'abbiamo dimostrato, è molto utile che cerchiate di provarlo da soli partendo dalla definizione di aperto: riuscite per ogni punto che non sia sulla "buccia" della palla a trovare una pallina aperta che non tocchi la "buccia" stessa?

Presa dunque una palla chiusa C di raggio r , questa contiene punti P (quelli della palla aperta) che sono "completamente circondati" da punti di C , nel senso che possiedono una pallina centrata in P tutta contenuta in C , e altri che invece non hanno questa proprietà. Poi, i punti del complementare di C sono completamente circondati da punti del complementare di C , nello stesso senso detto ora, quindi sono "ben lontani" da C . I punti della "buccia" di C , invece, non sono né "ben dentro" C né "ben lontani" da C : sono "appiccicati" sia a C sia al suo complementare. Abbiamo materiale per una serie di definizioni.

Definizione : dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto $P \in \mathbb{R}^n$ si dice:

- 1) **interno a E** se $\exists r > 0 : B_r(P) \subset E$;
- 2) **esterno a E** se $\exists r > 0 : B_r(P) \subset (\mathbb{R}^n \setminus E)$ o, che è lo stesso, $B_r(P) \cap E = \emptyset$;
- 3) **aderente a E** se $\forall r > 0, B_r(P) \cap E \neq \emptyset$;
- 4) **di bordo o di frontiera per E** se non è interno a E né esterno a E .

L'insieme dei punti interni a E si chiama **interno di E** e si indica \dot{E} ; l'insieme dei punti aderenti a E si chiama **chiusura di E** e si indica \bar{E} ; l'insieme dei punti di bordo di E si chiama **bordo di E** o **frontiera di E** e si indica ∂E .

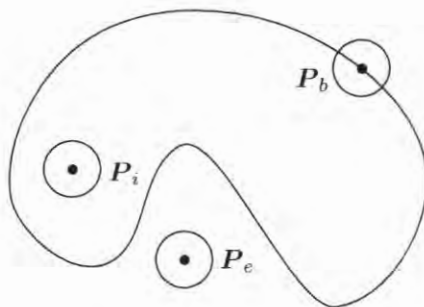


Fig. 1.35 : P_i è interno, P_e esterno, P_b di frontiera

Dunque possiamo rileggere il paragrafo precedente così: presa una palla chiusa C di raggio r , il suo interno è la palla aperta A di raggio r , il suo esterno è il complementare di C , la sua frontiera è la circonferenza di raggio r , la sua chiusura è la palla chiusa C stessa. Attenzione a non confondere esterno e complementare: infatti, se A è una palla aperta di raggio r , abbiamo: il suo interno è A , la sua chiusura è la palla chiusa C , il suo bordo è la circonferenza, e l'esterno di A è il complementare di C . Non è difficile dimostrare i prossimi risultati.

Proposizione 1.9 : *l'interno e l'esterno di un insieme sono aperti; la chiusura e la frontiera sono chiusi. Ogni insieme contiene il suo interno ed è contenuto nella sua chiusura. Un insieme è aperto se e solo se coincide con il suo interno; un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura. Un insieme è aperto se e solo se non contiene alcun punto della sua frontiera; un insieme è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera. Il complementare della chiusura è l'esterno.*

Esempio : consideriamo l'intervallo $]0, 1]$: la sua frontiera è $\{0, 1\}$. Dato che 1 appartiene all'intervallo, questo non è aperto; dato che 0 non appartiene all'intervallo, questo non è chiuso, perciò $]0, 1]$ non è aperto né chiuso: dunque non tutti gli insiemi sono aperti o chiusi. La chiusura di $]0, 1]$ è $[0, 1]$, mentre l'interno è $]0, 1[$.

Osservazione : la frontiera di qualunque insieme è un insieme chiuso: infatti dato un qualunque insieme E , tutti i punti di \mathbb{R}^n cadono in una di queste tre categorie: sono interni a E , oppure sono esterni a E , oppure non sono né interni né esterni, cioè sono di frontiera. Dunque il complementare di ∂E è l'unione di interno e esterno di E , che sono entrambi aperti e quindi hanno unione aperta, perciò ∂E è chiuso.

Possiamo caratterizzare esplicitamente i punti di frontiera (dimostratelo da soli, basta saper negare due proposizioni).

Proposizione 1.10 : *un punto P è di frontiera per E se e solo se*

$$\forall r > 0, [B_r(P) \cap E \neq \emptyset \text{ e } B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset].$$

Abbiamo già incontrato nel corso di Analisi Matematica 1 i punti di accumulazione, la cui definizione diamo ora in \mathbb{R}^n .

Definizione : dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto $P \in \mathbb{R}^n$ è **punto di accumulazione per E** se ogni palla centrata in P contiene punti di E diversi da P .

Proposizione 1.11 : se un punto P è di accumulazione, ogni palla $B_r(P)$ contiene infiniti punti di E diversi da P .

DIMOSTRAZIONE : presa una qualsiasi palla $B_r(P)$, questa per definizione ne contiene almeno uno, cioè

$$(B_r(P) \setminus \{P\}) \cap E \neq \emptyset.$$

Se ne contenesse solo un numero finito, chiamandoli V_1, \dots, V_k avremmo

$$(B_r(P) \setminus \{P\}) \cap E = \{V_1, \dots, V_k\}. \quad (1.29)$$

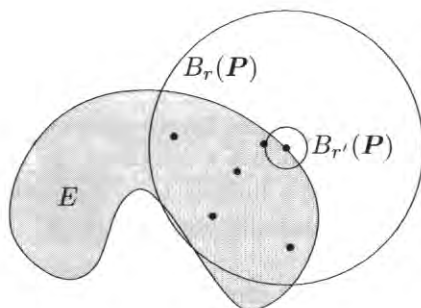


Fig. 1.36 : anche $B_{r'}(P)$ contiene punti di E , diversi dai V_i

Poniamo

$$r_1 = \|P - V_1\|, \dots, r_k = \|P - V_k\|$$

e sia $r' = \min\{r_1, \dots, r_k\}$. Il minimo esiste perché si tratta di un insieme finito di numeri. Dato che $V_1 \in B_r(P)$, la distanza di V_1 da P (che è r_1) è minore di r , ma $r' \leq r_1$ perciò $r' < r$. Questo serve a dire che

$$B_{r'}(P) \subset B_r(P).$$

Per definizione di punto di accumulazione, anche $B_{r'}(P)$ contiene qualche punto di E diverso da P , chiamiamolo V . Dato che V dista da P meno di r' , non può essere alcuno dei punti V_1, \dots, V_k ; ma $V \in B_{r'}(P) \subset B_r(P)$ quindi V è un ulteriore punto appartenente a $(B_r(P) \setminus \{P\}) \cap E$, contraddicendo (1.29). ■

Si potrebbe pensare che tutti i punti aderenti a E siano di accumulazione. Questo non è vero (come mostra la prossima definizione); è vero (dimostratelo) che tutti i punti interni a E sono di accumulazione.

Definizione : dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto $P \in \mathbb{R}^n$ è **punto isolato di E** se esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(P) \cap E = \{P\}.$$

Osservazione : i punti di \overline{E} o sono isolati o sono di accumulazione per E .

Concludiamo con qualche altra importante definizione; rivediamo, adattandola, la definizione di insieme limitato vista in una dimensione.

Definizione : un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è **limitato** se è contenuto in qualche palla centrata nell'origine.

Osservazione : equivalentemente, E è limitato se $\exists M > 0 : \forall X \in E, \|X\| \leq M$. Notiamo che “centrata nell'origine” non serve: riuscite a convincervene? E vedete che è lo stesso se al posto di palla usiamo un parallelepipedo?

Definizione : un insieme è **compatto** se è chiuso e limitato.

Esempio : una palla chiusa è un compatto. Invece abbiamo visto che un piano è chiuso, ma ovviamente non è limitato, perciò non è compatto. In una dimensione, l'unione di un numero finito di intervalli chiusi e limitati è un compatto. Vedremo più avanti la Proposizione 1.14 una caratterizzazione dei compatti di \mathbb{R}^n .

Useremo la compattezza nelle prossime sezioni, insieme alla prossima nozione, che vuol rendere l'idea di un insieme “in un pezzo solo”. Per sottoinsiemi di \mathbb{R} , la parola “connesso” era sinonimo di “intervallo”, un insieme di numeri reali senza interruzioni. In effetti, per un sottoinsieme E di \mathbb{R} che contiene due punti $x < z$, o tutti i punti y fra x e z appartengono al sottoinsieme, oppure possiamo spezzarlo in (almeno) due zone “staccate”, nel senso che se $x < y < z$ e $y \notin E$ allora presi

$$A =]-\infty, y[, \quad B =]y, +\infty[$$

gli insiemi A, B hanno le seguenti proprietà:

- 1) entrambi sono aperti
- 2) sono disgiunti
- 3) ciascuno contiene punti di E
- 4) la loro unione contiene tutti i punti di E .

Notiamo che le prime due condizioni dicono che A e B sono veramente staccati fra loro, dato che il punto y (che non appartiene ad alcuno dei due) li separa; invece i due insiemi $]-\infty, y[$ e $]y, +\infty[$ sono sì disgiunti, ma non li diremmo “staccati”. Generalizziamo questa situazione.

1.7 - Successioni a valori vettoriali

Prima di leggere questa sezione sarà opportuno ripassare gli enunciati dei teoremi sulle successioni reali.

Le successioni a valori in \mathbb{R}^n non sono più complicate di quelle reali. Intanto, rispetto a quelle a valori reali, c'è un fenomeno in meno: in più dimensioni non ci sono $+\infty$ e $-\infty$, quindi le successioni o convergono o non hanno limite. In una dimensione, una successione $\{a_k\}_k$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ definitivamente } |a_k - \ell| < \varepsilon$$

o, che è lo stesso,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ definitivamente } d(a_k, \ell) < \varepsilon.$$

Dato che in \mathbb{R}^n la distanza è la norma della differenza, la nozione di convergenza è identica a quella in una dimensione.

Definizione : una successione $\{A_k\}_k$ a valori in \mathbb{R}^n converge a un punto $P \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ definitivamente } \|A_k - P\| < \varepsilon.$$

Proposizione 1.12 : una successione $\{A_k\}_k$ in \mathbb{R}^n converge a un limite P in \mathbb{R}^n se e solo se ciascuna delle n successioni delle componenti di A_k converge alla rispettiva componente di P .

Per convincersene basta ricordare (1.7).

Per successioni a valori in \mathbb{R}^n , il problema principale è essenzialmente tipografico: visto che n è la dimensione dello spazio, sarà meglio usare k o altro come indice della successione. Poi, gli elementi della successione non sono numeri, ma vettori in \mathbb{R}^n , con le loro componenti. Come indicare le componenti di un vettore A_k ? Nel seguito, se proprio ce ne sarà bisogno le dovremo indicare (A_k^1, \dots, A_k^n) ; in questa sezione, per semplificare le cose ci limitiamo nelle dimostrazioni al caso $n = 2$, così indicheremo le componenti della successione con (es. 1.20)

$$A_k = (x_k, y_k).$$

Teorema di Bolzano-Weierstraß in \mathbb{R}^n 1.13 : ogni successione convergente è limitata; da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente; se gli elementi di una successione convergente appartengono a un insieme E , il limite appartiene alla chiusura \overline{E} ; per ogni punto di \overline{E} esiste una successione di punti di E che converge ad esso; da ogni successione di elementi di un insieme compatto K si può estrarre una sottosuccessione che converge a un elemento di K .

DIMOSTRAZIONE : dobbiamo provare solo una parte, cioè che se da ogni successione... allora K è compatto, ovvero è chiuso e limitato. Iniziamo a provare che è chiuso: sia P un punto della chiusura \overline{K} di K . Se proviamo che $P \in K$ avremo provato che $\overline{K} \subset K$, ma dato che \Leftarrow Proposizione 1.9 $K \subset \overline{K}$ abbiamo $K = \overline{K}$ e dunque K è chiuso, sempre per la Proposizione 1.9. Consideriamo le palle centrate in P e di raggio $1/k$: per definizione di punto aderente, ciascuna di esse contiene un punto $X_k \in K$. Per ipotesi, da $\{X_k\}_k$ si può estrarre una sottosuccessione che converge a qualche punto di K , ma dato che

$$\|X_k - P\| < \frac{1}{k} \implies X_k \rightarrow P$$

il punto in questione è P che quindi appartiene a K .

Ora proviamo che K è limitato: se non lo fosse, prese le palle B_k centrate nell'origine e di raggio $k \in \mathbb{N}$ l'insieme K non sarebbe contenuto in alcuna di esse; dunque, esisterebbe per ogni $k \in \mathbb{N}$ un punto

$$X_k \in K \setminus B_k \implies \|X_k\| \geq k.$$

Visto che $\|X_k\| \rightarrow +\infty$, nessuna estratta di $\{X_k\}_k$ può essere limitata, perciò per la prima parte del Teorema di Bolzano-Weierstraß 1.13 nessuna estratta può essere convergente, contro l'ipotesi. ■

Dunque gli insiemi compatti sono quelli in cui vale il teorema di Bolzano-Weierstraß. Vedremo che sono fondamentali anche in altri contesti \Leftarrow Teorema 1.21, Teorema 5.8.

1.8 - Funzioni continue

Iniziamo anche questa sezione rimaneggiando una definizione in una dimensione, quella di funzione continua: se $A \subset \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in A$, sappiamo che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in \bar{x} se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, [|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon].$$

In una dimensione,

$$|x - y| < \delta \iff d(x, y) < \delta \iff x \in B_\delta(y),$$

perciò potremmo riscrivere le due disuguaglianze finali della definizione come appartenenze a palle:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, [x \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(\bar{x}))].$$

Quest'ultima formula ha senso anche in più dimensioni, e la prendiamo come definizione della continuità.

Definizione : sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . L'insieme E è **sconnesso** se esistono due aperti A e B tali che

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap E \neq \emptyset, \quad B \cap E \neq \emptyset, \quad E \subset A \cup B. \quad (1.30)$$

Un insieme si dice **connesso** se non è sconnesso.

Attenzione! Dimostrare che un insieme è connesso è spesso difficile, e non è negli scopi di questo corso. Molto più facile è vedere che è sconnesso. Dagli esempi, cercate di capire il significato di "connesso".

Esempio : in \mathbb{R}^2 , l'insieme (disegnatelo!) formato dall'unione delle due palle aperte di raggio 1 e centri $(-1,0)$ e $(1,0)$ è sconnesso; l'insieme formato dall'unione della palla aperta di raggio 1 e centro $(-1,0)$ e della palla chiusa di raggio 1 e centro $(1,0)$ è connesso. L'insieme formato dall'unione dell'asse y e del grafico di $f(x) = 1/x$ (disegnatelo!) è sconnesso: ad esempio come aperti A e B possiamo prendere

$$A = \{(x, y) : xy > 1/2\}, \quad B = \{(x, y) : xy < 1/2\}.$$

Invece l'insieme formato dall'asse y e dal grafico di $f(x) = \sin(1/x)$ è connesso — ma questo è più difficile da dimostrare! L'insieme

$$\{(x, y) : |x^2 + y^2 - 2| > 1\}$$

è sconnesso, mentre il suo complementare è connesso.

Se un insieme è connesso è "formato da un solo pezzo". In generale si possono definire i "pezzi" da cui è composto un insieme anche sconnesso.

Definizione : se E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n ed $F \subset E$, l'insieme F è una **componente connessa di E** se F è connesso e

$$F \subset F' \subset E, \quad F' \text{ connesso} \implies F' = F. \quad (1.31)$$

Ogni insieme si può scrivere come unione di tutte le sue componenti connesse.

Esempio : l'insieme $\{(x, y) : |x^2 + y^2 - 2| > 1\}$, che abbiamo appena visto essere sconnesso, ha due componenti connesse, la palla di raggio 1 e il complementare di quella che ha raggio $\sqrt{3}$.

Aggiungiamo la definizione di insieme convesso, che in \mathbb{R} coincide con quella di intervallo ma in più dimensioni è una struttura più interessante.

Definizione : un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n è **convesso** se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ tutto il segmento che li congiunge è contenuto in E .

In formula, E è convesso se e solo se

$$x, y \in E \implies tX + (1-t)Y \in E \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.32)$$

Una banana non è convessa, una corona circolare neppure, un ellissoide sì.

DIMOSTRAZIONE : come detto, lavoriamo in \mathbb{R}^2 anche se il risultato è generale. Se $\{\mathbf{A}_k\}_k$ converge allora sia $\{x_k\}_k$ che $\{y_k\}_k$ convergono, dunque sono limitate, cioè per qualche M

$$|x_k| \leq M, \quad |y_k| \leq M \implies \|\mathbf{A}_k\| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq M\sqrt{2}$$

per ogni k , e la prima affermazione è dimostrata. Per la seconda, ricordando (1.7), abbiamo

$$\|\mathbf{A}_k\| \leq M \implies |x_k| \leq M, \quad |y_k| \leq M \quad (1.33)$$

per ogni k , perciò $\{x_k\}_k$ è limitata. Per il teorema di Bolzano-Weierstraß, possiamo estrarne una sottosuccessione convergente,

$$x_{h_k} \rightarrow \bar{x}.$$

Ma per (1.33) anche $\{y_k\}_k$ è limitata, dunque lo è anche la sua estratta $\{y_{h_k}\}_k$. Possiamo estrarre da questa una ulteriore sottosuccessione convergente,

$$y_{j_{h_k}} \rightarrow \bar{y},$$

ma anche $x_{j_{h_k}} \rightarrow \bar{x}$ dato che $x_{j_{h_k}}$ è una sottosuccessione della successione x_{h_k} che converge a \bar{x} . Allora

$$\mathbf{A}_{j_{h_k}} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}).$$

Per provare che

$$[\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{P}, \mathbf{A}_k \in E \forall k] \implies \mathbf{P} \in \bar{E},$$

procediamo per assurdo ricordando la Proposizione 1.9: se fosse $\mathbf{P} \notin \bar{E}$ il punto \mathbf{P} sarebbe esterno ad E , cioè esisterebbe una palla $B_r(\mathbf{P})$ che non contiene punti di E , e in particolare non potrebbe contenere alcun punto della successione, il che nega l'ipotesi $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{P}$.

Preso $\mathbf{X} \in \bar{E}$, per ogni k esiste un punto \mathbf{X}_k di E che sta nella palla centrata in \mathbf{X} e ha raggio $1/k$: la successione $\{\mathbf{X}_k\}_k$ converge a \mathbf{X} e sta tutta in E .

L'ultima asserzione è facile: se K è compatto è (chiuso e) limitato, quindi da ogni successione di punti di K si può estrarre una sottosuccessione che converge a qualche limite \mathbf{P} . D'altra parte la sottosuccessione, che converge, è composta da punti di K , che è un insieme chiuso, quindi per quanto appena dimostrato il suo limite \mathbf{P} appartiene al chiuso K . ■

L'ultima parte del teorema ha anche un viceversa.

Proposizione 1.14 : un sottoinsieme K di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se da ogni successione di punti di K si può estrarre una sottosuccessione che converge a qualche punto di K .

Definizione : se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, la funzione f è **continua nel punto** $P \in E$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall X \in E, [X \in B_\delta(P) \Rightarrow f(X) \in B_\varepsilon(f(P))].$$

Una funzione si dice **continua** se è continua in tutti i punti del suo dominio.

Osservazione : possiamo riscrivere la definizione in modo più esplicito come

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall X \in E, [\|X - P\| < \delta \Rightarrow \|f(X) - f(P)\| < \varepsilon].$$

Esempio : se $P_0 \in \mathbb{R}^n$, la funzione "distanza da P_0 "

$$g(X) = d(X, P_0) = \|X - P_0\| \quad (1.34)$$

è continua. Verifichiamo che soddisfa la definizione, con $\delta = \varepsilon$: se $\|X - P\| < \varepsilon$ si ha grazie a (1.5)

$$|g(X) - g(P)| = \left| \|X - P_0\| - \|P - P_0\| \right| \leq \|X - P\| < \varepsilon,$$

quindi g è continua.

È conveniente introdurre un simbolo per poter scrivere che una funzione è continua.

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$; lo **spazio delle funzioni continue da E a \mathbb{R}^m** è indicato con il simbolo $C^0(E; \mathbb{R}^m)$; nel caso $m = 1$ si scrive semplicemente $C^0(E)$. Se $f \in C^0(E; \mathbb{R}^m)$ si dice che f è **di classe C^0 in E** .

Grazie a questa definizione, scriveremo semplicemente $f \in C^0(E; \mathbb{R}^m)$ anziché dover scrivere che $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ e che f è continua. Abbiamo dato direttamente la definizione di continuità per funzioni a valori in \mathbb{R}^m , tuttavia è raro dover ricorrere esplicitamente a questa versione, grazie al prossimo risultato.

Proposizione 1.15 : se $E \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in un punto $P \in E$ se e solo se sono continue in P le m componenti f_1, \dots, f_m di f .

DIMOSTRAZIONE : per la solita disuguaglianza (1.7)

$$\|f(X) - f(P)\| < \varepsilon \implies \|f_i(X) - f_i(P)\| < \varepsilon,$$

quindi se f è continua in P lo è anche ciascuna delle sue componenti; d'altra parte se tutte le componenti sono continue, fissato $\varepsilon > 0$ esistono m numeri positivi $\delta_1, \dots, \delta_m$ tali che

$$\forall X \in E, [X \in B_{\delta_i}(P) \Rightarrow f_i(X) \in B_\varepsilon(f_i(P))].$$

Ma allora detto $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ abbiamo

$$\begin{aligned} X \in B_\delta(P) &\implies X \in B_{\delta_i}(P) \quad \forall i \implies |f_i(X) - f_i(P)| < \varepsilon \quad \forall i \\ &\implies \|f(X) - f(P)\| < m\varepsilon \end{aligned}$$

sempre per (1.7). ■

Il legame tra funzioni continue e successioni è analogo a quello per funzioni di una variabile.

Proposizione 1.16 : se $E \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in un punto $P \in E$ se e solo se per ogni successione $\{X_k\}_k$ di punti di E che converge a P si ha $f(X_k) \rightarrow f(P)$.

Per la Proposizione 1.15, basta vedere il caso $m = 1$, così scriviamo f al posto di \mathbf{f} . La dimostrazione poi è identica a quella per funzioni di una variabile, semplicemente pensando che il valore assoluto in una variabile, e la norma in più variabili, sono la stessa cosa: delle distanze (es. 1.22). Molti dei risultati visti in una variabile valgono anche per funzioni di più variabili, e sovente la dimostrazione si appoggia alle due proposizioni precedenti: la Proposizione 1.15 che permette di ridursi al caso di funzioni a valori scalari, e la Proposizione 1.16 che permette di fare una dimostrazione per successioni. Ad esempio valgono i teoremi algebrici consueti, in cui per semplicità prendiamo come dominio delle funzioni tutto lo spazio (ma che naturalmente valgono più in generale).

Proposizione 1.17 : siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ due funzioni continue in un punto P . Allora

- 1) la somma $f + g$ e la differenza $f - g$ sono continue in P ;
 - 2) se $m = 1$, scrivendo f, g al posto di \mathbf{f}, \mathbf{g} , il prodotto fg e (dove $g \neq 0$) il quoziente f/g sono continue in P ;
 - 3) il prodotto scalare $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ è una funzione continua in P (a valori reali).
- Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ continue. Allora
- 4) la composizione $g \circ f$ è continua.

Esempio : la funzione

$$f(X) = \left(\sqrt{(X_3)^2 - (X_4)^2} \sin \frac{X_1}{2X_2 - (X_5)^2}, e^{1 - \cos X_3} \right)$$

è una funzione continua, da un sottoinsieme di \mathbb{R}^5 a \mathbb{R}^2 . Il suo dominio naturale si ricava risolvendo il sistema

$$(X_3)^2 - (X_4)^2 \geq 0, \quad 2X_2 - (X_5)^2 \neq 0.$$

Ricordiamo che il teorema dei valori intermedi era valido per una funzione continua su un intervallo, e asseriva che la sua immagine è un intervallo. Come abbiamo visto al termine della Sezione 1.6, gli intervalli sono i connessi di \mathbb{R} . Il sostituto in più dimensioni usa la definizione di insieme connesso.

Teorema 1.18 : se $E \subset \mathbb{R}^n$ è connesso e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua, l'immagine $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ è un insieme connesso.

La dimostrazione usa la topologia in modo più sottile di quanto contenuto nella nostra breve esposizione, e la omettiamo. Nel caso di funzioni a valori reali, ritroviamo un enunciato un po' più familiare, da cui segue la versione del teorema di esistenza degli zeri per funzioni da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} .

Corollario 1.19 : *se $E \subset \mathbb{R}^n$ è connesso e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, l'immagine $f(E)$ è un intervallo. In particolare, se $E \subset \mathbb{R}^n$ è connesso e la funzione continua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ assume in E sia valori positivi che negativi, esiste un punto $P \in E$ tale che $f(P) = 0$.*

Esempio : se $n = 2$ ed

$$E = \{(x, y) : (|x| - 2)^2 + y^2 \leq 1\},$$

l'insieme E è sconnesso, dato che è l'unione di due palle disgiunte, e in effetti la funzione continua

$$f(x, y) = x + y$$

è negativa nella metà sinistra di E e positiva in quella destra, e non si annulla mai in E . La funzione continua

$$f(x, y) = x + 4y$$

assume invece in E sia valori positivi che negativi, e anche il valore zero: questo non contraddice il teorema di esistenza degli zeri, che è solo una implicazione.

Esempio : se $n = 2$ ed

$$E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

l'insieme E , che è una corona circolare, è connesso. La funzione

$$f(x, y) = x + 4y + 3 \operatorname{sen} \frac{x^2 - 4\sqrt{1 + y^4}}{15 - x - y}$$

è definita in tutto E (controllatelo!), è continua, nei punti $(\pm 2, 0)$ assume valori di segno opposto perciò in qualche punto della corona E si annulla — ma chissà quale.

Il Teorema di Weierstraß, che parlando di massimi e minimi ha senso soltanto per funzioni a valori reali dato che in \mathbb{R}^m non abbiamo introdotto l'ordine, è più completo in questa versione (es. 1.24).

Teorema di Weierstraß in \mathbb{R}^n 1.20 : *sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto, e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE : come in una variabile, sia $M = \sup f$ e sia $y_k \nearrow M$; per definizione di estremo superiore, per ogni k esiste $X_k \in K$ tale che

$$y_k < f(X_k) \leq M. \quad (1.35)$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstraß 1.13 possiamo estrarre da $\{X_k\}_k$ una sottosuccessione (continuiamo a chiamarla $\{X_k\}_k$ per non appesantire la notazione) che converge a un punto $P \in K$; dato che f è continua in tutti i punti di K possiamo applicare la Proposizione 1.16 e abbiamo

$$f(X_k) \rightarrow f(P),$$

ma d'altra parte da (1.35) ricaviamo per il teorema dei carabinieri

$$f(X_k) \rightarrow M,$$

pertanto $f(P) = M = \sup f$, da cui segue che $f(P) = \max f$. Per il minimo basta scambiare f con $-f$. ■

Esempio : tutte le funzioni degli esempi relativi al Corollario 1.19 hanno massimo e minimo sui rispettivi insiemi E , dato che si tratta in tutti i casi di insiemi chiusi e limitati. La funzione usata nell'ultimo esempio,

$$f(x, y) = x + 4y + 3 \sin \frac{x^2 - 4\sqrt{1+y^4}}{15 - x - y},$$

ha massimo e minimo anche sull'insieme

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ o } x^2 + y^2 = 4\} :$$

infatti C è la frontiera della corona circolare E , quindi è un insieme chiuso (Proposizione 1.9, inoltre è limitato dato che è contenuto ad esempio nella palla di raggio 3). Essendo chiuso e limitato è compatto, quindi si applica il Teorema di Weierstraß 1.20.

Nel prossimo esempio consideriamo funzioni particolari.

Definizione : una **forma quadratica** in \mathbb{R}^n è una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$f(x) = (Ax) \cdot x$$

dove A è una matrice $n \times n$. Una forma quadratica è **definita positiva** se

$$(Ax) \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0; \quad (1.36)$$

è **semidefinita positiva** se

$$(Ax) \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e analogamente (invertendo le disuguaglianze) per **definita negativa** e **semidefinita negativa**.

Esempio : consideriamo una forma quadratica $f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ definita positiva in \mathbb{R}^n ; proviamo che una forma quadratica definita positiva verifica una condizione molto più forte di (1.36), precisamente

$$\exists c > 0 : \forall \mathbf{x}, (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geq c\|\mathbf{x}\|. \quad (1.37)$$

Infatti, consideriamo la funzione f sulla buccia della palla unitaria,

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Questo è un insieme compatto, e la funzione f è continua, dato che è un polinomio nelle variabili x_1, \dots, x_n :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Allora f ha massimo e minimo su E . Ci interessa il minimo: è il valore c assunto da f in qualche punto di E , ma dato che $f(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e che $\mathbf{0} \notin E$, il valore c è anch'esso un numero positivo. Ma questo significa che

$$\forall \mathbf{v} \in E, f(\mathbf{v}) \geq c = \min_E f > 0.$$

Allora per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ il vettore $\mathbf{v}_x = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ ha norma 1, dunque appartiene a E , perciò

$$f(\mathbf{v}_x) \geq c,$$

ma

$$f(\mathbf{v}_x) = \left(A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

quindi

$$f(\mathbf{v}_x) \geq c \iff \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq c \iff f(\mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2,$$

e abbiamo provato (1.37) per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ma per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ la formula è ovvia.

Gli insiemi compatti sono la giusta generalizzazione degli "intervalli chiusi e limitati" che ricorrono negli enunciati relativi alle funzioni continue in una variabile: vediamo un'altra estensione, iniziando con la definizione di funzione uniformemente continua (che è identica a quella in una dimensione, a parte sostituire valore assoluto con norma).

Definizione : se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, la funzione f è **uniformemente continua** in E se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in E, [\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| < \varepsilon].$$

Teorema di Heine-Cantor 1.21 : ogni funzione uniformemente continua è continua; una funzione continua su un insieme compatto K è uniformemente continua in K .

La dimostrazione è anch'essa identica a quella unidimensionale. Come in una variabile, introduciamo una importante classe di funzioni uniformemente continue.

Definizione : siano $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $L > 0$; una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **Lipschitziana di costante L in E** se

$$|f(X) - f(Y)| \leq L\|X - Y\| \quad \forall X, Y \in E. \quad (1.38)$$

Osservazione : ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua, con $\delta = \varepsilon/L$.

Vediamo ora alcune proprietà di una funzione facile ma fondamentale, la distanza, che abbiamo già incontrato in questa sezione (1.34).

Definizione : se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme e $P \in \mathbb{R}^n$, la **distanza del punto P dall'insieme E** è il numero

$$d(P, E) = \inf \{d(P, Q) : Q \in E\}.$$

Osservazione : in generale, l'estremo inferiore che compare nella distanza da un insieme può non essere un minimo: ad esempio, se E è la palla unitaria aperta di \mathbb{R}^2 e $P = (1, 0)$, la distanza di P da E è zero, dato che E contiene punti arbitrariamente vicini a P , ma non c'è alcun punto di E che disti zero da P .

Proposizione 1.22 : se $C \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso (non vuoto) e $P \in \mathbb{R}^n$, la distanza di P da C è un minimo, ovvero esiste un punto $Q \in C$ tale che $\|P - Q\| = d(P, C)$. La funzione $f(P) = d(P, C)$ è una funzione continua di P .

DIMOSTRAZIONE : non sappiamo se C , oltre a essere chiuso, è anche limitato, quindi siamo costretti a lavorare un po' per ridurci a cercare il minimo su un compatto. Sia R un punto qualunque di C , poniamo

$$r = \|P - R\|$$

e consideriamo l'insieme

$$K = C \cap \{X : \|P - X\| \leq r\}.$$

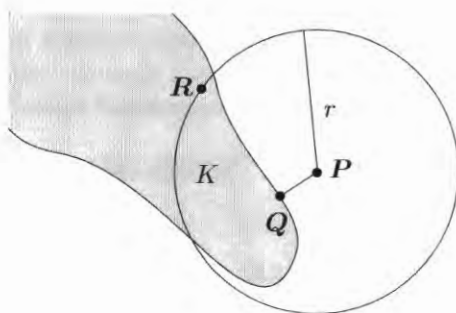


Fig. 1.37 : in grigio l'insieme C

Osserviamo che K è un sottoinsieme di C , quindi chiaramente

$$d(P, K) \geq d(P, C). \quad (1.39)$$

Poi K è limitato, perché è contenuto in una palla; infine, K è l'intersezione di due chiusi, quindi è chiuso. Per la Proposizione 1.8, dunque K è un compatto. Il punto R appartiene a K , quindi

$$d(P, K) = \inf_{X \in K} d(X, P) \leq d(R, P) = r.$$

Sia ora $X \in C$; se $x \notin K$ allora

$$d(P, X) > r \geq d(P, K).$$

Ma la disuguaglianza

$$d(P, X) \geq d(P, K)$$

è ovvia se $X \in K$, quindi è vera per ogni $X \in C$. Allora

$$d(P, C) \geq d(P, K)$$

e dunque le due distanze sono uguali per (1.39). Ora, la funzione continua (1.34)

$$X \mapsto d(X, P)$$

ha minimo sul compatto K , cioè esiste un punto $Q \in K \subset C$ tale che $d(Q, P) = d(P, K) = d(P, C)$ come dovevamo dimostrare.

Mostriamo che f è Lipschitziana di costante 1. Se

$$\|P_1 - P_2\| = D,$$

intanto per la parte precedente esistono due punti $Q_1, Q_2 \in C$ tali che

$$d(P_1, C) = \|P_1 - Q_1\|, \quad d(P_2, C) = \|P_2 - Q_2\|.$$

Allora per definizione e usando (1.4)

$$f(P_1) \leq \|P_1 - Q_2\| \leq \|P_1 - P_2\| + \|P_2 - Q_2\| = D + f(P_2),$$

e analogamente (scambiando P_1 e P_2)

$$f(P_2) \leq D + f(P_1).$$

Unita alla precedente questa dà

$$-D \leq f(P_1) - f(P_2) \leq D \iff |f(P_1) - f(P_2)| \leq D = \|P_1 - P_2\|,$$

e abbiamo terminato la dimostrazione. ■

Per scrivere al meglio la prossima proposizione servirebbe una trattazione della topologia più approfondita. Ci accontentiamo di un enunciato parziale (es. 1.25).

Proposizione 1.23 : se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora:

- 1) per ogni chiuso $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso;
- 2) per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto;
- 3) per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme $f(K)$ è compatto.

DIMOSTRAZIONE : il punto 3 è sostanzialmente il Teorema di Weierstraß 1.20; il punto 2 si ricava da 1 passando ai complementari; per vedere il punto 1, prendiamo un punto X nella chiusura di $f^{-1}(C)$ e mostriamo che appartiene a $f^{-1}(C)$, così avremo provato che $f^{-1}(C)$ coincide con la sua chiusura e dunque è chiuso. Sappiamo per la caratterizzazione sequenziale dei chiusi contenuta nel Teorema di Bolzano-Weierstraß 1.13 che esiste una successione $\{X_k\}_k$ di punti di $f^{-1}(C)$ che converge a X . Ma allora per la continuità di f abbiamo \Leftarrow Proposizione 1.16

$$f(X_k) \rightarrow f(X).$$

D'altra parte $f(X_k) \in C$ che è chiuso, quindi anche il limite $f(X)$ appartiene a C sempre per la caratterizzazione sequenziale dei chiusi. Ma dire che $f(X) \in C$ vuol dire $X \in f^{-1}(C)$, che quindi è chiuso. ■

Se più in generale avessimo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, le affermazioni sopra andrebbero scritte:

- 1) per ogni chiuso $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è l'intersezione di Ω con un insieme chiuso;
- 2) per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(A)$ è l'intersezione di Ω con un insieme aperto;
- 3) per ogni compatto $K \subset \Omega$ l'insieme $f(K)$ è compatto.

Chiudiamo la sezione con due proprietà interessanti, che verranno utilizzate per trovare "il primo punto" in cui certe proprietà si verificano.

Proposizione 1.24 : *sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, che si annulla in qualche punto di $[a, b]$. Allora esiste il primo punto in cui si annulla,*

$$\min \{t \in [a, b] : f(t) = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE : sia $Z = \{t \in [a, b] : f(t) = 0\}$ e sia $t_0 = \inf Z$, che esiste dato che Z è non vuoto e limitato inferiormente. Abbiamo $a \leq t_0 < b$, quindi f è continua in t_0 . Per definizione di estremo inferiore, in ogni intervallo $[t_0, t_0 + \delta[$ cadono punti di Z ; se fosse $f(t_0) \neq 0$, per il Teorema di permanenza del segno \Leftarrow Proposizione 1.35 la funzione f avrebbe lo stesso segno di $f(t_0)$ in qualche intorno destro $[t_0, t_0 + \delta[$, che quindi non conterrebbe punti di Z . Allora resta solo $f(t_0) = 0$, quindi $t_0 \in Z$ e pertanto $t_0 = \min Z$. ■

Se mutiamo $[a, b]$ in $]a, b[$ il risultato non è più vero: ad esempio in $]0, 1[$ la funzione $\sin(1/x)$ si annulla in infiniti punti che si accumulano a zero. Naturalmente, scambiando x con $-x$ e cioè procedendo verso sinistra anziché verso destra, otteniamo il prossimo risultato, di cui potete fare per esercizio la dimostrazione (come pure della variante che segue).

Corollario 1.25 : sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, che si annulla in qualche punto di (a, b) . Allora esiste l'ultimo punto in cui si annulla,

$$\max \{t \in (a, b) : f(t) = 0\}.$$

In particolare, se f è definita su $[a, b]$ allora esistono sia il primo che l'ultimo punto in cui si annulla.

Proposizione 1.26 : sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, nulla per $x = a$ ma non tutta nulla. Allora esiste il primo punto dopo il quale f ha cessato di essere identicamente nulla,

$$\max \{t \in [a, b) : f(x) = 0 \forall x \leq t\}.$$

Proposizione 1.27 : sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua e sia C un chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che il grafico di f intersechi C , cioè tale che per qualche \hat{t} si abbia

$$(\hat{t}, f(\hat{t})) \in C.$$

Allora esiste il primo punto in cui il grafico di f interseca C , cioè esiste

$$\min \{t \in [a, b) : (t, f(t)) \in C\}.$$

Se il dominio di f era $(a, b]$, la tesi diviene che esiste l'ultimo punto in cui il grafico di f interseca C ; se era $[a, b]$ esistono entrambi.

DIMOSTRAZIONE : la funzione

$$X(t) = (t, f(t))$$

è continua per la Proposizione 1.15, quindi lo è anche per la Proposizione 1.17 e Proposizione 1.22 la funzione

$$h(t) = d(X(t), C).$$

D'altra parte $h(\hat{t}) = 0$, quindi per la Proposizione 1.24

$$\exists t_0 = \min \{t : h(t) = 0\}.$$

Ma $h(t_0) = d(X(t_0), C)$, e per la Proposizione 1.22 esiste un punto $Q \in C$ tale che $d(X(t_0), Q) = 0$. Ma allora $X(t_0) = Q \in C$ e $X(t_0)$ è il primo punto in cui il grafico di f interseca C . ■

1.9 - Limiti in più variabili

I limiti in più variabili sono definiti in modo molto semplice, identico a quanto sappiamo in una variabile, ma ahimè, sono assai più complicati da calcolare: infatti, in una variabile, a un dato punto \bar{x} ci si può avvicinare in due soli modi: o da destra, o da sinistra. Inoltre, in una variabile possiamo a volte usare i risultati sull'esistenza del limite per funzioni monotone. In più variabili, tanto per cominciare non abbiamo parlato di funzioni monotone (dato che in \mathbb{R}^n non abbiamo messo l'ordine), poi a un dato punto ci si può avvicinare non solo da molte direzioni, ma anche in molti altri modi "curvi", il che crea diversi problemi. Cominciamo con la parte facile, che è la riscrittura della definizione di limite: vale quanto detto all'inizio della Sezione 1.8 per la definizione di continuità, e cioè che l'unica variazione è l'uso di "norma" al posto di "valore assoluto"; in effetti, come per le successioni, c'è anche una importante semplificazione, dato che in \mathbb{R}^n non ci sono né $+\infty$ né $-\infty$.

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$, sia P un punto di accumulazione di E e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diciamo che il **limite di f per $X \rightarrow P$** è un punto $\ell \in \mathbb{R}^m$, e scriviamo

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = \ell,$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall X \in E, \quad \left[0 < \|X - P\| < \delta \Rightarrow \|f(X) - \ell\| < \varepsilon \right].$$

Nel caso di funzioni a valori reali, cioè $m = 1$, ha senso anche parlare di limite uguale a $+\infty$ o $-\infty$, in modo del tutto analogo al caso di funzioni di una variabile.

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$, sia P un punto di accumulazione di E e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che il **limite di f per $X \rightarrow P$** è $+\infty$ se

$$\forall M, \exists \delta > 0 : \forall X \in E, \quad \left[0 < \|X - P\| < \delta \Rightarrow f(X) > M \right],$$

e analogamente per $-\infty$.

Abbiamo detto che se f è definita su \mathbb{R}^n non ha senso chiedersi cosa accade per $X \rightarrow +\infty$, dato che non esiste l'analogo di $+\infty$ in \mathbb{R}^n . Tuttavia in certi casi ha senso chiedersi cosa accade a $f(X)$ quando l'argomento X "diventa grande": facciamo precedere la definizione da un esempio.

Esempio : la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

è definita su \mathbb{R}^2 , ed ha un comportamento chiaro: quando il vettore (x, y) è "sufficientemente grande", ovvero la distanza del punto (x, y) dall'origine supera una certa soglia, il valore di f è un numero piccolo, cioè vicino a zero. Questo accade indipendentemente

dalla direzione in cui si trova (x, y) : la sola cosa che conta, per poter dire che $f(x, y)$ è piccolo, è che la norma di (x, y) sia grande. Infatti fissato $\varepsilon > 0$ se

$$\|(x, y)\| > K := \frac{1}{\varepsilon}$$

abbiamo

$$0 < f(x, y) = \frac{1}{1 + \|(x, y)\|} < \frac{1}{1 + (1/\varepsilon)} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

I domini $E \subset \mathbb{R}^n$ per i quali ha senso chiedersi cosa accade quando $\mathbf{X} \in E$ diventa "grande" sono quelli che contengono punti aventi distanza dall'origine arbitrariamente grande, cioè gli insiemi non limitati.

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$ non limitato, e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diciamo che il **limite di f per $\|\mathbf{X}\| \rightarrow +\infty$ è un punto $\ell \in \mathbb{R}^m$** , e scriveremo

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{X}) = \ell,$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 : \forall \mathbf{X} \in E, \quad [\|\mathbf{X}\| > K \Rightarrow \|f(\mathbf{X}) - \ell\| < \varepsilon].$$

Nel caso scalare $m = 1$ hanno senso anche la scrittura

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{X}) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall M, \exists K > 0 : \forall \mathbf{X} \in E, \quad [\|\mathbf{X}\| > K \Rightarrow f(\mathbf{X}) > M]$$

e la scrittura $\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{X}) = -\infty$, con definizione analoga.

Valgono per i limiti risultati algebrici analoghi a quelli della Proposizione 1.17, con le varianti tipiche dei limiti di funzioni di una variabile (come ad esempio le varie "forme indeterminate"), e l'aggiunta dell'ipotesi extra per il limite della composizione, il cui enunciato si legge così: se

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathbf{X}}} f(\mathbf{X}) = P, \quad \lim_{\mathbf{Y} \rightarrow P} g(\mathbf{Y}) = \ell$$

e se è verificata una delle due condizioni

$$f(\mathbf{X}) \neq P \quad \text{in } B_\delta(\overline{\mathbf{X}}) \setminus \{\overline{\mathbf{X}}\} \quad \text{ o } \quad g \text{ è continua in } P$$

allora

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathbf{X}}} g(f(\mathbf{X})) = \ell.$$

Inoltre valgono le relazioni fra limiti, successioni e continuità già viste in una variabile, che qui riassumiamo.

Proposizione 1.28 : siano $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $f = (f_1, \dots, f_m)$; allora:

- 1) si ha $f(\mathbf{X}) \rightarrow \ell$ se e solo se per ogni successione $\{\mathbf{X}_k\}_k$ di punti di E diversi da \mathbf{P} che tende a \mathbf{P} si ha $f(\mathbf{X}_k) \rightarrow \ell$, dove ℓ può anche essere $\pm\infty$ nel caso scalare $m = 1$;
- 2) si ha $f(\mathbf{X}) \rightarrow \ell$ se e solo se tutte le componenti di f hanno come limite la corrispondente componente di $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$, cioè $f_i(\mathbf{X}) \rightarrow \ell_i$ per $i = 1, \dots, m$;
- 3) se $\mathbf{P} \in E$ è di accumulazione per E , la funzione f è continua in \mathbf{P} se e solo se $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{P})$.

In particolare, lo strumento fondamentale per dimostrare che una funzione f non ha limite per $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}$ è trovare due successioni diverse $\{\mathbf{X}_k\}_k$ e $\{\mathbf{Y}_k\}_k$ che tendono entrambe a \mathbf{P} ma tali che $f(\mathbf{X}_k)$ e $f(\mathbf{Y}_k)$ hanno limiti diversi.

Prima di procedere con gli esempi, vediamo quali strumenti abbiamo a disposizione: una grossa mancanza, per funzioni a valori in \mathbb{R}^m , sarebbe l'assenza di tutti i teoremi tipo confronto o carabinieri, dato che in \mathbb{R}^m non abbiamo un ordine e quindi non abbiamo disuguaglianze. Questa tuttavia è superata dal punto 2 della proposizione precedente, che permette di lavorare con le singole componenti che dunque sono funzioni scalari. Uno strumento importante è il collegamento con le coordinate polari, che permette di trattare alcuni limiti particolari usando i limiti in una variabile visti nel corso di Analisi Matematica 1.

Proposizione 1.29 : se $\mathbf{0}$ è un punto di accumulazione di $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione per la quale è possibile determinare due altre funzioni $g, h :]0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$[\mathbf{X} \in E, \quad 0 < \|\mathbf{X}\| < a] \implies g(\|\mathbf{X}\|) \leq f(\mathbf{X}) \leq h(\|\mathbf{X}\|)$$

e che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = \ell \quad (1.40)$$

allora anche

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{X}) = \ell. \quad (1.41)$$

DIMOSTRAZIONE : lavoriamo solo con $\ell = 0$, lasciando per esercizio la facile modifica per $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e per $\ell = \pm\infty$, dove come per il Teorema dei carabinieri basta una delle disuguaglianze. Per provare (1.41), usando la definizione, fissiamo $\varepsilon > 0$; per definizione di limite, da (1.40) segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < r < \delta \implies -\varepsilon < g(r) \leq h(r) < \varepsilon.$$

Dato che g ed h sono definite solo su $]0, a[$ sappiamo che $\delta \leq a$; allora

$$[\mathbf{X} \in E, \quad 0 < \|\mathbf{X}\| < \delta] \implies -\varepsilon < g(\|\mathbf{X}\|) \leq f(\mathbf{X}) \leq h(\|\mathbf{X}\|) < \varepsilon$$

e pertanto il limite di f è zero. ■

Osservazione : in particolare, se $\mathbf{0}$ è un punto di accumulazione di $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione per la quale è possibile determinare un'altra funzione $g :]0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\left[X \in E, \quad 0 < \|X\| < a \right] \implies |f(X)| \leq g(\|X\|)$$

e che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$$

allora anche

$$\lim_{X \rightarrow 0} f(X) = 0.$$

La proposizione precedente ha una versione anche all'infinito.

Proposizione 1.30 : se $E \subset \mathbb{R}^n$ non è limitato, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ed è possibile determinare due funzioni $g, h : [r_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$g(\|x\|) \leq f(x) \leq h(\|x\|) \quad \forall x : \|x\| \geq r_0$$

e che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \ell,$$

allora anche

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Con gli strumenti al completo, procediamo con qualche esempio (es. 1.26).

Esempio : la funzione $f(x, y) = 3xy(x + \sin y)$ è continua su tutto \mathbb{R}^2 , quindi grazie al punto 3 della Proposizione 1.28 il suo limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ qualunque è semplicemente $f(x_0, y_0)$.

Esempio : la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\tan \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1.42}$$

è definita dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ non è multiplo di $\pi/2$. In particolare è definita nella palla privata del centro

$$E = B_{\pi/2}(0, 0) \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \pi/2\}.$$

Osserviamo che

$$0 < r < \pi/2 \implies \tan r > r,$$

quindi

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \pi/2 \implies 0 < f(x, y) < \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} :$$

allora posto

$$g(r) = r, \quad 0 < r < \pi/2$$

abbiamo per ogni $(x, y) \in E$

$$0 < f(x, y) < g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

e quindi anche

$$|f(x, y)| < g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Ma $g(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$, quindi per la Proposizione 1.29 anche

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Esempio : consideriamo la funzione

$$h(x, y) = \frac{(x-1)^2 + (y+2)^2 + 7 \tan \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{\tan \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}};$$

possiamo riscriverla

$$h(x, y) = \frac{(x-1)^2 + (y+2)^2}{\tan \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}} + 7, \quad (1.43)$$

e quindi

$$h(x, y) - 7 = \frac{(x-1)^2 + (y+2)^2}{\tan \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}.$$

Ora la funzione a secondo membro somiglia in una certa misura alla funzione f dell'esempio (1.42), ma qui il punto interessante non è l'origine, bensì $(1, -2)$. Trasliamo gli assi in modo che il punto che ora ha coordinate $(x, y) = (1, -2)$ sia la nuova origine, ponendo

$$x' = x - 1, \quad y' = y + 2 \quad \text{ovvero} \quad x(x', y') = x' + 1, \quad y(x', y') = y' - 2.$$

Se indichiamo con $H(x', y')$ la funzione h nelle nuove coordinate, cioè se poniamo

$$H(x', y') = h(x(x', y'), y(x', y')) = h(x' + 1, y' - 2),$$

vediamo che la (1.43) si scrive, usando (1.42),

$$H(x', y') = \frac{(x')^2 + (y')^2}{\tan \sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + 7 = f(x', y') + 7.$$

Per il teorema sul limite della composizione e quello sul limite della somma

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -2)} h(x, y) = \lim_{(x', y') \rightarrow (0, 0)} H(x', y') = 7 + \lim_{(x', y') \rightarrow (0, 0)} f(x', y') = 7.$$

Esempio : consideriamo una piccola variante dell'esempio precedente. Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} h(x,y)$$

dove ora

$$h(x,y) = \frac{(x-1)^2 + (y+2)^2 + 7\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{\tan \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}.$$

Ponendo

$$s = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$$

per il teorema sul limite della composizione ci riduciamo a calcolare il limite unidimensionale

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 7s}{\tan s}$$

e quindi otteniamo nuovamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} h(x,y) = 7.$$

Esempio : consideriamo nella palla di equazione $x^2 + y^2 \leq 1/100$, privata dell'origine, la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2}{\tan \sqrt{5x^2 + y^2}},$$

che di nuovo somiglia all'esempio più sopra. Qui abbiamo al numeratore e al denominatore due oggetti diversi, e non possiamo semplificare come prima, però scrivendo come di consueto $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, abbiamo

$$r^2 = x^2 + y^2 \leq 5x^2 + y^2$$

e quindi in particolare, per la monotonia della tangente vicino a zero,

$$\tan \sqrt{5x^2 + y^2} \geq \tan r \geq r.$$

D'altra parte

$$0 \leq x^2 + 3y^2 \leq 3r^2,$$

quindi

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{3r^2}{r} = 3r,$$

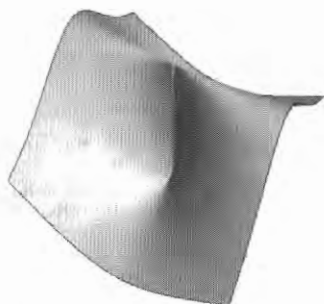
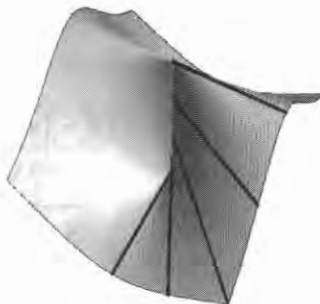
e di nuovo otteniamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

per la Proposizione 1.29.

Esempio : consideriamo su \mathbb{R}^2 privato dell'origine la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2}.$$

Fig. 1.38 : il grafico di f Fig. 1.39 : f è costante su ogni retta per l'origine

Nei punti dell'asse delle ascisse, cioè in quelli di coordinate $(x, 0)$ con $x \neq 0$, la funzione vale $1/2$. Invece in quelli dell'asse delle ordinate vale 2 , quindi arbitrariamente vicino all'origine ci sono sia punti dove f vale $1/2$ che punti dove vale 2 . Questo fa pensare che *non esista*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

Per provarlo, consideriamo le due successioni seguenti, che tendono entrambe a $(0, 0)$:

$$\mathbf{X}_k = (1/k, 0), \quad \mathbf{Y}_k = (0, 1/k).$$

Abbiamo

$$f(\mathbf{X}_k) \equiv \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad f(\mathbf{Y}_k) \equiv 2 \rightarrow 2,$$

e il limite non esiste per la Proposizione 1.28. Osserviamo come si comporta la funzione f sulle altre rette che passano per l'origine: nei punti della retta di equazione $y = mx$, cioè nei punti di coordinate (x, mx) , la funzione f vale

$$f(x, mx) \equiv \frac{1 + 2m^2}{2 + m^2}.$$

Dunque f è costante (ma con costanti tutte diverse) su ciascuna retta per l'origine. Possiamo rivederlo e capirlo meglio se leggiamo la funzione in coordinate polari (1.25), cioè se consideriamo una funzione

$$g : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

definita nella striscia (r, θ) — giacché si tratta di una striscia e non di un piano, anzi di una mezza striscia — da

$$g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

che nel nostro caso si legge

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta}{2r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 + \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

La funzione g dipende solo da θ , quindi è costante — nella striscia (r, θ) — su ciascuna delle semirette orizzontali di equazione $\theta = \text{costante}$, il che corrisponde a essere costante — nel piano (x, y) — sugli insiemi immagine di tali semirette tramite le trasformazioni (1.25), che sono le semirette uscenti dall'origine. Tuttavia il valore assunto da g cambia a seconda del valore scelto per θ , quindi (come già visto) f assume valore costante su ciascuna semiretta uscente dall'origine, ma con valori della costante variabili a seconda della direzione.

Esempio : consideriamo su \mathbb{R}^2 la funzione che fuori dall'origine vale

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (1.44)$$

e definiamola anche nell'origine ponendo

$$f(0, 0) = 0.$$

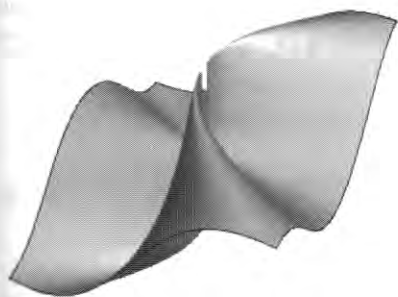


Fig. 1.40 : il grafico di f

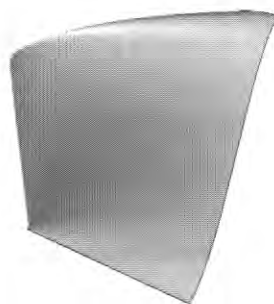


Fig. 1.41 : ingrandimento vicino all'origine, con $x < 0 < y$

Nei punti dell'asse delle ascisse e in quelli dell'asse delle ordinate la funzione è nulla. Vediamo come si comporta la funzione f sulle altre rette passanti per l'origine: se $y = mx$ abbiamo

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2},$$

che per $x \rightarrow 0$ tende a zero per qualunque valore di m . Dunque, se ci avviciniamo all'origine in linea retta, indipendentemente dalla direzione da cui proveniamo si ha che il valore della funzione f si avvicina a zero.

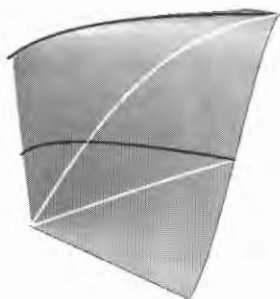


Fig. 1.42 : andamento di f sulle rette $y = -x$ e $y = -2x$ e sulle parabole $y = x^2$ e $y = 4x^2$

Questo potrebbe far pensare che il limite di f per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sia zero, ma non è così: se ci avviciniamo lungo una parabola, ad esempio lungo la parabola di equazione $y = ax^2$, il valore di f è

$$f(x, ax^2) = \frac{ax^4}{x^4 + a^2x^4} = \frac{a}{1 + a^2},$$

quindi f è costante su queste parabole, con costanti diverse a seconda della parabola, e in particolare se scegliamo $a = 1$ e consideriamo la successione di punti (che si avvicina all'origine stando su questa parabola)

$$X_k = (1/k, 1/k^2)$$

abbiamo

$$f(X_k) \equiv \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Dato che invece sulla successione (che si avvicina all'origine stando sull'asse x)

$$Y_k = (1/k, 0)$$

si ha

$$f(Y_k) \equiv 0 \rightarrow 0,$$

il limite di f per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non esiste, per la Proposizione 1.28. Questo esempio mostra come siano difficili da trattare i limiti in più variabili.

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + 7y^4};$$

legghiamola in coordinate polari, cioè consideriamo su $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ la funzione

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^4 \theta + 7r^4 \sin^4 \theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + 7 \sin^4 \theta} = \frac{1}{r} h(\theta),$$

La funzione h è definita su tutto \mathbb{R} dato che il denominatore non si annulla mai, è continua, pertanto su $[0, 2\pi]$ ha massimo e minimo per il Teorema di Weierstraß 1.39, e in particolare è limitata su $[0, 2\pi]$ e quindi anche su \mathbb{R} dato che è periodica di periodo 2π :

$$|h(\theta)| \leq K.$$

Allora

$$|g(r, \theta)| \leq K \cdot \frac{1}{r}$$

e in particolare

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M : [r > M \Rightarrow |g(r, \theta)| < \varepsilon],$$

il che tradotto in termini di f e di (x, y) significa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M : [\|(x, y)\| > M \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon],$$

cioè

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0.$$

Vediamo un interessante corollario del Teorema di Weierstraß 1.20.

Corollario 1.31 : se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

allora f ha minimo su \mathbb{R}^n .

Infatti prendiamo un valore a caso di f , ad esempio $f(0)$, che per comodità chiamiamo c . Per definizione di limite, esiste $R > 0$ tale che

$$f(x) \geq c + 1 \quad \forall x : \|x\| > R.$$

D'altra parte la funzione f è continua sul compatto $C_R = \{x : \|x\| \leq R\}$, che è una sfera chiusa, quindi esiste $m = \min\{f(x) : x \in C_R\}$. In particolare m è un valore assunto da f e

$$\forall x \in C_R, f(x) \geq m;$$

essendo $0 \in C_R$ è $m \leq f(0) = c$, quindi

$$\forall x \notin C_R, f(x) \geq c + 1 > m,$$

dunque m , che è un valore assunto da f , è minore o uguale di tutti gli altri: è il minimo. Applichiamo questo risultato a un esempio.

Esempio : sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e poniamo

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|^2; \quad (1.45)$$

proviamo che f ha minimo su \mathbb{R}^n . Dato che f è continua, per quanto appena visto basta dimostrare che $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$. Ora, per la disuguaglianza di Schwarz (1.3)

$$f(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

e posto

$$a = \|\mathbf{a}\|, \quad g(r) = r^2 - ar$$

abbiamo

$$f(\mathbf{x}) \geq g(\|\mathbf{x}\|), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$$

quindi anche

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$$

per la Proposizione 1.30.

Più in generale può risultare utile il seguente risultato.

Corollario 1.32 : se $E \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, e se per qualche valore di $k \in \mathbb{R}$ il sottolivello

$$E_k = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) \leq k\}$$

è (non vuoto e) limitato, allora f ha minimo su E .

Infatti E_k è chiuso e limitato, quindi f ha minimo in E_k ma questo è anche il minimo su E . Come per funzioni di una variabile, possiamo definire gli infinitesimi, che hanno lo stesso significato formale (ma ora il limite è fatto in più variabili).

Definizione : se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$, diciamo che f è *infinitesima di ordine superiore a* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^\alpha$ se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^\alpha} = 0.$$

In tal caso scriviamo

$$f(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^\alpha).$$

Gli o piccoli hanno le consuete proprietà già viste nel corso di Analisi matematica 1.

1.10 - Risultati in una variabile

In questa sezione riassumiamo alcune proprietà, già note dal corso di Analisi Matematica 1, che utilizzeremo nel seguito. Invitiamo il lettore a verificare che si tratti di argomenti già ben assimilati, prima di entrare nel vivo dei concetti e delle questioni più legati al corso di Analisi Matematica 2.

Proposizione 1.33 : se $\{E_\alpha\}_\alpha$ è una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n e

$$F_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus E_\alpha$$

è la famiglia dei complementari, allora

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_\alpha E_\alpha \right) = \bigcap_\alpha F_\alpha, \quad \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_\alpha E_\alpha \right) = \bigcup_\alpha F_\alpha,$$

ovvero il complementare di una unione è l'intersezione dei complementari, e il complementare di una intersezione è l'unione dei complementari.

Teorema di Bolzano-Weierstraß 1.34 : da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Proposizione 1.35 : se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > K$ allora esiste un intorno $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che

$$f(x) > K \quad \forall x \in (\text{dom } f) \cap U \setminus \{x_0\}.$$

Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > K$ allora esiste un intorno $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che

$$f(x) > K \quad \forall x \in (\text{dom } f) \cap U.$$

Le stesse proprietà valgono per il caso $f(x) < K$.

Proposizione 1.36 : se x_0 è un punto di accumulazione per $(\text{dom } f) \cap]-\infty, x_0[$ ed f è monotona debolmente crescente in un intorno sinistro U di x_0 allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in U} f(x).$$

Lo stesso vale, eventualmente scrivendo \inf al posto di \sup , per i limiti da destra o per funzioni debolmente decrescenti.

Teorema dei valori intermedi 1.37 : se f è continua e definita su un intervallo, la sua immagine è un intervallo.

Proposizione 1.38 : se g coincide con f in un intorno di x_0 allora

- 1) se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ allora anche g ha limite e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$;
- 2) se f è continua in x_0 lo è anche g ;
- 3) se f è derivabile in x_0 lo è anche g .

Teorema di Weierstraß 1.39 : ogni funzione f continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ha massimo e minimo su $[a, b]$.

Proposizione 1.40 : se f è continua su un intervallo ed è iniettiva, allora è strettamente monotona.

Proposizione 1.41 : se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile con $f' \neq 0$ ed è invertibile, la sua inversa f^{-1} è derivabile, e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Teorema di Fermat 1.42 : se una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 che è interno all'intervallo I ed è di massimo o minimo locale per f , allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle 1.43 : se f è continua su $[a, b]$ e derivabile almeno in $]a, b[$, e $f(a) = f(b)$, esiste un punto in $]a, b[$ in cui f' si annulla.

Teorema di Lagrange 1.44 : se f è continua su $[a, b]$ e derivabile almeno in $]a, b[$ esiste un punto $\xi \in]a, b[$ in cui la retta tangente al grafico di f è parallela a quella che passa per gli estremi del grafico, cioè

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposizione 1.45 : una funzione derivabile su un intervallo I è Lipschitziana se e solo se ha derivata limitata, e

$$f \text{ } L\text{-lipschitziana} \iff |f'(x)| \leq L \quad \forall x.$$

Proposizione 1.46 : una funzione Lipschitziana su un intervallo $(a, b[$ con $b < +\infty$ ha limite finito per $x \rightarrow b$.

Proposizione 1.47 : se g è la derivata di qualche funzione su un intervallo I , l'immagine di g su tale intervallo è anch'essa un intervallo.

Proposizione 1.48 : se f è continua in x_0 ed esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ allora esiste la derivata sinistra di f in x_0 e $f'_-(x_0) = \ell$. Lo stesso vale per il limite e la derivata da destra. In particolare, se f è continua in x_0 ed esiste finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = \ell$.

Proposizione 1.49 : per ogni funzione integrabile f su un intervallo $[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.46)$$

Il prossimo enunciato raccoglie i risultati principali sulle funzioni integrali in una dimensione.

Teorema 1.50 : se f è continua su un intervallo I ed $a \in I$, posto per ogni $x \in I$

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

la funzione F è una primitiva di f , ovvero $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.
Se G è una qualunque primitiva di f in I allora per ogni $\alpha, \beta \in I$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

Se f ha derivata continua in I allora per ogni $x, x_0 \in I$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt. \quad (1.47)$$

Teorema di cambiamento di variabile 1.51 : se $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe \mathcal{C}^1 ed f è continua sull'immagine di ϕ

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Criterio del confronto per serie 1.52 : se definitivamente $0 \leq a_n \leq b_n$ allora

$$\sum_n b_n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty, \quad \sum_n a_n = +\infty \Rightarrow \sum_n b_n = +\infty.$$

Criterio di Leibniz 1.53 : se $\{a_n\}_n$ è una successione debolmente decrescente e infinitesima allora la serie a segni alterni

$$\sum_n (-1)^n a_n$$

converge.

Esercizi relativi al capitolo 1

Esercizio 1.1 : calcolate la norma di ciascuno dei vettori $A = (2, -1, -1)$, $B = (1, 0, -3)$, $C = (3, 5, 1)$; calcolate poi la distanza di A da B .

Esercizio 1.2 : calcolate i tre prodotti scalari fra i vettori A , B e C dell'esercizio precedente, quindi provate che C è ortogonale ad $A + B$.

Esercizio 1.3 : trovate un punto per cui passa il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $2z + x - y = 1$, e individuate un vettore ortogonale al piano.

Esercizio 1.4 : trovate l'equazione dell'iperpiano di \mathbb{R}^4 ortogonale a $(1, 2, 3, 4)$ e passante per $(4, 3, 2, 1)$.

Esercizio 1.5 : scrivete nella forma $(X - A) \cdot N = 0$ l'equazione della retta per $(1, 7)$ e $(3, -2)$.

Esercizio 1.6 : scrivete in forma parametrica l'equazione della retta dell'esercizio precedente.

Esercizio 1.7 : calcolate la distanza del punto $(1, 2, 3)$ dal piano di equazione $2x - z + y = 1$.

Esercizio 1.8 : calcolate la distanza del punto $(1, 2)$ dalla retta che passa per $(7, 5)$ e $(-2, 1)$.

Esercizio 1.9 : calcolate $V \wedge W$ dove $V = (2, -1, -1)$ e $W = (3, 5, 1)$.

Esercizio 1.10 : dati i vettori $A = (2, -1, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (3, 5, 1)$, trovate un vettore perpendicolare sia a $B - A$ che a $C - A$; usate questo risultato per scrivere l'equazione del piano per A, B, C .

Esercizio 1.11 : calcolate il seno dell'angolo fra i vettori $A = (2, -1, -1)$ e $B = (1, 0, -3)$; calcolate l'area del parallelogramma da essi generato.

Esercizio 1.12 : calcolate il volume del parallelepipedo generato dai vettori $A = (2, -1, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (3, 5, 1)$.

Esercizio 1.13 : dopo averla disegnata, scrivete l'equazione della superficie del cilindro circolare retto che ha asse la retta per $(2, 1, 0)$ e $(6, 1, 0)$ e raggio 2.

Esercizio 1.14 : individuate il cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 \leq 0\}$.

Esercizio 1.15 : dopo averlo disegnato, scrivete l'equazione della superficie conica che ha vertice $(2, 1, 4)$ ed è generata dalla circonferenza del piano $x = 0$ che ha centro $(0, 1, 4)$ e raggio 2. Scrivete poi l'equazione della sola metà della superficie che contiene la circonferenza.

Esercizio 1.16 : scrivete le equazioni degli oggetti geometrici dei tre esercizi precedenti, nelle nuove coordinate ottenute traslando l'origine degli assi nel punto $(0, 1, 2)$.

Esercizio 1.17 : scrivete le coordinate polari dei punti che nel piano cartesiano (x, y) hanno coordinate $(-3, 3)$, $(3, -\sqrt{3})$, $(-4, 0)$ e rappresentateli nel piano (r, θ) .

Esercizio 1.18 : scrivete le coordinate cartesiane dei punti che hanno coordinate polari (r, θ) uguali a $(2, \pi/4)$, $(5, -2\pi/3)$ e $(-2, \pi/6)$, facendo attenzione alla convenzione sui valori negativi di r .

Esercizio 1.19 : scrivete in coordinate polari le seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;
- b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;
- c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$.

Esercizio 1.20 : studiate la convergenza delle seguenti successioni:

- a) $A_k = \left(\frac{3k+1}{k+3}, \frac{2+e^{-k}}{3-\arctan(1/k)} \right)$;
- b) $B_k = \left(\sqrt{4 - (3/k!)}, k^2 + 1 \right)$;
- c) $C_k = (k! + 1, -2k!)$.

Esercizio 1.21 : determinate il dominio delle funzioni seguenti e rappresentarlo graficamente nel piano cartesiano:

- a) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$;
- b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$;
- c) $f(x, y) = \log(xy^2 + yx^2)$;
- d) $f(x, y) = \log(y^2 - x^4)$;
- e) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;
- f) $f(x, y) = \sqrt{(y^2 - x^4)}$.

Esercizio 1.22 : determinate il dominio delle seguenti funzioni e dove possibile individuate le linee di livello; inoltre dite se si tratta di funzioni continue e perché.

- a) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;
- b) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy - 1}$;
- c) $\sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;
- d) $\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$;
- e) $\log y + \sqrt{2x^2 - y}$;

- f) $\arcsen(x - y + 4)$;
 g) $e^{x^2+2y^2}$.

Esercizio 1.23 : studiate gli zeri e il segno delle seguenti funzioni:

- a) $|x|y(x - y)$;
 b) $\sen(x + y)$;
 c) $(x - y)^2 + 2(x - y)$.

Esercizio 1.24 : con il metodo delle curve di livello studiate le seguenti funzioni sugli insiemi indicati a fianco; preliminarmente, disegnate gli insiemi, dite se si tratta di compatti o no, dite se si può applicare il Teorema di Weierstraß.

- a) $f(x, y) = (x + y)^2$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
 b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ $E = [0, 3] \times [0, 3]$;
 c) $f(x, y) = x^2 e^y$ $E =]-3, 3] \times [-1, 1]$;
 d) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2(x - y)$ $E = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}$.

Esercizio 1.25 : con il metodo delle curve di livello studiate le seguenti funzioni sugli insiemi indicati a fianco; preliminarmente, disegnate gli insiemi, dite se si tratta di compatti o no, dite se si può applicare il Teorema di Weierstraß.

- a) $f(x, y) = (x + y)^2$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 = 0\}$;
 b) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2(x - y)$ $E = \{(x, y) : |x| + |y| = 2\}$.

Esercizio 1.26 : calcolate (se esistono) i seguenti limiti, eventualmente usando le coordinate polari.

- a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$;
 b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x^2 + y^2}$;
 c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$;
 d) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$;
 e) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sen(xy) + 2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Esercizio 1.27 : calcolate, se esistono, i limiti seguenti:

- a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (y - x^2) \log(x^2 + y^2)$;
 b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy \log(x^2 + y^2)$;
 c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$;
 d) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2}$;
 e) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^5 + 3xy + y^2}{x^4 + y^2}$;
 f) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sen(x + y) \sen(xy)}{x^2 + y^2}$;

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (y^2 - x^2) \log(x^2 + y^4);$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}.$

Esercizio 1.28 : al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolate, se esiste il valore del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos \sqrt{|xy|})^\alpha}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 1.29 : determinate i numeri reali $\alpha > 0$ per cui esista finito il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha y^2}{x^2 + y^4}.$$

Esercizio 1.30 : determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

risulti continua su tutto \mathbb{R}^2 .

Esercizio 1.31 : Determinare i numeri reali $\alpha > 0$ per i quali la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|^\alpha + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

risulta continua su tutto \mathbb{R}^2 .

Appendice al capitolo 1

Appendice 1.1 - Centri di massa e minimi

Una superficie piana (priva di massa) ha forma di triangolo; ai vertici A , B e C sono appese tre masse, rispettivamente m_a , m_b e m_c . Dove si trova il baricentro (centro di massa) del sistema risultante? Detta X la posizione del baricentro, deve essere

$$(A - X)m_a + (B - X)m_b + (C - X)m_c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = \frac{m_a A + m_b B + m_c C}{m_a + m_b + m_c}.$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$X = \frac{m_a}{m_a + m_b + m_c} A + \frac{m_b}{m_a + m_b + m_c} B + \frac{m_c}{m_a + m_b + m_c} C = \lambda_a A + \lambda_b B + \lambda_c C, \quad (\text{A1.1})$$

una particolare combinazione lineare di A , B e C in cui i coefficienti sono tutti maggiori o uguali a zero, e hanno somma 1. Una tale combinazione si chiama **combinazione convessa** dei tre punti A , B e C . Dunque una combinazione convessa di k punti P_1, \dots, P_k è una somma

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1.$$

Ricordiamo (1.32) che un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è convesso se presi comunque due suoi punti, tutto il segmento che li congiunge appartiene all'insieme. L'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti P_1, \dots, P_k è il loro **involucro convesso**, ed è il più

piccolo insieme convesso che li contiene. L'involucro convesso di tre punti (non allineati) è il triangolo che li ha come vertici, mentre l'involucro convesso di quattro punti non è sempre un quadrilatero: infatti se il quarto punto D è interno al triangolo ABC l'involucro convesso dei punti A, B, C e D è di nuovo il triangolo ABC , mentre se siamo nello spazio (e non nel piano) e i punti non sono complanari, l'involucro convesso dei punti A, B, C e D è il tetraedro di vertici A, B, C e D . Tornando all'esempio, dato che il punto X era una combinazione convessa di A, B, C esso sta dentro al triangolo ABC . Se allora mettiamo un sostegno sotto al triangolo, in corrispondenza del punto X , questo sta in equilibrio.

Modifichiamo un po' l'esempio: supponiamo che il triangolo avesse una sua massa m_t ; ora, detto T il baricentro del triangolo ABC , il baricentro X del sistema risultante soddisfa

$$(A - X)m_a + (B - X)m_b + (C - X)m_c + (T - X)m_t = 0$$

da cui ricaviamo di nuovo facilmente X , che è stavolta una combinazione convessa di A, B, C e T . Ma il baricentro T del triangolo ABC è interno al triangolo, perciò per quanto detto prima l'involucro convesso di A, B, C, T è il triangolo ABC . Allora il punto X è una combinazione convessa di A, B, C, T , dunque appartiene all'involucro convesso che è il triangolo ABC , e in conclusione X sta dentro al triangolo. Di nuovo possiamo sostenere il triangolo appoggiandolo sul punto X .

Ora facciamo una variante interessante al primo esempio: i punti A, B e C sono dati, la quantità totale di massa $m_a + m_b + m_c$ è un numero $m > 0$ fissato, e dobbiamo distribuire la massa m fra i tre vertici in modo tale che il baricentro del sistema sia il più vicino possibile a un dato punto P_0 . In altre parole dobbiamo scegliere tre numeri non negativi (sono masse) m_a, m_b e m_c in modo che abbiano somma m e che risulti minima la distanza $\|X - P_0\|$, dove X è dato da (A1.1). Siamo sicuri che il problema abbia soluzione? Traduciamo il problema solo in termini delle incognite m_a, m_b e m_c : posto

$$f(x, y, z) = \left\| \left(\frac{x}{m} A + \frac{y}{m} B + \frac{z}{m} C \right) - P_0 \right\|$$

$$E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = m\}$$

ci chiediamo se esista

$$\min_E f(x, y, z).$$

Osserviamo che f è continua grazie a (1.34); inoltre l'insieme $\{(x, y, z) : x \geq 0\}$ è chiuso grazie alla Proposizione 1.23 perché è la controimmagine di $[0, +\infty[$ tramite la funzione continua x . Analogamente sono chiusi gli insiemi

$$\{(x, y, z) : y \geq 0\}, \quad \{(x, y, z) : z \geq 0\}, \quad \{(x, y, z) : x + y + z = m\}$$

e pertanto l'intersezione dei quattro insiemi, che è E , è chiusa. Poi

$$y, z \geq 0 \implies x \leq x + y + z,$$

quindi

$$(x, y, z) \in E \implies 0 \leq x \leq m,$$

e analogamente per y e z . Allora E è limitato, dunque è compatto e il minimo esiste per il Teorema di Weierstraß 1.20. In questo caso possiamo anche determinare quale sia il punto di minimo: infatti al variare delle masse m_a , m_b e m_c il punto

$$\frac{m_a}{m}A + \frac{m_b}{m}B + \frac{m_c}{m}C$$

è una qualsiasi combinazione convessa dei vertici, dunque è un qualsiasi punto del triangolo. Allora il problema si riduce a trovare il punto del triangolo che è più vicino a P_0 . Questo è chiaramente lo stesso P_0 , se P_0 appartiene al triangolo (compreso il bordo) come nel caso del punto U , altrimenti (se la proiezione di P_0 sul lato più vicino cade entro il lato, come è il caso se $P_0 = V$) è il punto di uno dei tre lati più vicino a P_0 , o infine è uno dei tre vertici, come è il caso del punto W .

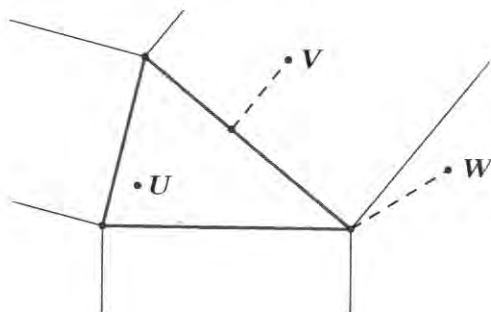


Fig. A1.1 : i tre casi per la posizione del punto di minimo

Proviamo ora con una variante più difficile: il triangolo è saldamente appoggiato, in posizione orizzontale, e nei vertici di ABC sono poste tre carrucole in cui scorrono (senza attrito) tre corde di uguale lunghezza L , legate insieme a un estremo che è vincolato a non uscire dal triangolo. All'altro estremo delle corde sono appese tre masse m_a , m_b e m_c , e L è maggiore o uguale del lato più lungo del triangolo. I tre pesi fanno scorrere le corde e scendono, in modo da minimizzare l'energia potenziale totale. In che punto del triangolo si ferma il nodo?

Se il nodo è in una posizione X , la distanza di X da A è $\|X - A\|$, quindi la massa m_a è scesa di $L - \|X - A\|$ rispetto al piano del triangolo, e la sua energia potenziale (posta a zero se la massa è sul piano del triangolo) è

$$-m_a(L - \|X - A\|).$$

Lo stesso vale per le altre masse, dunque posto $m = m_a + m_b + m_c$ l'energia potenziale totale (da minimizzare) è

$$\begin{aligned} f(X) &= -m_a(L - \|X - A\|) - m_b(L - \|X - B\|) - m_c(L - \|X - C\|) \\ &= (m_a\|X - A\| + m_b\|X - B\| + m_c\|X - C\|) - Lm \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

e di nuovo dobbiamo minimizzare la funzione continua f sul triangolo ABC , che è un compatto. Torneremo su questo punto (► appendice 3.4).

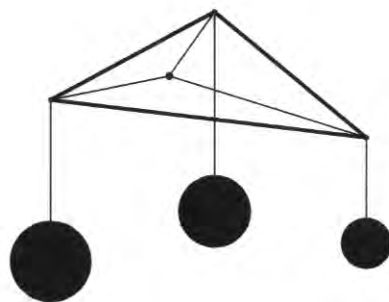


Fig. A1.2 : le tre masse devono minimizzare l'energia potenziale

Appendice 1.2 - Problemi di spazio

A tutti sarà capitato di dover spostare un mobile, e di chiedersi se sarebbe passato da un punto particolarmente stretto. Supponiamo di far scivolare sul pavimento un armadio, di lunghezza L e spessore $h < L$, e di dovergli far superare un corridoio di larghezza $d > h$, che però forma un angolo retto. Qual è la relazione fra L , h e d che assicura la possibilità di passare? Fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale come in figura, e sia $0 \leq \theta \leq \pi/2$ l'angolo che il lato lungo dell'armadio forma con l'orizzontale. A parità di angolo, conviene mettere l'armadio in modo che un suo vertice tocchi il lato orizzontale inferiore del corridoio, e un altro quello verticale sinistro.

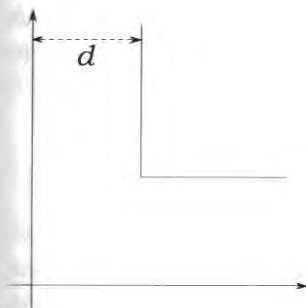


Fig. A1.3 : il corridoio

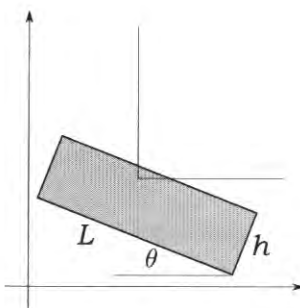
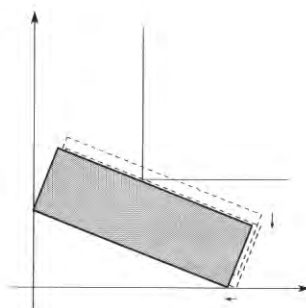
Fig. A1.4 : inclinazione θ 

Fig. A1.5 : la posizione migliore

A questo punto, l'armadio sta nel corridoio se la distanza fra il lato inferiore dell'armadio e l'angolo interno del corridoio è non inferiore allo spessore h , dunque l'armadio riesce a superare l'angolo se questo vale per ogni θ .

L'angolo inferiore sinistro dell'armadio ha coordinate $(0, L \sin \theta)$ e quello inferiore destro $(L \cos \theta, 0)$, dunque la retta che li congiunge ha equazione

$$y = L \sin \theta - x \tan \theta \quad \Longleftrightarrow \quad x \sin \theta + y \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta = 0$$

e (1.11) la condizione che consente il passaggio è

$$d \sin \theta + d \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta \geq h \quad \forall \theta \in [0, \pi/2],$$

anzi per $0 \leq \theta \leq \pi/4$, dato che la situazione per $\theta > \pi/4$ è simmetrica. Posto $g(\theta) = d \sin \theta + d \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta$ abbiamo

$$g(0) = d > h, \quad g'(\theta) = d \cos \theta - d \sin \theta - L(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

e quindi

$$g'(\theta) = (\cos \theta - \sin \theta)(d - L(\cos \theta + \sin \theta)) = (\cos \theta - \sin \theta)(d - L\sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4)).$$

A questo punto abbiamo tre casi, il cui completamento lasciamo al lettore: se $d \geq L\sqrt{2}$ il corridoio è molto largo (non c'è neppure bisogno di ruotare l'armadio!) e g è crescente in $[0, \pi/4]$; se $L < d < L\sqrt{2}$ la funzione g è crescente per $0 \leq \theta \leq \theta_0$ e decrescente per $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/4$, se $d \leq L$ la funzione g è decrescente in $[0, \pi/4]$. Dunque il minimo di g è sempre in uno degli estremi. Ma abbiamo visto che $g(0) > h$, quindi la condizione cercata è

$$g(\pi/4) \geq h \quad \Longleftrightarrow \quad L + 2h \leq d\sqrt{2}.$$

Capitolo 2

Curve

In questo capitolo, dopo una breve sezione sulle funzioni vettoriali di una variabile, vedremo cosa si debba intendere per “curva” e definiremo la lunghezza di una curva e l'integrale di una funzione su una curva.

2.1 - Funzioni vettoriali di una variabile

Abbiamo già parlato nel Capitolo 1 delle funzioni a valori vettoriali (cioè a valori in qualche spazio \mathbb{R}^n); ora specializziamo la descrizione al caso in cui il dominio sia un intervallo di \mathbb{R} , consideriamo cioè funzioni

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ intervallo.}$$

Sappiamo per la Proposizione 1.15 che una tale funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ è continua se e solo se sono continue le singole componenti $\phi_k : I \rightarrow \mathbb{R}$; queste componenti sono delle normali funzioni reali di una variabile reale, per le quali nel corso di Analisi Matematica 1 sono state definite la derivata e l'integrale. Ora estendiamo tali concetti alle funzioni vettoriali di una sola variabile reale.

Esempio : sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione

$$\phi(t) = (te^t, \cos t, \log(1 + 2t))$$

e cerchiamo di vedere se esiste

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}.$$

Questa "frazione", che in realtà è un vettore con tre componenti, somiglia al rapporto incrementale visto per funzioni di una variabile, e in effetti ciascuna delle sue tre componenti è il rapporto incrementale della rispettiva componente di ϕ : se

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

allora

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi(t_0) &= (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) - (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \phi_3(t_0)) \\ &= (\phi_1(t) - \phi_1(t_0), \phi_2(t) - \phi_2(t_0), \phi_3(t) - \phi_3(t_0)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{\phi_1(t) - \phi_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{\phi_2(t) - \phi_2(t_0)}{t - t_0}, \frac{\phi_3(t) - \phi_3(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Dato che le tre componenti sono derivabili in ciascun punto $t_0 \in \mathbb{R}$, per il punto 2 della Proposizione 1.28 il limite proposto esiste e vale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \phi'_3(t_0)) = (t_0 e^{t_0} + e^{t_0}, -\sin t_0, \frac{2}{1 + 2t_0}).$$

Ad esempio per $t_0 = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = (1, 0, 2).$$

Definizione : sia I un intervallo di \mathbb{R} , e sia $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Se nel punto $t_* \in I$ tutte le componenti ϕ_k sono derivabili, diciamo che ϕ è **derivabile nel punto t_*** , e il suo **vettore derivata** (o semplicemente la sua derivata) è il vettore

$$\phi'(t_*) = (\phi'_1(t_*), \dots, \phi'_n(t_*)).$$

Diciamo che la funzione ϕ è di classe \mathcal{C}^1 sull'intervallo I se la derivata ϕ' è continua su I . Diciamo che la funzione ϕ è di classe \mathcal{C}^1 a tratti sull'intervallo I se (è continua ed) esistono un numero finito di punti $t_0 < t_1 < \dots < t_k \in I$ tali che ϕ è di classe \mathcal{C}^1 in ciascuno degli intervalli (estremi inclusi) in cui I è diviso da questi punti. In tal caso scriviamo che ϕ è di classe \mathcal{C}^1_{tr} .

Osservazione : una funzione è di classe \mathcal{C}^1 se e solo se tutte le sue componenti sono derivabili con derivata continua; sulla definizione di funzione $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ occorre precisare, usando il concetto di restrizione: ϕ è di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ se posto

$$I_0 = \{t \in I : t \leq t_0\}, \quad I_1 = [t_0, t_1], \dots, I_k = [t_{k-1}, t_k], \quad I_{k+1} = \{t \in I : t \geq t_k\}$$

tutte le restrizioni di ϕ agli intervalli I_0, \dots, I_{k+1} sono funzioni \mathcal{C}^1 . C'è una sottile ma fondamentale differenza rispetto a dire che ϕ' è continua in tutti questi intervalli: già nel caso $n = 1$, quindi con una sola componente, consideriamo la funzione $\phi(t) = |t|$. Anzitutto, la sua derivata è definita solo per $t \neq 0$, quindi non è vero che ϕ' è continua per $t \leq 0$ o per $t \geq 0$; però, la restrizione di ϕ all'intervallo $]-\infty, 0]$ è la funzione $-t$, che è derivabile (con derivata continua) anche per $t = 0$, e lo stesso per la restrizione a $[0, +\infty[$.

Osservazione : l'aggiunta (fra parentesi) che ϕ deve essere una funzione continua su tutto I nella definizione di $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ è ridondante. Infatti se la restrizione di ϕ a I_0 è di classe \mathcal{C}^1 in particolare è continua sia nei punti prima di t_0 (in un intorno dei quali coincide con ϕ , che quindi è continua in quei punti per la Proposizione 1.38) sia nell'estremo destro t_0 , quindi

$$\phi(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t);$$

se anche la restrizione a I_1 è di classe \mathcal{C}^1 , in particolare è continua nell'estremo sinistro t_0 , quindi

$$\phi(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \phi(t)$$

e ϕ è continua anche in t_0 . Procedendo allo stesso modo si ha la continuità di ϕ in tutti i punti.

Esempio : la funzione $\tan x$ è di classe \mathcal{C}^1 nel suo dominio (che non è un intervallo), ma non è vero che è $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ su \mathbb{R} . La funzione $\sin x$ è di classe \mathcal{C}^1 su \mathbb{R} , e la funzione $|\sin x|$ è di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ su \mathbb{R} , ma non di classe \mathcal{C}^1 .

Ora che abbiamo introdotto la derivata di funzioni vettoriali di una variabile reale, che si esegue componente per componente, introduciamo (allo stesso modo) l'integrale.

Definizione : sia I un intervallo di \mathbb{R} , e sia $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Se tutte le componenti di ϕ sono integrabili su I , eventualmente in senso improprio (ma in tal caso tutte con integrali convergenti) chiamiamo **integrale di ϕ su I** il vettore le cui componenti sono gli integrali su I delle componenti di ϕ ,

$$\int_I \phi(t) dt = \left(\int_I \phi_1(t) dt, \dots, \int_I \phi_n(t) dt \right).$$

Osservazione : per l'integrale valgono le consuete proprietà algebriche

$$\int_I (\phi(t) + \psi(t)) dt = \int_I \phi(t) dt + \int_I \psi(t) dt, \quad \int_I k\phi(t) dt = k \int_I \phi(t) dt$$

e la formula di spezzamento

$$\int_a^c \phi(t) dt = \int_a^b \phi(t) dt + \int_b^c \phi(t) dt.$$

Dato che in \mathbb{R}^n non è definito l'ordine (cioè non ha senso una disuguaglianza fra vettori), **non vale** alcuna proprietà di monotonia (del tipo $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, per intenderci). La formula $|\int f| \leq \int |f|$ vale ancora, con una notazione diversa (ma la dimostrazione è assai diversa da quella per funzioni a valori reali):

$$\left\| \int_I \phi(t) dt \right\| \leq \int_I \|\phi(t)\| dt. \quad (2.1)$$

Vale inoltre per funzioni derivabili con derivata continua la formula analoga a (1.47)

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \phi'(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

2.2 - Curve e riparametrizzazioni

Nell'accezione comune, la parola *curva* fa pensare a niente più che un tratto di penna su un foglio, o a un tratto di strada; tuttavia questa risulta essere una visione molto riduttiva e inadeguata. Per comprendere la definizione che daremo, è fondamentale tenere presente questo esempio: più che al tracciato stradale vogliamo pensare a *un mezzo che lo sta percorrendo*, o meglio alla sua legge del moto; questa contiene, oltre all'informazione sul tracciato, anche il momento e la direzione in cui questo viene percorso, la velocità istante per istante, l'accelerazione, tutte informazioni che possono essere importanti e che, se variate, descrivono modalità differenti con cui lo stesso tratto di strada viene percorso. Nella definizione che segue, la parola "curva" indica quella che nel nostro esempio è la legge del moto seguita dal mezzo, e la parola "sostegno" indica il tracciato stradale.

Definizione : se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, si dice **curva** su I a valori in \mathbb{R}^n una qualsiasi funzione continua $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il **sostegno** della curva è l'immagine $\phi(I)$ dell'intervallo I tramite la funzione ϕ .

Per tornare all'esempio di prima, I rappresenta l'intervallo di tempo nel quale osserviamo il mezzo, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la legge del moto del mezzo, vale a dire $\phi(t)$ è la sua posizione nel piano (la superficie della Terra) all'istante t . Il sostegno di ϕ è l'insieme dei punti del piano che per qualche istante t sono il valore assunto da ϕ , vale a dire l'insieme dei punti del piano per i quali la curva ϕ è passata: dunque è il tracciato stradale, o meglio la parte della strada su cui il mezzo è passato nell'intervallo di tempo I . Notiamo che per una curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ il sostegno (che è un sottoinsieme del codominio) è contenuto in \mathbb{R}^n , mentre il grafico di ϕ è un sottoinsieme di $I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vediamo qualche esempio: useremo in modo euristico la parola “velocità”, che definiremo precisamente nella Sezione 2.4.

Esempio : la curva $\phi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi_1(t) = t + 1$ rappresenta un punto che percorre un tratto della retta reale \mathbb{R}^1 ; all'istante $t = 0$ questo si trova nel punto $x = 1$, all'istante $t = 1$ si trova in $x = 2$ e negli istanti intermedi si muove percorrendo, con velocità costante, l'intervallo $[1, 2]$. Il suo sostegno è l'intervallo $[1, 2]$ e — usando sempre la notazione abbreviata introdotta in (1.9) — il grafico di ϕ_1 è

$$\{(t, \phi_1(t)) : t \in I\} = \{(t, t+1) : 0 \leq t \leq 1\},$$

cioè il grafico in \mathbb{R}^2 della funzione $t+1$: dunque è il segmento che va da $(0, 1)$ a $(1, 2)$. Osserviamo che nel tempo che va da $t = 0$ a $t = 1$, cioè in un intervallo di tempo di durata 1, la curva percorre un tratto lungo 1, quello che va da $x = 1$ a $x = 2$.

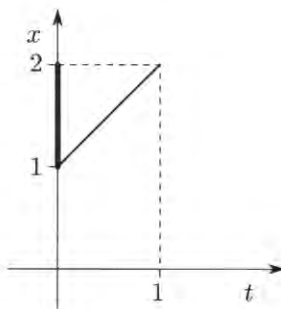


Fig. 2.1 : il tratto inclinato è il grafico di ϕ_1 , quello verticale più spesso è il suo sostegno

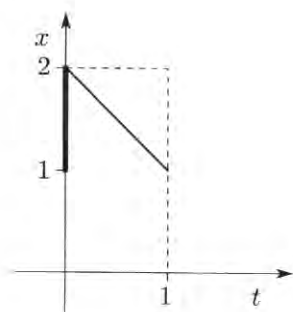
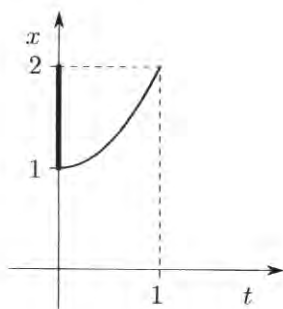
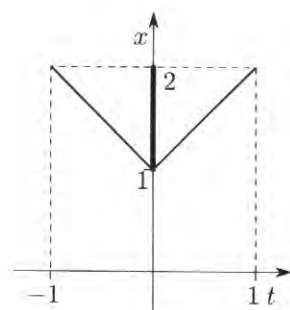
Analogamente la curva $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\psi(t) = 5t + 3$ percorre, a velocità costante, il tratto da $x = 3$ a $x = 8$: la velocità con cui si muove è però più elevata di quella di ϕ_1 , dato che in un tempo 1 il tratto percorso è lungo 5. Il sostegno di ψ è l'intervallo $[3, 8]$ e il grafico di ψ è il segmento che va da $(0, 3)$ a $(1, 8)$.

Invece la curva $\phi_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi_2(t) = 2 - t$ percorre il tratto da $x = 2$ (al tempo $t = 0$) a $x = 1$ (al tempo $t = 1$): il suo sostegno è dunque ancora $[1, 2]$, vale a dire lo stesso di ϕ_1 , ma questo segmento viene percorso da destra a sinistra. La differenza non si può vedere dal sostegno, ma è chiaramente importante: nel caso dei mezzi su una strada, ϕ_1 e ϕ_2 percorrono nello stesso intervallo temporale lo stesso tratto di strada $[1, 2]$, entrambe a velocità costante 1, ma in direzioni opposte! Il grafico di ϕ_2 è il segmento da $(0, 2)$ a $(1, 1)$, che è ben diverso dal grafico di ϕ_1 .

Ricordiamo che l'immagine di una funzione f è la proiezione del grafico di f sul codominio di f . In particolare abbiamo:

Osservazione : il sostegno di una curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la proiezione del grafico di ϕ sullo spazio \mathbb{R}^n di arrivo.

Esempio : la curva $\phi_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi_3(t) = t^2 + 1$ percorre di nuovo il segmento $[1, 2]$ partendo da $x = 1$, ma con velocità variabile: infatti fra $t = 0$ e $t = 1/2$ è giunta da $x = 1$ a $x = 1 + 1/4$, cioè ha percorso un solo quarto del sostegno, e gli altri tre quarti vengono percorsi, evidentemente più velocemente, nel rimanente tempo da $t = 1/2$ a $t = 1$.

Fig. 2.2 : grafico di ϕ_2 Fig. 2.3 : grafico di ϕ_3 Fig. 2.4 : grafico di ϕ_4

La curva $\phi_4 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\phi_4(t) = |t| + 1$ ha ancora sostegno $[1, 2]$; questo però viene percorso due volte, partendo da $x = 2$ per $t = -1$, giungendo a $x = 1$ per $t = 0$ e tornando infine a $x = 2$ per $t = 1$. Dunque ϕ_4 , pur avendo lo stesso sostegno delle curve $\phi_{1,2,3}$, copre un cammino lungo il doppio (torneremo più oltre sulla lunghezza di una curva, concetto cui è dedicata la Sezione 2.4).

Talvolta è importante, dato un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$, determinare una curva di cui S sia il sostegno. L'operazione, che non per tutti gli insiemi è possibile, fornisce quella che si chiama una **parametrizzazione** di S . Dato che una curva è una funzione continua su un insieme connesso, la sua immagine è anch'essa un insieme connesso per il Teorema 1.18. Perciò sicuramente non è possibile parametrizzare un insieme composto da due parti lontane una dall'altra.

I prossimi esempi sono i mattoni fondamentali per capire le curve e per costruire le parametrizzazioni, e vanno compresi a fondo,

Esempio : se $A, B \in \mathbb{R}^n$, il segmento (orientato!) dal punto A al punto B si può parametrizzare con la curva

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(t) = A + t(B - A) = tB + (1 - t)A.$$

Esistono infiniti altri modi di parametrizzare lo stesso segmento: ad esempio

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(t) = \mathbf{A} + t^2(\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

è un'altra possibile parametrizzazione, come pure

$$\phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(t) = \mathbf{A} + (\sin^2 t)(\mathbf{B} - \mathbf{A}).$$

Esempio : se $\mathbf{A}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, la retta che passa per \mathbf{A} ed ha la stessa direzione di (cioè è parallela a) \mathbf{V} è la curva definita per $t \in \mathbb{R}$ da

$$t \mapsto \mathbf{A} + t\mathbf{V}.$$

Esempio : nel piano, la circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 1 si può percorrere in senso antiorario con la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos t, \sin t);$$

se ha raggio r con la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (r \cos t, r \sin t);$$

se poi è centrata in (x_0, y_0) con la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t). \quad (2.3)$$

Infine, se vogliamo percorrere la circonferenza unitaria centrata nell'origine, ma anziché partire dall'estremo destro $(1, 0)$ vogliamo partire da un altro punto \mathbf{P} della circonferenza, ricordando le coordinate polari conviene associare a \mathbf{P} l'angolo θ che la semiretta da $\mathbf{0}$ per \mathbf{P} forma con il semiasse positivo delle ascisse, di modo che

$$\mathbf{P} = (\cos \theta, \sin \theta),$$

e prendere

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos(t + \theta), \sin(t + \theta)) :$$

questa parte e arriva in \mathbf{P} , percorrendo una volta la circonferenza in verso antiorario.

Non è difficile scoprire come invertire il senso di percorrenza di una curva: se ϕ è definita sull'intervallo I , la curva definita sull'intervallo simmetrico $-I$ come

$$\psi(t) = \phi(-t)$$

ha esattamente lo stesso sostegno di ϕ ma lo percorre in senso inverso.

Esempio : la curva

$$\begin{aligned}\psi : [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) &= (x_0 + r \cos(-t), y_0 + r \sin(-t)) \\ &= (x_0 + r \cos t, y_0 - r \sin t)\end{aligned}$$

percorre la stessa circonferenza dell'esempio (2.3), ma in senso orario. Osserviamo che, per la periodicità delle funzioni seno e coseno, possiamo pensare a questa funzione trasladando il dominio a destra di 2π , ovvero considerarla sul più comodo $[0, 2\pi]$ anziché su $[-2\pi, 0]$.

In vari casi è utile associare a una curva un'altra curva, che segua il percorso della prima, con lo stesso verso di percorrenza, ma con intervallo di definizione diverso.

Esempio : eseguiamo una **traslazione del dominio** quando associamo a una curva

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la curva

$$\psi : [a+h, b+h] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) = \phi(t-h) :$$

questa curva fa esattamente quello che fa ϕ ma il suo "orologio interno" parte da $t = a+h$ anziché da $t = a$, e si arresta per $t = b+h$ anziché per $t = b$.

Esempio : può accadere di voler associare a una curva un'altra curva, che segua il percorso della prima, con lo stesso verso di percorrenza, ma con intervallo di definizione di *ampiezza diversa*. Un modo facile per risolvere questo problema, per una curva ϕ definita sull'intervallo $[a, b]$ cui vogliamo associare una curva su un altro intervallo $[c, d]$, è porre

$$\psi(t) = \phi\left(a + \frac{b-a}{d-c}(t-c)\right) : \quad (2.4)$$

per $t = c$ questa assume il valore $\phi(a)$, per $t = d$ il valore $\phi(b)$ e per i t intermedi assume i valori di ϕ nei punti fra a e b . Arriviamo per gradi a questa formula: intanto, a ϕ associamo una curva definita su un intervallo della stessa lunghezza di $[a, b]$, ma che inizia in $t = 0$, cioè eseguiamo una traslazione del dominio, scrivendo

$$\phi_1 : [0, b-a] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_1(t) = \phi(t+a).$$

Ora modifichiamo la velocità di ϕ_1 per ricavare una curva che abbia lo stesso comportamento di ϕ_1 , ma lo "spalmi" su un intervallo di lunghezza $d-c$ anziché $b-a$: basta scrivere

$$\phi_2 : [0, d-c] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_2(t) = \phi_1\left(\frac{b-a}{d-c}t\right) = \phi\left(\frac{b-a}{d-c}t + a\right).$$

A questo punto, facciamo il contrario di quello che abbiamo visto al primo passo, riproponendo ϕ_2 ma su $[c, d]$ anziché $[0, d-c]$: scriviamo cioè

$$\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) = \phi_2(t-c) = \phi\left(\frac{b-a}{d-c}(t-c) + a\right).$$

Analizziamo cosa abbiamo fatto da un altro punto di vista: la funzione

$$p : [c, d] \rightarrow [a, b], \quad p(t) = a + \frac{b-a}{d-c}(t-c)$$

è una parametrizzazione del segmento $[a, b]$ definita sull'intervallo $[c, d]$, e la curva ψ non è altro che la composizione di ϕ con p ,

$$\psi(t) = \phi(p(t)).$$

Possiamo generalizzare questo caso particolare.

Definizione : se $I, J \subset \mathbb{R}$ sono due intervalli, si dice **riparametrizzazione** sull'intervallo J della curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la composizione

$$\psi(t) = \phi(p(t)) \quad (2.5)$$

di ϕ con una qualunque funzione $p : J \rightarrow I$ che sia continua, surgettiva e debolmente crescente.

Nella definizione compaiono tre richieste sulla funzione p : la prima è la continuità, necessaria per assicurare che la composizione con ϕ sia ancora una funzione continua (come deve essere una curva). La surgettività è necessaria perché ψ percorra tutto il tratto coperto da ϕ : se infatti l'immagine di p fosse solo una parte I' dell'intervallo I , la curva ψ percorrerebbe solo il tratto coperto da ϕ nell'intervallo I' , tralasciando tutto quello che ϕ fa sulla restante parte di I ; con le ipotesi di continuità e surgettività, ψ è una curva, e ha lo stesso sostegno di ϕ . Infine la crescita serve a garantire non solo che ψ percorra questo sostegno nello stesso verso di ϕ , ma che non torni indebitamente sui suoi passi percorrendone qualche tratto più volte di quanto faccia ϕ , come mostra il prossimo esempio.

Esempio : se

$$\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(t) = t$$

e

$$\psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \phi(2t^3 - t),$$

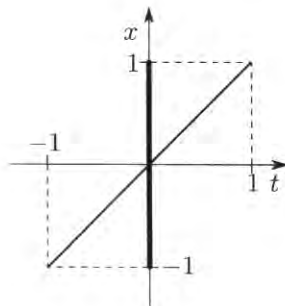


Fig. 2.5 : grafico di ϕ

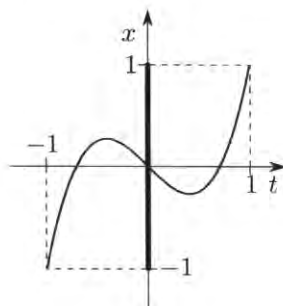


Fig. 2.6 : grafico di ψ

la seconda non è una riparametrizzazione della prima (la funzione $2t^3 - t$ non è crescente su $[-1, 1]$) e infatti percorre sì il segmento $[-1, 1]$ partendo da -1 e arrivando a 1 , ma lo fa prima andando da -1 a $\sqrt{6}/9$, poi ritornando indietro fino a $-\sqrt{6}/9$ e infine ripartendo da lì verso 1 . Dunque il tratto $[-\sqrt{6}/9, \sqrt{6}/9]$ viene percorso tre volte da ψ mentre ϕ lo percorre una volta sola.

Esempio : l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è centrata in $(0, 0)$ ed ha semiassi di lunghezze a e b paralleli agli assi coordinati. Questa può essere parametrizzata come

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (a \cos t, b \sin t) : \quad (2.6)$$

la curva parte dall'estremo destro $(a, 0)$ e percorre l'ellisse in senso antiorario. Invece la curva

$$\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t)$$

percorre l'ellisse traslata della precedente centrata in (x_0, y_0) .

Esempio : se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I , il suo grafico può essere parametrizzato (da sinistra verso destra) dalla curva

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, f(t)).$$

Questi esempi e quelli visti sinora permettono di parametrizzare numerosi insiemi "semplici". Per parametrizzare insiemi che si ottengono giustapponendo porzioni di archi di cui è nota una parametrizzazione, è necessario un (noioso) lavoro di aggiustamento dei domini.

Esempio : consideriamo l'insieme

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = x - 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0\} :$$

questo è costituito dall'unione del segmento fra i punti

$$A = (0, -1) \quad \text{e} \quad B = (1, 0)$$

e dell'arco della circonferenza unitaria compreso nel primo quadrante, che va da B a

$$C = (0, 1).$$

Abbiamo visto una parametrizzazione del segmento, ad esempio

$$\phi_s(t) = (t, t - 1), \quad t \in [0, 1],$$

e per quanto riguarda l'arco di circonferenza basterebbe limitare l'insieme dei valori del parametro, ad esempio

$$\phi_c(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

Tuttavia dobbiamo esibire **una** curva che parametrizzi S , cioè una singola funzione definita (eventualmente a tratti, come accadrà) su un intervallo. Pertanto dobbiamo modificare le curve precedenti in modo da poter giustapporre gli insiemi di definizione e formare un unico intervallo: ad esempio possiamo riprodurre il comportamento di ϕ_c su $[1, 1 + \pi/2]$ anziché $[0, \pi/2]$, scrivendo

$$\psi_c(t) = \phi_c(t-1) = (\cos(t-1), \sin(t-1)), \quad t \in [1, 1 + \pi/2].$$

A questo punto la curva definita per $0 \leq t \leq 1 + \pi/2$ da

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \begin{cases} \phi_s(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \psi_c(t) & \text{se } 1 \leq t \leq 1 + \pi/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (t, t-1) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (\cos(t-1), \sin(t-1)) & \text{se } 1 \leq t \leq 1 + \pi/2 \end{cases} \end{aligned}$$

parte da A per $t=0$, percorre il segmento, transita da B per $t=1$, percorre l'arco di circonferenza fino ad arrivare a C per $t=1 + \pi/2$ ed è una delle parametrizzazioni possibili dell'insieme S . Un'altra è ad esempio

$$\psi_2(t) = \begin{cases} (t+1, t) & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ (\cos t, \sin t) & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/2 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq \pi/2.$$

Possiamo riprodurre la costruzione appena fatta anche in altre situazioni: dato un certo numero di curve

$$\phi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \dots, \quad \phi_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

i cui sostegni si giustappongono, nel senso che il punto di arrivo di ogni curva coincide con il punto da cui parte la curva dopo, cioè

$$\phi_1(b_1) = \phi_2(a_2), \quad \phi_2(b_2) = \phi_3(a_3), \quad \dots, \quad \phi_{k-1}(b_{k-1}) = \phi_k(a_k),$$

possiamo aver bisogno di considerare la curva che si ottiene percorrendo una dopo l'altra le curve ϕ_1, \dots, ϕ_k . La sola difficoltà nel considerare questa curva è scriverne l'equazione: dunque bisogna riparametrizzare le varie curve, ciascuna con una traslazione del dominio, in modo che i nuovi domini siano intervalli consecutivi. Ad esempio possiamo traslare il dominio di ϕ_1 , che è un intervallo di lunghezza $b_1 - a_1$, in modo che inizi da $t=0$, ponendo

$$a'_1 = 0, \quad b'_1 = b_1 - a_1$$

e poi

$$a'_2 = b'_1, \quad b'_2 = a'_2 + (b_2 - a_2), \quad a'_3 = b'_2, \quad b'_3 = a'_3 + (b_3 - a_3), \quad \dots,$$

e così via, di modo che ciascun intervallo $[a'_i, b'_i]$ abbia la stessa lunghezza dell'intervallo $[a_i, b_i]$ corrispondente. Ora poniamo

$$\psi_i : [a'_i, b'_i] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi_i(t) = \phi_i(t + a_i - a'_i)$$

così che all'inizio, per $t = a'_i$, la curva ψ_i parte dallo stesso punto $\psi_i(a'_i) = \phi_i(a_i)$ da cui partiva ϕ_i . A questo punto basta unire il tutto:

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t) & \text{se } 0 \leq t \leq b'_1 \\ \psi_2(t) & \text{se } a'_2 \leq t \leq b'_2 \\ \vdots & \\ \psi_k(t) & \text{se } a'_k \leq t \leq b'_k \end{cases} \quad t \in [0, b'_k].$$

La costruzione precedente è solo un esercizio di attenzione e pazienza; vedremo nella Sezione 2.8 che in molti casi si può evitare di farla.

Concludiamo questa sezione con una curva importante in tre dimensioni, l'**elica cilindrica**.

Esempio : consideriamo la curva

$$\phi_E(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.7)$$

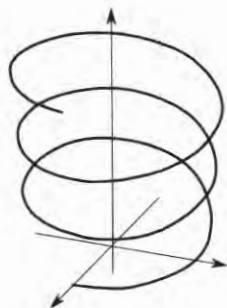


Fig. 2.7 : qui sono rappresentati tre giri, quindi $0 \leq t \leq 6\pi$

Questa parte da $A = (1, 0, 0)$ e giunge a $B = (1, 0, 1)$ dopo aver percorso un certo arco E . Esaminiamo la proiezione di E sul piano (x, y) : dato che si tratta delle prime due coordinate, la proiezione sarà semplicemente il sostegno della curva che si ottiene prendendo solo le prime due componenti di ϕ_E , cioè il sostegno di

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sappiamo che si tratta della circonferenza unitaria C centrata nell'origine, nel piano (x, y) . Se la proiezione di E sul piano (x, y) è C , allora E è contenuto in

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in E\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\},$$

che è la superficie del cilindro con asse coincidente con l'asse z e di raggio 1. Dunque ϕ_E parte da A e si avvolge fino a B dopo aver percorso sulla superficie C un giro intorno all'asse z . Nel frattempo la coordinata z è salita da 0 a 2π : la curva ha fatto una breve spirale. Quella appena vista è l'elica cilindrica di **raggio** 1 (la sua proiezione è una circonferenza di raggio 1) e **passo** 2π (quando la proiezione fa un giro intero, la coordinata verticale aumenta di 2π).

È interessante vedere ora cosa fa la curva

$$\phi_E(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 8\pi :$$

semplicemente, questa si avvolge per quattro volte intorno al cilindro, mentre la sua coordinata z sale da 0 a 8π . Queste curve sono tratti di elica cilindrica di raggio 1 e asse coincidente con l'asse z . Non è difficile trovare una parametrizzazione di un'elica cilindrica di raggio 1, passo 2π ed asse parallelo all'asse z ma passante (l'asse) per $(x_0, y_0, 0)$: dato che la sua proiezione sul piano (x, y) è la circonferenza centrata in (x_0, y_0) basta scrivere

$$\phi_E(t) = (x_0 + \cos t, y_0 + \sin t, t).$$

Se ora vogliamo parametrizzare un'elica cilindrica di raggio r e passo p , ad esempio la filettatura di un bullone, basterà considerare la funzione (es. 2.1)

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (r \cos t, r \sin t, tp/(2\pi)). \quad (2.8)$$

Esempio : vogliamo ora parametrizzare una curva elicoidale che, invece di avvolgersi su di un cilindro, si avvolge su di un cono. È il caso, ad esempio, della filettatura di una usuale vite conica (non un bullone, che è cilindrico). È necessario specificare il passo p dell'elica, cioè la variazione della coordinata z dopo che si è percorso un intero giro, e l'angolo α del cono su cui l'elica si avvolge. Se

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \tan(\alpha/2)$$

è l'equazione (1.22) della superficie conica di angolo α , avremo quindi la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left(\frac{tp}{2\pi} \tan(\alpha/2) \cos t, \frac{tp}{2\pi} \tan(\alpha/2) \sin t, \frac{tp}{2\pi} \right) \\ &= \frac{tp}{2\pi} (\tan(\alpha/2) \cos t, \tan(\alpha/2) \sin t, 1). \end{aligned}$$

2.3 - Curve in coordinate polari

Se nel piano \mathbb{R}^2 usiamo le coordinate polari r, θ invece di quelle cartesiane x, y , potremo parametrizzare le coordinate r, θ con un parametro $t \in I$, ottenendo la curva

$$\phi(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)), \quad t \in I.$$

Identificando \mathbb{R}^2 al piano complesso \mathbb{C} e ricordando la definizione di esponenziale complesso, la curva ϕ può anche essere scritta come

$$\phi(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in I.$$

Se scegliamo come parametro proprio l'angolo θ , potremo descrivere una curva in coordinate polari semplicemente tramite l'espressione

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

che ci dice come varia il raggio r al variare dell'angolo θ . Ad esempio, l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

diventa in coordinate polari

$$r = \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{-1/2}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

mentre la parabola

$$y = x^2$$

diventa

$$r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad \theta \in [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi].$$

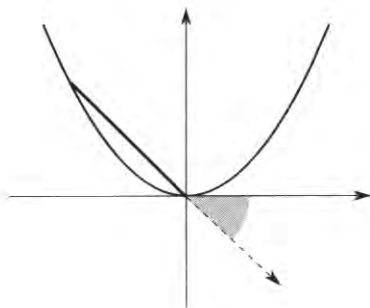
Notiamo che nell'espressione precedente il parametro θ non varia in un intervallo ma si ha:

- a) per $\theta \in [0, \pi/2[$ l'espressione $r = \sin \theta / \cos^2 \theta$ descrive il ramo destro della parabola, quello contenuto nel primo quadrante;
- b) per $\theta \in]\pi/2, \pi]$ l'espressione $r = \sin \theta / \cos^2 \theta$ descrive il ramo sinistro della parabola, quello contenuto nel secondo quadrante.

In questo caso è molto utile sfruttare quello che abbiamo anticipato nella Sezione 1.5, e cioè ammettere valori negativi di r : allora, la curva

$$r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

parametrizza tutta la parabola. Infatti, come abbiamo visto, per $0 \leq \theta < \pi/2$ il numero r è non negativo e viene percorso il ramo destro, mentre per $-\pi/2 < \theta < 0$, valori cui corrisponde una semiretta orientata che esce dall'origine e va nel quarto quadrante, il numero r è negativo, così la curva percorre, nel secondo quadrante, il ramo sinistro della parabola.

Fig. 2.8 : per $\theta = -\pi/4$ è $r = -\sqrt{2}$

Anche l'iperbole di equazione (in coordinate cartesiane) $x^2 - y^2 = 1$ può essere rappresentata in coordinate polari; bisogna però fare attenzione al fatto che, essendo l'iperbole composta da due rami disgiunti, non è possibile rappresentarla come il sostegno di una sola curva: abbiamo già notato che il sostegno di una curva, essendo l'immagine continua di un intervallo, è necessariamente un insieme connesso. Però possiamo rappresentare come una curva uno qualunque dei due rami dell'iperbole, ad esempio quello di destra; con tale precisazione abbiamo allora l'espressione in coordinate polari

$$r = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^{-1/2}, \quad \theta \in]-\pi/4, \pi/4[.$$

Infine, vediamo come si può rappresentare in coordinate polari una retta di equazione (cartesiana)

$$y = mx + q.$$

Un caso particolare è quello di una retta passante per l'origine, in cui $q = 0$; in tal caso abbiamo che r può essere un qualsiasi numero reale positivo o nullo, mentre θ sarà uguale ad $\arctan m$ (per la semiretta destra) oppure a $-\pi + \arctan m$ (per la semiretta sinistra). Dunque l'espressione polare della retta intera sarà

$$\tan \theta = m.$$

Nel caso di rette non passanti per l'origine, quindi con $q \neq 0$, scrivendo $x = r \cos \theta$ ed $y = r \sin \theta$, avremo l'espressione polare

$$r = \frac{q}{\sin \theta - m \cos \theta}, \quad \theta \in]-\pi + \arctan m, \arctan m[.$$

Ad esempio, la retta di equazione $y = x - 1$ diventa, in coordinate polari

$$r = \frac{1}{\cos \theta - \sin \theta}, \quad \theta \in]-3\pi/4, \pi/4[.$$

A volte (come per queste rette) la scrittura di una curva in coordinate cartesiane risulta più semplice, altre volte invece risulta più conveniente esprimere una curva in

coordinate polari, altre volte ancora conviene usare una diversa forma parametrica, come si vedrà negli esempi della sezione seguente. In ogni caso, va tenuto presente che, oltre all'espressione analitica usata, va precisato il tipo di variabili che si è utilizzato; ad esempio, l'espressione

$$x = y$$

rappresenta una retta (la bisettrice dei quadranti primo e terzo) se sottintendiamo che le variabili (x, y) utilizzate sono quelle cartesiane, ma l'espressione

$$r = \theta,$$

se le variabili sono quelle polari, rappresenta nel piano (x, y) una spirale archimedeana, illustrata in figura. Dunque per tracciare la curva di equazione $a = b$ dobbiamo sapere se le coordinate (a, b) sono quelle cartesiane o quelle polari o altro (es. 2.4).

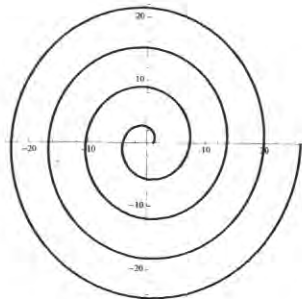


Fig. 2.9 : una spirale di Archimede

Esempio : l'insieme

$$\{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

è una semi-striscia di altezza $\pi/2$ nel piano (r, θ) , ma con le convenzioni usuali

$$\{(x, y) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

è il primo quadrante del piano cartesiano (x, y) . Dunque non sarebbe bastata la scrittura

$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

per capire di che insieme si tratta.

2.4 - Velocità e accelerazione

Abbiamo visto all'inizio della Sezione 2.2 esempi di curve che percorrono il loro sostegno con "velocità" differenti, e ora ci proponiamo di formalizzare il concetto. Riprendendo l'idea iniziale di una curva come descrizione di un movimento, ci è ben noto che per descriverlo è importante non solo la velocità scalare (a quanti km/h si muove un veicolo), ma anche la direzione del movimento. Allora, la velocità di una curva in un dato istante (ovvero in un dato punto del suo dominio) sarà un vettore, che indica in quale direzione e con che rapidità la curva si sta muovendo. Come per la legge di un moto, questo vettore si ottiene con un limite analogo alla derivata di funzioni di una variabile, come già visto nella Sezione 2.1: la velocità sarà il limite (se esiste) del rapporto fra spostamento e tempo impiegato per compierlo, quando questo tempo tende a zero.

Definizione : se la curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è derivabile in $t_0 \in I$, il **vettore velocità** della curva ϕ in t_0 è il vettore derivata

$$V_\phi(t_0) = \phi'(t_0). \quad (2.9)$$

La **velocità scalare** è il numero

$$v_\phi(t_0) = \|\phi'(t_0)\|.$$

Se la curva cui ci si riferisce è chiaramente sottintesa, scriveremo semplicemente $V(t_0)$ e $v(t_0)$.

Dato che non tutte le funzioni sono derivabili, non tutte le curve hanno velocità: ad esempio la curva $\phi(t) = (t, |t|)$ non è derivabile per $t = 0$. Vediamo alcuni esempi di curve nel piano.

Esempio : se $\phi(t) = (t, 2t + 1)$, la curva ha come sostegno la retta di equazione $y = 2x + 1$; questa viene percorsa con velocità

$$\phi'(t) = (1, 2),$$

dunque muovendosi costantemente nella direzione del vettore $(1, 2)$, e velocità scalare costante $\|(1, 2)\| = \sqrt{5}$. Invece la curva $\psi(t) = (7t, 14t + 1)$ ha lo stesso sostegno, ma la sua velocità è

$$\psi'(t) = (7, 14) :$$

dunque il movimento è sempre nella direzione di prima, dato che $(1, 2)$ e $(7, 14)$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso, ma la velocità scalare è $\|(7, 14)\| = \|7(1, 2)\| = 7\sqrt{5}$, cioè sette volte la precedente. Infine, la curva $\omega(t) = (t^3 + 3t, 2t^3 + 6t + 1)$ ha anch'essa sostegno la retta di equazione $y = 2x + 1$, ma il vettore velocità è

$$\omega'(t) = (3t^2 + 3, 6t^2 + 6) = 3(t^2 + 1) \cdot (1, 2).$$

Dunque (dato che $t^2 + 1 > 0$) il moto si svolge nella stessa direzione di prima, ma con velocità scalare variabile

$$\|\omega'(t)\| = (3t^2 + 1)\sqrt{5}.$$

La velocità scalare è minima per $t = 0$, tende all'infinito sia per $t \rightarrow +\infty$ che per $t \rightarrow -\infty$.

Lo studio della velocità permette di avere informazioni sul modo in cui una curva percorre il suo sostegno: proviamo a rielaborare l'esempio precedente, esaminando altre due curve che hanno lo stesso sostegno di prima.

Esempio : la curva $\phi(t) = (t^3, 2t^3 + 1)$ ha velocità

$$\phi'(t) = 3t^2 \cdot (1, 2),$$

pertanto per $t = 0$ transita nel punto $\phi(0) = (0, 1)$ con velocità scalare nulla. La curva $\psi(t) = (t^3 - 3t, 2t^3 - 6t + 1)$ ha vettore velocità

$$\psi'(t) = 3(t^2 - 1)(1, 2) :$$

il coefficiente $t^2 - 1$ non è sempre positivo, e ψ si muove nel verso del vettore $(1, 2)$ se $t < -1$ o $t > 1$, ma si muove nel verso opposto, cioè nel verso del vettore $(-1, -2)$, se $-1 < t < 1$. Allora, visto che $\psi(-1) = (2, 5)$ e $\psi(1) = (-2, -3)$, la curva ψ percorre la retta di equazione $y = 2x + 1$ da sinistra verso destra fino a $(2, 5)$ per $t < -1$, poi per $-1 < t < 1$ torna indietro, muovendosi verso sinistra fino a $(-2, -3)$, e di qui poi riparte verso destra per $t > 1$.

Osservazione : dall'esempio precedente si può dedurre che la velocità non dipende solo dal sostegno della curva, ma dalla curva stessa, anzi, cambiando parametrizzazione a una curva se ne cambia la velocità. Ad esempio se

$$\psi(t) = \phi(2t)$$

abbiamo

$$V_{\psi}(t) = \psi'(t) = \phi'(2t) \cdot 2 = 2V_{\phi}(2t),$$

quindi in ogni punto del comune sostegno la curva ψ transita con velocità doppia.

È spesso importante sapere in che direzione si sta muovendo una curva, ma negli istanti in cui ha velocità scalare nulla (cioè il vettore velocità è il vettore nullo) questa direzione non può essere definita.

Definizione : sia ϕ una curva, derivabile in t_0 con $\phi'(t_0) \neq 0$. Il **vettore tangente alla curva in t_0** è il vettore $\phi'(t_0)$, e il **versore tangente** è

$$\tau_{\phi}(t_0) = \frac{\phi'(t_0)}{\|\phi'(t_0)\|}.$$

Se è chiaro di che curva si parla, scriveremo semplicemente $\tau(t_0)$.

Il versore tangente indica direzione e verso in cui la curva passa per $\phi(t_0)$ nell'istante t_0 . Se una curva passa più volte per lo stesso punto del suo sostegno, naturalmente ci può passare con versori tangenti diversi, come era il caso per la curva ψ dell'esempio precedente. Tuttavia questi versori tangenti permettono di individuare le direzioni secondo le quali la curva passa per il punto in questione (che naturalmente si riducono a una direzione sola se la curva passa una sola volta per il punto).

Definizione : sia ϕ una curva, derivabile in t_0 con $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$, sia E il sostegno di ϕ e siano $A = \phi(t_0)$ e $V = \phi'(t_0)$. Se $\phi(t) = A$ solo per $t = t_0$, la **retta tangente** al sostegno E nel punto $A \in E$ è quella che passa per A con vettore direzione V , cioè la retta

$$t \mapsto A + tV = \phi(t_0) + t\phi'(t_0).$$

Osservazione : per funzioni da un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^n con $n > 1$ (cioè per curve in \mathbb{R}^n) **non vale in generale l'analogo del Teorema di Lagrange**. In una dimensione, quest'ultimo si può enunciare dicendo che c'è un punto in cui la retta tangente al grafico è parallela a quella che congiunge gli estremi, e questo non è più vero già per curve a valori in \mathbb{R}^2 . Infatti la curva

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

che ha come sostegno una circonferenza nel piano (x, y) , ha grafico

$$\{(t, \cos t, \sin t) : 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

che è un'elica cilindrica. Gli estremi del grafico sono

$$(0, 1, 0) \quad \text{e} \quad (2\pi, 1, 0),$$

quindi la retta che li congiunge è parallela all'asse t e dunque al vettore $(1, 0, 0)$, ma il vettore tangente al grafico è

$$(1, -\sin t, \cos t)$$

che non è mai parallelo a $(1, 0, 0)$.

Osservazione : se invece del grafico di una curva ϕ consideriamo il suo sostegno, il Teorema di Lagrange, nella forma

$$\frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{è parallelo a} \quad \phi'(\xi) \quad (2.10)$$

per un opportuno $\xi \in]t_1, t_2[$ è invece ancora valido per curve ϕ derivabili ed a valori in \mathbb{R}^2 con vettore derivata mai nullo, se $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$, ma attenzione: questo vale solo per la dimensione due! Infatti, poniamo

$$A = \phi(t_2) - \phi(t_1)$$

e sia $N \neq \mathbf{0}$ un vettore perpendicolare ad A . Ogni vettore perpendicolare ad N risulta parallelo ad A , dato che siamo in dimensione due. Poniamo

$$g(t) = (\phi(t) - \phi(t_1)) \cdot N, \quad t \in [t_1, t_2]:$$

la funzione g è continua e derivabile, si annulla agli estremi pertanto per il Teorema di Rolle 1.43 la sua derivata si annulla in qualche punto $\xi \in]t_1, t_2[$, ma

$$g'(t) = \phi'(t) \cdot N$$

perciò $\phi'(\xi)$ è perpendicolare ad N e quindi parallelo ad A .

Vediamo altri esempi importanti.

Esempio : siano

$$\begin{aligned}\phi : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \phi(t) &= (\cos t, \sin t), \\ \psi : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \psi(t) &= (\cos(2t), \sin(2t)).\end{aligned}$$

Ciascuna delle due curve percorre una volta la circonferenza unitaria, però

$$\phi'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow v_\phi(t) \equiv 1, \quad \psi'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t)) \Rightarrow v_\psi(t) \equiv 2.$$

Osserviamo che per ciascuna delle due curve il vettore tangente in qualunque punto t_0 è tangente alla circonferenza sostegno della curva.

Se una curva ha in qualche punto velocità nulla, si possono verificare fenomeni strani e a prima vista sorprendenti; ricordiamo che “avere velocità” significa “essere derivabile”, quindi dalla teoria delle funzioni di una variabile ci si aspetta che una curva derivabile sia in un certo senso liscia, priva di spigoli. Questo è vero se si considera il **grafico** della curva, ma non se si vuol dire lo stesso del suo **sostegno**, come mostra il prossimo esempio.

Esempio : intanto osserviamo che la funzione $f(t) = |t^3|$ è derivabile su tutto \mathbb{R} : questo è chiaro per $t \neq 0$, e facendo il limite del rapporto incrementale abbiamo

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t^3|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t|t| = 0.$$

Possiamo quindi scrivere la sua derivata come

$$f'(t) = \begin{cases} -3t^2 & \text{se } t \leq 0 \\ 3t^2 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} = 3t|t|.$$

Adesso consideriamo la curva definita su \mathbb{R} come

$$\phi(t) = (t^3, |t^3|) :$$

per quanto detto sopra, essa è derivabile con derivata

$$\phi'(t) = \begin{cases} (3t^2, -3t^2) & \text{se } t \leq 0 \\ (3t^2, 3t^2) & \text{se } t \geq 0 \end{cases} = (3t^2, 3t|t|).$$

Notiamo che la velocità è nulla per $t = 0$. Il grafico di ϕ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , che come si vede è liscio. Invece il sostegno della curva derivabile ϕ è il grafico (sottoinsieme di \mathbb{R}^2) della funzione $|x|$, che è tutt'altro che “liscio”. Che è accaduto? Per $t \neq 0$ la curva ϕ ha rispettivamente velocità e versore tangente

$$v(t) = 3t^2\sqrt{2}, \quad \tau(t) = \begin{cases} (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) & \text{se } t < 0 \\ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) & \text{se } t > 0 \end{cases} :$$

dunque ϕ scende lungo il ramo sinistro del grafico di $|x|$, ma rallenta fino ad arrivare per $t = 0$ in $(0, 0)$ con velocità nulla: lì può cambiare direzione (tanto la velocità è nulla) senza perdere la derivabilità, e risalire lungo il ramo destro del grafico di $|x|$.

Questo fenomeno non si presenta se la velocità non si annulla mai, ecco perché la prossima classe di curve è importante.

Definizione : una curva ϕ definita su un intervallo si dice **regolare** se è derivabile in ogni punto con derivata sempre diversa da zero.

Talvolta si parte da un insieme E , in un certo senso “curvilineo”, e si vorrebbe determinare la retta tangente ad E in un suo punto A . Per far ciò si deve cercare una curva che abbia come sostegno E , o quantomeno la porzione di E che sta in un intorno del punto A , che passi per A una sola volta e abbia in quel punto vettore tangente non nullo. Non sempre ciò è possibile, e in tal caso non esistono “regole” generali. Vediamo alcuni esempi.

Esempio : consideriamo il grafico E della funzione $\sqrt{|x|}$: a occhio, questo ha una cuspide nell'origine, con tangente verticale. Tuttavia, si tratta di un caso anomalo, dato che i due rami di curva che confluiscono nell'origine, visti da vicino, non somigliano per nulla alla retta asse delle ordinate, ma piuttosto a due esemplari della semiretta semiasse positivo delle ordinate. Difatti è impossibile trovare una parametrizzazione della curva che abbia velocità non nulla quando passa per l'origine. Possiamo però dire che la curva

$$\phi_+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_+(t) = (t^2, t)$$

passa per $t = 0$ in $A = (0, 0)$ con velocità $(0, 1)$ e parametrizza il (primo pezzo del) ramo destro del grafico E , il quale dunque ha semiretta tangente

$$t \mapsto \mathbf{0} + t(0, 1) = (0, t), \quad t \geq 0$$

mentre la curva

$$\phi_- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_-(t) = (-t^2, t)$$

passa anch'essa per $t = 0$ in $A = (0, 0)$ con velocità $(0, 1)$ e parametrizza il (primo pezzo del) ramo sinistro del grafico E , il quale dunque ha la stessa semiretta tangente di prima. Possiamo dunque dire che E in $\mathbf{0}$ ha semiretta tangente il semiasse positivo delle ordinate.

Esempio : consideriamo il grafico E della funzione

$$x + |x| + x^3;$$

il ramo di grafico a destra dell'origine si può parametrizzare con la curva

$$\phi_+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_+(t) = (t, 2t + t^3)$$

che passa per $t = 0$ in $A = (0, 0)$ con velocità $\mathbf{V}_+ = (1, 2)$. Allora il ramo destro del grafico E ha semiretta tangente

$$t \mapsto \mathbf{0} + t(1, 2) = (t, 2t), \quad t \geq 0;$$

invece il ramo di grafico a sinistra dell'origine si può parametrizzare con la curva

$$\phi_- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_-(t) = (-t, -t^3)$$

che passa per $t = 0$ in $A = (0, 0)$ con velocità $V_- = (-1, 0)$. Quindi il ramo sinistro del grafico E ha semiretta tangente

$$t \mapsto \mathbf{0} + t(-1, 0) = (-t, 0), \quad t \geq 0,$$

il semiasse negativo delle ascisse. Diciamo in tal caso che E ha nell'origine un **punto angoloso**, dato che ha due semirette tangenti che formano tra loro un angolo né nullo né piatto.

Esempio : consideriamo la curva

$$\phi :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\tan t - \sqrt{2} \sin t, 1 - \sqrt{2} \cos t). \quad (2.11)$$

Questa passa due volte per l'origine, prima per $t = -\pi/4$ e poi per $t = \pi/4$. Osserviamo che

$$\phi'(t) = (1 + \tan^2 t - \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

e pertanto

$$\phi'(-\pi/4) = (1, -1), \quad \phi'(\pi/4) = (1, 1) :$$

allora durante il primo passaggio la curva copre un arco tangente alla retta

$$t \mapsto (0, 0) + t(1, -1) = (t, -t),$$

vale a dire la bisettrice del secondo e quarto quadrante, mentre durante il secondo passaggio l'arco coperto dalla curva è tangente alla retta $t \mapsto (t, t)$, la bisettrice del primo e terzo quadrante. Dunque il sostegno di ϕ non ha retta tangente nell'origine, ma è composto di due archi con rette tangenti diverse. È interessante vedere come è fatta questa curva: l'ordinata

$$\phi_y(t) = 1 - \sqrt{2} \cos t$$

è compresa fra 1 (valore mai raggiunto nell'intervallo di definizione) e $1 - \sqrt{2}$, decresce per $-\pi/2 < t \leq 0$ e cresce per $0 \leq t < \pi/2$; inoltre tende a 1 per $t \rightarrow \pm\pi/2$. Invece l'ascissa

$$\phi_x(t) = \tan t - \sqrt{2} \sin t$$

tende a $-\infty$ per $t \rightarrow -\pi/2$ e tende a $+\infty$ per $t \rightarrow \pi/2$: dunque il sostegno di ϕ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$. La derivata dell'ascissa è

$$\phi'_x(t) = 1 + \tan^2 t - \sqrt{2} \cos t = \frac{1}{\cos^2 t} - \sqrt{2} \cos t = \frac{1 - \sqrt{2} \cos^3 t}{\cos^2 t} :$$

posto per comodità

$$t_0 = \arccos(1/\sqrt[3]{2}), \quad (2.12)$$

abbiamo

$$\phi'_x(t) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} < t < -t_0 \quad \text{oppure} \quad t_0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo che $\cos(t_0)$ è maggiore di $1/\sqrt{2}$, quindi t_0 è compreso fra 0 e $\pi/4$, e perciò

$$\phi'_y(t_0) > 0$$

mentre $\phi'_y(-t_0) < 0$. Allora indicato con C il numero positivo $\phi'_y(t_0)$ abbiamo

$$\phi'(-t_0) = (0, -C), \quad \phi'(t_0) = (0, C) :$$

dunque per $t < -\pi/4$ la curva scende, passa per l'origine con pendenza -1 quando $t = -\pi/4$, poi per $t = -t_0$ ha tangente verticale e vettore tangente che punta verso il basso, quindi torna verso sinistra e raggiunge per $t = 0$ il suo punto più basso, dove ha tangente orizzontale e (calcolatelo) vettore tangente che punta verso sinistra. Da qui inizia a risalire (la curva è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) per formare un cappio, prima ripassando (per $t = t_0$) per un punto in cui ha tangente verticale, stavolta puntando verso l'alto, poi (per $t = \pi/4$) ripassa per l'origine ma con vettore tangente $(1, 1)$ e infine tende all'asintoto orizzontale. Dall'espressione parametrica (2.11) potete provare a rappresentare il sostegno della curva ϕ come luogo di zeri di una funzione di due variabili; con un po' di manipolazioni si ottiene l'equazione

$$(x^2 + y^2)(1 - y)^2 = 2y^2.$$

Questo nodo si descrive, usando le coordinate polari in cui consentiamo anche $r < 0$, con l'equazione molto più semplice

$$r = \frac{1}{\sin \theta} - \sqrt{2}. \quad (2.13)$$

Calcoliamo esplicitamente

$$\|\phi'(t)\|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{2} \cos^3 t}{\cos^2 t} \right)^2 + 2 \sin^2 t$$

e proviamo che non vale mai zero: essendo una somma di quadrati, si annulla se e solo se

$$\sin^2 t = \frac{1 - \sqrt{2} \cos^3 t}{\cos^2 t} = 0,$$

ma in $] -\pi/2, \pi/2[$

$$\sin^2 t = 0 \implies t = 0 \implies \frac{1 - \sqrt{2} \cos^3 t}{\cos^2 t} = 1 - \sqrt{2} \neq 0,$$

pertanto

$$\|\phi'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in]-\pi/2, \pi/2[\quad (2.14)$$

e il cappio è dunque una curva regolare.

Per una curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione $r = h(\theta)$, anche il vettore velocità può essere espresso in coordinate polari; usando l'angolo θ come parametro abbiamo

$$x(\theta) = h(\theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = h(\theta) \sin \theta,$$

e dunque

$$x'(\theta) = h'(\theta) \cos \theta - h(\theta) \sin \theta, \quad y'(\theta) = h'(\theta) \sin \theta + h(\theta) \cos \theta.$$

Pertanto, in coordinate polari, la velocità scalare ha l'espressione

$$v(\theta) = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{(h(\theta))^2 + (h'(\theta))^2}. \quad (2.15)$$

Esempio : la spirale di Archimede (A2.1), la cui equazione polare se prendiamo $a = 1$ e $b = 0$ è semplicemente $r = \theta$, viene percorsa con velocità scalare

$$v(\theta) = \sqrt{1 + \theta^2}.$$

Analogamente al caso cinematico, introduciamo l'accelerazione di una curva: come il vettore velocità indica la variazione della posizione per unità di variazione del parametro (intesa come limite di $(\phi(t) - \phi(t_0))/(t - t_0)$ per $t \rightarrow t_0$), così il vettore accelerazione indica la variazione della velocità per unità di variazione del parametro (§ es. 2.5).

Definizione : se la curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è derivabile due volte in t_0 , il **vettore accelerazione** di ϕ in t_0 è

$$A_\phi(t_0) = V'_\phi(t_0) = \phi''(t_0).$$

Se è chiaro di che curva si tratta, scriveremo semplicemente $A(t_0)$.

Esempio : la curva

$$\phi(t) = (2t - 1, 6t + 5)$$

ha velocità costante $V = (2, 6)$ e pertanto accelerazione nulla (al variare di t il punto $\phi(t)$ si muove di moto rettilineo uniforme sulla retta di equazione $y = 3x + 8$). La curva

$$\psi(t) = (t^2, 1 + 2t^2)$$

ha vettore velocità $V(t) = (2t, 4t)$ e vettore accelerazione $A(t) = (2, 4)$: il moto è uniformemente accelerato (e rettilineo, dato che il sostegno di ψ è la retta di equazione $y = x + 1$). La curva

$$\omega(t) = (t, 1 + t^2)$$

ha vettore velocità $V(t) = (1, 2t)$ e vettore accelerazione $A(t) = (0, 2)$. Anche in questo caso l'accelerazione è costante, ma il moto non è rettilineo (si svolge su una parabola).

Esempio : la curva

$$\phi(t) = (4 \cos(t/2), 4 \sin(t/2))$$

percorre la circonferenza di raggio 4 centrata nell'origine, e nell'istante t ha

$$\text{posizione} \quad (4 \cos(t/2), 4 \sin(t/2))$$

$$\text{vettore velocità} \quad (-2 \sin(t/2), 2 \cos(t/2))$$

$$\text{vettore accelerazione} \quad (-\cos(t/2), -\sin(t/2)) :$$

la velocità scalare è costante, ma il vettore velocità cambia direzione e questo produce una accelerazione. In questo caso è una *accelerazione centripeta*, cioè "verso il centro", dato che il vettore $A(t)$ applicato nel punto posizione $\phi(t)$ punta verso il centro della circonferenza.

Esempio : proviamo a descrivere la traiettoria di una pietra lanciata dall'origine con velocità iniziale v_0 (scalare) ed angolo di lancio α . Rappresentiamo la pietra come un punto materiale di massa m che si muove nel piano (x, z) e supponiamo per semplicità che la sola forza in gioco sia la gravità, che assumiamo costante (ipotesi ragionevole per il lancio di una pietra ma non per lanci balistici a grande distanza); in altri termini, trascuriamo la resistenza dell'aria, che invece nella realtà ha effetti notevoli, soprattutto a velocità elevate.

Con le semplificazioni descritte sopra, la pietra avrà come traiettoria una curva $\phi(t)$ nel piano (x, z) , con vettore accelerazione costante, uguale a $(0, -g)$. Dunque usando (2.2) avremo per il vettore velocità

$$V(t) = V(0) + \int_0^t A(s) ds = v_0(\cos \alpha, \sin \alpha) + t(0, -g),$$

quindi per la traiettoria, usando ancora (2.2) e ricordando che la pietra parte dall'origine,

$$\phi(t) = \frac{t^2}{2}(0, -g) + v_0 t(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Per rappresentare il sostegno della curva $\phi(t)$ tramite le variabili cartesiane x, z scriviamo

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha,$$

da cui (ricavando t in funzione di x dalla prima uguaglianza) si ottiene che il sostegno di ϕ ha la rappresentazione cartesiana tramite l'equazione

$$z = -\frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2 + x \tan \alpha,$$

che è una parabola, nel piano x, z , passante per l'origine. Possiamo calcolare la *gittata* L di un tale lancio, cioè la distanza dall'origine del punto in cui la pietra tocca il suolo, e troviamo

$$L = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g(1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

A questo punto è un facile esercizio determinare l'angolo α per cui la gittata è massima: si trova (verificatelo) che tale angolo è $\pi/4$ e dunque

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Queste considerazioni cambiano notevolmente se includiamo tra le forze in gioco anche la resistenza dell'aria; torneremo su questo esempio più avanti, nella Sezione 5.6.

2.5 - Curvatura

A differenza di velocità e accelerazione, che si richiamano alla legge di un moto e sono fortemente dipendenti dalla parametrizzazione della curva, cercheremo di introdurre dei concetti che misurano "quanto è curvo" il sostegno di una curva, e quindi sono indipendenti dalla parametrizzazione.

Se in auto percorriamo una strada con due curve (curve nel senso delle svolte, non delle funzioni continue da \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^n ...) di cui la prima ha raggio di 4 metri e l'altra di 100, è chiaro che la prima è "molto più curva" della seconda, in quanto per la seconda basta piegare un poco il volante, mentre per la prima bisogna ruotarlo di un giro buono. Dunque una curva stretta ha raggio piccolo, e diciamo che è molto curva, mentre di una curva di raggio grande diciamo che è poco curva. Partendo da questa osservazione e dai prossimi esempi, introdurremo il concetto di curvatura.

Esempio : la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (\cos t, \sin t)$$

ha le seguenti proprietà:

- 1) il suo sostegno è una circonferenza di raggio 1 ;
- 2) $\phi'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $v(t) = 1$, $\tau(t) = (-\sin t, \cos t)$;
- 3) $\tau'(t) = (-\cos t, -\sin t)$, $\|\tau'(t)\| = 1$, $\frac{\|\tau'(t)\|}{v(t)} = 1$.

Esempio : la curva

$$\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$$

ha le seguenti proprietà:

- 1) il suo sostegno è una circonferenza di raggio 1 ;
- 2) $\psi'(t) = 3(-\sin(3t), \cos(3t))$, $v(t) = 3$, $\tau(t) = (-\sin(3t), \cos(3t))$;
- 3) $\tau'(t) = 3(-\cos(3t), -\sin(3t))$, $\|\tau'(t)\| = 3$, $\frac{\|\tau'(t)\|}{v(t)} = 1$.

Esempio : la curva

$$\omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \omega(t) = (5 \cos t, 5 \sin t)$$

ha le seguenti proprietà:

- 1) il suo sostegno è una circonferenza di raggio 5 ;
- 2) $\omega'(t) = 5(-\sin t, \cos t)$, $v(t) = 5$, $\tau(t) = (-\sin t, \cos t)$;
- 3) $\tau'(t) = (-\cos t, -\sin t)$, $\|\tau'(t)\| = 1$, $\frac{\|\tau'(t)\|}{v(t)} = \frac{1}{5}$.

Osserviamo che in tutti i casi il vettore $\tau'(t_0)$, applicato nel punto della curva corrispondente a t_0 , punta verso il centro della circonferenza sostegno della curva (e tornando al paragone automobilistico indica la direzione verso cui deviare l'auto per seguire la circonferenza). Siamo portati a dare allora la seguente definizione della curvatura.

Definizione : se una curva ϕ è derivabile due volte nel punto t con $\phi'(t) \neq 0$, chiamiamo **vettore curvatura** nel punto t il vettore

$$\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \tau'(t),$$

chiamiamo **curvatura scalare** il numero

$$k(t) = \|\kappa(t)\| = \frac{\|\tau'(t)\|}{v(t)}$$

e se $k(t) \neq 0$ chiamiamo **raggio di curvatura** il numero

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}.$$

Esplicitando l'espressione di τ' abbiamo quindi per la curvatura l'espressione

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\phi''(t)\|\phi'(t)\|^2 - \phi'(t)(\phi'(t) \cdot \phi''(t))}{\|\phi'(t)\|^4} \\ &= \frac{A(t)\|V(t)\|^2 - V(t)(V(t) \cdot A(t))}{v^4(t)} \end{aligned}$$

e di conseguenza, per la curvatura scalare,

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\sqrt{\|\phi'(t)\|^2 \|\phi''(t)\|^2 - (\phi'(t) \cdot \phi''(t))^2}}{\|\phi'(t)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\|V(t)\|^2 \cdot \|A(t)\|^2 - (V(t) \cdot A(t))^2}}{v^3(t)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ricordando la formula (1.14) abbiamo anche, per le curve in \mathbb{R}^3 ,

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{V}(t) \wedge \mathbf{A}(t)\|}{v^3(t)}.$$

Per curve piane, cioè se $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, indicate le componenti di ϕ con

$$\phi = (\phi_x, \phi_y),$$

ricordando che $v = \sqrt{(\phi'_x)^2 + (\phi'_y)^2}$ il vettore curvatura è dato da

$$\kappa = \left(\frac{\phi'_y(\phi''_x\phi'_y - \phi''_y\phi'_x)}{v^3}, \frac{-\phi'_x(\phi''_x\phi'_y - \phi''_y\phi'_x)}{v^3} \right), \quad (2.17)$$

mentre per la curvatura scalare si ha

$$k = \frac{|\phi'_x\phi''_y - \phi'_y\phi''_x|}{v^3}.$$

Esempio : percorriamo una ellisse di semiassi $a > b$ con la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (a \cos t, b \sin t);$$

abbiamo

$$\mathbf{V}(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad \mathbf{A}(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$$

e quindi

$$\|\mathbf{V}(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t, \quad \|\mathbf{A}(t)\|^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t,$$

$$\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{A}(t) = (a^2 - b^2) \sin t \cos t.$$

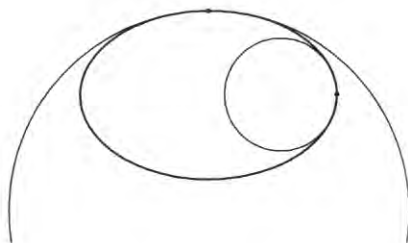


Fig. 2.10 : la circonferenze “meglio” tangenti hanno raggio $r = \rho = 1/k$

Sostituendo nella formula (2.16), si semplifica quasi tutto e la curvatura scalare è

$$k(t) = \frac{ab}{v^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}.$$

Per vedere dove la curvatura è minima o massima, dato che tutto è positivo e il numeratore è costante, studiamo dove è massimo o minimo il denominatore: la funzione $x^{3/2}$ è strettamente crescente, perciò anziché

$$(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3 = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}$$

basta vedere dove è massima o minima la funzione $f(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$. Si vede subito che

$$f'(t) = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t = (a^2 - b^2) \sin(2t)$$

e quindi

$$\min f = f(0) = f(\pi) = b^2, \quad \max f = f(\pi/2) = f(3\pi/2) = a^2,$$

dato che avevamo indicato $a > b$. Allora nei poli destro e sinistro $(\pm a, 0)$, che vengono raggiunto da $\phi(t)$ per $t = 0$ e $t = \pi$, la curvatura risulta massima, col valore

$$k(0) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{a}{b^2},$$

mentre nei poli superiore e inferiore la curvatura è minima, e vale b/a^2 . In particolare, nei poli dell'ellisse i raggi di curvatura sono minimo (dove la curvatura è massima) e massimo (dove è minima) e valgono rispettivamente

$$\rho(0) = \rho(\pi) = \frac{b^2}{a}, \quad \rho(\pi/2) = \rho(3\pi/2) = \frac{a^2}{b}.$$

Vediamo ora come si esprime la curvatura per una curva cartesiana, cioè grafico $\{y = f(x)\}$ di una funzione f sufficientemente regolare. Usando la variabile x come parametro abbiamo $\phi(x) = (x, f(x))$ e dunque, usando (2.17), si trova

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + |f'(x)|^2)^{3/2}} (-f'(x), 1), \quad k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + |f'(x)|^2)^{3/2}}.$$

Ad esempio, per la parabola di equazione $y = x^2$, si trova

$$\kappa(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^2} (-2x, 1), \quad k(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}.$$

Analogamente, per una curva espressa in coordinate polari dall'equazione $r = h(\theta)$, conviene usare l'angolo θ come parametro, e si ha $\phi(\theta) = (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta)$. Sempre usando (2.17) ed usando l'espressione complessa $e^{i\theta}$ in luogo di $(\cos \theta, \sin \theta)$, si ricava

$$\kappa(\theta) = \frac{hh'' - h^2 - 2h'^2}{(h^2 + h'^2)^2} e^{i\theta} (h - ih'), \quad k(\theta) = \frac{|hh'' - h^2 - 2h'^2|}{(h^2 + h'^2)^{3/2}}.$$

Ad esempio, per la spirale archimedeana di equazione $r = \theta$ si ha

$$\kappa = \frac{2 + \theta^2}{(1 + \theta^2)^2} e^{i\theta} (i - \theta), \quad k = \frac{2 + \theta^2}{1 + \theta^2} = 1 + \frac{1}{1 + \theta^2},$$

mentre per la spirale logaritmica di equazione $r = e^{-\theta}$ si ha

$$\kappa = -\frac{1+i}{2} e^{(-1+i)\theta}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\theta}.$$

Il reciproco della curvatura è il raggio di curvatura. Tracciata una curva, che risulta tangente in un dato punto P a una retta r , le circonferenze tangenti a r in P sono infinite, e quindi sono tutte tangenti alla curva. Tuttavia fra esse ce n'è una che è tangente alla curva "meglio" delle altre. Questa è la circonferenza che ha come raggio il raggio di curvatura della curva in P — non scendiamo in dettagli, ma per il grafico di una funzione di una variabile abbiamo visto che la parabola che meglio si adatta al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è il grafico del polinomio di Taylor di grado 2 di f centrato in x_0 : qui il fenomeno è analogo (es. 2.9).

2.6 - Lunghezza di una curva e parametro d'arco

Dimentichiamo per poche righe tutto quel che si è detto sulle curve, e torniamo all'accezione *naïf* di un tratto di penna su un foglio. L'unico tipo di tratto di cui sappiamo dire esattamente la lunghezza (anche "lunghezza" va preso nel senso intuitivo, in attesa della definizione precisa) è il segmento: con un righello, leggiamo la distanza fra i punti iniziale e finale. Ricordiamo che la lunghezza \overline{PQ} del segmento PQ che ha estremi nei punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ è la norma $\|Q - P\|$ del vettore differenza. Per la verità possiamo misurare esattamente anche la lunghezza di un altro tipo di curva: sono le **poligonali**, cioè curve composte da un numero finito di segmenti adiacenti (cioè tali che il punto finale di ciascuno sia il punto iniziale del prossimo). Chiaramente, basta misurare la lunghezza di ogni segmento, e poi sommare i risultati. I punti estremi dei segmenti che la compongono si chiamano i **vertici** della poligonale.

Sempre con un righello a disposizione, come facciamo a dire qual è la lunghezza di un tratto curvilineo γ tracciato sul foglio, che parte da un punto P e termina in un punto Q ? Certamente non misurando la distanza fra punto iniziale e finale, perché questa è certamente minore o uguale della lunghezza del tratto γ , dato che il segmento PQ è il percorso più breve fra P e Q , e può essere anche *molto* più breve: basta che γ sia "molto curva" e si discosti quindi parecchio da PQ . Osserviamo che se invece γ è "molto poco curva" rispetto a PQ , la lunghezza del segmento non differisce molto da quella della curva.

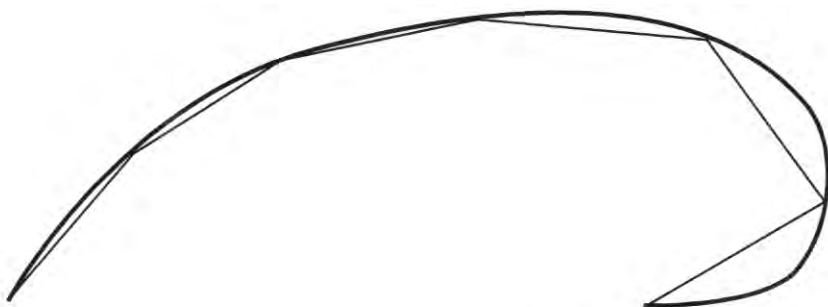


Fig. 2.11 : la poligonale approssima bene la curva dove questa è quasi rettilinea

Utilizzando le osservazioni contenute nei paragrafi precedenti, quello che faremmo nella pratica è approssimare γ con una poligonale, scegliendo i vertici in modo che in ciascun tratto la curva γ sia “somigliante” al segmento corrispondente: dove γ è poco curva basteranno pochi vertici per ottenere una poligonale già somigliante a γ , dove è molto curva occorreranno molti vertici, per seguire meglio il corso di γ . Calcolando la lunghezza della poligonale, il risultato che otterremo sarà certamente una *approssimazione per difetto* della vera lunghezza di γ , dato che in ogni tratto fra due vertici consecutivi V, W della poligonale abbiamo calcolato la lunghezza del segmento VW e non quella dell'arco di curva fra gli estremi V e W .

Per ottenere una approssimazione migliore, potremo utilizzare una poligonale che segua in modo più accurato la curva γ , aggiungendo molti vertici. Vediamo ora come riproporre il tutto per le curve come definite nella Sezione 2.2.

Se ϕ è una curva definita sull'intervallo $[a, b]$, i vertici di una delle poligoni che abbiamo considerato devono essere punti del sostegno della curva, cioè valori di ϕ in opportuni punti di $[a, b]$. Dunque scegliamo $k+1$ punti (avremmo potuto dire k punti, ma allora nel seguito avremmo avuto molti $k-1$ da scrivere)

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$$

nell'intervallo $[a, b]$, poniamo

$$P_0 = \phi(t_0), \quad P_1 = \phi(t_1), \quad \dots, \quad P_k = \phi(t_k)$$

e consideriamo la poligonale di vertici P_0, P_1, \dots, P_k : la lunghezza di questa poligonale risulta essere

$$\begin{aligned} \ell(t_0, t_1, \dots, t_k) &= \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \dots + \overline{P_{k-1} P_k} \\ &= \sum_{i=1}^k \overline{P_{i-1} P_i} = \sum_{i=1}^k \|P_i - P_{i-1}\| \\ &= \sum_{i=1}^k \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\|. \end{aligned}$$

Conformemente alle riflessioni viste prima, definiremo la lunghezza della curva ϕ come la migliore approssimazione cui possiamo giungere (chiaramente dal basso) con una poligonale di questo tipo.

Definizione : data una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la **lunghezza** di ϕ è

$$\begin{aligned} \ell(\phi) &= \sup_{a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b} \ell(t_0, t_1, \dots, t_k) \\ &= \sup_{a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b} \sum_{i=1}^k \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

dove $k \geq 1$ varia in \mathbb{N} .

La lunghezza di una curva è allora l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali che si possono costruire usando come vertici dei punti $\phi(t_i)$ per i quali ϕ è passata in istanti t_i **in ordine crescente**. Eseguire materialmente questa operazione è chiaramente impossibile, ma ci ricorda la costruzione dell'integrale di Riemann vista nel corso di Analisi Matematica 1, e ci suggerisce che potrebbe entrarci un integrale. Per dare una giustificazione del prossimo risultato, ricordiamo (1.47) che per una funzione f di una variabile che ha derivata continua su un intervallo cui appartengono i punti α e β

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) dt.$$

Ricordando (2.2), se la curva ϕ ha derivata continua abbiamo allora

$$\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt.$$

Questo vettore, in generale, non dice molto sulla lunghezza dell'arco fra $\phi(t_{i-1})$ e $\phi(t_i)$: ad esempio se fra t_{i-1} e t_i la curva percorre una circonferenza e arriva allo stesso punto da cui era partita si ha

$$\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \mathbf{0}.$$

Per fare questo, però, il vettore tangente deve cambiare molto, e questo è impossibile se ϕ' è continua e l'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$ è piccolo. Se (per trattare un caso estremo) in questo intervallo ϕ' fosse un vettore costante,

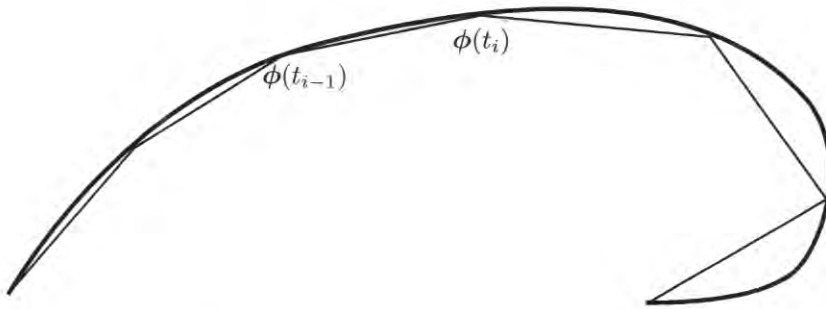
$$\phi'(t) \equiv \mathbf{V} \quad \text{in } [t_{i-1}, t_i],$$

avremmo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{V} dt = (t_i - t_{i-1})\mathbf{V}$$

e quindi

$$\|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt \right\| = (t_i - t_{i-1})\|\mathbf{V}\| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| dt.$$

Fig. 2.12 : tra t_{i-1} e t_i il vettore ϕ' è circa costante

Questo è vero solo se nell'intervallino in questione il vettore tangente è costante (quindi lì la curva percorre un segmento con velocità costante), ma è ragionevole che se ϕ' è continua si possa suddividere il dominio di ϕ in intervalli tanto piccoli che la differenza fra ϕ' e una costante diventi trascurabile. Questo si può formalizzare, ottenendo il risultato fondamentale sulla lunghezza delle curve.

Teorema 2.1 : se $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 , la lunghezza di ϕ è

$$\ell(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt. \quad (2.18)$$

DIMOSTRAZIONE : non manca molto a rendere formali le considerazioni precedenti. Consideriamo per il momento una qualunque poligonale inscritta nella curva (poi ne sceglieremo una particolare); usando (2.1) abbiamo

$$\begin{aligned} \ell(t_0, t_1, \dots, t_k) &= \sum_{i=1}^k \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Il termine a destra (finito o infinito) è un maggiorante di tutte le lunghezze delle poligonali, quindi è maggiore o uguale della lunghezza di ϕ per definizione di lunghezza: abbiamo provato la disuguaglianza

$$\ell(\phi) \leq \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Osserviamo che la funzione $\|\phi'\|$ è anch'essa continua perché composizione della funzione continua ϕ' con la distanza (1.34); in particolare è limitata su $[a, b]$, quindi il secondo

membro di questa formula è un numero reale, e non $+\infty$. Ne consegue che ϕ ha lunghezza finita.

Sappiamo che ϕ' è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, quindi per il Teorema di Heine-Cantor 1.21 è uniformemente continua, vale a dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad [|t - t'| < \delta \Rightarrow \|\phi'(t) - \phi'(t')\| < \varepsilon] .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, teniamo presente il numero δ che ci viene dalla formula precedente e scegliamo una poligonale tale che i punti t_i siano vicini, e precisamente tale che

$$t_i - t_{i-1} < \delta .$$

Allora abbiamo per ogni $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$|t - t_i| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\phi'(t) - \phi'(t_i)\| < \varepsilon .$$

Ora per la disuguaglianza triangolare (1.4) se $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\|\phi'(t)\| \leq \|\phi'(t) - \phi'(t_i)\| + \|\phi'(t_i)\| < \varepsilon + \|\phi'(t_i)\|$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| dt &\leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t_i)\| dt \\ &= \varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\phi'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \\ &= \varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t_i) dt \right\| \end{aligned} \quad (2.19)$$

dato che $\|\phi'(t_i)\|$ è una costante. A questo punto, scrivendo

$$\phi'(t_i) = [\phi'(t_i) - \phi'(t)] + \phi'(t) ,$$

e usando di nuovo la disuguaglianza triangolare e (2.1)

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t_i) dt \right\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\phi'(t_i) - \phi'(t)] dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\phi'(t_i) - \phi'(t)] dt \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t_i) - \phi'(t)\| dt + \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \\ &\leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| . \end{aligned}$$

Unendo questa a (2.19) otteniamo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(t)\| dt \leq 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}) + \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\|$$

che sommata su i dà

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\phi'(t)\| dt &\leq 2\varepsilon(b - a) + \sum_{i=1}^k \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \\ &= 2\varepsilon(b - a) + \ell(t_0, t_1, \dots, t_k) \leq 2\varepsilon(b - a) + \ell(\phi) \end{aligned}$$

e anche l'altra disuguaglianza è provata per l'arbitrarietà di ε . ■

Vediamo alcuni esempi.

Esempio : sappiamo che la curva

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$$

percorre la circonferenza centrata in (x_0, y_0) e di raggio r . In effetti

$$\phi'(t) = (-r \sin t, r \cos t) \implies \|\phi'(t)\| \equiv r$$

e la nostra formula dà

$$\ell(\phi) = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

Esempio : la curva

$$\phi(t) = (t, t^2/2)$$

percorre la parabola di equazione $y = x^2/2$; calcoliamo la lunghezza di un suo tratto, ad esempio quello con $0 \leq x \leq M$. Abbiamo

$$\phi'(t) = (1, t) \implies \|\phi'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

e perciò con la sostituzione $t = \sinh s$, ricordando che

$$\sinh s = M \iff \frac{e^s - e^{-s}}{2} = M \iff s = \log(M + \sqrt{1+M^2})$$

e ponendo per brevità

$$M_0 = s = \log(M + \sqrt{1+M^2})$$

la lunghezza cercata è

$$\begin{aligned} \int_0^M \sqrt{1+t^2} \, dt &= \int_{t=\sinh s}^{\uparrow} \cosh^2 s \, ds = \left[\frac{s + \sinh s \cosh s}{2} \right]_0^{M_0} \\ &= \frac{\log(M + \sqrt{1+M^2}) + M\sqrt{1+M^2}}{2}. \end{aligned}$$

È piuttosto chiaro che il calcolo della lunghezza di una curva coinvolge integrali spesso complicati, dato che la funzione integranda è la norma di un vettore, e quindi contiene una radice quadrata di una somma di quadrati, che talvolta è difficile (o impossibile) da integrare esplicitamente. Allora, una (ri)parametrizzazione importante di una curva è la seguente.

Definizione : una curva $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 si dice **parametrizzata con il parametro d'arco** se il vettore derivata ha sempre norma unitaria, cioè se $\|\psi'(s)\| = 1$ per ogni $s \in I$.

Dalla formula della lunghezza (2.18) si deduce subito che il calcolo della lunghezza, in tale situazione, è molto semplice.

Osservazione : se $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è parametrizzata con il parametro d'arco e $\alpha < \beta$ sono due punti di I , la lunghezza dell'arco percorso da ψ fra α e β è $\beta - \alpha$. In particolare l'intervallo I , se non è illimitato, ha lunghezza $\ell(\psi)$.

Una curva parametrizzata con il parametro d'arco è dunque come un'autostrada con i cartelli kilometrici: quando il valore del parametro (il numero sul cartello) è arrivato a un valore s , abbiamo percorso un tratto lungo esattamente s . Allora, data una generica curva ϕ con derivata continua, può essere utile trovarne una riparametrizzazione ψ con il parametro d'arco. Ricordando (2.5) dobbiamo trovare una funzione $p(s)$ tale che

$$\psi(s) = \phi(p(s)), \quad \|\psi'(s)\| = 1.$$

Supponendo la funzione incognita p derivabile, questo implica

$$1 = \|\psi'(s)\| = \|\phi'(p(s))\| \cdot |p'(s)| = \|\phi'(p(s))\| \cdot p'(s)$$

dato che p è monotona debolmente crescente e quindi $p' \geq 0$. Ma questa formula dice pure che p' non può mai annullarsi, dunque deve essere $p' > 0$. Allora p è invertibile, e la sua inversa q è anch'essa una funzione derivabile con derivata continua e positiva. Abbiamo per definizione di inversa

$$\begin{aligned} \phi(t) = \psi(q(t)) &\implies \phi'(t) = \psi'(q(t))q'(t) \\ &\implies \|\phi'(t)\| = \|\psi'(q(t))\| \cdot q'(t) = q'(t), \end{aligned}$$

dato che $\|\psi'(x)\| = 1$ per qualunque x . Questo significa che per trovare la funzione q , di cui poi vorremmo trovare l'inversa p , dobbiamo cercare una primitiva di $\|\phi'(t)\|$, e siamo alle prese col problema che avremmo voluto scansare. Ad esempio, nel caso della parabola visto sopra abbiamo in realtà dimostrato che

$$q(t) = \frac{\log(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}}{2},$$

e di questa funzione dovremmo trovare l'inversa per ottenere la funzione cercata $p(s)$. Trovare una parametrizzazione col parametro d'arco è dunque una operazione non ovvia; tuttavia, se una curva è parametrizzata col parametro d'arco il suo versore tangente coincide col vettore tangente, quindi le formule della curvatura si semplificano enormemente.

Osservazione : se ψ è una curva derivabile due volte parametrizzata col parametro d'arco, la curvatura è

$$\kappa(s) = \frac{1}{v(s)} \tau'(s) = \frac{1}{1} (\psi')'(s) = \psi''(s), \quad k(s) = \|\psi''(s)\|.$$

Supponiamo di voler calcolare la lunghezza della seguente curva:

$$\phi(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ (t, t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si tratta di un caso che non richiede alcun lavoro, dato che ϕ percorre prima il segmento da $(-1, 0)$ a $(0, 0)$ e poi quello da $(0, 0)$ a $(1, 1)$: è una poligonale, e la sua lunghezza è $1 + \sqrt{2}$. Tuttavia ϕ non è di classe C^1 e pertanto non rientra nel teorema fondamentale. L'obiezione che potremmo fare è che in realtà ϕ è composta di due curve C^1 una "attaccata" all'altra. Utilizziamo questa osservazione in due modi: uno è rimandato alla Sezione 2.8 quando definiremo la concatenazione di curve; l'altro è notare che in Sezione 2.1 che ϕ è di classe C^1_{tr} , quindi possiamo considerare le varie curve che si ottengono restringendo ϕ agli intervalli in cui essa è C^1 : su ciascuno di essi possiamo calcolare la lunghezza usando la formula (2.18). È facile dimostrare la seguente proprietà.

Proposizione 2.2 : *se ϕ è una curva di classe C^1_{tr} , la sua lunghezza è la somma delle lunghezze delle curve C^1 che si ottengono restringendo ϕ agli intervalli in cui essa è di classe C^1 .*

Esempio : calcoliamo la lunghezza della curva

$$\phi(t) = \begin{cases} (0, \cos t, -\sin t) & \text{se } -\pi \leq t \leq 0 \\ (t, \cos t, \sin t) & \text{se } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

La curva percorre in senso orario metà della circonferenza unitaria del piano $z = 0$, poi in senso antiorario un tratto di elica cilindrica. Entrambe le curve

$$\phi_1(t) = (0, \cos t, -\sin t), \quad -\pi \leq t \leq 0, \quad \phi_2(t) = (t, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

sono di classe C^1 , e inoltre $\phi_1(0) = \phi_2(0)$, quindi ϕ è continua e dunque di classe C^1_{tr} . Allora

$$\begin{aligned} \ell(\phi) &= \ell(\phi_1) + \ell(\phi_2) = \int_{-\pi}^0 \|\phi'_1(t)\| dt + \int_0^\pi \|\phi'_2(t)\| dt \\ &= \int_{-\pi}^0 1 dt + \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \pi(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Se abbiamo una curva in forma cartesiana, ovvero il grafico di una funzione f , che ha equazione $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, scegliendo x come parametro otteniamo la curva

$$\phi(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a, b]$$

e quindi la sua lunghezza sarà data da

$$\ell(\phi) = \int_a^b \|\phi'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.20)$$

La stessa formula vale per curve cartesiane a valori in \mathbb{R}^n : la curva di equazione $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, parametrizzata con il parametro x , ha lunghezza

$$\int_a^b \sqrt{1 + \|f'(x)\|^2} dx.$$

Esempio : vogliamo calcolare la lunghezza di un pezzo del grafico della funzione esponenziale $y = e^x$ con $x \in [a, b]$. Avremo $f(x) = f'(x) = e^x$, quindi

$$\begin{aligned}\ell(\phi) &= \int_a^b \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left[\sqrt{1 + e^{2x}} - x + \log(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1) \right]_a^b \\ &= \sqrt{1 + e^{2b}} - \sqrt{1 + e^{2a}} - b + a + \log \frac{\sqrt{1 + e^{2b}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2a}} - 1}.\end{aligned}$$

Esempio : calcoliamo la lunghezza di una porzione del grafico di una *catenaria*, una curva il cui nome deriva dalla forma di una catena appesa (► appendice 5.10); questa è il grafico della funzione coseno iperbolico. Ricordando che

$$D \cosh x = \sinh x, \quad 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x, \quad (2.21)$$

abbiamo per la lunghezza della porzione di grafico con $a \leq x \leq b$

$$\ell(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_a^b \cosh x dx = [\sinh x]_a^b = \sinh b - \sinh a. \quad (2.22)$$

Se anziché in forma cartesiana abbiamo una curva in forma polare, di equazione $r = h(\theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, scegliendo θ come parametro otteniamo la curva

$$\phi(\theta) = (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

e quindi

$$\phi'(\theta) = (h'(\theta) \cos \theta - h(\theta) \sin \theta, h'(\theta) \sin \theta + h(\theta) \cos \theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

per cui (2.15) la sua lunghezza sarà data da

$$\ell(\phi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\phi'(\theta)\| d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{h^2(\theta) + h'^2(\theta)} d\theta.$$

Esempio : vogliamo calcolare la lunghezza della spirale logaritmica

$$r = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, +\infty[.$$

Con la formula trovata sopra otteniamo

$$\ell(\phi) = \int_0^{+\infty} \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}.$$

Osservazione : data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ indichiamo con $L(a, b)$ la lunghezza del suo grafico. Prendendo come poligonale il segmento che unisce i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico di f si ottiene subito, dalla definizione di lunghezza

$$L(a, b) \geq \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}.$$

Se ora supponiamo che la funzione f sia monotona, ad esempio crescente, abbiamo, per ogni segmento congiungente i punti $P_{i-1} = (t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ e $P_i = (t_i, f(t_i))$ di una generica poligonale inscritta nel grafico di f ,

$$\|P_i - P_{i-1}\| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \leq (t_i - t_{i-1}) + (f(t_i) - f(t_{i-1}))$$

per ogni $i = 1, \dots, k$. Quindi

$$\sum_{i=1}^k \|P_i - P_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^k [(t_i - t_{i-1}) + (f(t_i) - f(t_{i-1}))] = (b-a) + (f(b) - f(a)).$$

Prendendo l'estremo superiore su tutte le poligonali inscritte nel grafico di f otteniamo

$$L(a, b) \leq (b-a) + (f(b) - f(a)).$$

In definitiva, per una funzione f monotona abbiamo le disuguaglianze

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} \leq L(a, b) \leq (b-a) + |f(b) - f(a)|.$$

Ad esempio, per la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ nell'intervallo $[0, 1]$ abbiamo

$$1.183 \simeq \sqrt{1 + \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2} \leq L(0, 1) \leq 1 + \left|\frac{1}{e} - 1\right| \simeq 1.632.$$

Dal punto di vista geometrico le disuguaglianze precedenti dicono semplicemente che per una generica funzione f la lunghezza del grafico è maggiore o uguale alla lunghezza del segmento che unisce i due punti iniziale e finale, che è null'altro che l'ipotenusa del triangolo rettangolo di vertici $(a, f(a))$, $(b, f(a))$, $(b, f(b))$; se poi la funzione f è monotona, la lunghezza del grafico è anche minore o uguale alla somma delle lunghezze dei cateti dello stesso triangolo rettangolo (es. 2.11).

2.7 - Studio di una funzione su una curva

Supponiamo di avere una funzione reale f definita su un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed una curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ il cui sostegno sia dentro Ω . Allora ha senso la composizione $g(t) = f(\phi(t))$, che è la **lettura di f lungo la curva ϕ** : potete visualizzarla come un osservatore che percorre il sostegno di ϕ , scandendo il tempo con il parametro t , e leggendo man mano che passa sui punti del sostegno il valore di f in quel punto. La lettura di f lungo ϕ ha una illuminante interpretazione grafica: supponiamo per semplicità di avere una curva ϕ piana, cioè $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, e quindi anche $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Per fissare le idee, supponiamo ϕ regolare e iniettiva, ed f positiva: il grafico di f è una sorta di superficie in \mathbb{R}^3 al di sopra del piano xy in cui giace il sostegno di ϕ .

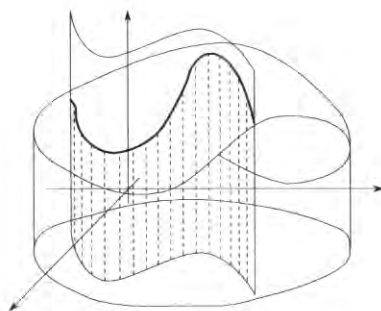
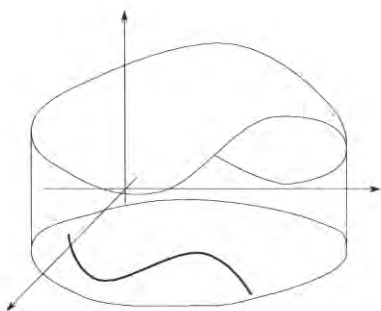


Fig. 2.13 : più spesso il sostegno di ϕ Fig. 2.14 : la sezione del grafico sopra il sostegno di ϕ

Ad ogni punto del sostegno di ϕ (che per semplicità nelle figure abbiamo rappresentato come fosse percorsa con velocità scalare costante) colleghiamo il valore del parametro t corrispondente a quel punto. Ora prendiamo un foglio di carta e appoggiamolo verticalmente sul piano xy , ma curvandolo (sempre mantenendolo parallelo all'asse z) in modo da seguire il percorso del sostegno di ϕ .

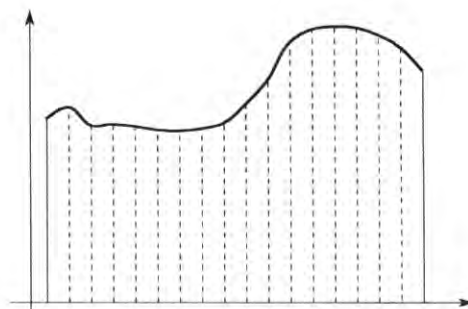


Fig. 2.15 : il foglio srotolato: la lettura di f lungo ϕ

Questo foglio interseca il grafico di f (sopra ogni punto del sostegno di ϕ c'è un punto di intersezione); trascriviamo sul foglio sia la traccia di questa intersezione, sia i valori di t che troviamo alla base: srotolando e spianando il foglio, troveremo esattamente il grafico di $f(\phi(t))$.

Esempio : abbiamo parlato nella Sezione 1.3 di “sezioni” di un grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lungo un piano π verticale, cioè parallelo all'asse z . Queste non sono altro che la lettura di f su una retta, l'intersezione di π col piano di equazione $z = 0$, vista come sottoinsieme del dominio di f e cioè come sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e non di \mathbb{R}^3 : stiamo identificando il piano di \mathbb{R}^3 che ha equazione $z = 0$ col piano cartesiano di coordinate (x, y) . Ad esempio, per individuare le sezioni del grafico di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ lungo piani verticali paralleli all'asse x (dato che il grafico di f è un mezzo cono verso l'alto, cercate di visualizzare la situazione e dare la risposta prima di leggere oltre: per evitare tentazioni, abbiamo messo la figura al termine della sezione (cfr figure 2.19 e 2.20), osserviamo che questi piani (che hanno equazione $y = c$, con c costante) intersecano il piano (x, y) nella retta di equazione $y = c$, che possiamo parametrizzare come

$$\phi(t) = (t, c). \quad (2.23)$$

Allora $g(t) = f(\phi(t)) = \sqrt{t^2 + c^2}$: il suo grafico, che sta nel piano (t, z) , è dato da

$$\{(t, z) : z = \sqrt{t^2 + c^2}\},$$

cioè è metà (la parte superiore) dell'iperbole di equazione

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{t^2}{c^2} = 1.$$

Esempio : leggiamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, il cui grafico sappiamo essere un paraboloide circolare, sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine; il foglio di carta immaginario è un cilindro (di quelli “veri”, cioè un cilindro circolare retto) con asse coincidente con quello del paraboloide.

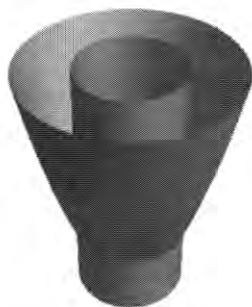


Fig. 2.16 : intersezione di un paraboloide con un cilindro coassiale

Sembra evidente che l'intersezione sia una linea (esattamente una circonferenza) tutta alla stessa altezza, quindi srotolando il foglio dovremmo trovare una costante. In effetti usando la parametrizzazione standard $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ della circonferenza è

$$g(t) = f(\phi(t)) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \equiv 1.$$

Esempio : leggiamo la stessa funzione, ma sulla circonferenza unitaria centrata in $(1, 0)$. Sapete visualizzare pressappoco la forma che avrà il grafico di $g(t)$? Fatelo prima di proseguire la lettura, immaginando di mettere il foglio cilindrico sul piano su cui è appoggiato il paraboloide: stavolta gli assi del cilindro e del paraboloide non coincidono, però!

Parametrizzando con $\phi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$ otteniamo

$$g(t) = (1 + \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 2 + 2 \cos t.$$

Il grafico somiglia a quel che avevate immaginato? Anche questa figura vi attende al termine della sezione (☞ figure 2.21 e 2.22).

La lettura di una funzione su una curva può essere utilizzata per la ricerca del massimo e del minimo di una funzione su certi insiemi.

Esempio : determiniamo il massimo e il minimo (e i punti di massimo e minimo) della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

L'insieme E è la circonferenza dell'esempio precedente, pertanto (ora siamo precisi anche sul dominio di ϕ) E è l'immagine della funzione

$$\phi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (1 + \cos t, \sin t),$$

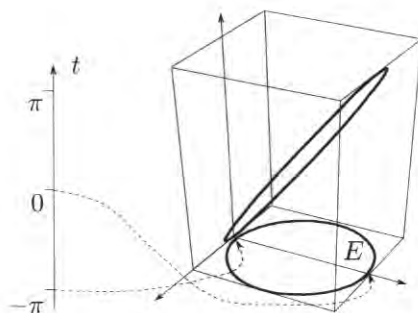


Fig. 2.17 : lettura di f su E , immagine di ϕ

ovvero

$$E = \{(1 + \cos t, \sin t) : -\pi \leq t \leq \pi\}.$$

Allora (ricordando che il massimo di f su un insieme è il massimo dell'immagine di f su quell'insieme)

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(x, y) : (x, y) \in E\} = \{f(\phi(t)) : -\pi \leq t \leq \pi\} \\ &= \{f(1 + \cos t, \sin t) : -\pi \leq t \leq \pi\} = \{2 + 2 \cos t : -\pi \leq t \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Dato che il minimo e il massimo di $g(t) = 2 + 2 \cos t$ su $[-\pi, \pi]$ sono 0 e 4, questi sono anche minimo e massimo di f su E , e sono realizzati rispettivamente nei punti $\phi(-\pi) = \phi(\pi) = (0, 0)$ e $\phi(0) = (2, 0)$.

Non bisogna scordarsi di tener conto dei punti del bordo del dominio di g , come mostra il seguente esempio.

Esempio : determiniamo il massimo e il minimo (e i punti di massimo e minimo) della funzione $f(x, y) = 2x^2 - 3y + y^2$ sul segmento S da $(1, 0)$ a $(0, 1)$ compresi gli estremi. Intanto f è continua e il segmento è un insieme compatto, quindi f ha massimo e minimo per il Teorema di Weierstraß in \mathbb{R}^n 1.20. Ora parametrizziamo il segmento, ad esempio con

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, 1 - t)$$

(non abbiamo alcun interesse a un verso particolare di percorrenza), leggiamo f sulla curva ponendo

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\phi(t)) = 2t^2 - 3(1 - t) + (1 - t)^2 = 3t^2 + t - 2$$

e osserviamo che

$$g'(t) = 6t + 1 > 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Allora per il Teorema di Fermat 1.42 la funzione g non ha punti di massimo o minimo all'interno, quindi li ha per $t = 0$ e $t = 1$ (dato che g è crescente avremmo potuto dire subito chi è il punto di minimo e chi il punto di massimo): abbiamo

$$g(0) = -2, \quad g(1) = 2$$

e quindi

$$\max_S f = 2 = f(\phi(1)) = f(1, 0), \quad \min_S f = -2 = f(\phi(0)) = f(0, 1).$$

Esempio : stessa domanda per la stessa funzione, ma sul segmento T che congiunge $(-1, 2)$ e $(1, 0)$; T sta sulla stessa retta di S , quindi la parametrizzazione sarà ancora con $(t, 1 - t)$, e la differenza è solo che ora $-1 \leq t \leq 1$. Ora

$$g'(t) = 0 \iff t = -1/6,$$

che è un valore accettabile. Per il Teorema di Fermat 1.42 i valori massimo e minimo saranno fra questi tre: i due valori $g(-1)$ e $g(1)$ agli estremi, e il valore $g(-1/6)$ nel solo punto in cui la derivata si annulla (di nuovo, dal segno della derivata avremmo potuto stabilire che $-1/6$ è di minimo per g , mentre -1 e 1 sono di massimo locale). Dato che

$$g(-1) = 0, \quad g(-1/6) = -\frac{25}{12}, \quad g(1) = 2$$

otteniamo

$$\max_T f = 2 = f(1, 0), \quad \min_T f = -\frac{25}{12} = f(\phi(-1/6)) = f(-1/6, 7/6).$$

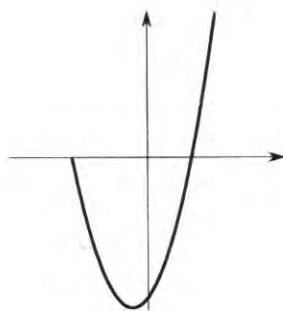


Fig. 2.18 : il grafico di $g(t)$ con $-1 \leq t \leq 1$

Vedremo l'applicazione di questo studio nella Sezione 3.7 quando ci occuperemo dei massimi e minimi di funzioni di più variabili.

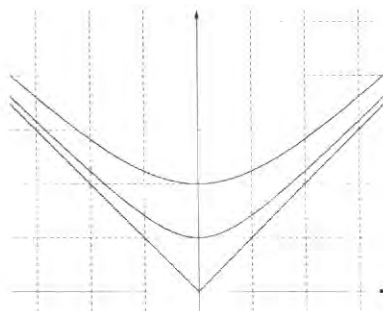
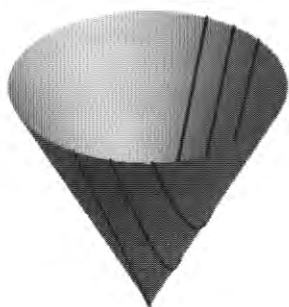


Fig. 2.19 : cono tagliato da piani verticali Fig. 2.20 : i relativi grafici (le curve sono iperboli)

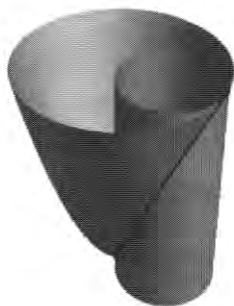


Fig. 2.21 : cilindro e paraboloide non hanno lo stesso asse

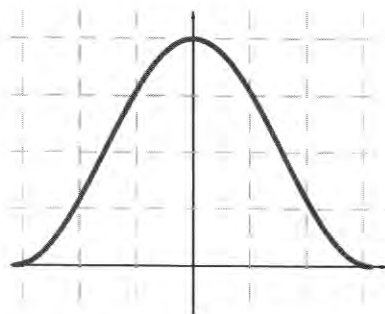


Fig. 2.22 : il foglio srotolato

2.8 - Integrali su una curva e somma di curve

Supponiamo di avere il grafico di una funzione reale su un intervallo, e per fare un caso proprio semplice supponiamo che la funzione sia costante, diciamo valga costantemente 2. Quanto vale l'integrale di questa funzione sull'intervallo? Per rispondere ci manca un dato: la lunghezza dell'intervallo. Partendo da questo esempio, immaginiamo di avere ora, come all'inizio della sezione precedente, una funzione reale f definita su un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed una curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ il cui sostegno sia dentro Ω . Riprendendo il foglio di carta già usato prima, il grafico di f lascia su di esso una traccia, che è anch'essa un grafico, quello della funzione

$$g(t) = f(\phi(t)) .$$

Per calcolare l'integrale di questa funzione, dobbiamo sapere anche come si misura la base, ma questo lo abbiamo già visto nella Sezione 2.6. Motivati da queste osservazioni definiamo l'integrale di una funzione reale su una curva.

Definizione : sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 , e tale che $\phi(t) \in \Omega$ per ogni $t \in I$. Allora l'integrale di f lungo la curva ϕ è il numero

$$\int_{\phi} f ds = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt . \quad (2.24)$$

Facciamo alcune osservazioni.

Osservazione : se riparametrizziamo ϕ come

$$\psi(u) = \phi(p(u))$$

con p di classe C^1 , l'integrale di f non cambia: infatti se era

$$p: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

abbiamo per definizione

$$\int_{\psi} f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(u)) \|\psi'(u)\| du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(p(u))) \|\phi'(p(u))\| p'(u) du$$

dato che $p'(u) \geq 0$, ma possiamo proseguire con

$$\dots = \int_{\substack{\uparrow \\ p(u)=t}}^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_{\phi} f ds.$$

Dunque il valore dell'integrale è lo stesso su tutte le curve che si ottengono da ϕ mediante una riparametrizzazione di classe C^1 .

Se ϕ fosse parametrizzata con il parametro d'arco s , l'integrale si ridurrebbe a $\int f(\phi(s)) ds$, il che giustifica la notazione $\int_{\phi} f ds$ che abbiamo impiegato.

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione $f(x, y) = 7xy$ sulla curva

$$\phi: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

(questa percorre un quarto di ellisse). Abbiamo

$$f(\phi(t)) = 42 \sin t \cos t$$

e

$$\phi'(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t) \implies \|\phi'(t)\| = \sqrt{2 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = \sqrt{2 + 7 \cos^2 t},$$

quindi l'integrale da calcolare è

$$\begin{aligned} \int_{\phi} f ds &= 42 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 + 7 \cos^2 t} \sin t \cos t dt = -3 \int_7^0 \sqrt{2 + u} du \\ &\quad \substack{\uparrow \\ 7 \cos^2 t = u} \\ &= 3 \left[\frac{2}{3} (2 + u)^{3/2} \right]_0^7 = 54 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tra i possibili integrali sulle curve è di particolare importanza il *baricentro* di una curva (\Rightarrow appendice 4.2).

Definizione : data una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ il **baricentro** di ϕ è il punto di \mathbb{R}^n definito da

$$B_\phi = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_\phi \mathbf{x} \, ds \quad (2.25)$$

dove $\ell(\phi)$ è la lunghezza di ϕ e l'integrale precedente si intende definito componente per componente.

Se scriviamo l'uguaglianza (2.25) utilizzando l'espressione (2.24) dell'integrale lungo una curva, otteniamo

$$(B_\phi)_i = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_\phi x_i \, ds = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_a^b \phi_i(t) |\phi'(t)| \, dt .$$

Esempio : sia $\phi : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arco di circonferenza

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \theta_0] .$$

Abbiamo $|\phi'(t)| = 1$ e quindi

$$\ell(\phi) = \int_0^{\theta_0} |\phi'(t)| \, dt = \theta_0 ,$$

da cui

$$\begin{aligned} (B_\phi)_1 &= \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \cos t \, dt = \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \\ (B_\phi)_2 &= \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin t \, dt = \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0} . \end{aligned}$$

Se la curva è una curva piana data in forma cartesiana da

$$\phi(x) = (x, f(x)) \quad x \in [a, b]$$

otteniamo

$$\begin{aligned} (B_\phi)_1 &= \frac{1}{\ell(\phi)} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx , \\ (B_\phi)_2 &= \frac{1}{\ell(\phi)} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx . \end{aligned}$$

Esempio : per l'arco di parabola di equazione cartesiana

$$\phi(x) = (x, x^2) \quad x \in [0, a]$$

otteniamo

$$\ell(\phi) = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{4} \left(2a\sqrt{1 + 4a^2} + \log(2a + \sqrt{1 + 4a^2}) \right)$$

e dunque

$$\begin{aligned} (B_\phi)_1 &= \frac{1}{\ell(\phi)} \int_0^a x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{(1 + 4a^2)^{3/2} - 1}{12\ell(\phi)} , \\ (B_\phi)_2 &= \frac{1}{\ell(\phi)} \int_0^a x^3 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{2a(8a^2 + 1)\sqrt{1 + 4a^2} - \log(2a + \sqrt{1 + 4a^2})}{64\ell(\phi)} . \end{aligned}$$

Infine, per curve piane in forma polare

$$r = h(\theta) \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

otteniamo la parametrizzazione

$$\phi(\theta) = (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta)$$

da cui

$$\ell(\phi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(h(\theta))^2 + (h'(\theta))^2} d\theta$$

e quindi

$$(B_\phi)_1 = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \cos \theta \sqrt{(h(\theta))^2 + (h'(\theta))^2} d\theta,$$

$$(B_\phi)_2 = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \sin \theta \sqrt{(h(\theta))^2 + (h'(\theta))^2} d\theta.$$

Esempio : se consideriamo la spirale logaritmica di equazione polare

$$r = e^{-\theta} \quad \theta \in [0, +\infty[$$

abbiamo

$$\ell(\phi) = \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}$$

e dunque

$$(B_\phi)_1 = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-2\theta} \cos \theta d\theta = \frac{2}{5},$$

$$(B_\phi)_2 = \frac{1}{\ell(\phi)} \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-2\theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{5}.$$

Nella definizione di baricentro di una curva non abbiamo richiesto che la curva sia iniettiva; in altri termini la curva può percorrere più volte lo stesso tratto, ed in tal caso l'integrale di linea $\int_\phi f ds$ conterà più volte il tratto in questione. In pratica, ricorrendo all'analogia fisica del significato di baricentro, se la curva percorre due volte uno stesso tratto, è come se in quel tratto la curva avesse densità di massa doppia. Più in generale, possiamo supporre che su una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia distribuita della massa con densità di massa $\theta(s)$.

Definizione : data una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una densità di massa $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ distribuita sulla curva, il **baricentro** di ϕ con **densità** m è il punto di \mathbb{R}^n definito da

$$B_\phi = \frac{1}{M} \int_\phi \mathbf{x} m(\mathbf{x}) ds \quad (2.26)$$

dove M è la massa totale distribuita sulla curva:

$$M = \int_\phi m(\mathbf{x}) ds.$$

Come per tutti gli integrali su curve, la formula precedente diventa, in forma parametrica,

$$M = \int_a^b m(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt ;$$

$$B_\phi = \frac{1}{M} \int_a^b \phi(t) m(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt .$$

Invece, in forma cartesiana nel piano, con $\phi(x) = (x, f(x))$ e $x \in [x_1, x_2]$ abbiamo

$$M = \int_{x_1}^{x_2} m(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ;$$

$$(B_\phi)_1 = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x m(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ,$$

$$(B_\phi)_2 = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} f(x) m(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Infine, in forma polare nel piano, con $\phi(\theta) = (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta)$ e $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ abbiamo

$$M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta) \sqrt{h^2(\theta) + (h'(\theta))^2} d\theta ;$$

$$(B_\phi)_1 = \frac{1}{M} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \cos \theta m(h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta) \sqrt{h^2(\theta) + (h'(\theta))^2} d\theta ,$$

$$(B_\phi)_2 = \frac{1}{M} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \sin \theta m(h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta) \sqrt{h^2(\theta) + (h'(\theta))^2} d\theta .$$

Esempio : supponiamo che la curva ϕ sia la circonferenza unitaria, su cui è distribuita una massa con densità

$$m(\cos \theta, \sin \theta) = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] .$$

Se parametrizziamo la circonferenza unitaria mediante l'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ abbiamo $\|\phi'(\theta)\| = 1$, per cui si ottiene facilmente

$$M = \int_0^{2\pi} \theta d\theta = 2\pi^2, \quad \int_0^{2\pi} \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \theta \sin \theta d\theta = -2\pi .$$

In definitiva,

$$B_\phi = (0, -1/\pi) .$$

Osservazione : se cambiamo verso di percorrenza a una curva, l'integrale di f non cambia: se

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

la curva

$$\psi : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) = \phi(-t)$$

inverte il senso di percorrenza, e

$$\begin{aligned}\int_{\psi} f ds &= \int_{-b}^{-a} f(\psi(u)) \|\psi'(u)\| du \stackrel{u \uparrow -t}{=} \int_b^a f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| (-dt) \\ &= \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_{\phi} f ds.\end{aligned}$$

Osservazione : l'integrale di una funzione dipende dalla curva, e non dal solo sostegno della curva: ad esempio, se f è la costante 1 e

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t), \quad \psi(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

le due curve hanno lo stesso sostegno (la circonferenza unitaria) ma ψ la percorre due volte, e (controllatelo)

$$\int_{\phi} f ds = 2\pi, \quad \int_{\psi} f ds = 4\pi.$$

Motivati da queste osservazioni, introduciamo una notazione "algebrica" sulle curve.

Definizione : siano $\phi_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve tali che $\phi_1(\beta) = \phi_2(\beta)$, ovvero i domini sono contigui e ϕ_2 parte dal punto di arrivo di ϕ_1 . La **concatenazione di ϕ_1 e ϕ_2** (o **somma di ϕ_1 e ϕ_2**) è la curva

$$(\phi_1 + \phi_2)(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & \text{se } \alpha \leq t \leq \beta \\ \phi_2(t) & \text{se } \beta \leq t \leq \gamma. \end{cases}$$

Più in generale se $\phi_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificano $\phi_1(b_1) = \phi_2(a_2)$, riparametrizzando le curve con due nuove curve ψ_1 e ψ_2 che abbiano domini contigui, si indica con $\phi_1 + \phi_2$ la concatenazione $\psi_1 + \psi_2$.

Notiamo che nell'ultimo caso $\phi_1 + \phi_2$ non è ben definita, perché potremmo scegliere molte diverse riparametrizzazioni ψ_1 e ψ_2 . Tuttavia ai fini degli integrali questo non influisce, come mostra il prossimo risultato.

Proposizione 2.3 : *abbiamo*

$$\int_{\phi_1 + \phi_2} f ds = \int_{\phi_1} f ds + \int_{\phi_2} f ds.$$

Infatti per definizione di $\phi_1 + \phi_2$ abbiamo per qualche scelta opportuna di ψ_1 e ψ_2 come nella definizione

$$\int_{\phi_1 + \phi_2} f ds = \int_{\psi_1 + \psi_2} f ds.$$

Poniamo per comodità di scrittura

$$\omega = \psi_1 + \psi_2$$

e osserviamo che

$$\omega'(t) = \begin{cases} \psi_1'(t) & \text{se } \alpha \leq t \leq \beta \\ \psi_2'(t) & \text{se } \beta \leq t \leq \gamma. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\psi_1 + \psi_2} f \, ds &= \int_{\omega} f \, ds = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\omega(t)) \|\omega'(t)\| \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\omega(t)) \|\omega'(t)\| \, dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(\omega(t)) \|\omega'(t)\| \, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi_1(t)) \|\psi_1'(t)\| \, dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(\psi_2(t)) \|\psi_2'(t)\| \, dt \\ &= \int_{\psi_1} f \, ds + \int_{\psi_2} f \, ds = \int_{\phi_1} f \, ds + \int_{\phi_2} f \, ds \end{aligned}$$

dato che abbiamo già visto che l'integrale non cambia riparametrizzando una curva. Se avessimo voluto essere più precisi avremmo dovuto parlare di *classi di equivalenza di curve*, definendo equivalenti tutte quelle che si ottengono mediante riparametrizzazione, e avremmo potuto definire la concatenazione di classi di equivalenza. La somma così introdotta permette di evitare, se si devono calcolare integrali, la noiosa opera di riparametrizzazione e incollamento necessaria a riunire vari tratti eterogenei (ma consecutivi) in un'unica curva. Naturalmente si può scrivere la somma di più di due curve.

Esempio : sia ϕ la curva che percorre, usando in ciascun tratto la parametrizzazione standard, prima l'arco della circonferenza unitaria centrata nell'origine che va in verso antiorario da $(0, 1)$ a $(1, 0)$, poi il segmento da $(1, 0)$ a $(3, 2)$, poi di nuovo in verso antiorario l'arco della circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$ che va da $(3, 2)$ a $(-1, 2)$. Calcoliamo l'integrale della funzione $f(x, y) = xy$ su questa curva. Per quanto detto, poniamo

$$\begin{aligned} \phi_1 : [\pi/2, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \phi_1(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \phi_2 : [1, 3] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \phi_2(t) &= (t, t-1) \\ \phi_3 : [\pi/4, 3\pi/4] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \phi_3(t) &= (1 + 2\sqrt{2} \cos t, 2\sqrt{2} \sin t) : \end{aligned}$$

per scrivere in modo unitario la curva $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ dovremmo fare la inutile fatica vista al termine della Sezione 2.2; invece ora possiamo calcolare separatamente l'integrale di f sulle tre curve, e sommare i risultati. Abbiamo

$$\|\phi_1'(t)\| = 1, \quad \|\phi_2'(t)\| = \sqrt{2}, \quad \|\phi_3'(t)\| = 2\sqrt{2},$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_{\phi_1} f ds &= \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos t \sin t dt = \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_{\pi/2}^{2\pi} = -\frac{1}{2} \\ \int_{\phi_2} f ds &= \int_1^3 \sqrt{2}(t^2 - t) dt = \sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_1^3 = \frac{14}{3} \sqrt{2} \\ \int_{\phi_3} f ds &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (8 \sin t + 16\sqrt{2} \sin t \cos t) dt = \left[-8 \cos t + 8\sqrt{2} \sin^2 t \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

e il risultato cercato è

$$-\frac{1}{2} + \frac{14}{3} \sqrt{2} + 8\sqrt{2} = \frac{38}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Introduciamo una notazione anche per rovesciare il verso di percorrenza.

Definizione : se ϕ è una curva, la **curva opposta** è la curva $-\phi$ definita da

$$(-\phi)(t) = \phi(-t)$$

o una qualunque altra curva che si ottiene da questa con una riparametrizzazione.

Di nuovo, la curva $-\phi$ è definita solo a meno di riparametrizzazioni, ma questo non influenza l'integrale di una funzione.

Proposizione 2.4 : abbiamo

$$\int_{\phi} f ds = \int_{-\phi} f ds.$$

Di questo risultato potete fare la facile dimostrazione. Possiamo ora tornare a quanto detto sulla lunghezza di curve di classe \mathcal{C}_{tr}^1 : abbiamo intanto una caratterizzazione.

Osservazione : ogni curva di classe \mathcal{C}_{tr}^1 si può scrivere come concatenazione di curve di classe \mathcal{C}^1 .

Pertanto, calcolare integrali su curve di classe \mathcal{C}_{tr}^1 si riduce, come per la lunghezza, al calcolo standard per curve \mathcal{C}^1 , eseguito più volte.

Proposizione 2.5 : se $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_k$ è di classe \mathcal{C}_{tr}^1 , allora

$$\ell(\phi) = \ell(\phi_1) + \dots + \ell(\phi_k)$$

e se il dominio della funzione continua f contiene il sostegno di ϕ

$$\int_{\phi} f ds = \int_{\phi_1} f ds + \dots + \int_{\phi_k} f ds.$$

Osserviamo che nella proposizione compare anche la lunghezza, che altro non è che un caso particolare di integrale: infatti se ϕ è di classe C^1 su $[a, b]$

$$\ell(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b 1 \cdot \|\phi'(t)\| dt = \int_{\phi} 1 ds .$$

Il prossimo concetto è usato frequentemente in Fisica per calcolare il lavoro di un campo. Muovendosi in un campo di forze lungo una certa direzione, si esercita un lavoro. Questo dipende dalla componente del campo lungo la direzione del movimento. Se \mathbf{F} è il campo, definito in \mathbb{R}^n , e ci muoviamo lungo una curva regolare $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la direzione del movimento all'istante t è data dal versore tangente $\tau(t)$, il valore del campo va calcolato nel punto in cui stiamo transitando ed è quindi $\mathbf{F}(\phi(t))$, e la componente lungo la direzione di movimento è il prodotto scalare

$$L(t) = \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \tau(t) .$$

Allora il lavoro totale del campo è l'integrale di $L(t)$ lungo la curva ϕ , che abbiamo già imparato a calcolare:

$$\mathcal{L} = \int_{\phi} L ds = \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \tau(t) \|\phi'(t)\| dt ,$$

ma

$$\tau(t) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|} \implies \mathcal{L} = \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt .$$

Possiamo allora dare una definizione.

Definizione : sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sia $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua, e sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 il cui sostegno sia contenuto in Ω . Allora il **lavoro del campo lungo la curva** è

$$\int_{\phi} \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt . \quad (2.27)$$

Attenzione a non confondere le scritture

$$\int_{\phi} \mathbf{F} , \quad \int_{\phi} f ds , \quad \int_{\phi} \mathbf{F} ds .$$

Nel primo caso il risultato è uno scalare e rappresenta il lavoro lungo la curva ϕ di un campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, nel secondo caso il risultato è ancora uno scalare ma rappresenta l'integrale di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ su una curva ϕ , nel terzo caso il risultato è un vettore le cui componenti si ottengono mediante gli integrali $\int_{\phi} F_i ds$, dove F_i sono le componenti di \mathbf{F} .

Osservazione : di nuovo si vede facilmente che se ψ è una riparametrizzazione di ϕ il lavoro non cambia, che

$$\int_{\phi_1 + \phi_2} \mathbf{F} = \int_{\phi_1} \mathbf{F} + \int_{\phi_2} \mathbf{F}$$

ma stavolta

$$\int_{-\phi} \mathbf{F} = - \int_{\phi} \mathbf{F}.$$

All'integrale del lavoro si applica quanto già visto prima relativamente alle curve di classe C_{tr}^1 : su una curva $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_k$ di classe C_{tr}^1 il lavoro di un campo si definisce come somma dei lavori sui tratti C^1 .

Esempio : consideriamo il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

e calcoliamo il lavoro che esso compie lungo la curva

$$\phi : [0, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, 1).$$

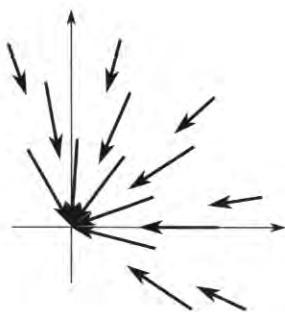


Fig. 2.23 : alcune frecce di \mathbf{F}

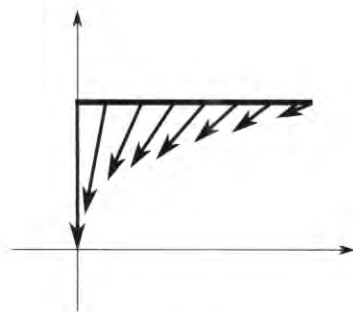


Fig. 2.24 : il campo \mathbf{F} sul sostegno di ϕ

Abbiamo

$$\mathbf{F}(\phi(t)) = \left(\frac{-t}{1+t^2}, \frac{-1}{1+t^2} \right), \quad \phi'(t) = (1, 0)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{\phi} \mathbf{F} = \int_0^{\sqrt{3}} \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-t}{1+t^2} dt = \left[-\log \sqrt{1+t^2} \right]_0^{\sqrt{3}} = -\log 2. \end{aligned}$$

Talvolta si ha necessità di calcolare la lunghezza di un insieme “curvilineo”, o l'integrale di una funzione su un insieme “curvilineo”. In tal caso, si intende che dobbiamo trovare una curva che abbia come sostegno l'insieme e che sia iniettiva (almeno per quanto possibile), per evitare di calcolare più volte l'integrale sullo stesso tratto, dopo di che si calcola la lunghezza di questa curva (o l'integrale della funzione). Che si intende però con “per quanto possibile” iniettiva? In certi casi, un insieme anche molto semplice non può essere il sostegno di una curva iniettiva definita su un intervallo $[a, b]$: ad esempio la circonferenza unitaria è il sostegno della solita curva $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ definita su $[0, 2\pi]$, ma questa non è iniettiva perché parte e arriva nello stesso punto. Il nodo visto nell'esempio (2.11) non può essere percorso da una curva iniettiva.

Definizione : una curva $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **generalmente iniettiva** se esiste un numero finito di punti $a \leq t_1 < \dots < t_k \leq b$ tali che

$$s_1, s_2 \notin \{t_1, \dots, t_k\} \implies \left[\text{se } s_1 \neq s_2 \text{ allora } \phi(s_1) \neq \phi(s_2) \right].$$

Definizione : se E è un insieme tale che esiste una curva ϕ generalmente iniettiva e di classe C_{tr}^1 il cui sostegno è E , allora la **lunghezza dell'insieme E** è la lunghezza della curva ϕ :

$$\ell(E) = \ell(\phi).$$

Se f è una funzione continua definita su un insieme che contiene E allora l'**integrale della funzione f sull'insieme E** è l'integrale di f su ϕ :

$$\int_E f \, ds = \int_\phi f \, ds.$$

Anche se un po' noioso, è possibile provare che la definizione non dipende dalla scelta di ϕ : se ψ è un'altra curva generalmente iniettiva e di classe C_{tr}^1 il cui sostegno è E , allora la lunghezza di ψ è uguale a quella di ϕ , e lo stesso per l'integrale di f (es. 2.16).

Esempio : calcoliamo la lunghezza di un giro di elica cilindrica (2.8) di raggio r e passo p . Una parametrizzazione è data da

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (r \cos t, r \sin t, tp/2\pi),$$

quindi

$$\phi'(t) = (-r \sin t, r \cos t, p/2\pi) \implies \|\phi'(t)\| = \sqrt{r^2 + p^2/4\pi^2}$$

e la lunghezza cercata è

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + p^2/4\pi^2} \, dt = 2\pi \sqrt{r^2 + p^2/4\pi^2} = \sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}.$$

Ci saremmo potuti aspettare questo risultato? Che succede se disegnate questo tratto di elica su un foglio di carta piegato a cilindro di raggio r e srotolate il foglio? Suggerimento: prima di srotolarlo, sul foglio disegnate anche la circonferenza di base (la proiezione dell'elica sul piano $z = 0$) e il segmento verticale che congiunge il punto iniziale e quello finale...

Esempio : consideriamo i seguenti insiemi:

$$E_1 = \{(x, y) : y = -x, -1 \leq x \leq 0\}$$

$$E_2 = \{(x, y) : x^2 + (y-2)^2 = 4, x \geq 0, y \leq 2\}$$

$$E_3 = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1, y \geq 2\}$$

$$E_4 = \{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4, x \leq 2, y \leq 2\}$$

e poniamo $E = E_1 \cup \dots \cup E_4$. Vogliamo calcolare la lunghezza di E , e l'integrale su E della funzione $f(x, y) = x$. La prima cosa da fare è rendersi conto di cosa siano i vari insiemi, e se possibile disegnarli. A questo punto, per calcolare la lunghezza di E non serve ricorrere agli integrali! Infatti E_1 è un segmento lungo $\sqrt{2}$, E_2 ed E_4 sono quarti di circonferenza di raggio 2, perciò ciascuno ha lunghezza $2 \cdot 2\pi/4 = \pi$, e infine E_3 è una semicirconferenza di raggio 1, lunga π : allora E ha lunghezza $3\pi + \sqrt{2}$.

Invece per calcolare l'integrale di f dobbiamo parametrizzare i vari pezzi, ad esempio con

$$\phi_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_1(t) = (t, -t)$$

$$\phi_2 : [-\pi/2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_2(t) = (2 \cos t, 2 + 2 \sin t)$$

$$\phi_3 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_3(t) = (1 + \cos t, 2 + \sin t)$$

$$\phi_4 : [\pi, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_4(t) = (2 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t),$$

porre

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4,$$

osservare che ϕ è di classe \mathcal{C}_{tr}^1 , è generalmente iniettiva (dato che le varie ϕ_i sono iniettive e c'è solo un punto che appartiene all'immagine sia di ϕ_2 che di ϕ_4) ed ha sostegno E , perciò

$$\int_E f ds = \int_{\phi} f ds = \int_{\phi_1} f ds + \dots + \int_{\phi_4} f ds.$$

A questo punto calcoliamo i quattro integrali. Calcoliamo

$$\|\phi'_1\| = \sqrt{2}, \quad \|\phi'_2\| = 2, \quad \|\phi'_3\| = 1, \quad \|\phi'_4\| = 2$$

così che

$$\int_{\phi_1} f ds = \int_{-1}^0 t\sqrt{2} dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\phi_2} f ds = \int_{-\pi/2}^0 4 \cos t dt = 4$$

$$\int_{\phi_3} f ds = \int_0^\pi (1 + \cos t) dt = \pi$$

$$\int_{\phi_4} f ds = \int_\pi^{3\pi/2} (4 + 4 \cos t) dt = 2\pi - 4$$

e perciò $\int_E f ds = 3\pi - \sqrt{2}/2$.

Esercizi relativi al capitolo 2

Esercizio 2.1 : trovate una parametrizzazione delle seguenti curve e scrivete il vettore e il versore tangente nei punti indicati. Dite poi se le curve sono chiuse, regolari, regolari a tratti:

- bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,5)$ e $(4,3)$ percorso in verso orario partendo dal punto $(0,0)$; $P_1 = (2,5)$ e $P_2 = (3,4)$;
- circonferenza di centro $(-3,-2)$ e raggio $R = 2$, percorsa in verso antiorario partendo da $(-1,-2)$; $P = (-3 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$;
- bordo del quadrato di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ partendo da $(1,1)$ in verso antiorario;
- ellisse di centro $(0,0)$, semiassi 2 e 4, percorsa in verso antiorario partendo da $(2,0)$; $P = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

Esercizio 2.2 : considerate la curva chiusa che si ottiene unendo l'arco di parabola, di equazione $y = x^2 - 6x + 10$, compreso fra i punti $(2,2)$ e $(5,5)$ e il segmento congiungente $(5,5)$ e $(2,2)$: trovate una parametrizzazione della curva e scrivere il vettore e il versore tangenti nel punto $(4,2)$. (Risolvete l'esercizio percorrendo la curva prima in senso antiorario, poi in senso orario e confrontate i risultati.)

Esercizio 2.3 : sia

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x^2 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 = 4 \right\} ;$$

dimostrate che A è una curva regolare C^1 e trovatene una parametrizzazione.

Esercizio 2.4 : scrivete l'equazione cartesiana delle rette tangente e normale per le curve piane seguenti, date in forma polare:

- $r(\theta) = \theta + e^{1+\theta}$ $\theta \in [-1, 1]$, nel punto $P = (e, 0)$.
- $r(\theta) = 4\sqrt{\theta} \tan^2 \theta$ $\theta \in [0, \pi/3]$, nel punto $P = (\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})$;
- $r(\theta) = e^{-\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}$, nel punto $P = (1, 0)$.

Esercizio 2.5 : dati due numeri reali a, b calcolate il versore tangente alla curva

$$\phi(t) = (\arctan(at + b), \log t) \quad t \in]0, +\infty[$$

in un punto generico $\phi(t_0)$.

Esercizio 2.6 : scrivete il vettore velocità, il vettore accelerazione e l'equazione cartesiana delle rette tangente e normale per le curve piane seguenti, date in forma parametrica:

- a) $\phi(t) = (t^2, \sin t)$ $t \in [-\pi, \pi]$, nel punto $P = (0, 0)$;
- b) $\phi(t) = (t + t^3, e^t)$ $t \in [-1, 1]$, nel punto $P = (0, 1)$;
- c) $\phi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$, nel punto $P = (\pi, 2)$.

Esercizio 2.7 : scrivete il vettore velocità, il vettore accelerazione e l'equazione parametrica della retta tangente per le curve in \mathbb{R}^3 seguenti, date in forma parametrica:

- a) $\phi(t) = (t, t^2, t^{-2})$ $t \in [1/2, 2]$, nel punto $P = (1, 1, 1)$;
- b) $\phi(t) = (t^2, e^t, \sin t)$ $t \in [-1, 1]$, nel punto $P = (0, 1, 0)$;
- c) $\phi(t) = (t, t^2, t^3)$ $t \in \mathbb{R}$, nel punto $P = (1, 1, 1)$.

Esercizio 2.8 : stabilite se la curva $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\phi(t) = (\sin t - t \cos t, t \sin t + \cos t) \quad t \in \mathbb{R}$$

è regolare.

Esercizio 2.9 : calcolate il vettore curvatura $\kappa(t)$ e la curvatura scalare $k(t)$ della curva $\phi: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ data in forma parametrica da

$$\phi(t) = \left(\int_1^t s e^{(s^2)} \cos s \, ds, \int_1^t s e^{(s^2)} \sin s \, ds \right) \quad t \geq 1.$$

Esercizio 2.10 : determinate, per le curve seguenti, i punti (se esistono) in cui la curvatura scalare è massima e quelli in cui è minima:

- a) la parabola di equazione cartesiana $y = x^2$, con $x \in \mathbb{R}$;
- b) il grafico cartesiano della funzione $f(x) = \log x$, con $x > 0$;
- c) la curva in forma parametrica $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, con $t \in [0, \pi/2]$.

Esercizio 2.11 : calcolate la lunghezza delle seguenti curve piane, espresse in forma parametrica:

- a) $\phi(t) = (t \cos t, t \sin t)$ $t \in [0, \pi/2]$;
- b) $\phi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ $t \in [0, e]$;
- c) $\phi(t) = (\log t, \sqrt{t})$ $t \in [1, 2]$.

Esercizio 2.12 : calcolate la lunghezza delle seguenti curve piane espresse in forma cartesiana:

- a) $y = x^2$ $x \in [0, 1]$;
- b) $y = x^{3/2}$ $x \in [0, 1]$;
- c) $y = \sqrt{x}(x - 3)$ $x \in [0, 1]$.

Esercizio 2.13 : calcolate la lunghezza delle seguenti curve piane espresse in forma polare:

a) $r = 1 + \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi] ;$

b) $r = \theta^2 + 2\theta \quad \theta \in [0, \pi/2] .$

Esercizio 2.14 : considerate la curva data in coordinate polari dall'equazione

$$\rho = a \cos \theta + \frac{1}{a} \sin \theta \quad (\theta \in [0, \pi/2]) ,$$

dove $a > 0$ è un parametro reale. Detta $L(a)$ la sua lunghezza, determinate il valore del parametro a per cui la lunghezza $L(a)$ risulti minima. Disegnate poi approssimativamente la curva così ottenuta nel piano cartesiano.

Esercizio 2.15 : parametrizzate rispetto al parametro d'arco la curva

$$\phi(t) = (3(t^2 + 1), 4(t^2 + 1)) \quad t \in [1, 2] .$$

Determinate poi la lunghezza della curva.

Esercizio 2.16 : consideriamo la curva

$$\phi(t) = (e^{2t} - t, 2\sqrt{2}e^t) \quad t \in [0, 1] ;$$

a) scrivete le equazioni delle rette tangente e normale alla curva nel punto $(1, 2\sqrt{2})$;

b) calcolate la lunghezza della curva;

c) calcolate l'integrale lungo la curva della funzione $f(x, y) = \frac{x + y^2}{2x + 2 \log y - 3 \log 2}$.

Esercizio 2.17 : calcolate le coordinate del baricentro della curva cardiode descritta in forma polare dall'equazione

$$r = 1 - \cos \theta , \quad \theta \in [0, 2\pi] ,$$

nell'ipotesi che la densità di massa sia costante.

Esercizio 2.18 : calcolate le coordinate del baricentro della curva piana di equazioni parametriche

$$x = \cos^3 t , \quad y = \sin^3 t , \quad t \in [\pi/3, \pi] ,$$

nell'ipotesi che la densità di massa sia costante.

Esercizio 2.19 : calcolate il baricentro dell'elica circolare di equazioni parametriche

$$x = a \cos t , \quad y = a \sin t , \quad z = bt , \quad t \in [0, 2\pi] ,$$

nell'ipotesi che la densità di massa sia costante. Rifate poi il calcolo nel caso in cui nel punto di parametro t ci sia una densità di massa pari a t .

Esercizio 2.20 : calcolate i seguenti integrali curvilinei:

a) $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in (0, 1)$;

b) $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = ye^{4x}$ e γ è il bordo dell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, e^{-1} \leq y \leq e^{-x}\};$$

c) $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = \frac{2}{y\sqrt{16-3x^2}}$ dove γ è l'arco di ellisse, di centro $(0, 2)$ e semiassi $(2, 1)$, da $(2, 2)$ a $(0, 3)$;

d) $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = (x + y)^2$ e $\gamma(t) = (t + \log t, t - \log t)$ con $t \in (1, e)$;

Esercizio 2.21 : calcolate il lavoro dei seguenti campi:

a) $f(x, y) = (2x - y, \sin y - x)$ sul segmento da $(1, 2)$ a $(3, -1)$;

b) $f(x, y, z) = (2, xy, x - z)$ sulla circonferenza di raggio 1 centrata in $(0, 0, 0)$ e che giace nel piano $x = 0$.

Esercizio 2.22 : tracciate (per punti) la curva piana di espressioni parametriche

$$x = 16 \sin^3 t, \quad y = 13 \cos t - 5 \cos(2t) - 2 \cos(3t) - \cos(4t),$$

che fa parte della famiglia delle cardioidi, controllando che il risultato somigli al seguente:

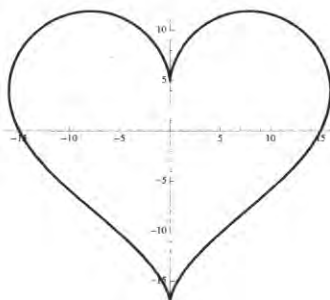


Fig. 2.25 : ecco una cardioide fatta veramente a cuore!

Appendice al capitolo 2

Appendice 2.1 - Raccordi autostradali

Un esempio interessante di curva piana è quello che si incontra nella realizzazione di raccordi autostradali. Supponiamo di voler costruire un raccordo tra due autostrade che si incrociano perpendicolarmente come in Figura e supponiamo inoltre che le auto in uscita dalla prima autostrada si immettono nella seconda percorrendo il raccordo a velocità costante v . Vogliamo costruire il raccordo in modo che le auto (ed i loro guidatori) non sentano grossi sbalzi nella forza centrifuga che si manifesta nella percorrenza del raccordo: siccome a velocità costante la forza centrifuga è proporzionale alla curvatura scalare, se misuriamo il tempo partendo dal momento in cui si inizia a percorrere il raccordo, cerchiamo quindi una curva $\phi(t)$ tale che la sua curvatura scalare $k(t)$ vari dolcemente in funzione di t , ad esempio $k(t) = at$, fino al punto centrale del raccordo, in cui la curvatura è massima, per ricongiungersi poi in maniera simmetrica al secondo ramo di autostrada.

Dalla definizione di curvatura illustrata nella Sezione 2.5, siccome supponiamo la velocità costante, ricaviamo

$$\|\tau'(t)\| = avt$$

dove abbiamo indicato con $\tau(t)$ il versore tangente alla curva. Essendo $\tau(t)$ un versore possiamo scrivere $\tau(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, con $\theta(t)$ funzione da determinare. Per $t = 0$ abbiamo $\theta(0) = 0$ mentre, se indichiamo con T il tempo in cui si raggiunge il punto centrale del raccordo, abbiamo $\theta(T) = \pi/4$. In definitiva abbiamo

$$avt = \|\tau'(t)\| = |\theta'(t)|,$$

e siccome $\theta(t)$ è crescente in $[0, T]$, ricaviamo

$$\theta'(t) = avt, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \pi/4,$$

che fornisce

$$\theta(t) = \frac{av}{2} t^2, \quad \text{con } T = \sqrt{\frac{\pi}{2av}}.$$

In definitiva, otteniamo

$$\phi'(t) = v(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \text{in } [0, T]$$

da cui, indicando con $(x_0, 0)$ il punto in cui si inizia a percorrere il raccordo, ricaviamo le espressioni parametriche della curva di raccordo:

$$x(t) = x_0 + v \int_0^t \cos(avs^2/2) ds, \quad y(t) = v \int_0^t \sin(avs^2/2) ds.$$

Come si vede, le espressioni parametriche $(x(t), y(t))$ non sono funzioni elementari; inoltre i parametri x_0, a, v devono essere tra loro compatibili, nel senso che al tempo $T = \sqrt{\pi/(2av)}$ il punto raggiunto deve trovarsi sulla retta $y = -x$, cioè

$$\int_0^{\sqrt{\pi/(2av)}} (\cos(avs^2/2) + \sin(avs^2/2)) ds = -\frac{x_0}{v},$$

o equivalentemente, con un cambio di variabili,

$$-x_0 \sqrt{\frac{a}{2v}} = \int_0^{\sqrt{\pi}/2} (\cos(s^2) + \sin(s^2)) ds \simeq 1.055.$$

La curva ottenuta viene chiamata *clotoide* ed per quella rappresentata in Figura abbiamo scelto dei parametri *autostradali* come $v = 25 \text{ m/s}$ ($= 90 \text{ km/h}$) e $x_0 = -1000 \text{ m}$, che forniscono

$$a \simeq 5.566 \cdot 10^{-5}, \quad T \simeq 33.598.$$

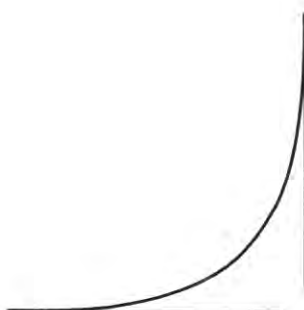
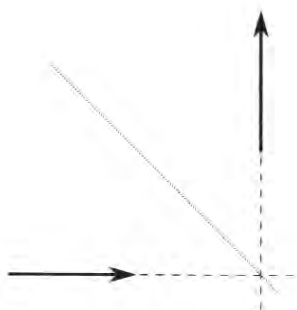


Fig. A2.1 : due autostrade da raccordare

Fig. A2.2 : una clotoide di raccordo autostradale

Appendice 2.2 - Altre curve celebri

Continuiamo ad elencare alcune curve celebri, studiate a fondo in passato sia per la loro eleganza che per alcune proprietà geometriche o meccaniche importanti.

Esempio : se a, b sono due numeri reali, con $a > 0$, la curva

$$r = a\theta + b \quad (\text{A2.1})$$

rappresenta una spirale, detta **spirale di Archimede**. Notiamo che il passo, cioè la distanza tra due punti della curva i cui angoli distano tra loro 2π , è costante ed è uguale a $2\pi a$. Un esempio di spirale di Archimede si ha osservando una corda arrotolata per terra, dove ogni spira ha la medesima distanza (lo spessore della corda) da quella precedente.

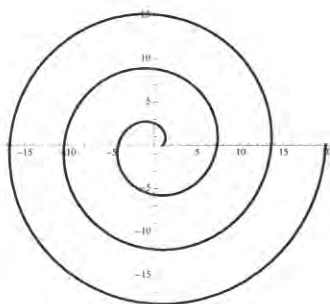


Fig. A2.3 : una spirale di Archimede

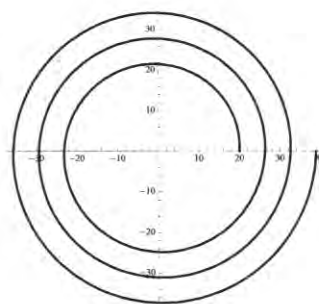


Fig. A2.4 : un'altra spirale di Archimede

Esempio : se a, b sono due numeri reali, con $a > 0$, la curva

$$r = ae^{b\theta}$$

rappresenta ancora una spirale, detta **spirale logaritmica**. Come si vede in figura, il passo questa volta non è costante.

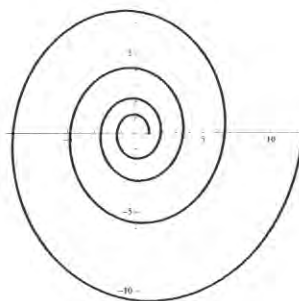


Fig. A2.5 : una spirale logaritmica

Esempio : altre spirali si possono ottenere modificando la relazione che lega r a θ . Ad esempio

$$r = a\theta^\alpha + b \quad \text{spirale di Archimede generalizzata}$$

$$r = a/\theta \quad \text{spirale iperbolica.}$$

Alcune di queste spirali sono rappresentate nelle figure.

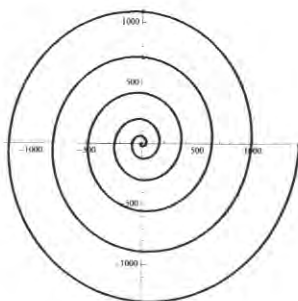


Fig. A2.6 : una spirale quadratica

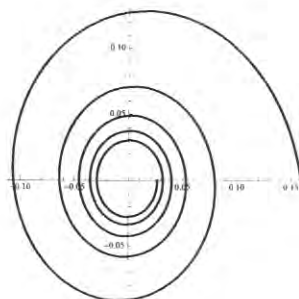


Fig. A2.7 : una spirale iperbolica

Esempio : la curva di equazione cartesiana

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1 \quad (\text{A2.2})$$

è detta **astroide**. In forma parametrica essa ha l'espressione

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

mentre in forma polare si ha

$$r = (\cos^{2/3} \theta + \sin^{2/3} \theta)^{-3/2}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

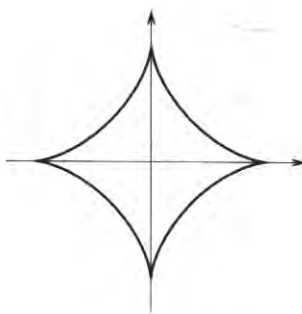


Fig. A2.8 : la curva astroide

Esempio : la curva di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è detta **cardioide** (es. 2.22). In forma parametrica essa ha l'espressione

$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1 - \cos t) \\ y(t) = \sin t(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

mentre in forma polare si ha la semplice espressione

$$r = 1 - \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

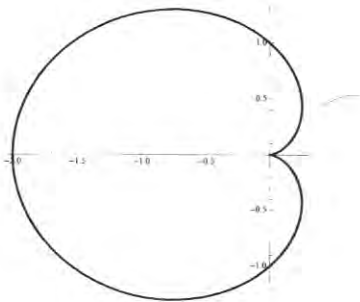


Fig. A2.9 : la curva cardioide

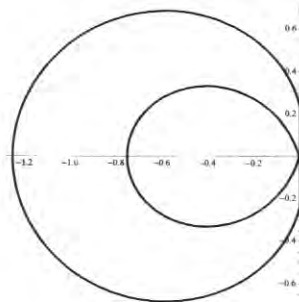


Fig. A2.10 : cardioide con $q = 0.25$ e $k = 1$

Più in generale si possono considerare le curve in forma polare

$$r = q - \cos(k\theta)$$

con $q > 0$ e $k > 0$. Va notato che, nel caso $q < 1$, usiamo la comoda convenzione sui valori negativi di r introdotta nella Sezione 1.5. Alcune cardioidi generalizzate, con diversi valori di q e di k , sono rappresentate in figura.

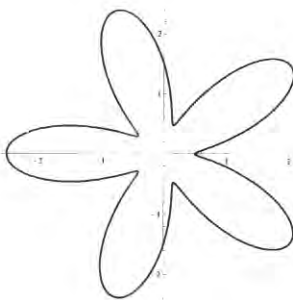


Fig. A2.11 : cardioide con $q = 1.5$ e $k = 5$

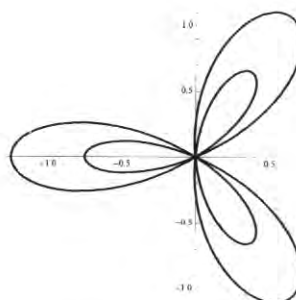


Fig. A2.12 : cardioide con $q = 0.25$ e $k = 3$

Esempio : la curva di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{sen} t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

è detta **cicloide**. Essa è la curva tracciata da un punto fissato su una circonferenza che rotola lungo una retta senza strisciare; in pratica è la curva percorsa dalla valvola di una ruota di bicicletta in movimento. In forma cartesiana la cicloide ha l'espressione

$$\cos(x + \sqrt{y(2-y)}) + y = 1$$

mentre l'espressione polare è più complicata e rimane in forma implicita, ovvero non si riesce a scriverla nella forma $r = h(\theta)$ ma solo come $f(r, \theta) = 0$.

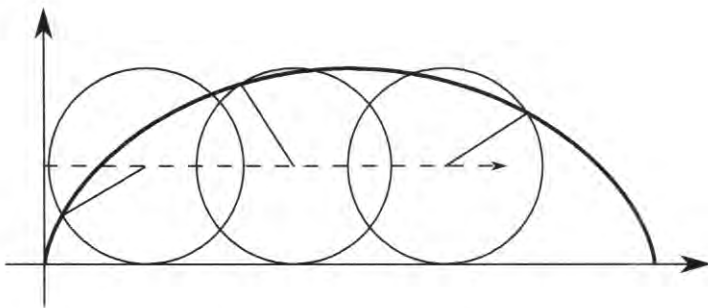


Fig. A2.13 : la curva cicloide

Esempio : la curva di equazione cartesiana

$$x^2(1-y) = y^3, \quad y \in [0, 1[$$

è detta **cissoide di Diocle**. In forma parametrica essa ha l'espressione

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \cos t \\ y(t) = \cos^2 t = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in]0, \pi[,$$

mentre in forma polare si ha l'espressione

$$r = \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \theta \in]0, \pi[.$$

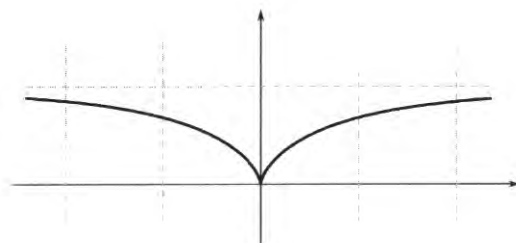


Fig. A2.14 : la curva cissoide di Diocle

Esempio : la curva di equazione cartesiana

$$x^4 + x^2 y^2 = y^2$$

è detta **curva di Gutschoven** o **curva kappa**, in quanto il suo grafico rassomiglia ad un ramo della lettera greca κ . In forma parametrica essa ha l'espressione

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{\sin t} \end{cases} \quad t \in]0, \pi[,$$

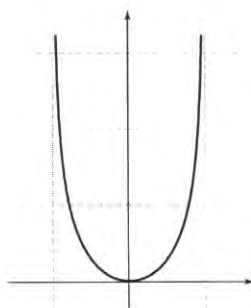


Fig. A2.15 : la curva kappa

mentre in forma polare si riduce a

$$r = |\tan \theta|, \quad \theta \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Esempio : la curva di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

è detta **deltoide**. In forma cartesiana essa ha l'espressione (piuttosto complicata)

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 18) = 27 + 8x(x^2 - 3y^2),$$

mentre in forma polare si ha l'espressione implicita

$$r^4 + 18r^2 = 27 + 8r^3 \cos(3\theta).$$

L'espressione più semplice si ha in forma parametrica complessa:

$$z(t) = 2e^{it} + e^{-2it}.$$

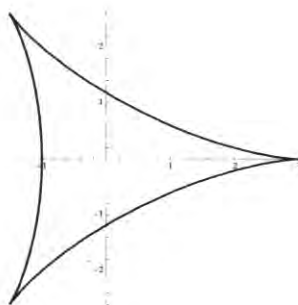


Fig. A2.16 : la curva deltoide

Esempio : se a, b sono due numeri reali, la curva di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin(at + b) \end{cases}$$

è detta **curva di Lissajous**. Al variare di a, b il grafico della curva può variare molto, come si vede nelle figure. Le figure di Lissajous rappresentano dei moti particolari di un doppio pendolo.

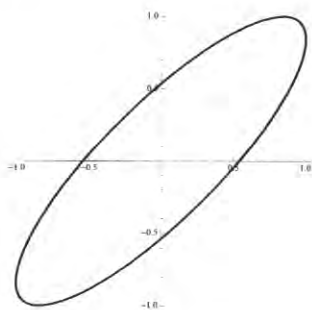


Fig. A2.17 : una curva di Lissajous

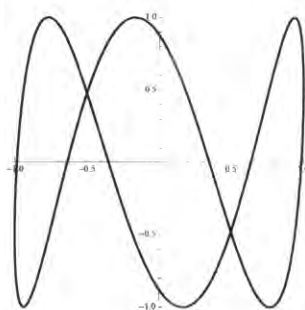


Fig. A2.18 : un'altra curva di Lissajous

Esempio : la curva di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

è detta **lemniscata di Bernoulli**. Una sua espressione parametrica è

$$\begin{cases} x(t) = t \frac{1+t^2}{1+t^4} \\ y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^4} \end{cases},$$

mentre l'espressione polare è

$$r = \sqrt{\cos(2\theta)}.$$

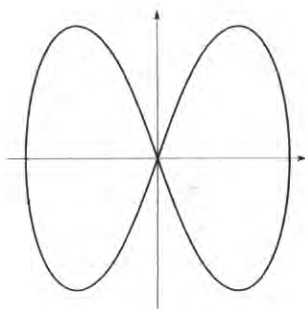


Fig. A2.19 : la curva lemniscata di Bernoulli

Esempio : un'altra lemniscata è quella detta **di Gerono** la cui equazione cartesiana è

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0.$$

La curva può essere parametrizzata da

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = 2t \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2} \end{cases},$$

mentre l'espressione polare è

$$r = \sqrt{1 - \tan^4 \theta}.$$

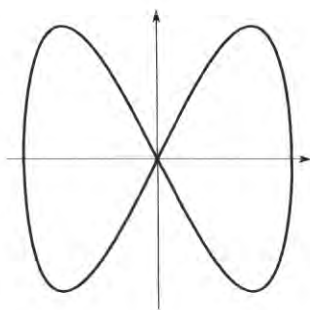


Fig. A2.20 : la curva lemniscata di Geroni

Esempio : preso un numero reale positivo a , la curva di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

è detta **chiocciola di Pascal**. La sua equazione parametrica è

$$\begin{cases} x(t) = \cos t(a + \cos t) \\ y(t) = \sin t(a + \cos t) \end{cases},$$

mentre l'espressione polare è

$$r = a + \cos \theta.$$

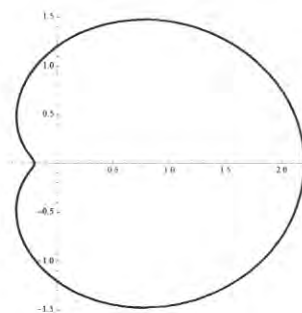
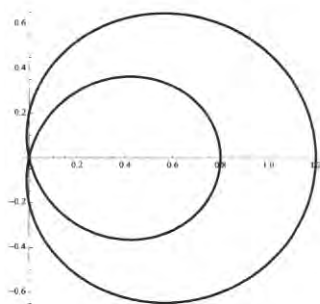


Fig. A2.21 : la chiocciola di Pascal con $a = 0.2$ Fig. A2.22 : la chiocciola di Pascal con $a = 1.2$

Appendice 2.3 - Applicazione ai motori

Nei motori a scoppio a quattro tempi sono presenti delle valvole, che si devono aprire e chiudere una volta ogni due giri dell'albero motore, e in momenti ben precisi! Come si realizza questo movimento? Mediante un *albero a camme*: anzitutto si collega l'albero motore a un albero accessorio, che compie una rotazione ogni due del motore; poi, per ogni valvola, si decide quale debba essere l'altezza $h(\theta)$ della valvola per ogni posizione θ dell'albero accessorio. Infine si realizza una camma, ossia un ispessimento asimmetrico dell'albero accessorio, che tramite un leveraggio trasmette il movimento alla valvola.

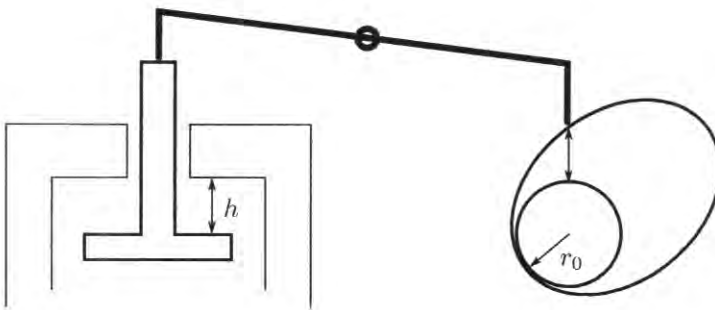


Fig. A2.23 : una (molto schematica) camma

In coordinate polari, il profilo della camma segue la legge $r = r_0 + h(\theta)$, o $r = r_0 + c \cdot h(\theta)$ se lo snodo non è in centro alla leva.

Appendice 2.4 - Ellissi, astroidi e garages

Vediamo cosa c'entrano questi tre soggetti, iniziando dall'ultimo. Le serrande dei garages sono spesso costruite come in figura: il punto alla base della serranda scorre in una guida verticale, e quando alziamo la maniglia la serranda si muove per arrivare ed essere parallela al soffitto del garage. Il braccio obliquo arriva al centro della serranda. Ci possiamo porre due domande:

- 1) qual è il percorso seguito da un punto della serranda, ad esempio la maniglia?
- 2) voglio riempire il garage di scatole, ma naturalmente non voglio che queste vengano tranciate o schiacciate dalla serranda nel suo movimento. Qual è la zona lasciata libera dalla serranda?

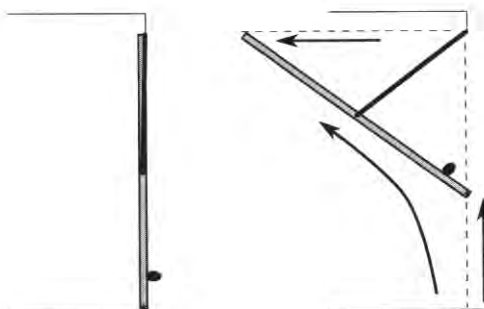
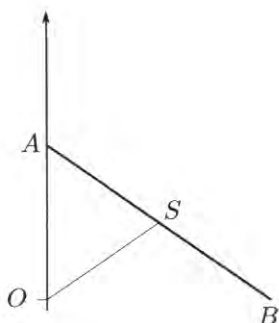
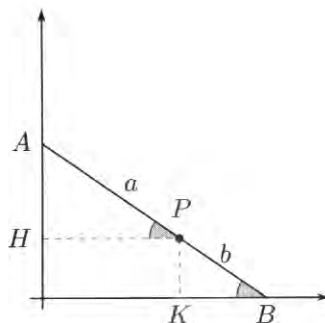


Fig. A2.24 : la serranda di un garage, chiusa e mentre si apre

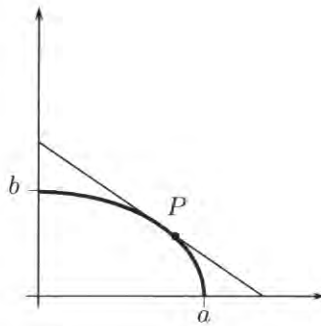
Riproduciamo la situazione in un piano cartesiano, in cui per comodità ruotiamo tutto di 180° , oltre a ridurre serranda e braccio a dei segmenti. . . Osserviamo preliminarmente che, mentre il punto alla base della serranda (ora il punto A) scorre nella guida verticale, quello (ora B) in cima alla serranda si muove orizzontalmente. Infatti i triangoli AOS e BOS sono isosceli, gli angoli al vertice (quelli in S) sono supplementari quindi gli angoli alla base sono complementari, e dunque il segmento BO è ortogonale al segmento verticale OA .

Fig. A2.25 : la serranda (ruotata di 180°)Fig. A2.26 : in grigio l'angolo t

Poniamoci dunque in un riferimento cartesiano ortogonale, e per ogni segmento AB con A sul semiasse positivo delle ordinate e B su quello positivo delle ascisse e avente lunghezza ℓ fissata, consideriamo il punto P che dista a da A e b da B , con $a + b = \ell$. Detto t l'angolo $\widehat{APH} = \widehat{PBK}$ abbiamo $PH = a \cos t$ e $PK = b \sin t$, dunque il movimento del punto P al variare di t è parametrizzato da

$$(x, y) = \phi(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

ed è quindi un (quarto di) ellisse di semiassi a e b (2.6).

Fig. A2.27 : il punto P percorre un'ellisse

Più delicata la risposta alla seconda domanda: vogliamo trovare quali sono i punti che stanno al di sopra del segmento per **ogni** posizione del medesimo.

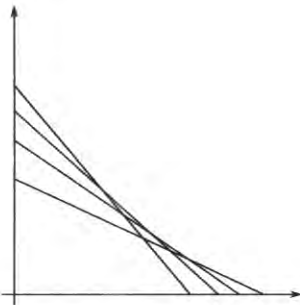


Fig. A2.28 : varie posizioni del segmento

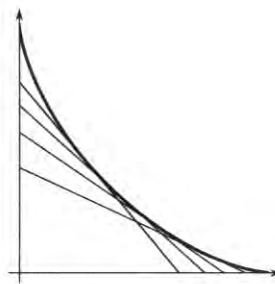


Fig. A2.29 : la curva è un'astroide

Consideriamo per il momento il caso la lunghezza ℓ del segmento è pari a 1 e chiamiamo h l'altezza alla quale questo interseca l'asse delle ordinate: così il punto A della figura A2.26 ha ordinata h mentre il punto B della stessa figura, per il teorema di Pitagora, ha ascissa $\sqrt{1-h^2}$ e per $0 \leq h < 1$, cosa che supponiamo d'ora in poi, l'angolo t ha tangente $h/\sqrt{1-h^2}$. Il segmento giace quindi sulla semiretta per A con coefficiente angolare $-h/\sqrt{1-h^2}$, che ha equazione

$$y = r_h(x) = h - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}x, \quad x \geq 0$$

e il problema equivale a trovare, per ogni x fra 0 e 1, qual è la massima altezza raggiunta in corrispondenza all'ascissa x dalle varie **semirette** r_h (è equivalente considerare il segmento o la semiretta: tanto, non ci interessa cosa accade quando la semiretta passa sotto l'asse delle ascisse) al variare di h fra tutti i suoi possibili valori, cioè per

$0 \leq h < 1$. Dobbiamo quindi, fissato $0 < x \leq 1$, trovare il massimo dell'espressione di $r_h(x)$ al variare di h . Conviene allora riscrivere l'espressione come funzione di h :

$$y_x(h) = h - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}x$$

e trovarne il massimo per $0 \leq h < 1$. Abbiamo $y_x(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 1^-} y_x(h) = -\infty$,

$$y'_x(h) = 1 - \frac{1}{(1-h^2)^{3/2}}x$$

e in particolare y'_x è positiva per


$$0 \leq h < \sqrt{1-x^{2/3}}$$

e negativa dopo tale valore (che è inferiore a 1), quindi il massimo si ha per $h = \sqrt{1-x^{2/3}}$ e vale

$$y(x) = (1-x^{2/3})^{3/2},$$

che possiamo riscrivere meglio in forma implicita

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1,$$

l'equazione di un (quarto di) astroide  (A2.2). Nel caso generale del segmento di lunghezza ℓ , per omotetia l'equazione diviene $x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$.

Capitolo 3

Calcolo differenziale in più variabili

In questo capitolo, svilupperemo il calcolo differenziale per funzioni di più variabili. Cercheremo, per quanto possibile, di seguire lo schema già visto nel corso di Analisi Matematica 1 per funzioni reali di una variabile reale; molti concetti sono analoghi, diversi altri invece sono completamente nuovi e richiedono una particolare attenzione da parte dello studente.

3.1 - Derivate parziali

Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in A$. Indicati con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n (Sezione 1.1, possiamo dare la definizione di derivata parziale.

Definizione : chiameremo **derivata parziale k -esima di f in x_0** il limite, se esiste,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{h}. \quad (3.1)$$

Diremo poi che la funzione f è **derivabile parzialmente in x_0 nella direzione e_k** se il limite (3.1) è finito. Infine diremo che la funzione f è **derivabile parzialmente in x_0** se tutte le n derivate parziali di f esistono e sono finite.

Useremo vari simboli per indicare la derivata parziale k -esima di una funzione f in \mathbf{x}_0 ; le notazioni più comuni sono

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0), \quad \partial_{x_k} f(\mathbf{x}_0), \quad \nabla_{x_k} f(\mathbf{x}_0), \quad D_k f(\mathbf{x}_0).$$

È utile avere vari modi per indicare lo stesso oggetto matematico; a seconda delle situazioni può essere conveniente usare una notazione piuttosto che un'altra.

Osservazione : in qualche caso, se il punto \mathbf{x}_0 è sul bordo di A , si possono definire ancora alcune delle derivate parziali, ma non tutte; ad esempio in \mathbb{R}^2 , se il dominio A della funzione f è

$$A = \{-|y| \leq x \leq |y|\},$$

non ha senso la derivata parziale $\nabla_x f(\mathbf{0})$ mentre ha senso la derivata parziale $\nabla_y f(\mathbf{0})$.

Definizione : se la funzione f è derivabile parzialmente in un punto \mathbf{x}_0 chiameremo **gradiente di f in \mathbf{x}_0** il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (\nabla_{x_1} f(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla_{x_n} f(\mathbf{x}_0)).$$

Altre notazioni usate per indicare il gradiente sono (es. 3.1)

$$Df(\mathbf{x}_0), \quad \partial f(\mathbf{x}_0), \quad \text{grad } f(\mathbf{x}_0).$$

A volte, quando il punto in cui si fanno le derivate è chiaramente sottinteso o non rilevante per il discorso, l'indicazione di tale punto viene omessa e si hanno notazioni del tipo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \nabla_{x_k} f, \quad \text{grad } f, \quad \nabla f.$$

Osservazione : in pratica, si calcola la derivata parziale k -esima congelando tutte le altre variabili: infatti se $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ il limite (3.1) si scrive, per esteso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k + h, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k, \dots, x_0^n)}{h}.$$

Esempio : la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^3$$

ha come derivate parziali in un punto (x_0, y_0) le quantità

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y_0^2,$$

quindi il vettore gradiente sarà

$$\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 3y_0^2).$$

Nel caso di funzioni vettoriali, cioè $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, abbiamo analoghe definizioni; la derivata parziale k -esima sarà il limite, se esiste,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{h},$$

che è un vettore. Le sue componenti saranno quindi

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \right).$$

Le derivate delle m componenti di \mathbf{f} formano allora una matrice $m \times n$ in cui la riga j -esima è data dalle derivate (§ es. 3.2)

$$D_1 f_j, \dots, D_n f_j.$$

Definizione : se le componenti di $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono derivabili parzialmente in un punto $\mathbf{x}_0 \in A$, la **matrice jacobiana di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0** è la matrice $(\nabla \mathbf{f})(\mathbf{x}_0)$ le cui componenti sono

$$(\nabla \mathbf{f})_{ij}(\mathbf{x}_0) = D_j f_i(\mathbf{x}_0), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.2)$$

così che

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m & \dots & D_n f_m \end{pmatrix}.$$

Esempio : consideriamo una matrice A con due righe e due colonne, e la funzione *lineare* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\mathbf{f}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Dato che le componenti di \mathbf{f} sono

$$f_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y, \quad f_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y,$$

si ha

$$D_1 f_1 = a_{11}, \quad D_2 f_1 = a_{12}, \quad D_1 f_2 = a_{21}, \quad D_2 f_2 = a_{22}$$

e quindi la matrice jacobiana di \mathbf{f} è semplicemente A . Lo stesso vale per la funzione *affine*

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{V} + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ è un punto fissato.

Esempio : consideriamo la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\mathbf{f}(x, y) = (xy, x^2 + y^3) . \quad (3.4)$$

Dato che le componenti di \mathbf{f} sono

$$f_1(x, y) = xy , \quad f_2(x, y) = x^2 + y^3 ,$$

si ha

$$D_1 f_1 = y , \quad D_2 f_1 = x , \quad D_1 f_2 = 2x , \quad D_2 f_2 = 3y^2$$

e quindi la matrice jacobiana $\nabla \mathbf{f}$ è data da

$$\nabla \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix} .$$

Nel caso di una funzione a valori vettoriali $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, accanto alla matrice jacobiana $\nabla \mathbf{f}$ che in questo caso, essendo $m = n$, è una matrice quadrata, è utile definire una quantità scalare che si ottiene dalla matrice $\nabla \mathbf{f}$ e che ritroveremo nel Capitolo 6.

Definizione : sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione derivabile parzialmente in un punto $\mathbf{x}_0 \in A$. Chiameremo **divergenza della funzione \mathbf{f} in \mathbf{x}_0** la quantità

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = D_1 f_1 + \dots + D_n f_n = \sum_{i=1}^n D_i f_i . \quad (3.5)$$

In altri termini, la divergenza di \mathbf{f} non è altro che la traccia della matrice jacobiana $\nabla \mathbf{f}$ (es. 3.3). Quindi, con la funzione \mathbf{f} definita in (3.4), si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = y + 3y^2 .$$

Una differenza importante tra il caso di una variabile e quello di più variabili è che, mentre per funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sappiamo che la derivabilità implica la continuità, per $n > 1$ può succedere che una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che possiede tutte le derivate parziali in ogni punto di \mathbb{R}^n non sia necessariamente continua.

Esempio : consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita in (1.44). Si vede facilmente che al di fuori dell'origine la funzione f è derivabile parzialmente e si ha, per ogni $(x, y) \neq \mathbf{0}$,

$$\nabla_x f(x, y) = -2xy \frac{x^4 - y^2}{(x^4 + y^2)^2} , \quad \nabla_y f(x, y) = x^2 \frac{x^4 - y^2}{(x^4 + y^2)^2} .$$

La funzione f è derivabile parzialmente anche nell'origine (verificatelo mediante la definizione di derivata parziale), e si ha

$$\nabla_x f(0, 0) = \nabla_y f(0, 0) = 0 .$$

Tuttavia, la funzione f non è continua nell'origine, come abbiamo già visto precedentemente nella Sezione 1.9.

Sappiamo che, in una variabile, una funzione derivabile che ha derivata identicamente nulla su un intervallo è costante. Questo si ripete in più variabili, dove l'analogo degli intervalli è rappresentato dagli insiemi connessi (1.30).

Proposizione 3.1 : se $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione che in ogni punto di A ha matrice jacobiana nulla. Allora f è costante.

DIMOSTRAZIONE : basta dimostrare che sono costanti tutte le componenti del vettore f , quindi ci siamo ridotti al caso scalare, e scriveremo f anziché f ; inoltre, per semplicità, portiamo avanti la dimostrazione solo nel caso $n = 2$. Prendiamo un qualunque punto $(x_0, y_0) \in A$: dato che A è aperto, contiene una palla $B_r(x_0, y_0)$.

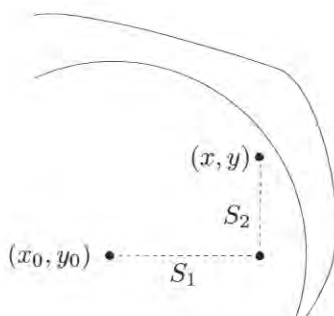


Fig. 3.1 : f è costante sia su S_1 che su S_2

Preso un punto (x, y) in questa palla, osserviamo che sia il segmento S_1 da (x_0, y_0) a (x, y_0) che il segmento S_2 da (x, y_0) a (x, y) sono contenuti nella palla; sul segmento S_1 la funzione f dipende dalla sola variabile x , e la sua derivata (che è la derivata parziale di f rispetto a x) è nulla, quindi f è costante su S_1 . Analogamente, su S_2 la funzione f dipende solo da y e ha derivata nulla, quindi è costante. Ma allora

$$f(x_0, y_0) = f(x, y_0) = f(x, y)$$

e per l'arbitrarietà di $(x, y) \in B_r$ abbiamo provato che f è costante in $B_r(x_0, y_0)$. Dunque, visto che (x_0, y_0) era qualsiasi, abbiamo provato che: per ogni punto $x_0 \in A$ esiste una palla $B_r(x_0) \subset A$ in cui $f \equiv f(x_0)$. Scegliamo un punto $z_0 \in A$: l'insieme

$$E = \{x \in A : f(x) = f(z_0)\}$$

è intorno di ogni suo punto, dato che per ogni suo punto x_0 c'è una palla che lo contiene, fatta tutta di punti in cui f ha lo stesso valore. Allora E è aperto (e non vuoto). Se f non fosse costante, allo stesso modo l'insieme

$$F = \{x \in A : f(x) \neq f(z_0)\}$$

sarebbe aperto non vuoto, quindi A sarebbe sconnesso. ■

3.2 - Derivate direzionali

In maniera analoga a quanto fatto per le derivate parziali, possiamo definire la derivata direzionale, lungo una direzione \mathbf{v} , semplicemente sostituendo il versore \mathbf{v} alle direzioni canoniche \mathbf{e}_k . Più precisamente abbiamo la seguente definizione.

Definizione : sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; sia poi $\mathbf{x}_0 \in A$ e sia \mathbf{v} un versore di \mathbb{R}^n , cioè un vettore di norma unitaria. Chiameremo **derivata direzionale di f in \mathbf{x}_0 nella direzione \mathbf{v}** il limite, se esiste,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}. \quad (3.6)$$

Più in generale, se \mathbf{V} è un qualunque vettore non nullo di \mathbb{R}^n , possiamo definire la **derivata di f in \mathbf{x}_0 lungo il vettore \mathbf{V}** come il limite, se esiste,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{V}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}.$$

Per le derivate direzionali e per quelle lungo un qualsiasi vettore useremo le notazioni (es. 3.4)

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0), \quad \partial_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0), \quad \dots$$

Va osservato che, prendendo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, la derivata direzionale si riduce alla derivata parziale k -esima. Inoltre, dalla definizione precedente si ottiene che la derivata direzionale $\partial_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ non è altro che la derivata in $t = 0$ della funzione di una variabile

$$h(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}).$$

Per le funzioni a valori vettoriali $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la definizione di derivata direzionale è analoga:

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{h}.$$

In tal caso $\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ è un vettore, avente per componenti

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = (\partial_{\mathbf{v}}f_1(\mathbf{x}_0), \dots, \partial_{\mathbf{v}}f_m(\mathbf{x}_0)).$$

Osservazione : per una funzione f , avere in un punto *tutte* le derivate direzionali è una condizione più forte che avere le sole derivate parziali; tuttavia, neppure tale condizione più forte implica in generale la continuità. Come abbiamo visto, la funzione introdotta in (1.44) non è continua, però possiede in ogni punto tutte le derivate direzionali; questo è chiaro fuori da $(0,0)$, mentre nell'origine si ha:

- a) se $\mathbf{v} = (\pm 1, 0)$, la derivata direzionale è la derivata parziale rispetto a x (o il suo opposto, a seconda del verso in cui punta \mathbf{v}), quindi sappiamo che $\partial_{\mathbf{v}}f(0,0) = 0$;
- b) se il versore $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ non è $(\pm 1, 0)$, allora $v_y \neq 0$, e

$$\frac{f((0,0) + t\mathbf{v}) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t\mathbf{v})}{t} = \frac{t^3 v_x^2 v_y}{t^4 v_x^4 + t^2 v_y^2} \sim \frac{t^3 v_x^2 v_y}{t^2 v_y^2} = \frac{v_x^2}{v_y} t \rightarrow 0,$$

quindi ancora $\partial_{\mathbf{v}}f(0,0) = 0$.

3.3 - Differenziale

Introdurremo ora una nozione più forte di quella di derivata parziale, che in particolare implicherà la continuità e ci permetterà di estendere gran parte dei risultati ottenuti per funzioni reali di una variabile reale al caso di più dimensioni. Ricordiamo che in una variabile, una funzione è derivabile (o differenziabile) in x_0 se vale una delle tre condizioni equivalenti:

- 1) per qualche numero reale a si ha $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$;
- 2) il grafico di f , che è contenuto in \mathbb{R}^2 , ha nel punto di ascissa x_0 una retta tangente non verticale, di equazione

$$y = f(x_0) + a(x - x_0) ;$$

- 3) esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a .$$

Il numero a è lo stesso nelle tre definizioni, e la terza si può anche riscrivere come:

- 3') per qualche numero reale a si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0 .$$

Generalizziamo queste condizioni al caso di più dimensioni, utilizzando la notazione degli "o piccoli" introdotta al termine della Sezione 1.9.

Definizione : siano $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$; si dice che f è **differenziabile in x_0** se esiste un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) . \quad (3.7)$$

Il vettore a è detto **differenziale di f nel punto x_0** .

Abbiamo dato una definizione semplice e operativa (es. 3.5), ma è possibile dare una definizione di differenziale che è formalmente diversa, ma si usa solo per applicazioni particolari (⇒ appendice 6.2).

Osservazione : è immediato verificare che se f è differenziabile in x_0 con differenziale $a = (a_1, \dots, a_n)$, allora f è anche derivabile in x_0 e le sue derivate parziali sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = a_k .$$

Infatti si ha (es. 3.6)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_k) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a \cdot (h e_k) + o(h)}{h} = a_k .$$

Osservazione : per quanto visto nell'osservazione precedente, il vettore \mathbf{a} non è altro che il gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, per cui se f è differenziabile abbiamo

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Nel corso di Analisi Matematica 1 abbiamo definito la nozione di *tangenza* dicendo che i grafici di due funzioni f e g sono tangenti in un punto di ascissa x_0 se

$$f(x) - g(x) = o(x - x_0)$$

(che se proprio volessimo potremmo scrivere in modo equivalente

$$|f(x) - g(x)| = o(x - x_0) :$$

questo ci servirà fra poche righe). La definizione è analoga per funzioni di più variabili, basta scriverla come

$$f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Addirittura, la stessa scrittura ha senso se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se la modifichiamo in

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Ricordiamo che il grafico di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} .

Proposizione 3.2 : una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ se e solo se vale una delle tre condizioni equivalenti:

- 1) $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$;
- 2) il grafico di f , nel punto di ascissa \mathbf{x}_0 , è tangente all'iperpiano di equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + (\nabla f(\mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ; \quad (3.8)$$

- 3) si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - (\nabla f(\mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Trascurando la versione geometrica, queste condizioni si possono prendere come definizione di differenziabilità per funzioni a valori in \mathbb{R}^m . In questo caso, leggiamola ricordando che $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ non è un numero reale, ma è un vettore di \mathbb{R}^m .

Definizione : siano $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{x}_0 \in A$; si dice che \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 se esiste una matrice D di dimensione $m \times n$ tale che

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

La matrice D è detta **differenziale di \mathbf{f} nel punto \mathbf{x}_0** .

Proposizione 3.3 : se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 , il suo differenziale è la matrice jacobiana $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Inoltre f è differenziabile in \mathbf{x}_0 se e solo se sono differenziabili in \mathbf{x}_0 tutte le sue componenti f_1, \dots, f_m .

Per la proposizione precedente, tutti i risultati sulla differenziabilità di funzioni vettoriali possono essere letti solo in termini delle componenti di f , che sono delle funzioni scalari.

Osservazione : per le funzioni f di una variabile reale le nozioni di derivabilità e di differenziabilità coincidono; sappiamo infatti che per le funzioni derivabili di una variabile reale vale la formula di Taylor arrestata al primo ordine, che non è altro che la definizione di differenziabilità.

Oltre ad essere derivabili parzialmente, le funzioni f differenziabili in \mathbf{x}_0 sono anche derivabili lungo ogni vettore; infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{V}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (h\mathbf{V}) + o(h)}{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Questo mostra anche che, per le funzioni differenziabili, la dipendenza da \mathbf{V} della derivata lungo un vettore è lineare. Vediamo una importante conseguenza.

Proposizione 3.4 : se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$, per ogni versore \mathbf{v} si ha

$$|\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|;$$

se $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, nella direzione del versore

$$\mathbf{v}_M := \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

si ha

$$\partial_{\mathbf{v}_M} f(\mathbf{x}_0) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

La proposizione segue immediatamente da (3.9), usando la disuguaglianza di Schwarz (1.3). Conviene scrivere esplicitamente le conseguenze geometriche della proposizione.

Corollario 3.5 : se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, il versore

$$\mathbf{v}_M := \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

è la direzione in cui il valore di f sale più rapidamente, e $\|\nabla f\|$ è la massima pendenza in \mathbf{x}_0 delle rette tangenti al grafico di f . Più in generale la pendenza della retta tangente al grafico di f in $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ sopra la direzione del versore \mathbf{v} è la derivata direzionale $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$.

Avremmo potuto ricavare quest'ultima informazione anche geometricamente, così: se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il suo grafico è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} . Indichiamo le variabili di \mathbb{R}^n con \mathbf{x} , e quelle di \mathbb{R}^{n+1} con

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}, x_{n+1}),$$

e poniamo

$$\mathbf{P} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)), \quad \mathbf{N} = (\nabla f(\mathbf{x}_0), -1) :$$

l'equazione (3.8) si può riscrivere

$$(\mathbf{X} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{N} = 0,$$

e basta ricordare (1.12). Conviene esplicitare anche questo risultato (§ es. 3.7).

Corollario 3.6 : se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$, l'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ è ortogonale al vettore

$$\mathbf{N} = (\nabla f(\mathbf{x}_0), -1).$$

Esempio : come si costruiscono le strade di montagna? Nessuno ha interesse a percorsi troppo lunghi, ma i veicoli faticano a superare pendenze elevate. Tipicamente, si cerca di evitare pendenze superiori al 10%, ossia punti in cui la retta tangente alla strada formi con l'orizzontale un angolo avente tangente superiore a $10/100 = 0,1$. Supponiamo che $f(x, y)$ sia la quota del terreno; grazie al Corollario 3.5, una strada che passa da (x, y) deve farlo in una direzione \mathbf{v} tale che $|\partial_{\mathbf{v}} f(x, y)| \leq 0,1$.

Proviamo ad esempio a calcolare la minima lunghezza di un tratto di strada che congiunge la base del cono di equazione

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geq 0$$

con il vertice $(0, 0, 1)$ e che ha in ogni punto una pendenza uguale al 10%. Usiamo l'ordinata z come parametro, e scriviamo la curva richiesta come

$$\phi(z) = (x(z), y(z), z), \quad x(z) = (1 - z) \cos \theta(z), \quad y(z) = (1 - z) \sin \theta(z), \quad 0 \leq z \leq 1$$

con la funzione θ da determinare, con la condizione che alla base del cono, cioè per $z = 0$, ci troviamo ad esempio nel punto $(1, 0, 0)$, cioè $\theta(0) = 0$. Il vettore tangente alla curva è $(x'(z), y'(z), 1)$ e dato che la sua componente orizzontale è

$$(x'(z), y'(z)) = (-\cos \theta(z) - (1 - z)\theta'(z) \sin \theta(z), -\sin \theta(z) + (1 - z)\theta'(z) \cos \theta(z))$$

e ha lunghezza

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1 + (1 - z)^2 (\theta'(z))^2}$$

mentre quella verticale è 1, la condizione di pendenza fornisce

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1-z)^2 (\theta'(z))^2}},$$

da cui

$$\sqrt{1 + (1-z)^2 (\theta'(z))^2} = 10. \quad (3.10)$$

Possiamo sin d'ora calcolare la lunghezza cercata, dato che

$$\|\phi'(z)\|^2 = x'^2 + y'^2 + 1 = 100 + 1 = 101$$

e quindi

$$\ell(\phi) = \int_0^1 \sqrt{101} \, dz = \sqrt{101}.$$

È interessante determinare la forma di questa strada: proseguendo da (3.10) abbiamo

$$(\theta'(z))^2 = \frac{99}{(1-z)^2}.$$

Scegliamo che sia $\theta'(z) > 0$ e otteniamo

$$\theta'(z) = \frac{\sqrt{99}}{1-z} \Rightarrow \theta(z) = \sqrt{99} \log \frac{1}{1-z} + c = \sqrt{99} \log \frac{1}{1-z} :$$

la costante c vale zero perché abbiamo scelto $\theta(0) = 0$. Ma per $z \rightarrow 1^-$ abbiamo $\theta(z) \rightarrow +\infty$, dunque la strada compie infiniti giri (ma sempre più minuscoli) intorno alla punta del cono!

Osservazione : da quanto visto sopra, se una funzione f è differenziabile in un punto \mathbf{x}_0 con differenziale \mathbf{a} , l'applicazione che ad ogni vettore non nullo \mathbf{V} associa la derivata $\partial_{\mathbf{V}} f(\mathbf{x}_0)$, è lineare e coincide con l'applicazione $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}$. Per le funzioni che non sono differenziabili ma soltanto derivabili lungo tutti i vettori \mathbf{V} questo non sempre è vero. Ad esempio, considerando la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

si ottiene per ogni \mathbf{V} non nullo

$$\partial_{\mathbf{V}} f(0, 0) = \frac{V_1 |V_1|}{\|\mathbf{V}\|},$$

che non è un'applicazione lineare.

Dalla definizione di differenziabilità si ottiene subito che le funzioni differenziabili sono anche continue; infatti si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)] = f(\mathbf{x}_0).$$

Per le funzioni reali di una variabile reale che sono derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ abbiamo definito la retta tangente in x_0 come la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Analogamente, per una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in un punto \mathbf{x}_0 possiamo definire l'**iperpiano tangente** al suo grafico, nel punto \mathbf{x}_0 ; tale iperpiano tangente sarà contenuto in \mathbb{R}^{n+1} ed avrà equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Ad esempio, per la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = xy$$

il piano tangente passante per il punto $(1, 1, 1)$ del suo grafico avrà equazione

$$z = 1 + (1, 1) \cdot ((x, y) - (1, 1)) = x + y - 1.$$

Verificare la differenziabilità di una funzione f in un punto \mathbf{x}_0 richiede dunque la dimostrazione dell'uguaglianza

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

e, come abbiamo visto nella Sezione 1.9, questo non è sempre agevole. È quindi molto utile avere delle condizioni sufficienti di *semplice verifica* che garantiscano la differenziabilità.

Teorema del differenziale totale 3.7 : siano $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$ e supponiamo che in un intorno di \mathbf{x}_0 la funzione f sia derivabile parzialmente, con tutte le derivate parziali $\partial f / \partial x_k$ continue. Allora la funzione f è differenziabile in \mathbf{x}_0 .

DIMOSTRAZIONE : per non complicare la notazione lavoriamo solo in \mathbb{R}^2 e supponiamo $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$; mediante una traslazione possiamo sempre ricondurci a questo caso. Quello che dobbiamo dimostrare è che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Ma

$$f(x, y) - f(0, 0) = [f(x, y) - f(x, 0)] + [f(x, 0) - f(0, 0)];$$

inoltre, essendo $x \mapsto f(x, 0)$ funzione di una sola variabile, abbiamo

$$f(x, 0) = f(0, 0) + \partial_x f(0, 0) \cdot x + x\omega_1(x)$$

dove $\omega_1(t)$ è una funzione infinitesima per $t \rightarrow 0$. Analogamente, usando la derivabilità nel punto $(x, 0)$, si ha per opportune funzioni $\omega_2(t)$ e $\omega_3(t)$ infinitesime per $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + \partial_y f(x, 0) \cdot y + y\omega_2(y) \\ &= f(x, 0) + (\partial_y f(0, 0) + \omega_3(x)) \cdot y + y\omega_2(y), \end{aligned}$$

dove l'ultima relazione è dovuta alla continuità di $\partial_y f$. Mettendo insieme tutto ricaviamo

$$f(x, y) - f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + x\omega_1(x) + y(\omega_2(y) + \omega_3(x)),$$

e osservando che quando $\|(x, y)\| \rightarrow 0$ anche $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \omega_1(x) + \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\omega_2(y) + \omega_3(x)) \rightarrow 0$$

dato che le due frazioni sono minori o uguali a 1 (1.6). ■

In seguito, una funzione f derivabile parzialmente in ogni punto di un insieme aperto A , con tutte le derivate parziali $\partial f / \partial x_k$ continue, verrà detta di classe $\mathcal{C}^1(A)$.

3.4 - Operazioni con le derivate parziali

Le operazioni con le derivate parziali sono simili a quelle del caso di funzioni reali di una variabile reale. Le riassumiamo qui di seguito.

Proposizione 3.8 : per le funzioni differenziabili valgono le proprietà seguenti.

- i) Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora la funzione **somma** $f + g$ è differenziabile in x_0 e si ha

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

- ii) Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili in un punto $x_0 \in A$. Allora la funzione **prodotto** fg è differenziabile in x_0 e si ha

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

- iii) Sia $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile in $x_0 \in A$ e sia $f : B \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in $g(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $f \circ g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0 e si ha

$$\nabla(f \circ g) = ((\nabla f) \circ g) \nabla g.$$

Nelle formule precedenti abbiamo ommesso di indicare i punti in cui si calcolano i gradienti, per non appesantire le notazioni. Inoltre, nella formula del differenziale della funzione composta, l'uguaglianza è nel senso delle matrici $m \times n$; infatti $\nabla(f \circ g)$ è una matrice $m \times n$, come pure $((\nabla f) \circ g) \nabla g$ che è prodotto di $(\nabla f) \circ g$, matrice $m \times k$, per ∇g , matrice $k \times n$.

Osservazione : è utile scrivere la formula del differenziale della funzione composta in termini delle sue componenti:

$$(\nabla(f \circ g))_{ij} = \sum_{h=1}^k ((\nabla f) \circ g)_{ih} (\nabla g)_{hj} \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

che equivale a

$$\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^k \frac{(\partial f_i) \circ g}{\partial x_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_j}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [f_i(g(x))] = \sum_{h=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_h}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x).$$

Talvolta si vuole mettere in evidenza la dipendenza delle funzioni dalle rispettive variabili, ad esempio nelle scienze applicate dove una stessa quantità può dipendere da diverse variabili; in tal caso l'uguaglianza precedente viene scritta nella forma

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial g_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_j},$$

o, in forma ancora più compatta usando la convenzione di Einstein che considera sommati i termini in cui compaiono degli indici ripetuti,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial g_h} \frac{\partial g_h}{\partial x_j}.$$

Osservazione : nel caso in cui $k = m = 1$ ed $f(x) = 1/x$, otteniamo per ogni funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\nabla g}{g^2},$$

da cui si ricava l'espressione per le derivate parziali di un rapporto f/g fra due funzioni reali $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}.$$

Osservazione : sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile e supponiamo che f sia anche invertibile. Prendendo $g = f^{-1}$, nella formula della derivata di una composizione si ottiene

$$I = ((\nabla f) \circ f^{-1}) \nabla(f^{-1}) ,$$

dove I indica la matrice identità. Da qui, supponendo che la matrice $n \times n$ data da ∇f sia invertibile, si ricava la formula per la derivata della funzione inversa

$$\nabla(f^{-1}) = ((\nabla f) \circ f^{-1})^{-1} .$$

Osservazione : se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile ed $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso (1.32), per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ la curva

$$\phi(t) = tx + (1-t)y , \quad 0 \leq t \leq 1$$

ha sostegno in Ω , ed è ovviamente differenziabile. Allora è ben definita su tutto $[0, 1]$, e derivabile, la funzione

$$g(t) = f(\phi(t)) .$$

Per la formula di derivazione della composizione

$$g'(t) = \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \nabla f(\phi(t)) \cdot (x - y) .$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un t tale che

$$g(1) - g(0) = g'(t) = \nabla f(\phi(t)) \cdot (x - y)$$

ma $g(1) - g(0) = f(x) - f(y)$, e per la disuguaglianza di Schwarz (1.3)

$$|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(\phi(t))\| \cdot \|x - y\| .$$

L'osservazione precedente permette di provare immediatamente il prossimo risultato sulle funzioni lipschitziane su insiemi convessi (1.38), (1.32), analogo alla Proposizione 1.45, .

Proposizione 3.9 : se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, una funzione differenziabile $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è L -lipschitziana se e solo se $\|\nabla f\| \leq L$.

Come applicazione di quanto abbiamo detto sinora, vediamo un altro utile risultato.

Teorema (di derivazione sotto il segno di integrale) 3.10 : sia f una funzione definita in una striscia $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}$, tale che sia f che $\partial_x f$ sono continue, siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in]a, b[$ sia

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt ,$$

Allora la funzione F è derivabile e ha derivata

$$F'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \partial_x f(x, t) dt.$$

Se poi $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono due funzioni derivabili definite in $]a, b[$, posto per ogni $x \in]a, b[$

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$$

la funzione G è derivabile e ha derivata

$$G'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_x f(x, t) dt + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

DIMOSTRAZIONE : scegliamo un punto $x_0 \in]a, b[$, e sia $c < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ di modo che

$$R = [x_0 - c, x_0 + c] \times [a, b]$$

è un compatto contenuto in Ω . Dato che la funzione $\partial_x f$ è continua, per il Teorema di Heine-Cantor 1.21 è uniformemente continua. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$(x', t), (x'', t) \in R, |x' - x''| < \delta \implies |\partial_x f(x', t) - \partial_x f(x'', t)| < \varepsilon$$

(avremmo potuto far variare anche l'ordinata t , ma non ci serve). Dobbiamo calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} dt :$$

prendiamo quindi $h \neq 0$ con $|h| < \delta$: nel seguito ci limitiamo a $0 < h < \delta$, lasciando il caso $-\delta < h < 0$ al lettore (non serve rifare i conti ma bisogna escogitare un facile trucco). Per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, tutti i punti fra (x_0, t) e $(x_0 + h, t)$ stanno in R , e per il Teorema di Lagrange 1.44 applicato alla funzione di una variabile $x \mapsto f(x, t)$

$$f(x+h, t) - f(x, t) = h \partial_x f(\xi, t) \quad \text{per qualche } \xi \in]x, x+h[$$

dunque

$$|f(x+h, t) - f(x, t) - h \partial_x f(x, t)| = h |\partial_x f(\xi, t) - \partial_x f(x, t)| < h \varepsilon$$

dato che $|\xi - x| < h < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_{\alpha}^{\beta} \partial_x f(x, t) dt \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} - \partial_x f(x, t) \right) dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x+h, t) - f(x, t) - h \partial_x f(x, t)}{h} dt \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|f(x+h, t) - f(x, t) - h \partial_x f(x, t)|}{h} dt \\ &\leq \varepsilon(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

e quindi per l'arbitrarietà di ε il limite del rapporto incrementale di F è $\int_{\alpha}^{\beta} \partial_x f(x, t) dt$.

Il caso generale è una applicazione interessante della teoria svolta: poniamo

$$H(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) dt$$

e osserviamo che:

- 1) per y, z fissati abbiamo appena dimostrato che la funzione $x \mapsto H(x, y, z)$ è derivabile e calcolato la relativa derivata, che quindi è la derivata parziale di H rispetto a x :

$$\partial_x H(x, y, z) = \int_y^z \partial_x f(x, t) dt ;$$

osserviamo (va dimostrato, e lo lasciamo per esercizio) che se $\partial_x f$ è continua, la derivata $\partial_x H(x, y, z)$ è una funzione continua delle variabili (x, y, z) ;

- 2) per x, y fissati la funzione

$$z \mapsto \int_y^z f(x, t) dt$$

è l'integrale da un punto fissato (y) alla variabile z di una fissata funzione continua di t (dato che x è fissato), quindi per il Teorema fondamentale del calcolo 1.50 è derivabile (ossia H è derivabile parzialmente rispetto a z) con derivata

$$\partial_z H(x, y, z) = f(x, z)$$

che è una funzione continua;

- 3) per x, z fissati, dato che

$$H(x, y, z) = - \int_z^y f(x, t) dt ,$$

quanto detto al punto 2) si ripete e dà

$$\partial_y H(x, y, z) = -f(x, y)$$

che è anch'essa continua.

Allora la funzione H ha le tre derivate parziali continue, quindi è differenziabile per il Teorema del differenziale totale 3.7. Ma ora possiamo applicare il Teorema di derivazione delle funzioni composte 3.8 e dato che

$$G(x) = H(x, \alpha(x), \beta(x))$$

otteniamo

$$G'(x) = \partial_x H(x, \alpha(x), \beta(x)) + \partial_y H(x, \alpha(x), \beta(x)) \alpha'(x) + \partial_z H(x, \alpha(x), \beta(x)) \beta'(x)$$

che usando le espressioni delle derivate parziali che abbiamo calcolato dà la tesi. ■

Osservazione : il teorema precedente vale, più in generale, se f è definita in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 , e se per ogni x considerato il segmento che ha estremi $(x, \alpha(x))$ e $(x, \beta(x))$ è contenuto in Ω .

3.5 - Derivate successive

Sia A un insieme aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile; considerando le derivate parziali $\partial f / \partial x_k$ come nuove funzioni, possiamo chiederci se esse risultano a loro volta derivabili parzialmente. In tal caso avremo le loro derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

che possiamo indicare anche con uno dei simboli

$$\nabla_{hk} f, \quad D_{hk} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}.$$

Così procedendo possiamo definire le derivate parziali di ogni ordine, che indicheremo con uno dei simboli

$$\nabla_{h_1 \dots h_N} f, \quad D_{h_1 \dots h_N} f, \quad \frac{\partial^N f}{\partial x_{h_1} \dots \partial x_{h_N}}.$$

Va osservato che, mentre l'insieme di tutte le derivate prime costituisce il vettore gradiente, di componenti

$$(\nabla f)_k = \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

le derivate seconde dipendono da due indici e costituiscono quindi una matrice $n \times n$, che indicheremo con $\nabla^2 f$, di componenti

$$(\nabla^2 f)_{ij} = \nabla_{ij} f.$$

Definizione : la matrice $\nabla^2 f$ viene detta **matrice hessiana** della funzione f .

Esempio : la funzione $f(x, y) = x^2 y^3$ ha come gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2 y^2)$$

e come matrice hessiana

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2 y \end{pmatrix}.$$

Notiamo che tale matrice 2×2 è simmetrica (es. 3.8).

La simmetria della matrice hessiana, vista nell'esempio precedente, non è un fatto casuale, come vediamo ora.

Teorema di Schwarz 3.11 : sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione avente tutte le derivate seconde continue in un intorno di $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è una matrice $n \times n$ simmetrica, cioè si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_h} \quad \text{per ogni } h, k = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE : per semplicità lavoriamo in due dimensioni e ci riduciamo al caso $x_0 = (0, 0)$. Fissiamo $x, y > 0$ e consideriamo la funzione

$$g(x, y) = f(x, y) + f(0, 0) - f(x, 0) - f(0, y) :$$

possiamo scrivere

$$g(x, y) = [f(x, y) - f(x, 0)] - [f(0, y) - f(0, 0)]$$

ossia, applicando il Teorema di Lagrange 1.44 alla funzione $\phi(x) = f(x, y) - f(x, 0)$,

$$g(x, y) = x\phi'(\xi) - \phi(0) = x[\partial_x f(\xi, y) - \partial_x f(\xi, 0)]$$

per qualche punto $\xi \in]0, x[$, e applicando di nuovo il Teorema di Lagrange rispetto alla variabile y alla differenza fra parentesi

$$g(x, y) = xy[\partial_y(\partial_x f)](\xi, \eta)$$

con $0 < \eta < y$. Ma avremmo anche potuto usare un altro ordine, scrivendo

$$g(x, y) = [f(x, y) - f(0, y)] - [f(x, 0) - f(0, 0)]$$

e lavorando come prima avremmo ottenuto

$$g(x, y) = xy[\partial_x(\partial_y f)](\xi', \eta') :$$

dunque $xy[\partial_y(\partial_x f)](\xi, \eta) = xy[\partial_x(\partial_y f)](\xi', \eta')$; dividendo per xy

$$[\partial_y(\partial_x f)](\xi, \eta) = [\partial_x(\partial_y f)](\xi', \eta')$$

e facendo tendere a zero x e y (così anche $\xi, \xi', \eta, \eta' \rightarrow 0$) si ha la tesi per la continuità delle derivate seconde. ■

Analogamente a quanto fatto per le funzioni di classe $C^1(A)$ possiamo introdurre, dato un numero intero m , le classi $C^m(A)$ delle funzioni per cui tutte le derivate parziali fino all'ordine m esistono e sono continue.

3.6 - Formula di Taylor

La formula di Taylor per funzioni di più variabili si può ottenere facilmente. Consideriamo un aperto A di \mathbb{R}^n , un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ ed una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, che supporremo di classe \mathcal{C}^m intorno ad \mathbf{x}_0 , con m abbastanza alto da permettere tutti i necessari passaggi. Fissato un versore direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ introduciamo la funzione reale di una sola variabile reale ϕ definita in un intorno dell'origine di \mathbb{R} da

$$\phi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}).$$

Per le ipotesi fatte su f la funzione ϕ ha uno sviluppo di Taylor intorno all'origine della forma

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^m t^k \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + o(t^m).$$

Calcoliamo ora i termini $\phi^{(k)}(0)$ utilizzando la regola delle derivate delle funzioni composte; abbiamo per $k = 0, 1, 2$

$$\begin{cases} \phi(0) = f(\mathbf{x}_0) \\ \phi'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} \\ \phi''(0) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Se indichiamo con \mathbf{x} il vettore $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, abbiamo $t\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e quindi dallo sviluppo di Taylor di ϕ si ricava, arrestando lo sviluppo al secondo ordine,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2).$$

I termini successivi al secondo sono più complicati da scrivere e, per avere una notazione compatta, sarebbe necessario utilizzare il calcolo tensoriale. Scrivendo invece i termini mediante le loro componenti si ha ad esempio l'espressione per il terzo termine

$$\frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \nabla_{ijk} f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_k.$$

In maniera analoga si possono esprimere gli altri termini successivi.

Osservazione : nella pratica, per sviluppare una funzione di più variabili, non è sempre necessario calcolare gradienti o matrici hessiane; basta ricordare gli sviluppi delle funzioni più comuni delle funzioni di una variabile (es. 3.9). Ad esempio, se vogliamo sviluppare, intorno all'origine di \mathbb{R}^2 e fino all'ordine 4, la funzione

$$f(x, y) = \sin(x + y^2),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y^2) - \frac{1}{6}(x + y^2)^3 + o((x + y^2)^4) \\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(\|(x, y)\|^4). \end{aligned}$$

3.7 - Massimi e minimi locali

Ci occupiamo ora dei legami tra derivate e massimi e minimi locali, analogamente a quanto già fatto per le funzioni reali di una variabile reale. Il primo passo è la generalizzazione del Teorema di Fermat 1.42 alle funzioni di più variabili. Cominciamo con il definire i punti di massimo e di minimo *locale*.

Definizione : sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Diremo che \mathbf{x}_0 è un **punto di massimo locale** per la funzione f se esiste un intorno U di \mathbf{x}_0 tale che

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A \cap U ;$$

diremo che \mathbf{x}_0 è un **punto di massimo locale isolato** per la funzione f se esiste un intorno U di \mathbf{x}_0 tale che

$$f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A \cap U, \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 .$$

Definizioni analoghe valgono per i punti di **minimo** locale, isolato o no, rovesciando le disuguaglianze.

A questo punto possiamo enunciare la generalizzazione del Teorema di Fermat.

Teorema di Fermat in \mathbb{R}^n 3.12 : siano $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Supponiamo che

- a) f sia derivabile parzialmente in \mathbf{x}_0 ;
- b) \mathbf{x}_0 sia interno ad A ;
- c) \mathbf{x}_0 sia un punto di massimo o di minimo locale per f .

Allora si ha $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

La dimostrazione è molto semplice e si riduce al caso di una variabile: infatti per ogni vettore \mathbf{e}_k della base canonica di \mathbb{R}^n la funzione reale di variabile reale

$$\phi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k)$$

per $t = 0$ è derivabile, ha un massimo o un minimo locale per $t = 0$, e tale punto è interno al dominio di ϕ . Dunque si ha $\phi'(0) = 0$ per il Teorema di Fermat 1.42 in una variabile. Essendo

$$\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) ,$$

si ottiene la condizione necessaria voluta.

I punti dove il gradiente si annulla sono quelli in cui il piano tangente al grafico è orizzontale: dunque se appoggiamo una pallina (puntiforme) in un tale punto del grafico questa rimane in equilibrio (anche se magari instabile, come ad esempio sopra un punto di massimo). Questo motiva la terminologia della prossima definizione.

Definizione : sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; diremo che un punto $x_0 \in A$ è **stazionario** se la funzione f è differenziabile in x_0 ed il gradiente $\nabla f(x_0)$ risulta nullo.

Osservazione : è interessante osservare che vale una specie di teorema di Rolle anche nel caso di funzioni di più variabili. Infatti, siano A un aperto limitato di \mathbb{R}^n ed $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- (i) f è continua sulla chiusura \bar{A} di A ;
- (ii) f è derivabile nei punti di A ;
- (iii) f è costante sul bordo ∂A di A .

Allora esiste almeno un punto $x_0 \in A$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

La dimostrazione è analoga a quella del caso unidimensionale. Infatti, per il Teorema di Weierstrass 1.20 la funzione f ha in \bar{A} sia massimo che minimo, raggiunti rispettivamente in due punti x_M e x_m . Se entrambi tali punti si trovano sul bordo, per l'ipotesi (iii) la funzione f risulterà costante e quindi in ogni punto di A avrà gradiente nullo. Se invece almeno uno di essi, ad esempio x_m , è interno ad A , per il Teorema di Fermat 3.12 si ha $\nabla f(x_m) = 0$.

Il Teorema di Fermat 3.12 dice semplicemente che i punti di minimo (o di massimo) locale interni vanno ricercati tra quelli che annullano il gradiente, ma non dice nulla sulla natura di questi ultimi punti. Notiamo che l'analisi che si poteva fare nel caso di una variabile, studiando il segno della derivata prima e quindi le proprietà di monotonia della funzione f , non è più possibile, in quanto il gradiente ∇f è un vettore e non avrebbe senso chiedersi dove esso è positivo o negativo. L'esempio seguente mostra che intorno ad un punto con gradiente nullo una funzione può esibire comportamenti molto diversi.

Esempio : consideriamo le funzioni $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2. \quad (3.12)$$

È immediato verificare che in tutti e tre i casi l'unico punto che annulla il gradiente è l'origine; tale punto è di minimo locale (anzi assoluto) per la funzione f e di massimo locale (anzi assoluto) per la funzione g . Invece l'origine non è né di massimo né di minimo per la funzione h in quanto $h(0, 0) = 0$ ma in ogni intorno dell'origine vi sono sia punti in cui h è positiva, come tutti quelli del tipo $(x, 0)$ con $x \neq 0$, sia punti in cui h è negativa, come tutti quelli del tipo $(0, y)$. Dunque esiste una retta, in questo caso l'asse delle ascisse, su cui l'origine è un punto di massimo isolato, ed un'altra retta, in questo caso l'asse delle ordinate, su cui l'origine è un punto di minimo isolato. Tali punti sono detti *punti di sella* in quanto l'andamento della funzione intorno ad essi ricorda la sella di un cavallo, che rispetto ad una direzione sembra avere un minimo mentre rispetto ad un'altra direzione sembra avere un massimo. Sezione 1.3.

L'esempio precedente e le osservazioni fatte nella Sezione 1.3 giustificano la prossima definizione.

Definizione : sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; un **punto di sella della funzione** f è un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ tale che esistono n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ed un intero k con le proprietà seguenti:

- a) il punto \mathbf{x}_0 è di minimo locale isolato per f relativamente allo spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_i) \quad \forall 0 < |t| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k ;$$

- b) il punto \mathbf{x}_0 è di massimo locale isolato per f relativamente allo spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$, cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_i) \quad \forall 0 < |t| < \varepsilon, \quad k+1 \leq i \leq n ;$$

- c) $1 < k < n$, cioè esistono effettivamente delle direzioni lungo le quali \mathbf{x}_0 è un punto di minimo locale isolato e delle direzioni lungo le quali invece \mathbf{x}_0 è un punto di massimo locale isolato.

Per una funzione f di più variabili di classe C^2 l'analisi della natura dei punti stazionari viene effettuata mediante lo studio della matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ (es. 3.10). Questa maniera di procedere è molto naturale se si pensa allo sviluppo di Taylor di f intorno ad \mathbf{x}_0

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) .$$

Essendo \mathbf{x}_0 un punto stazionario, si ha $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, per cui

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) .$$

Se \mathbf{x}_0 fosse un punto di minimo locale interno avremmo quindi, per ogni \mathbf{x} vicino ad \mathbf{x}_0 ,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \geq 0 ,$$

e, prendendo \mathbf{x} della forma $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ con \mathbf{v} versore direzione, si avrebbe

$$t^2 \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + o(t^2) \geq 0 .$$

Dividendo per t^2 e passando al limite per $t \rightarrow 0$ si otterrebbe

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 .$$

Essendo \mathbf{v} arbitrario, la disuguaglianza precedente equivale a dire che la matrice simmetrica $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva (Sezione 1.8. Analogamente, per un punto di massimo locale interno \mathbf{x}_0 avremmo che la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita negativa.

L'analisi precedente ci aiuta poco nella pratica, in quanto parte dal presupposto di conoscere la natura del punto stazionario in esame, mentre invece, nella maggior parte

dei casi, questo è proprio ciò che vogliamo determinare. Supponiamo allora che la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ sia definita positiva; procedendo come sopra si arriva alla conclusione

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{o(t^2)}{t^2}.$$

Essendo $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ definita positiva, esiste (1.37) un numero $c > 0$ tale che

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq c,$$

per cui si ha

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t^2} \geq \frac{c}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}.$$

Per definizione di $o(t^2)$ abbiamo che il termine $o(t^2)/t^2$ tende a zero, dunque per t piccolo si ha $o(t^2)/t^2 \geq -c/4$, da cui

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t^2} \geq \frac{c}{4} > 0.$$

Il punto \mathbf{x}_0 risulta allora di minimo locale isolato (es. 3.11). In maniera analoga si ha che se la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa, allora il punto \mathbf{x}_0 è di massimo locale isolato.

Riassumiamo quanto trovato

Proposizione 3.13 : per un punto stazionario interno \mathbf{x}_0 di una funzione f differenziabile due volte:

- a) se \mathbf{x}_0 è di minimo locale, allora la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva;
- b) se \mathbf{x}_0 è di massimo locale, allora la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita negativa;
- c) se la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva, allora \mathbf{x}_0 è di minimo locale isolato;
- d) se la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa, allora \mathbf{x}_0 è di massimo locale isolato.

Tornando alle tre funzioni f, g, h introdotte in (3.12) troviamo subito, per il punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 h(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e, in base all'analisi precedente sulla matrice hessiana, possiamo concludere che il punto $(0, 0)$ è di minimo isolato per f e di massimo isolato per g . Riguardo alla funzione h osserviamo che, in base alla matrice hessiana $\nabla^2 h(0, 0)$, l'origine risulta essere punto di minimo locale isolato nella direzione $(1, 0)$ e di massimo locale isolato nella direzione $(0, 1)$, dunque l'origine è punto di sella per la funzione h .

Quanto appena detto per la funzione h si generalizza al caso di dimensione qualsiasi: se una funzione h di classe \mathcal{C}^2 ha un punto stazionario interno \mathbf{x}_0 in cui la matrice

hessiana $\nabla^2 h(\mathbf{x}_0)$ è non degenera ed ha k autovalori positivi ed $n - k$ autovalori negativi, con $1 < k < n$, allora il punto \mathbf{x}_0 risulterà punto di sella per la funzione h . Infatti, \mathbf{x}_0 sarà di minimo locale isolato rispetto alle direzioni degli autovettori relativi agli autovalori di segno positivo, mentre sarà di massimo locale isolato rispetto alle direzioni degli autovettori relativi agli autovalori di segno negativo.

Esempio : sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ un vettore fissato; consideriamo la funzione

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|^2$$

definita su tutto \mathbb{R}^n . Abbiamo già visto (1.45) che la funzione f ha minimo in \mathbb{R}^n , raggiunto in un punto \mathbf{x}_0 . La funzione f è differenziabile e si ha

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} + 2\mathbf{x} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

L'unico punto in cui si annulla il gradiente è dunque $\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}/2$ che sarà quindi il punto di minimo cercato. La matrice hessiana è infatti

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) = 2I$$

che risulta definita positiva. Il valore minimo della funzione f è dunque

$$\min f = f\left(-\frac{\mathbf{A}}{2}\right) = -\frac{\|\mathbf{A}\|^2}{4}.$$

Da quanto detto sopra, l'analisi della natura di un punto stazionario interno di una funzione di più variabili si riduce allo studio della positività o negatività (definita o semidefinita) della matrice hessiana che, ricordiamo, è una matrice simmetrica $n \times n$ e pertanto ha tutti gli autovalori reali (es. 3.12). Ricordiamo che una matrice simmetrica A è definita positiva se e solo se sono positivi i suoi autovalori, che sono le radici dell'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Nel caso di due variabili tale studio è particolarmente semplice in quanto l'equazione precedente è di secondo grado e diventa

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0.$$

Pertanto abbiamo per matrici 2×2 :

- a) A è semidefinita positiva se e solo se $\text{tr } A \geq 0$ e $\det A \geq 0$;
- b) A è semidefinita negativa se e solo se $\text{tr } A \leq 0$ e $\det A \geq 0$;
- c) A è definita positiva se e solo se $\text{tr } A > 0$ e $\det A > 0$;
- d) A è definita negativa se e solo se $\text{tr } A < 0$ e $\det A > 0$.

Possiamo allora precisare la Proposizione 3.13 nel caso bidimensionale.

Proposizione 3.14 : per un punto stazionario interno \mathbf{x}_0 di una funzione $f(x, y)$ differenziabile due volte abbiamo:

- a) se $\det \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ e $\text{tr } \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ il punto \mathbf{x}_0 è di minimo locale isolato;
- b) se $\det \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ e $\text{tr } \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ il punto \mathbf{x}_0 è di massimo locale isolato;
- c) se $\det \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ il punto \mathbf{x}_0 è di sella isolato.

I casi in cui $\det \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) = 0$ sono più delicati da trattare e necessiterebbero di uno sviluppo di Taylor ad un ordine superiore al secondo, come mostra l'esempio seguente.

Esempio : le funzioni

$$F(x, y) = x^4 + y^4, \quad G(x, y) = -x^4 - y^4, \quad H(x, y) = x^4 - y^4$$

hanno tutte l'origine $(0, 0)$ come unico punto stazionario, ma la matrice hessiana nell'origine è nulla in tutti e tre i casi. Si vede però facilmente che l'origine è di minimo isolato per F , di massimo isolato per G , di sella isolato per H .

Nel caso di dimensione superiore a due lo studio della positività di una matrice simmetrica richiede calcoli più lunghi; è utile il criterio seguente.

Proposizione (criterio di Sylvester) 3.15 : *sia A una matrice simmetrica $n \times n$; allora A è definita positiva se e solo se tutti i minori principali di A sono positivi.*

Ricordiamo che i minori principali di A sono i determinanti delle matrici A_k di dimensione $k \times k$ e costituite dai termini a_{ij} con $1 \leq i, j \leq k$. Ad esempio

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Osservazione : bisogna fare attenzione al fatto che il criterio di Sylvester per matrici simmetriche definite negative non si ottiene semplicemente scambiando il segno \geq con il segno \leq . La maniera migliore di ricordarlo è pensare che se A è definita negativa allora $-A$ è definita positiva e dunque, per il criterio di Sylvester, i minori principali di $-A$ sono positivi. Essendo

$$\det(-A_k) = (-1)^k \det A_k$$

otteniamo che:

una matrice simmetrica A è definita negativa se e solo se i minori principali di A di dimensione pari sono positivi e quelli di dimensione dispari sono negativi.

Esempio : consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz + k(x^2 + y^2 + z^2)$$

dove k è un parametro reale. I punti stazionari si trovano annullando il gradiente, dunque risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y + z + 2kx = 0 \\ x + z + 2ky = 0 \\ x + y + 2kz = 0. \end{cases}$$

Sommando le tre righe si ha

$$(2k+2)(x+y+z) = 0$$

da cui, per $k \neq -1$ (caso che esamineremo in seguito), si ricava $x+y+z = 0$ e, sostituendo nel sistema di sopra, si ottiene per $k \neq 1/2$

$$x = y = z = 0.$$

Dunque l'origine è l'unico punto stazionario di f . Per $k = 1/2$ invece tutti i punti (x, y, z) con $x+y+z = 0$ sono stazionari. Il caso $k = 1/2$ è particolare perché si ha

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

e dunque ogni punto stazionario è di minimo ma non di minimo isolato. Supponiamo ora $k \neq 1/2$ e calcoliamo la matrice hessiana:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2k & 1 & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}.$$

Per applicare il criterio di Sylvester calcoliamo i tre minori principali M_1, M_2, M_3 :

$$M_1 = 2k, \quad M_2 = 4k^2 - 1, \quad M_3 = 2(k+1)(2k-1)^2.$$

Abbiamo quindi:

- a) se $k > 1/2$ l'origine è un punto di minimo locale (anzi assoluto) isolato;
- b) se $0 < k < 1/2$ l'origine è un punto di sella isolato;
- c) se $-1/2 < k < 0$ l'origine è un punto di sella isolato;
- d) se $-1 < k < -1/2$ l'origine è un punto di sella isolato;
- e) se $k < -1$ l'origine è un punto di massimo locale (anzi assoluto) isolato.

Restano da esaminare i casi $k = 0$, $k = -1/2$, $k = -1$, in cui il criterio di Sylvester non si applica in quanto uno dei minori principali è nullo. Per $k = 0$ si vede che l'origine è un punto di sella isolato, in quanto sulle rette di equazioni $\mathbf{X} = t(0, 1, 1)$ e $\mathbf{X} = t(1, 1, 0)$ l'origine è di minimo isolato, mentre sulla retta di equazione $\mathbf{X} = t(0, -1, 1)$ l'origine è di massimo isolato. Analogamente, per $k = -1/2$ l'origine è un punto di sella isolato in quanto sulle rette di equazioni $\mathbf{X} = t(1, -1, 0)$ e $\mathbf{X} = t(0, 1, -1)$ l'origine è di massimo isolato, mentre sulla retta di equazione $\mathbf{X} = t(1, 1, 2)$ l'origine è di minimo isolato. Infine, il caso $k = -1$ è di nuovo un caso particolare, in quanto si ha

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2)$$

e dunque l'origine risulta essere un punto di massimo assoluto ma non isolato, in quanto il valore massimo, uguale a zero, è raggiunto in tutti i punti della retta di equazione $\mathbf{X} = t(1, 1, 1)$.

Esempio : con i metodi visti sopra calcoliamo la distanza tra due rette in \mathbb{R}^n . Siano R ed S due rette in \mathbb{R}^n , che conviene scrivere in forma parametrica

$$R = \{A + sV : s \in \mathbb{R}\}, \quad S = \{B + tW : t \in \mathbb{R}\},$$

dove A, B, V, W sono vettori di \mathbb{R}^n , con $\|V\| = \|W\| = 1$. La funzione da minimizzare è

$$f(s, t) = \|A + sV - B - tW\|^2.$$

Abbiamo preso il quadrato della distanza, il che semplifica molto il calcolo del gradiente; i punti di minimo sono ovviamente gli stessi che se avessimo preso la distanza e per il valore minimo basterà alla fine prendere la radice quadrata di quanto trovato. Notiamo poi che se le rette R ed S risultano parallele, il che succede se i vettori direzione V e W sono tali che $V = \pm W$, la distanza si calcola facilmente e si trova

$$(d(R, S))^2 = \|A - B\|^2 - (V \cdot (A - B))^2.$$

Quindi possiamo ora supporre che le rette R ed S non siano parallele, cioè $|V \cdot W| < 1$. Annullando il gradiente si trova il sistema

$$\begin{cases} \nabla_s f(s, t) = 2(Vs + A - Wt - B) \cdot V = 0 \\ \nabla_t f(s, t) = -2(Vs + A - Wt - B) \cdot W = 0, \end{cases}$$

che ha le soluzioni

$$\begin{cases} s = \frac{V \cdot B - V \cdot A - (V \cdot W)(W \cdot B - W \cdot A)}{1 - (V \cdot W)^2} \\ t = \frac{A \cdot W - W \cdot B + (V \cdot W)(V \cdot B - V \cdot A)}{1 - (V \cdot W)^2}. \end{cases}$$

A riprova che quello trovato è il punto di minimo della funzione f calcoliamo la matrice hessiana:

$$\nabla^2 f(s, t) = \begin{pmatrix} 2 & -2V \cdot W \\ -2V \cdot W & 2 \end{pmatrix}$$

che ha traccia 4 e determinante $4 - 4(V \cdot W)^2 > 0$, e risulta pertanto definita positiva. A questo punto basta inserire nell'espressione della funzione f i valori di s, t trovati per ottenere il valore del quadrato della minima distanza tra le rette R ed S . Nel caso in cui la dimensione n sia uguale a 3 tale valore può essere espresso mediante il prodotto vettoriale $V \wedge W$ e si ottiene

$$(d(R, S))^2 = \left(\frac{(B - A) \cdot (V \wedge W)}{\|V \wedge W\|} \right)^2.$$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

definita sul cerchio unitario

$$A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Per il Teorema di Weierstrass 1.20 la funzione f ha massimo e minimo su A . Annullando il gradiente ∇f si trova il sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione l'origine $(0, 0)$. La matrice hessiana nell'origine è

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo; pertanto non possiamo applicare i metodi visti in precedenza. Si vede però facilmente che l'origine è un punto di sella isolato, in quanto sulla retta delle ascisse l'origine è di minimo isolato, mentre sulla retta delle ordinate l'origine è di massimo isolato. Dunque i punti di massimo e di minimo non possono essere interni ad A e vanno quindi cercati sul bordo di A , che è la circonferenza unitaria. Parametrizzando quest'ultima con

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta,$$

possiamo ridurre il problema alla ricerca del massimo e del minimo della funzione di una sola variabile

$$h(\theta) = \cos^2 \theta - \sin^4 \theta.$$

Si trova

$$h'(\theta) = -2(1 + 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta,$$

che si annulla nei punti $\theta = m\pi/2$, con m intero. Su tali punti abbiamo

$$h(m\pi/2) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

e pertanto i punti di massimo assoluti della funzione f sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, su cui la funzione assume il valore 1, mentre i punti di minimo assoluti della funzione f sono $(0, 1)$ e $(0, -1)$, su cui la funzione assume il valore -1 .

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

definita sul triangolo T avente per vertici i punti $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Di nuovo per il Teorema di Weierstrass 1.20 la funzione f ha massimo e minimo su T . Essendo

$f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in T$, ed essendo $f(0, 0) = 0$, è evidente che l'origine è l'unico punto di minimo di f . Annullando il gradiente ∇f si trova il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases}$$

che non si annulla mai nei punti interni di T . Dunque i punti di massimo vanno cercati sul bordo di T , costituito dai segmenti

$$X = t(1, 0), \quad Y = t(0, 1), \quad Z = (t, 1 - t)$$

con $t \in [0, 1]$. Si trova facilmente

$$\begin{cases} \max_X f = 1 \\ \min_X f = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \max_Y f = 1 \\ \min_Y f = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \max_Z f = 1 \\ \min_Z f = 1/4 \end{cases}.$$

Pertanto, il massimo di f è 1, raggiunto nei punti di massimo $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

Nella Sezione 2.7 abbiamo imparato a *leggere una funzione su una curva*: ora vediamo che la principale applicazione sta nella risoluzione di problemi di massimo o minimo su dei sottoinsiemi E di \mathbb{R}^2 . Infatti, come abbiamo visto negli esempi precedenti, nei casi più fortunati si tratta di cercare gli estremi di una funzione continua su un compatto: questi esistono per il Teorema di Weierstraß, ma il compatto ha un bordo, e le tecniche di questa sezione si applicano solo all'interno. Ecco che si devono cercare gli estremi della funzione sul bordo di E , che (se siamo in \mathbb{R}^2) è facile sia una curva. La lettura della funzione sulla curva bordo di E consente di completare la ricerca.

Con i metodi visti sopra, lo studio dei massimi e minimi di funzioni di più variabili, definite su un insieme aperto di \mathbb{R}^n , è completo. In molti casi però si è interessati a problemi in cui la funzione da minimizzare o massimizzare non è definita su un insieme aperto di \mathbb{R}^n ma su un sottoinsieme di dimensione più bassa; si parla in tal caso di *problemi vincolati* per evidenziare il fatto che le variabili sono legate tra loro da equazioni supplementari (ad esempio su una curva, bordo di un sottoinsieme di \mathbb{R}^2). Per studiare questo tipo di problemi abbiamo bisogno di chiarire i modi in cui le variabili possono essere collegate tra loro, che illustreremo nelle due sezioni seguenti in cui prima studieremo i modi di rappresentare una superficie k dimensionale in \mathbb{R}^n e poi vedremo quando un vincolo del tipo $\{f(\mathbf{x}) = 0\}$ è effettivamente una superficie.

3.8 - Funzioni convesse in \mathbb{R}^n

La definizione di insieme convesso in \mathbb{R}^n è stata ricordata al termine della Sezione 1.6. Data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$, chiamiamo **epi-grafico** di f la parte che sta al di sopra del grafico di f (che è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1}), cioè

$$\text{epi } f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(\mathbf{x})\}.$$

Definizione : se $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **convessa** se $\text{epi } f$ è convesso.

Ecco alcune proprietà di una funzione convessa.

Proposizione 3.16 : se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa allora A è per forza un insieme convesso; f è convessa se e solo se

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \forall t \in [0, 1], \quad f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}); \quad (3.13)$$

f è convessa se e solo se la sua restrizione a ogni retta che interseca A è una funzione convessa.

Dall'ultima osservazione deduciamo una importante conseguenza qualora f sia derivabile due volte; se ϕ è una parametrizzazione standard di una retta,

$$\phi(t) = \mathbf{P} + t\mathbf{v},$$

la composizione di f con ϕ è la funzione

$$g(t) = f(\mathbf{P} + t\mathbf{v}).$$

La convessità di f equivale alla convessità di g per ogni scelta della retta, ma essendo g derivabile due volte questa equivale alla condizione $g''(t) \geq 0$: come abbiamo già visto in (3.11),

$$g'(t) = (\nabla f)(\mathbf{P} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \quad g''(t) = ((\nabla^2 f)(\mathbf{P} + t\mathbf{v})\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

Se questo deve essere maggiore o uguale a zero per ogni scelta di \mathbf{P} e \mathbf{v} , allora per ogni punto $\mathbf{x} \in A$ ed ogni \mathbf{v} deve essere

$$((\nabla^2 f)(\mathbf{x})\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \geq 0,$$

ossia abbiamo dimostrato quanto segue.

Proposizione 3.17 : una funzione f derivabile due volte su un insieme convesso $A \subset \mathbb{R}^n$ è convessa se e solo se in ogni punto di A la matrice hessiana è definita non negativa.

Analogamente al caso unidimensionale, una funzione è strettamente convessa se la disuguaglianza in (3.13) è stretta per $0 < t < 1$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e vale la seguente osservazione.

Osservazione : se f è derivabile due volte in un insieme convesso, e la sua matrice hessiana è definita positiva, allora f è strettamente convessa.

Esempio : la funzione $(x + 2y)^2 + 3x^2$ è strettamente convessa, dato che

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x + 4y \\ 4x + 8y \end{pmatrix} \implies \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ha determinante positivo e traccia positiva, quindi è una matrice definita positiva.

Per le funzioni convesse vale un risultato analogo a quello che riguarda le rette tangenti in una dimensione.

Proposizione 3.18 : *se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa e differenziabile, e P è il piano tangente al grafico di f sopra un punto $x_0 \in A$, allora il grafico di f sta tutto non al di sotto di P ; se f era strettamente convessa, il grafico di f sta tutto al di sopra di P , salvo per il punto P stesso.*

Corollario 3.19 : *tutti i punti stazionari di una funzione convessa sono di minimo, e in essi f ha lo stesso valore; una funzione strettamente convessa può avere un solo punto stazionario, ed è di minimo assoluto.*

3.9 - Superfici k dimensionali in \mathbb{R}^n

In questa sezione ci occuperemo della descrizione analitica delle superfici S di dimensione k in \mathbb{R}^n con $k < n$, cosa che supporremo sempre nel seguito. La maniera più semplice è quella seguita anche per le curve, la rappresentazione parametrica, ma vi è una importante differenza di punto di vista.

Intanto osserviamo che la retta di equazione $y = 2x$ è un sottoinsieme del piano (x, y) che può essere visto sia come

$$\{(x, y) : y = 2x\},$$

grafico della funzione $x \mapsto 2x$, che come

$$\{(x, y) : x = y/2\},$$

grafico (di x in funzione di y , stavolta) della funzione $y \mapsto y/2$. Ricordiamo poi che abbiamo parlato in Sezione 2.4 di curve regolari intendendo che il vettore derivata ϕ' non era mai nullo. Questo fa sì che il coppia (2.11), pur essendo un insieme non propriamente "liscio", risulti essere una curva regolare (2.14). Il coppia non è il grafico di una funzione, rispetto a nessuna scelta della variabile indipendente. Meglio, in un piccolo intorno di qualunque punto diverso dall'origine e da $\phi(\pm t_0)$ (2.12) il coppia è grafico di y in funzione di x ; in un piccolo intorno di qualunque punto diverso dall'origine e dal punto $\phi(0) = (0, 1 - \sqrt{2})$ è anche grafico di x in funzione di y , ma l'origine sfugge a entrambi i casi.

In questa sezione vogliamo considerare degli insiemi unidimensionali che possono essere parametrizzati da una curva regolare che però, vista da vicino, in ogni suo punto somiglia a un arco di curva.

Definizione : un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è una **curva liscia** se per ogni punto $x_0 \in S$ esistono un intorno U di x_0 , un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ed una curva regolare $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che ϕ è iniettiva e

$$\phi(I) = S \cap U. \quad (3.14)$$

Vediamo un altro esempio fondamentale (es. 3.13). La circonferenza unitaria C si può vedere come immagine della curva

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

tuttavia questa curva non è iniettiva. Se restringiamo il dominio a $[0, 2\pi[$, ad esempio, otteniamo una curva regolare e iniettiva, però il punto $(1, 0)$ non verifica la condizione (3.14). Per vedere che la circonferenza è una curva liscia, occorre usare *due* diverse curve, ad esempio

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 < t < 2\pi$$

e

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t), \quad -\pi < t < \pi :$$

preso un punto $x \in C$, se questo non è $(1, 0)$ la condizione (3.14) è verificata con $\phi = \alpha$, e se non è $(-1, 0)$ è verificata con $\phi = \beta$. Dunque (3.14) è verificata in ogni punto. Per rappresentare C , abbiamo usato due **carte locali**, analogamente alle carte geografiche le quali, sovrapponendosi, permettono di rappresentare tutta la superficie terrestre. Proviamo a generalizzare questa situazione: fissati due interi k, n con $k \leq n$, l'insieme dei parametri sarà un aperto A di \mathbb{R}^k ed indicheremo con $t = (t_1, \dots, t_k) \in A$ il parametro (vettoriale) che descriverà la superficie S . La rappresentazione parametrica di S è data da una funzione $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e la superficie S risulterà essere l'immagine della funzione ϕ . Indicando con x l'elemento generico di S e con t l'elemento generico di A avremo quindi

$$x = \phi(t)$$

che, scritta in termini di componenti, diventa

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1, \dots, t_k) \\ x_2 = \phi_2(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(t_1, \dots, t_k). \end{cases}$$

In questo modo, la superficie S , **immagine** (e non **grafico**) di ϕ , è l'analogo del **sostegno** di una curva. Abbiamo visto in Sezione 2.4 che il sostegno di una curva è "liscio" non se la curva è C^1 , ma se è **regolare**, cioè se $\phi' \neq 0$. Questa condizione significa che ϕ' , che è una matrice $1 \times n$, ha almeno un elemento (che è poi un minore 1×1) non nullo, ovvero ha rango 1, che è il massimo possibile. Trasponiamo questa richiesta sulle superfici.

Definizione : se $A \subset \mathbb{R}^k$ è un aperto e $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $k < n$, è una funzione iniettiva, l'immagine $S = \phi(A)$ è una **k -superficie parametrica regolare** se la matrice gradiente $\nabla\phi$, che è una matrice $n \times k$, ha in ogni punto rango massimo, dunque uguale a k .

In definitiva, la rappresentazione parametrica di S è

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{t}), \quad \text{con} \quad \text{rango}(\nabla\phi) = k.$$

Esempio : la calotta superiore della sfera unitaria

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\} \quad (3.15)$$

è una 2-superficie parametrica regolare, con la parametrizzazione

$$\phi : \{t^2 + s^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(t, s) = (t, s, \sqrt{1 - t^2 - s^2});$$

abbiamo sostanzialmente usato come parametri le coordinate x e y , e abbiamo

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

che ha rango due, dato che il determinante della matrice delle prime due righe non fa mai zero (ecco perché non ci interessa scrivere l'ultima riga).

Anche la calotta inferiore, cioè quella che ha come polo il punto $(0, 0, -1)$, è una 2-superficie parametrica regolare, con quasi la stessa parametrizzazione:

$$(t, s, -\sqrt{1 - t^2 - s^2}).$$

Per esercizio trovate delle parametrizzazioni delle quattro calotte semisferiche, che hanno poli in $(\pm 1, 0, 0)$ e $(0, \pm 1, 0)$.

Possiamo considerare insiemi più generali, analoghi alle curve lisce.

Definizione : un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è una **k -superficie liscia** (o k -varietà) se per ogni punto di $\mathbf{x}_0 \in S$ esiste un intorno $U_{\mathbf{x}_0}$ tale che $S \cap U_{\mathbf{x}_0}$ sia una k -superficie parametrica regolare. Se $\phi : A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva, ha immagine $S \cap U_{\mathbf{x}_0}$ e gradiente di rango massimo, viene detta **carta locale di S vicino a \mathbf{x}_0** .

Se S è una k -superficie liscia, $\mathbf{x}_0 \in S$ e ϕ è una carta locale intorno ad \mathbf{x}_0 , indicati con t_1, \dots, t_k i parametri che variano in $A \subset \mathbb{R}^k$, avremo $\mathbf{x}_0 = \phi(\mathbf{t}_0)$ per un opportuno

$$\mathbf{t}_0 = (t_0^1, t_0^2, \dots, t_0^k) \in A;$$

consideriamo per \mathbf{t} in un intorno di \mathbf{t}_0^1 la funzione

$$\psi_1(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}, t_0^2, \dots, t_0^k),$$

ottenuta congelando le variabili t_0^2, \dots, t_0^k ovvero leggendo ϕ solo su un segmento che passa per t_0 nella direzione t_1 : questa è una curva che giace sulla superficie S , quindi il suo vettore tangente in $t = t_0^1$

$$\psi'_1(t_0^1) = \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_0)$$

è tangente alla superficie S in t_0 (es. 3.16). Lo stesso possiamo dire per le curve ψ_2, ψ_3, \dots che otterremmo congelando via via tutte le variabili tranne la seconda, o la terza eccetera (es. 3.15).

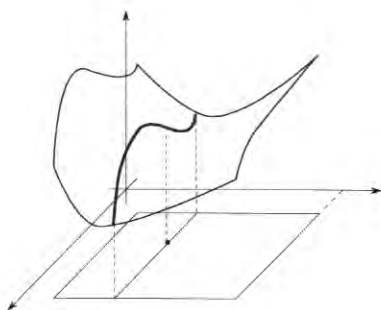


Fig. 3.2 : il sostegno di ϕ_1 (tratto più spesso) è tutto su S

In conclusione i vettori

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k}(t_0)$$

sono tangenti alla superficie S nel punto $\phi(t_0)$ (es. 3.14). Osserviamo che questi vettori sono le colonne della matrice jacobiana di ϕ in t_0 , che ha rango k : questi vettori sono allora linearmente indipendenti e generano quindi uno spazio lineare H di dimensione k , formato dai vettori che sono tangenti a S in $\phi(t_0)$. In analogia con la retta tangente, possiamo definire lo spazio tangente.

Definizione : sia S una k -superficie liscia in \mathbb{R}^n , e sia $\phi : A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta locale in un intorno di $x_0 = \phi(t_0)$. I vettori tangenti ad S nel punto x_0 sono gli elementi dello spazio vettoriale H , che ha dimensione k , generato da

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k}(t_0); \quad (3.16)$$

lo spazio tangente ad S nel punto x_0 è lo spazio affine $x_0 + H$, traslato in x_0 dello spazio vettoriale H . I vettori normali ad S in x_0 sono tutti quelli ortogonali ad H , e formano uno spazio di dimensione $n - k$.

Un caso particolarmente rilevante è il caso $k = n - 1$, in cui lo spazio normale ha dimensione 1 ed è quindi una retta; avremo allora per i vettori normali due soli versi possibili, quelli individuati da tale retta, che è generata da un qualunque vettore non nullo ortogonale a tutti e $n - 1$ i vettori (3.16). Dunque per trovare un vettore normale (poi, gli altri saranno multipli di questo) bisogna trovare una soluzione non nulla \mathbf{v} del sistema

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_0) = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_{n-1}}(t_0) = 0. \quad (3.17)$$

Questo è molto facile nel caso di una curva $\phi(t)$ in \mathbb{R}^2 ; in un punto $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0)$ il vettore tangente è $\phi'(t_0) = (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0))$ e quindi i vettori normali saranno tutti della forma

$$\alpha(\phi'_2(t_0), -\phi'_1(t_0)) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Di poco più difficile il caso delle superfici bidimensionali in \mathbb{R}^3 . Qui abbiamo i due vettori tangenti $\partial \phi / \partial t^1$ e $\partial \phi / \partial t^2$, e dobbiamo trovare un vettore ortogonale a entrambi. Ma nella Sezione 1.3 abbiamo visto che un tale vettore è dato dal prodotto vettoriale

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t_2}. \quad (3.19)$$

Esempio : consideriamo la superficie S della sfera unitaria, di dimensione 2 in \mathbb{R}^3 , che come insieme è descritto da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Dato che ogni punto di S cade in una delle sei calotte dell'esempio (3.15), S è una 2-superficie liscia. In questo caso è più facile determinare geometricamente i vettori normali: un vettore normale in un punto di S è sulla retta che passa per quel punto e per il centro, dunque i vettori normali in (x_0, y_0, z_0) sono quelli della forma

$$\alpha(x_0, y_0, z_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e i vettori tangenti sono tutti quelli (u, v, w) che sono ortogonali ai vettori normali, ossia verificano

$$0 = (u, v, w) \cdot (x_0, y_0, z_0) = ux_0 + vy_0 + wz_0.$$

Esempio : consideriamo di nuovo la superficie S della sfera unitaria, ma stavolta pensiamo in coordinate polari. Usando come parametri la longitudine θ e la co-latitudine α , abbiamo la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \sin \alpha \cos \theta \\ y = \sin \alpha \sin \theta \\ z = \cos \alpha \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \alpha \in [0, \pi]. \quad (3.20)$$

Quindi

$$\phi(\theta, \alpha) = (\sin \alpha \cos \theta, \sin \alpha \sin \theta, \cos \alpha),$$

con la matrice gradiente

$$\nabla \phi(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta & \cos \alpha \cos \theta \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \theta & \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix}.$$

Va osservato che i minori 2×2 (cioè i determinanti delle matrici 2×2) della matrice $\nabla \phi$ sono rispettivamente

$$-\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \theta, \quad -\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \theta, \quad (3.21)$$

che si annullano tutti per $\alpha = 0$ (polo Nord) e per $\alpha = \pi$ (polo Sud). In ogni altro punto almeno uno di essi è non nullo, per cui il rango della matrice $\nabla \phi$ è 2 in tutti i punti diversi dai due poli. Volendo trovare parametrizzazioni regolari (cioè con matrici gradiente di rango 2) anche intorno ai poli, avremmo dovuto usare più carte locali, ad esempio le sei calotte dell'esempio (3.15).

Osserviamo anche che il parametro bidimensionale (θ, α) non varia su un aperto ma nell'insieme $[0, 2\pi[\times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$. Volendo utilizzare insiemi aperti come insiemi di variabilità dei parametri, avremmo di nuovo dovuto usare più carte locali.

Esempio : la superficie di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = s \cos \theta \\ y = s \operatorname{sen} \theta \\ z = a\theta \end{cases} \quad s > 0, \theta \in \mathbb{R},$$

dove $a \neq 0$ è un parametro fissato, viene detta *elicoide*.

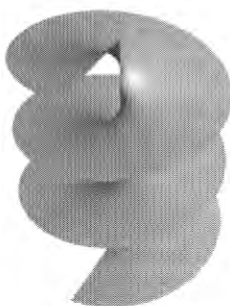


Fig. 3.3 : un'elicoide

Quindi

$$\phi(\theta, s) = (s \cos \theta, s \operatorname{sen} \theta, a\theta),$$

con la matrice gradiente

$$\nabla \phi(\theta, s) = \begin{pmatrix} -s \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ s \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che i minori 2×2 della matrice $\nabla \phi$ sono rispettivamente

$$-s, \quad -a \cos \theta, \quad -a \sin \theta,$$

che non si annullano mai contemporaneamente. Dunque abbiamo in ogni punto

$$\text{rango } \nabla \phi = 2.$$

Esempio : consideriamo in \mathbb{R}^2 l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

questa può essere parametrizzata dalla curva

$$\phi(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

per cui nel punto $\phi(t_0)$ ha vettore tangente

$$\phi'(t_0) = (-a \sin t, b \cos t)$$

e un vettore normale è

$$(b \cos t, a \sin t). \quad (3.22)$$

Esempio : consideriamo in \mathbb{R}^3 l'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1;$$

in un intorno del punto $\mathbf{x}_0 = (2, 1, 1)$ possiamo scrivere z in funzione di x e y , cioè parametrizzare la superficie con

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{4 - y^2 - x^2/2}).$$

Dato che

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{2\sqrt{4 - y^2 - x^2/2}}\right), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{4 - y^2 - x^2/2}}\right),$$

due vettori tangenti in \mathbf{x}_0 sono

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = (1, 0, -1), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = (0, 1, -1).$$

Un vettore normale è

$$\mathbf{N} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (1, 1, 1), \quad (3.23)$$

e possiamo scrivere l'equazione del piano tangente sia \mathfrak{E} (1.8) come

$$(\mathbf{X} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y + z = 4$$

sia in forma parametrica \mathfrak{E} (1.10) come

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + t \\ z = 1 - s - t. \end{cases}$$

Abbiamo brevemente incontrato una categoria speciale di curve, le *curve grafico cartesiano*, che erano curve della forma

$$\phi(t) = (t, f(t))$$

e si potevano scrivere non solo in forma parametrica (cioè dipendente dal parametro t) ma anche in forma cartesiana (cioè con una scrittura nelle sole variabili (x, y) del piano cartesiano) come

$$y = f(x).$$

Oltre alla forma parametrica, anche per una superficie S di dimensione k in \mathbb{R}^n abbiamo la rappresentazione cartesiana, che consiste nello scrivere $n - k$ variabili in funzione delle rimanenti k . Riordinando le variabili in modo che le k indipendenti siano le prime e le $n - k$ restanti siano le ultime abbiamo quindi la forma cartesiana usuale

$$y = f(x) \quad \text{con } x \in A$$

dove A è un aperto di \mathbb{R}^k ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. In termini di componenti abbiamo la scrittura

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_1(x_1, \dots, x_k) \\ x_{k+2} = f_2(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ x_n = f_{n-k}(x_1, \dots, x_k). \end{cases}$$

Osserviamo che la forma cartesiana è una particolare forma parametrica, dove si sono scelti come parametri le coordinate $t_j = x_j$ con $j = 1, \dots, k$ e dunque la funzione ϕ è data da

$$\phi(t) = (t, f(t)).$$

La matrice gradiente è quindi

$$\nabla \phi(t) = \begin{pmatrix} I_k \\ \nabla f(t) \end{pmatrix}$$

dove I_k è la matrice identica $k \times k$ e ∇f è la matrice gradiente di f , di dimensione $(n - k) \times k$. Il determinante della matrice $k \times k$ formata dalle prime k righe è quindi uguale ad 1, per cui

$$\text{rango } \nabla \phi(t) = k.$$

In altri termini, una rappresentazione cartesiana è sempre regolare.

Esempio : considerando l'elicoide dell'esempio precedente, si trova facilmente che una sua rappresentazione cartesiana, intorno ad un punto (x_0, y_0, z_0) con $x_0 \neq 0$ e $|z_0/a| < \pi/2$, è data da

$$z = a \arctan(y/x).$$

Esempio : le calotte semisferiche dell'esempio (3.15) erano rappresentate in modo cartesiano.

Esempio : un esempio interessante di superficie bidimensionale in \mathbb{R}^3 è dato dalla superficie del toro. Siano $r < R$ due numeri reali positivi; facciamo ruotare attorno all'asse z una circonferenza di raggio r contenuta nel piano xz con centro nel punto $(R, 0, 0)$.

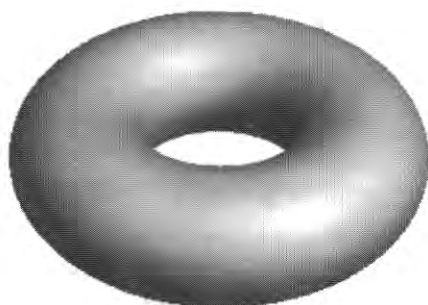


Fig. 3.4 : la superficie di un toro

Tale circonferenza è parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = R + r \cos \alpha \\ y = 0 \\ z = r \sin \alpha \end{cases} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

per cui, dopo averla ruotata intorno all'asse z , otteniamo la forma parametrica della superficie del toro:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \alpha) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \alpha) \sin \theta \\ z = r \sin \alpha \end{cases} \quad \alpha \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.24)$$

Dunque

$$\phi(\alpha, \theta) = ((R + r \cos \alpha) \cos \theta, (R + r \cos \alpha) \sin \theta, r \sin \alpha)$$

e la matrice gradiente è

$$\nabla \phi(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \cos \theta & -\sin \theta (R + r \cos \alpha) \\ -r \sin \alpha \sin \theta & \cos \theta (R + r \cos \alpha) \\ r \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

I tre minori 2×2 della matrice gradiente sono

$$-r \sin \alpha (R + r \cos \alpha), \quad r \cos \alpha \sin \theta (R + r \cos \alpha), \quad -r \cos \alpha \cos \theta (R + r \cos \alpha).$$

Calcoliamo la somma dei loro quadrati, che vale

$$r^2 (R + r \cos \alpha)^2 : \quad (3.25)$$

questa non vale mai zero, dunque i tre minori non possono essere contemporaneamente nulli per cui si ha

$$\text{rango } \nabla \phi(\alpha, \theta) = 2 \quad \text{per ogni } \alpha, \theta.$$

Dalla costruzione vista sopra si ricava che la superficie descritta è l'insieme

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2 \},$$

per cui la parte superiore (con $z \geq 0$) del toro ha la rappresentazione cartesiana

$$z = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2} \quad 0 \leq z \leq r, \quad R - r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + r,$$

mentre la parte inferiore (con $z \leq 0$) ha la rappresentazione

$$z = -\sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2} \quad -r \leq z \leq 0, \quad R - r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + r.$$

Nella prossima sezione vedremo un altro modo di rappresentare una superficie: quello che viene detto in *forma implicita*.

3.10 - Funzioni implicite

Iniziamo a discutere il caso bidimensionale e chiediamoci sotto quali condizioni un *luogo di zeri* del tipo $\{f(x, y) = 0\}$, con f funzione assegnata, sia in effetti il sostegno di una curva liscia, o addirittura una curva cartesiana, grafico cioè di una funzione $y = h(x)$ o $x = h(y)$. Intanto osserviamo che tale richiesta ha senso soltanto localmente, altrimenti neppure la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 = 1,$$

che è il luogo di zeri della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

sarebbe globalmente rappresentabile come un grafico cartesiano. Sempre considerando il caso della circonferenza, osserviamo che, escludendo i punti estremi a destra $(1, 0)$ ed a sinistra $(-1, 0)$, intorno ad ogni altro suo punto (x_0, y_0) abbiamo in effetti una curva di tipo cartesiano, di equazione

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{se } y_0 > 0) \quad \text{oppure} \quad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (\text{se } y_0 < 0).$$

Del resto, escludendo invece i punti estremi in alto $(0, 1)$ ed in basso $(0, -1)$, abbiamo, ancora localmente intorno ad ogni altro punto (x_0, y_0) , una curva di tipo cartesiano, di equazione

$$x = \sqrt{1 - y^2} \quad (\text{se } x_0 > 0) \quad \text{oppure} \quad x = -\sqrt{1 - y^2} \quad (\text{se } x_0 < 0).$$

In conclusione, nel caso della circonferenza, intorno ad ogni suo punto questa è un grafico cartesiano del tipo $y = h(x)$ oppure del tipo $x = h(y)$.

Non possiamo aspettarci che quanto visto per la circonferenza sia vero per il luogo di zeri di una qualsiasi funzione f ; ad esempio, prendendo come f la funzione costante 1 il luogo di zeri è l'insieme vuoto, mentre se f è la funzione costantemente nulla, il suo luogo di zeri è tutto il piano \mathbb{R}^2 . Ancora, prendendo

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

il suo luogo di zeri è ridotto ad un punto, l'origine.

Il risultato seguente, noto come *teorema delle funzioni implicite* o *teorema del Dini*, fornisce delle condizioni generali affinché un luogo di zeri del tipo $\{f(x, y) = 0\}$ sia localmente un grafico cartesiano.

Teorema 3.20 : siano A un aperto di \mathbb{R}^2 ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Indichiamo con S il luogo di zeri $\{f(x, y) = 0\}$ e sia $(x_0, y_0) \in S$. Se $\nabla_y f(x_0, y_0) \neq 0$ allora localmente intorno a (x_0, y_0) l'insieme S è grafico cartesiano $\{y = h(x)\}$ di una funzione h di classe \mathcal{C}^1 ; se invece $\nabla_x f(x_0, y_0) \neq 0$ allora localmente intorno a (x_0, y_0) l'insieme S è grafico cartesiano $\{x = h(y)\}$ di una funzione h di classe \mathcal{C}^1 .

In altre parole, il teorema delle funzioni implicite dice che se il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

non ha soluzione, il luogo di zeri S è localmente cartesiano intorno ad ogni suo punto (dato che nei punti di S la prima equazione è soddisfatta e quindi la seconda non può esserlo) ed è quindi una curva liscia. In particolare questo implica che la curva S non ha autointersezioni.

Esempio : consideriamo l'equazione

$$x^3 + y^3 + xy = 1 \quad (3.27)$$

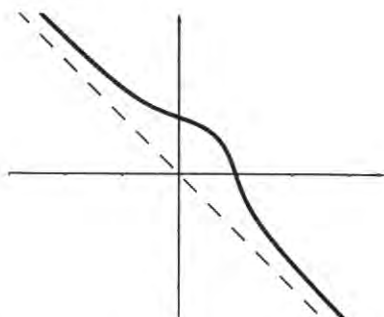
e chiediamoci se rappresenta una curva liscia in \mathbb{R}^2 . Applicando il Teorema 3.20 delle funzioni implicite, dobbiamo vedere se il sistema (3.26) ha soluzione. Abbiamo

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 1 \\ 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

e, ricavando $y = -3x^2$ dalla seconda equazione, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 2x^3 + 27x^6 = -1 \\ 27x^4 + x = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha come soluzioni $x = 0$ e $x = -1/3$, ma nessuna delle due risolve la prima equazione. Dunque il sistema (3.26) non ha soluzione, per cui il luogo di zeri considerato è una curva liscia in \mathbb{R}^2 . L'insieme S è rappresentato nella figura.

Fig. 3.5 : il luogo di zeri S e la retta $y = -x$ cui è asintotico

Pur non potendo, in generale, scrivere esplicitamente la funzione h che rappresenta localmente in maniera cartesiana il luogo di zeri S , possiamo spesso ricavare diverse informazioni interessanti. Ad esempio, se sappiamo che intorno a un certo punto $(x_0, y_0) \in S$ la curva S è un grafico cartesiano della forma $y = h(x)$, dall'equazione

$$f(x, h(x)) = 0,$$

derivando rispetto ad x , otteniamo

$$\nabla_x f(x, h(x)) + h'(x) \nabla_y f(x, h(x)) = 0,$$

da cui ricaviamo

$$h'(x) = -\frac{\nabla_x f(x, h(x))}{\nabla_y f(x, h(x))}. \quad (3.28)$$

In particolare, per $x = x_0$ abbiamo $h(x_0) = y_0$ e quindi

$$h'(x_0) = -\frac{\nabla_x f(x_0, y_0)}{\nabla_y f(x_0, y_0)}.$$

Questo ci permette, in particolare, di scrivere l'equazione della retta tangente a un luogo di zeri regolare in due dimensioni.

Proposizione 3.21 : siano A un aperto di \mathbb{R}^2 ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Indichiamo con S il luogo di zeri $\{f(x, y) = 0\}$ e sia $(x_0, y_0) \in S$. Se $\nabla_y f(x_0, y_0) \neq 0$ allora vicino a (x_0, y_0) l'insieme S è una curva liscia la cui retta tangente ha equazione

$$y = y_0 - \frac{\nabla_x f(x_0, y_0)}{\nabla_y f(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Nel caso dell'esempio (3.27), prendendo il punto $(0, 1) \in S$ avremmo ottenuto la retta tangente di equazione

$$y = 1 - \frac{x}{3}.$$

Se f è derivabile più volte, intorno al punto x_0 possiamo addirittura scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione h ; derivando rispetto ad x nell'equazione (3.28) otteniamo (omettendo per semplicità la scrittura delle variabili)

$$h'' = - \frac{(\nabla_{xx}f + h'\nabla_{xy}f)\nabla_y f - \nabla_x f(\nabla_{xy}f + h'\nabla_{yy}f)}{(\nabla_y f)^2}$$

e sostituendo l'espressione di h' ricavata da (3.28) si ottiene

$$h'' = - \frac{(\nabla_y f)^2 \nabla_{xx}f - 2(\nabla_x f)(\nabla_y f)\nabla_{xy}f + (\nabla_x f)^2 \nabla_{yy}f}{(\nabla_y f)^3}.$$

A questo punto abbiamo lo sviluppo di Taylor, intorno a x_0 , al secondo ordine

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}h''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Continuando con l'esempio (3.27), nel punto $(0, 1) \in S$ avremmo ottenuto $h''(0) = 0$ e quindi lo sviluppo di Taylor intorno a $x_0 = 0$

$$h(x) = 1 - \frac{1}{3}x + o(x^2).$$

Possiamo ora studiare la regolarità delle *curve di livello* di una funzione assegnata $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, già incontrate (1.17) nella Sezione 1.3. Come sa chiunque abbia visto una carta altimetrica in montagna o una carta delle profondità marine, le curve di livello sono molto spesso regolari, con qualche rara eccezione. Infatti vi sono alcune "curve" ridotte a un punto (le cime delle colline o i punti più bassi dei laghetti), altre "curve" decisamente troppo ampie (un altopiano a quota costante è tutto quanto una curva di livello!), altre che si incrociano (quelle che rappresentano la quota di un passo fra due colline). Vediamo di chiarire analiticamente quando si hanno questi casi eccezionali. Abbiamo una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ed un numero reale c assegnati e ci interessiamo all'insieme di livello

$$S_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}.$$

L'insieme S_c può essere vuoto, ad esempio se abbiamo scelto c più grande del massimo di f o più piccolo del minimo di f . Inoltre in S_c possono esserci dei punti isolati, ad esempio se c coincide con il valore di f in un punto di massimo o di minimo locale isolato. Supponiamo che S_c non sia vuoto e che la funzione f sia almeno di classe C^2 . Dal Teorema 3.20 delle funzioni implicite sappiamo che se il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = c \\ \nabla f(x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

non ha soluzioni, allora l'insieme di livello S_c è una curva liscia. Supponiamo che invece ci sia una soluzione (x_0, y_0) del sistema e chiediamoci come sia fatto l'insieme S_c intorno al punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Siccome $f(x_0, y_0) = c$ e $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, lo sviluppo di Taylor di f intorno a \mathbf{x}_0 diventa

$$f(\mathbf{x}) = c + \frac{1}{2}(\nabla^2 f)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2).$$

Trascurando il resto di Peano $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$ abbiamo che il comportamento di f intorno a \mathbf{x}_0 è determinato dalla forma quadratica $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ e quindi dalla matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$. Se gli autovalori della matrice hessiana sono entrambi non nulli abbiamo:

- a) nel caso di autovalori entrambi positivi, il punto \mathbf{x}_0 è di minimo locale isolato, quindi \mathbf{x}_0 è un punto isolato dell'insieme di livello S_c ; in termini geografici ci troviamo sul fondo di un laghetto;
- b) nel caso di autovalori entrambi negativi, il punto \mathbf{x}_0 è di massimo locale isolato, quindi \mathbf{x}_0 è di nuovo un punto isolato dell'insieme di livello S_c ; in termini geografici ci troviamo sulla cima di una collina;
- c) nel caso di autovalori di segno discorde, il punto \mathbf{x}_0 è un punto di sella isolato, la curva S_c non è liscia e presenta un'autointersezione nel punto \mathbf{x}_0 ; in termini geografici ci troviamo in un punto di valico.

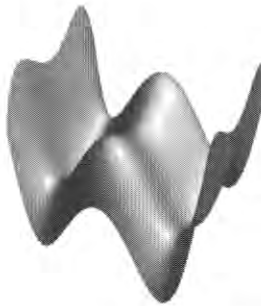


Fig. 3.6 : la funzione $(x^2 - 1)^2 + 1.2y^2 - y^4$ presenta punti di minimo locale, massimo locale e sella

Il teorema delle funzioni implicite in dimensione più alta è più complicato formalmente, ma l'idea è la stessa: una condizione di non degenerazione sull'insieme delle derivate implica la locale cartesianità del luogo di zeri. Un caso che già conosciamo è quello in cui abbiamo a che fare con una funzione affine $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ del tipo

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

con A matrice $m \times n$ (con $m \leq n$) e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ assegnati. Una conseguenza del Teorema di Rouché-Capelli afferma che, se il rango della matrice A è massimo, dunque uguale ad m , allora il luogo di zeri della funzione \mathbf{f} , cioè l'insieme $\{A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ è un sottospazio

affine di \mathbb{R}^n di dimensione $n - m$, e in particolare se il determinante della matrice A_0 formata dalle prime m colonne di A è diverso da zero, le variabili x_1, \dots, x_m si possono scrivere in funzione delle altre $n - m$.

Consideriamo ora un aperto A di \mathbb{R}^n ed una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$; l'insieme degli zeri

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

corrisponde quindi al sistema

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots \\ f_m(x) = 0 \end{cases}$$

dove $f_k(x)$ sono le componenti del vettore $f(x)$ di \mathbb{R}^m . Intuitivamente possiamo pensare che, avendo n variabili x_1, \dots, x_n ed m condizioni date dal sistema precedente $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ con $1 \leq k \leq m$, sia naturale aspettarsi, almeno nei casi non singolari, che l'insieme S degli zeri sia una superficie liscia di dimensione $n - m$. Si usa anche dire che il sistema ha $n - m$ gradi di libertà. Il teorema seguente estende quello visto in precedenza al caso di dimensioni qualsiasi.

Teorema 3.22 : siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 , con $m \leq n$. Indichiamo con S il luogo di zeri $\{f(x) = 0\}$ e sia x_0 un punto di S . Supponiamo che il rango della matrice $m \times n$ data da $\nabla f(x_0)$ sia massimo, cioè $\text{rango } \nabla f(x_0) = m$. Allora localmente intorno a x_0 l'insieme S è grafico cartesiano $\{z = h(y)\}$ di una funzione h di classe C^1 definita su un aperto di \mathbb{R}^{n-m} ed a valori in \mathbb{R}^m . Qui z rappresenta un insieme di m variabili, mentre y rappresenta l'insieme delle restanti $n - m$ variabili.

In altri termini, il luogo di zeri $\{f(x) = 0\}$ è una superficie liscia di dimensione $n - m$ in \mathbb{R}^n a patto che il sistema

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{rango } \nabla f(x) < m \end{cases} \quad (3.29)$$

non abbia alcuna soluzione in \mathbb{R}^n . Osserviamo che nel sistema precedente l'uguaglianza $f(x) = 0$ equivale ad m equazioni

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

mentre la condizione $\text{rango } \nabla f(x) < m$ equivale all'annullarsi di tutti i minori $m \times m$. Siccome i minori $m \times m$ di una matrice $m \times n$ sono $\binom{n}{m}$, il sistema (3.29) è composto da $m + \binom{n}{m}$ equazioni in n variabili.

Osservazione : il teorema precedente dà solo una condizione *sufficiente*: se il rango è sempre massimo allora abbiamo una superficie liscia. Non dice il viceversa, e in particolare un luogo di zeri può essere regolare anche se il sistema (3.29) ha soluzione. Ad esempio,

se $S = \{f(x, y) = 0\}$ è una curva liscia, posto $g = f^2$ naturalmente $S = \{g(x, y) = 0\}$, ma dato che $\nabla(f^2) = 2f\nabla f$ il sistema (3.29) è

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \nabla g(x, y) = \mathbf{0} \end{cases} \iff \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ 2f(x, y)\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

e in tutti i punti dove la prima equazione è soddisfatta, vale a dire in tutti i punti di S , è soddisfatta anche la seconda!

Esempio : questo è anche un esercizio di visualizzazione. Immaginate un tubo cilindrico, diciamo di raggio 10, adagiato per terra; con un trapano, tenuto verticale e in centro al tubo, facciamo un foro attraverso le pareti del tubo, e ci interessa come è fatto il *bordo* del foro. Supponiamo che il trapano, anziché distruggere il materiale, lo tagli via, in modo che quando lo usiamo ricaviamo il tubo forato, e anche una placchetta (o due) che il trapano ha tolto al tubo per praticare il foro. Se la punta del trapano è molto piccola, diciamo di diametro 1, il trapano avrà fatto due fori (uno sulla parete vicina e uno su quella lontana), e se spianiamo le due piccole placchette ottenute vediamo che somigliano a due cerchietti, ma un poco allungati nella direzione in cui erano piegati per adattarsi alla superficie del cilindro. Se la punta è più grossa, diciamo di diametro 9, le due placchette avranno diametro 9 nella direzione dell'asse del cilindro, ma assai maggiore nella direzione che si piega attorno alla superficie, dato che arrivano quasi a toccarsi. Che accade aumentando ancora il diametro?

Riportiamo il problema alla matematica: consideriamo i cilindri

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1\}, \quad T_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r^2\}; \quad (3.30)$$

il primo ha come asse l'asse y e raggio 1, il secondo (il trapano...) ha come asse l'asse z e raggio r . Vogliamo studiarne l'intersezione, per determinare se sia o meno una curva liscia. Posto

$$f_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2$$

l'intersezione

$$\gamma = C \cap T_r$$

è il luogo di zeri di $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$. Abbiamo

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

quindi i minori 2×2 di $\nabla \mathbf{f}$ sono

$$4xy, \quad -4xz, \quad -4yz$$

e il sistema (3.29) si scrive

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = r^2 \\ xy = 0 \\ xz = 0 \\ yz = 0. \end{cases}$$

Cerchiamone le soluzioni: le ultime tre equazioni sono soddisfatte solo se almeno due fra x , y e z sono nulli; però per la prima equazione x e z non possono essere entrambi nulli, quindi certamente deve essere nullo y . Per la seconda equazione x e y non possono essere entrambi nulli, quindi certamente deve essere nullo z . Ma se $y = z = 0$ le prime due equazioni danno

$$x^2 = 1, \quad x^2 = r^2$$

e questo è impossibile se $r \neq 1$. Dunque se $r \neq 1$ l'insieme γ è localmente una curva liscia.

Il caso $r = 1$ è più delicato: infatti i punti $(\pm 1, 0, 0)$ appartengono a γ ma lì la matrice ∇f ha rango 1 e non 2, mentre negli altri punti di γ (e ve ne sono, ad esempio $(0, \pm 1, 1) \in \gamma$) ha rango 2. Per il Teorema 3.22, in un intorno di ciascuno di questi ultimi punti γ è una curva liscia, ma non possiamo applicare il teorema nei punti $(\pm 1, 0, 0)$. Ciò significa che vicino a questi punti l'insieme γ **potrebbe non essere** una curva liscia, ma potrebbe anche esserlo: semplicemente, non possiamo applicare il teorema che ci assicurerebbe che lo è. Lo studio di questi casi è sempre difficile, vediamo che si può dire: γ è simmetrico sia rispetto a x (cambiando di segno all'ascissa di un punto di γ si rimane in γ , dato che $f_1(x, y, z) = f_1(-x, y, z)$ e lo stesso per f_2) che a y che a z . Studiamone allora la porzione con $x, y, z \geq 0$: ricaviamo

$$z^2 = 1 - x^2 = y^2 \implies z = y = +\sqrt{1 - x^2}.$$

Questo ci dice che nell'ottante (l'equivalente tridimensionale del quadrante) $x, y, z \geq 0$ c'è un ramo di γ che per $x \rightarrow 1$ si avvicina a $(1, 0, 0)$ stando sul piano $y = z$. Parametrizzando questo ramo con

$$\phi(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}, \sqrt{1 - t^2})$$

abbiamo

$$\phi'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}\right) \implies \|\phi'(t)\| = \sqrt{\frac{1 + t^2}{1 - t^2}}$$

e dunque il versore tangente è

$$\tau(t) = \sqrt{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \phi'(t) = \left(\sqrt{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2}}\right)$$

che per $t \rightarrow 1^-$ tende a

$$\tau(1) = (0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

La retta tangente in $t = 1$ a questo ramo di γ è allora parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano (y, z) . Per simmetria, se consideriamo l'ottante $x, z \geq 0$, $y \leq 0$ otterremmo un altro ramo di γ che ha retta tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante del piano (y, z) : dunque in $(1, 0, 0)$ vi sono due rami di γ che si incrociano (ad angolo retto) e γ non è una curva liscia.

3.11 - Moltiplicatori di Lagrange

Abbiamo ora gli strumenti per affrontare lo studio di problemi di massimo e di minimo vincolati. Si tratta di problemi del tipo

$$\min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\} \quad (3.31)$$

dove S è una superficie liscia k -dimensionale in \mathbb{R}^n . Intanto osserviamo che la definizione di punto di massimo o minimo locale data all'inizio della Sezione 3.7 si applica non solo al caso della ricerca di tali punti in un aperto, ma su un insieme qualsiasi, ad esempio anche una k -superficie liscia. Quello che non possiamo applicare è la generalizzazione del Teorema di Fermat 3.12 al caso di \mathbb{R}^n : infatti in quell'enunciato il punto \mathbf{x}_0 deve essere *interno* all'insieme, e una k -superficie liscia in \mathbb{R}^n non ha alcun punto interno.

Andiamo per gradi: il caso più semplice è quando la superficie S è espressa in forma parametrica; sappiamo che in tal caso esistono un aperto A di \mathbb{R}^k ed una funzione $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$\text{rango } \nabla \phi = k \quad \text{e} \quad S = \{\phi(t) : t \in A\}.$$

Allora il problema di minimo (3.31) può essere riscritto nella forma

$$\min \{f(\phi(t)) : t \in A\}$$

e diventa un problema di minimo libero, in un dominio di \mathbb{R}^k , per la funzione composta $f \circ \phi$. I suoi punti stazionari si trovano dunque come soluzioni del sistema

$$\nabla(f \circ \phi)(t) = 0$$

che, per la regola di derivazione delle funzioni composte, diventa

$$((\nabla f)(\phi(t))) (\nabla \phi(t)) = 0.$$

La natura dei punti stazionari può poi essere studiata mediante l'analisi della matrice hessiana $\nabla^2(f \circ \phi)$, come descritto nella Sezione 3.7.

Osservazione : se la superficie S è parametrizzabile solo attraverso varie carte locali, si dovranno considerare vari problemi di massimo o minimo, uno per ciascuna carta locale — stando attenti ai doppioni: lo stesso punto di S potrebbe apparire in due o più carte locali.

Esempio : consideriamo, fissato un numero reale $p > 0$, la funzione

$$f(x, y) = |x|^p + |y|^p$$

definita sulla circonferenza unitaria $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Parametrizzando S nella forma usuale

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

ci riconduciamo allo studio della funzione di una variabile

$$g(\theta) = |\cos \theta|^p + |\sin \theta|^p, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Essendo g periodica di periodo $\pi/2$ possiamo limitarci a studiarla per $\theta \in [0, \pi/2[$. Si trova facilmente che:

- a) se $p = 2$ la funzione g è costantemente uguale ad 1;
- b) se $p > 2$ il massimo di g è nel punto $\theta = 0$ e vale 1, il minimo è invece nel punto $\theta = \pi/4$ e vale $2^{1-p/2}$;
- c) se $p < 2$ la situazione è rovesciata: il massimo di g è nel punto $\theta = \pi/4$ e vale $2^{1-p/2}$, il minimo è invece nel punto $\theta = 0$ e vale 1.

Nel caso di superfici cartesiane possiamo usare la rappresentazione cartesiana di S come grafico di una funzione ϕ , che esprime in termini di k variabili $t \in \mathbb{R}^k$ le $n - k$ variabili restanti. Prendendo ad esempio le variabili indipendenti come le prime k abbiamo $x = (t, \phi(t))$ e quindi il problema di minimo (3.31) si scrive nella forma

$$\min \{ f(t, \phi(t)) : t \in A \}$$

dove A è un dominio di \mathbb{R}^k . Abbiamo quindi, ancora una volta un problema di minimo libero, che possiamo trattare con i metodi della Sezione 3.7.

Esempio : vogliamo massimizzare la funzione

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

sulla sfera unitaria di \mathbb{R}^3

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Dall'espressione della funzione f osserviamo che, per cercare il suo massimo, possiamo limitarci al caso $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$: infatti gli altri casi si ottengono cambiando segno a una o più delle variabili, e il valore di f o rimane lo stesso o cambia solo segno, diventando negativo. Per questi valori la superficie S è cartesiana e conviene usare la rappresentazione

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}.$$

Posto $S^+ = \{(x, y, z) \in S : x > 0, y > 0, z > 0\}$, il nostro problema di massimo vincolato diventa quindi

$$\max_{S^+} [x^3 z (1 - x^2 - z^2)],$$

che è adesso un problema di massimo libero. Prima di tutto stabiliamo che il massimo esiste: osserviamo che se una delle variabili si annulla la funzione f vale zero, dunque posto $S_0^+ = \{(x, y, z) \in S : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ abbiamo

$$\sup_{S^+} f = \sup_{S_0^+} f;$$

ma S_0^+ è chiuso e limitato ed f è continua, perciò ha massimo su S_0^+ per il Teorema di Weierstraß 1.20. Dato che il massimo su S_0^+ non è zero, viene raggiunto in un punto di S^+ . Ora possiamo applicare i metodi differenziali: annullando il gradiente di $x^3z(1-x^2-z^2)$, che è funzione delle sole variabili (x, z) , si trova il sistema

$$\begin{cases} x^2z(3-5x^2-3z^2) = 0 \\ x^3(1-x^2-3z^2) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = 1/\sqrt{2}$, $z = 1/\sqrt{6}$. Il valore massimo della funzione f iniziale è quindi

$$\max f = \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \text{raggiunto nel punto } (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}).$$

Vediamo ora come si procede nel caso in cui la superficie S sia data in forma implicita: il metodo che si usa in questi casi è quello detto dei *moltiplicatori di Lagrange*, illustrato nel teorema seguente.

Teorema 3.23 : sia A un aperto di \mathbb{R}^n , e sia $S = \{g(x) = 0\}$ con $g : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ avente jacobiano di rango $n-k$ in ogni punto di S . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e sia x_0 un punto di massimo o minimo locale per f su S . Allora esistono $n-k$ numeri reali c_1, \dots, c_{n-k} (detti *moltiplicatori di Lagrange*) tali che

$$(\nabla f + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \nabla g_j)(x_0) = 0,$$

dove le g_j sono le $n-k$ componenti della funzione g .

In altre parole, è come se, invece di essere di massimo o minimo locale per f , il punto x_0 lo fosse per la funzione $f + \sum_{j=1}^{n-k} c_j g_j$. Dovremo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ (\nabla f + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \nabla g_j)(x) = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

che ha $2n-k$ incognite (le n variabili x_i e gli $n-k$ moltiplicatori c_j) e $2n-k$ equazioni ($n-k$ di $g = 0$ ed n di $\nabla f + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \nabla g_j = 0$) (es. 3.21). Nel caso particolare in cui S sia una ipersuperficie, cioè con $k = n-1$ e dunque $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avremo un solo moltiplicatore di Lagrange c (es. 3.17) e la condizione (3.32) diventa

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ (\nabla f + c \nabla g)(x) = 0. \end{cases}$$

Esempio : determiniamo, tra tutti i possibili cilindri di volume assegnato V , quello che minimizza la superficie totale (es. 3.22). In altri termini, vogliamo trovare la forma di un contenitore cilindrico (ad esempio una scatola di carne) che, a parità di contenuto, impieghi meno materiale possibile. Indicando con r ed h rispettivamente il raggio e l'altezza del cilindro, abbiamo il problema di minimizzare la funzione

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad r \geq 0, \quad h \geq 0,$$

con il vincolo di volume $\pi r^2 h = V$, cioè

$$g(r, h) = \pi r^2 h - V = 0.$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 4\pi r + 2\pi h + c2\pi r h = 0 \\ 2\pi r + c\pi r^2 = 0, \end{cases}$$

dove c è il moltiplicatore di Lagrange. Si trova quindi, semplificando, $h = 2r$, che ci dice che le scatole più efficienti sono quelle in cui l'altezza coincide con il diametro. Volendo poi trovare esplicitamente i valori di r ed h ottimi, si ha

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}, \quad h = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Esempio : un caso particolare e frequente è quello di massimizzare una funzione *affine* su di un *poliedro convesso*; questo è definito come intersezione di semispazi, cioè insiemi del tipo

$$H = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \leq c\}$$

(pensate a un ordinario poliedro in \mathbb{R}^3 , e guardatene una faccia: questa fa parte di un piano, e il poliedro è tutto contenuto in uno dei due semispazi delimitati da questo piano). Il bordo di un poliedro in \mathbb{R}^3 ha *facce*, cioè parti contenute in uno solo dei piani che lo delimitano, *spigoli*, cioè parti contenute in due dei piani, e *vertici*, che fanno parte di tre o più piani. Per poliedri in \mathbb{R}^n la situazione è più complicata, dato che il suo bordo può avere porzioni di qualunque dimensione fra zero (i vertici) e $n-1$ (le facce vere e proprie). Nel seguito dell'esempio ci limitiamo a \mathbb{R}^3 .

Supponiamo che il poliedro P sia definito come

$$P = H_1 \cap \dots \cap H_k, \quad H_i = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{X} \cdot \mathbf{N}_i \leq c_i\} \quad \text{per } i = 1, \dots, k$$

e supponiamo per evitare lunghi giri di parole che P sia limitato, quindi (essendo intersezione di semispazi chiusi) compatto. Per massimizzare o minimizzare su P una funzione affine

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} - c$$

vediamo anzitutto che questa ha gradiente \mathbf{N} , quindi o è costante (se $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, ma allora la massimizzazione è banale) o ha gradiente mai nullo, quindi non ha punti stazionari

dentro P . Dunque a parte casi banali una funzione affine su P assume il massimo e il minimo sempre sul bordo (es. 3.20). Ora osserviamo che:

- a) se f assume lo stesso valore in due punti distinti, è costante sul segmento che li congiunge (e sulla retta che passa per essi);
- b) se f assume lo stesso valore in tre punti non allineati, è costante sul piano che li contiene;
- c) f è costante su una retta se e solo se N è ortogonale alla retta;
- d) f è costante su un piano se e solo se N è ortogonale a quel piano.

A questo punto possiamo provare che **il massimo e il minimo sono assunti nei vertici**: infatti se il massimo fosse assunto dentro una delle facce, diciamo quella il cui vettore ortogonale è N_1 , per il Teorema 3.23 dovremmo avere che ∇f , cioè N , è parallelo a N_1 , quindi f è costante sulla faccia e in particolare il valore massimo è assunto anche in tutti i vertici di quella faccia.

Un discorso analogo vale sugli spigoli, su ciascuno dei quali f non può avere massimo all'interno ma necessariamente negli estremi: per il Teorema 3.23 se f ha massimo su uno spigolo N deve essere ortogonale allo spigolo, ma allora f è costante sullo spigolo e il massimo è di nuovo anche in un vertice. In conclusione, su un poliedro convesso (e compatto) una funzione affine assume sia il massimo che il minimo nei vertici. Ma dato che un poliedro qualunque si può sempre scomporre come unione di poliedri convessi, il risultato vale per poliedri compatti qualsiasi) e in qualunque numero di dimensioni).

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{x_i} = x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$$

definita sull'insieme degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che hanno le componenti $x_i \geq 0$. Ricordando che $0^0 = 1$, vogliamo calcolare il massimo ed il minimo valore di f sull'insieme

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Per come è stata definita, la funzione f è continua su S ed S è un insieme chiuso e limitato, quindi per il teorema di Weierstraß sia massimo che minimo esistono.

Iniziamo a considerare punti interni ad S , in cui $x_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ed applichiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Essendo

$$\nabla_{x_i} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})(1 + \log x_i)$$

abbiamo le equazioni

$$f(\mathbf{x})(1 + \log x_i) + c = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

dove c è l'unico moltiplicatore di Lagrange. Se ne deduce che i valori $\log x_i$ sono tutti coincidenti e dunque $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Dalla definizione di S si ha allora che l'unico punto stazionario interno è il punto

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right),$$

con valore $f(\mathbf{x}) = 1/n$. Restano da esaminare i punti in cui qualche x_i si annulla; cominciamo con il caso in cui uno solo degli x_i si annulli, ad esempio sia $x_n = 0$. Ci riduciamo allora a studiare i massimi ed i minimi della funzione

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{x_i} = x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_{n-1}^{x_{n-1}}$$

sull'insieme

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Ripetendo i calcoli precedenti troviamo che l'unico punto stazionario interno è il punto con tutte le $n-1$ coordinate uguali a $1/(n-1)$, su cui la funzione f assume il valore $1/(n-1)$. Consideriamo ora il caso in cui due coordinate si annullino, ad esempio x_n ed x_{n-1} ; troveremo che l'unico punto stazionario interno a questa configurazione è il punto con tutte le $n-2$ coordinate uguali a $1/(n-2)$, su cui la funzione f assume il valore $1/(n-2)$. Così continuando, troveremo i valori di f

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}.$$

Resta l'ultimo caso in cui tutte le coordinate eccetto una sono nulle; su questi punti il valore della funzione f è 1. In definitiva abbiamo trovato che:

- il valore minimo di f è $1/n$ ed è assunto nell'unico punto di minimo $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$;
- il valore massimo di f è 1 ed è raggiunto in tutti i punti di S che hanno una coordinata uguale ad 1 e tutte le altre nulle.

Esempio : impostiamo ora il problema di determinare la minima distanza tra due curve piane regolari date in forma implicita (es. 3.18)

$$S_1 = \{g(x, y) = 0\}, \quad S_2 = \{h(s, t) = 0\}.$$

La funzione da minimizzare è quindi

$$f(x, y, s, t) = (x - s)^2 + (y - t)^2.$$

Abbiamo preso il quadrato della distanza; i punti di minimo sono ovviamente gli stessi che se avessimo preso la distanza e per il valore minimo basterà alla fine prendere la radice quadrata di quanto trovato (es. 3.19). Avendo due vincoli avremo due moltiplicatori di Lagrange c, d , con il sistema

$$\begin{cases} 2(x - s) + c \nabla_x g(x, y) = 0 \\ 2(y - t) + c \nabla_y g(x, y) = 0 \\ 2(s - x) + d \nabla_s h(s, t) = 0 \\ 2(t - y) + d \nabla_t h(s, t) = 0, \end{cases}$$

oltre naturalmente alle due equazioni che definiscono S_1 ed S_2 .

Potete per esercizio calcolare la minima distanza tra due parabole, o quella tra un'ellisse ed una retta.

Esercizi relativi al capitolo 3

Esercizio 3.1 : calcolate in un punto generico il vettore gradiente delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = xe^{y^2}$;
- b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$;
- c) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Esercizio 3.2 : calcolate in un punto generico la matrice jacobiana delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = (2xy - y^2, x^2e^y)$;
- b) $f(x, y, z) = (x - y - z, y - x - z, z - x - y)$;
- c) $f(x, y, z) = (x^2yz, z^2 - x)$.

Esercizio 3.3 : calcolate la divergenza delle funzioni dell'esercizio 3.2, qualora possibile.

Esercizio 3.4 : calcolate $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$:

- a) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3}/2, -1/2)$;
- b) $f(x, y) = (x^2 - y) + \arctan(2 + \sin y)$, $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$;
- c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Esercizio 3.5 : studiate la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni, in tutti i punti del loro dominio:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|^\alpha + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3.6 : determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = |xyz|^\alpha$$

risulti differenziabile nell'origine.

Esercizio 3.7 : determinate l'equazione del piano tangente e il vettore normale al grafico delle seguenti funzioni, nei punti a fianco indicati:

- a) $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^2$ in $P \equiv (1, -2, 2)$;
- b) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - \log x}$ in $P \equiv (1, 1, 1)$;
- c) $f(x, y) = \arctan(2x + 5y - 2)$ in $P \equiv (1, 0, 0)$.

Esercizio 3.8 : calcolate in un punto generico la matrice hessiana delle funzioni dell'esercizio 3.1.

Esercizio 3.9 : scrivete lo sviluppo di Taylor di centro $(0, 0)$, fino all'ordine 2 (compreso), della funzione

$$f(x, y) = \cos(x + y) \cos(x - y).$$

Esercizio 3.10 : per le seguenti funzioni determinate tutti i punti stazionari, dicendo per ognuno di essi se si tratta di un punto di minimo locale, di massimo locale, o di sella, o altro; stabilite poi se le funzioni ammettono minimo o massimo assoluti sul loro dominio:

- a) $f(x, y) = x^4 - kxy + y^4$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$;
- b) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$;
- c) $f(x, y, z) = x^2 + y \sin z$.

Esercizio 3.11 : determinate gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = y(e^y + x^2 - 2x)$ su tutto \mathbb{R}^2 ;
- b) $f(x, y) = x^2ye^{x+\alpha y}$ su tutto \mathbb{R}^2 , al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.12 : determinate, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluti ed i valori massimo e minimo delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ su tutto \mathbb{R}^2 ;
- b) $f(x, y) = e^{-x} \sin y - e^{-y} \sin x$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
- c) $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- d) $f(x, y, z) = x + y + kz^2$ sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, al variare del parametro $k > 0$;
- e) $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.13 : determinate se le curve degli esercizi 2.8 e 2.13 sono lisce.

Esercizio 3.14 : determinate il vettore tangente e due vettori normali all'elica cilindrica (2.7) nel punto corrispondente a $t = \pi/6$.

Esercizio 3.15 : provate che l'iperboloide a una falda (1.23) è una 2-superficie liscia.

Esercizio 3.16 : esaminando i vettori tangenti, concludete che il cono (1.21) non è una 2-superficie liscia.

Esercizio 3.17 : calcolate i valori massimo e minimo ed i rispettivi punti in cui sono raggiunti, per la funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$$

sull'insieme $A = \{\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

Esercizio 3.18 : determinate il punto della curva $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}$ che è più vicino all'origine.

Esercizio 3.19 : determinate, se esistono, i punti di massima e minima distanza dall'origine della curva descritta dall'equazione

$$|x|^p + |y|^p = 1$$

al variare del parametro $p \in]0, +\infty[$.

Esercizio 3.20 : sia A una matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva, e sia E l'ellissoide in \mathbb{R}^n

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \cdot x \leq 1\}.$$

Determinate il massimo valore della coordinata x_n al variare di x in E .

Esercizio 3.21 : calcolate i valori massimo e minimo ed i rispettivi punti in cui sono raggiunti, per le funzioni seguenti, le cui variabili sono vincolate agli insiemi indicati:

- a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'insieme $\{1 + x^2 - z^2 = 0\}$;
- b) $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme $\{ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$, con $a, b, c > 0$;
- c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'insieme $\{x - y + 3z = 3, 2x + 2y + z = 1\}$;
- d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme $\{x^3 + y^3 = 3xy\}$.

Esercizio 3.22 : determinate il cono circolare retto, di volume V assegnato, avente superficie totale minima.

Esercizio 3.23 : determinate il parallelepipedo inscritto nell'ellissoide $E = \{ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$ avente:

- a) volume massimo;
- b) superficie totale massima.

Esercizio 3.24 : Tra tutti i bicchieri di forma cilindrica (ovviamente senza il cerchio in alto) e di volume assegnato, uguale a 100 cm^3 , determinare quello per cui la superficie totale è minima (dunque quello che utilizza meno vetro).

Esercizio 3.25 : determinate tutte le funzioni differenziabili $u(x, y)$ definite su \mathbb{R}^2 tali che

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Esercizio 3.26 : una ditta può produrre tre tipi di bicchieri; per produrre 100 bicchieri del tipo A servono 20kg di vetro, per il tipo B 25kg e per il tipo C 30kg. D'altra parte

il guadagno della ditta è pari a 70 centesimi per ogni bicchiere di tipo A, 80 per ogni bicchiere di tipo B e 1 euro per ogni bicchiere di tipo C. La ditta ha in magazzino 3000kg di vetro grezzo, ma ha imballaggi solo per 12000 bicchieri. Quanti di tipo A, quanti di B e quanti di C conviene che ne produca, per massimizzare il guadagno?

Esercizio 3.27 : un corriere trasporta solo scatole a forma di parallelepipedo rettangolo, e fa pagare il trasporto in base alla somma delle tre dimensioni. Determinate la forma della scatola di massimo volume, fra quelle che hanno somma delle tre dimensioni pari a 120 cm.

Esercizio 3.28 : le poste americane usano una regola differente: per una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo, l'altezza è definita come la dimensione maggiore, la base è il rettangolo formato dai due lati restanti. Il costo di trasporto è calcolato in base alla somma fra altezza e perimetro di base. Volendo determinare la forma della scatola di massimo volume, fra quelle che hanno somma fra altezza e perimetro di base pari a 120 cm, come cambia rispetto all'esercizio precedente l'impostazione del problema? Risolvete il nuovo problema.

Appendice al capitolo 3

Appendice 3.1 - Medie numeriche

Mostriamo qui alcune disuguaglianze tra medie numeriche. Dati n numeri $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) definiamo

$$\begin{aligned}
 A(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i && \text{media aritmetica;} \\
 G(x_1, \dots, x_n) &= \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} && \text{media geometrica;} \\
 H(x_1, \dots, x_n) &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^{-1} && \text{media armonica;}
 \end{aligned}$$

intendendo che $H(x_1, \dots, x_n) = 0$ se uno degli x_i è nullo. Faremo vedere che si ha

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n) . \quad (\text{A3.1})$$

Queste disuguaglianze seguono da un fatto più generale, illustrato nella proposizione seguente.

Proposizione A3.1 : (disuguaglianza di Young) se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa si ha per ogni $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$f(A(x_1, \dots, x_n)) \leq A(f(x_1), \dots, f(x_n)) . \quad (\text{A3.2})$$

DIMOSTRAZIONE : posto per semplicità $s_0 = A(x_1, \dots, x_n)$, per la convessità di f esiste una funzione affine $g(s) = as + b$ tale che

$$g(s) \leq f(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad g(s_0) = f(s_0);$$

se f è derivabile basta prendere come g l'espressione della retta tangente al grafico di f nel punto s_0 , nel caso generale si può prendere l'espressione della retta tangente destra o della retta tangente sinistra. Si ha quindi

$$f(A(x_1, \dots, x_n)) = g(A(x_1, \dots, x_n)) = A(g(x_1), \dots, g(x_n)) \leq A(f(x_1), \dots, f(x_n)),$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che la funzione g è affine. La disuguaglianza di Young (A3.2) è dunque dimostrata. ■

A questo punto possiamo dimostrare la seconda delle disuguaglianze in (A3.1). Se qualcuno dei numeri x_i è nullo la disuguaglianza è ovvia, in quanto $G(x_1, \dots, x_n) = 0$; dunque supponiamo che tutti gli x_i siano strettamente positivi per cui possiamo scrivere $x_i = e^{y_i}$ con $y_i \in \mathbb{R}$. Utilizzando la funzione convessa $f(s) = e^s$ e la disuguaglianza di Young (A3.2) otteniamo

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}) = e^{A(y_1, \dots, y_n)} \leq A(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}) = A(x_1, \dots, x_n).$$

Per quanto riguarda la prima disuguaglianza in (A3.1) con la media armonica basta osservare che

$$H(x_1, \dots, x_n) = (A(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}))^{-1}$$

e quindi, in base alla disuguaglianza già dimostrata sulle medie geometrica ed aritmetica,

$$H(x_1, \dots, x_n) = (A(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}))^{-1} \leq (G(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}))^{-1} = G(x_1, \dots, x_n).$$

Accanto alle medie viste sopra si possono introdurre altre medie: ad esempio la media quadratica

$$A_2(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

o più in generale la media p con $p \geq 1$

$$A_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}.$$

Se $p < q$, prendendo la funzione convessa $f(s) = s^{q/p}$, dalla disuguaglianza di Young (A3.2) otteniamo

$$(A_p(x_1, \dots, x_n))^q = (A(x_1^p, \dots, x_n^p))^{q/p} \leq A(x_1^q, \dots, x_n^q) = (A_q(x_1, \dots, x_n))^q$$

da cui

$$A_p(x_1, \dots, x_n) \leq A_q(x_1, \dots, x_n).$$

È interessante notare che, per $p \rightarrow +\infty$ si ha

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,$$

in accordo con le ovvie disuguaglianze

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

Appendice 3.2 - Funzioni omogenee

Consideriamo ora una classe interessante di funzioni.

Definizione : sia $\alpha \in \mathbb{R}$; una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **omogenea di grado α** se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall t > 0, \forall x \neq 0.$$

Osserviamo subito che se f è omogenea di grado α si ha per ogni $x \neq 0$

$$f(x) = \|x\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Se ora supponiamo f anche continua ed indichiamo con m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo di f sull'insieme compatto $S = \{\|x\| = 1\}$, che esistono per il Teorema di Weierstraß 1.20, abbiamo dall'uguaglianza precedente:

$$m \leq \frac{f(x)}{\|x\|^\alpha} \leq M \quad \forall x \neq 0,$$

da cui ricaviamo

$$m\|x\|^\alpha \leq f(x) \leq M\|x\|^\alpha \quad \forall x \neq 0.$$

In particolare, se $m > 0$ abbiamo $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Il motivo per escludere sempre $x = 0$ è di consentire di parlare di funzioni omogenee di grado negativo.

Esempio : la funzione $1/\|x\|$ è omogenea di grado -1 ; la funzione $|x| + |y|$ è omogenea di grado 1 . Data una qualunque funzione g definita su S , che è il bordo della sfera unitaria, la funzione definita per ogni $x \neq 0$ da

$$f(x) = \|x\|^\alpha g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \tag{A3.3}$$

è omogenea di grado α , e viceversa (come visto sopra) se f è omogenea, detta g la restrizione di f a S si ha che vale (A3.3): dunque le funzioni omogenee di un grado fissato sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni definite su S .

Osservazione : se f è omogenea di grado α ed è inoltre derivabile rispetto alla coordinata x_i in ogni punto del suo insieme di definizione, allora la sua derivata parziale $\nabla_{x_i} f$ risulta omogenea di grado $\alpha - 1$. Questo si vede subito considerando il rapporto incrementale

$$\frac{f(tx + he_i) - f(tx)}{h}$$

e facendo il cambiamento di variabile $h = tk$; dalla definizione di omogeneità si ricava

$$\begin{aligned} (\nabla_{x_i} f)(t\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(t\mathbf{x})}{h} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{x} + tke_i) - f(t\mathbf{x})}{tk} \\ &= t^{\alpha-1} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + ke_i) - f(\mathbf{x})}{k} \\ &= t^{\alpha-1} \nabla_{x_i} f(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Caratterizziamo ora le funzioni omogenee di grado α in termini del loro gradiente.

Teorema A3.2 : *sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora f è omogenea di grado α se e solo se*

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} . \quad (\text{A3.4})$$

DIMOSTRAZIONE : se f è omogenea di grado α , fissato $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ la funzione

$$g(t) = \frac{f(t\mathbf{x})}{t^\alpha} \quad t > 0 \quad (\text{A3.5})$$

è costante in quanto coincide con il valore $f(\mathbf{x})$. La differenziabilità di f implica che g è derivabile, e si ha quindi

$$0 = g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(t\mathbf{x}) + t^{-\alpha} \mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{x}) .$$

Prendendo $t = 1$ si ottiene la (A3.4).

Viceversa, supponiamo che valga (A3.4) e mostriamo che la funzione f è omogenea di grado α , o equivalentemente che la funzione $g(t)$ definita in (A3.5) è costante. Siccome f è per ipotesi differenziabile, la funzione g è derivabile, per cui è sufficiente mostrare che la sua derivata è nulla in ogni punto. Si ha

$$g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(t\mathbf{x}) + t^{-\alpha} \mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{x})$$

e, dalla (A3.4) si ricava subito $g'(t) = 0$ per ogni t . ■

Appendice 3.3 - Un minimo o no?

Per studiare la natura di un punto stazionario di una funzione f , talvolta si prova a leggere il comportamento della funzione su qualche curva che passa per quel punto; tuttavia bisogna stare attenti a non trarne conclusioni positive, ma solo negative, oppure solo indicazioni di una possibilità. Spieghiamo meglio: supponiamo che il punto in questione sia X_0 e che vi siano due rette per X_0 lungo la prima delle quali f ha un minimo locale stretto in X_0 mentre lungo la seconda ha un massimo locale stretto. Ciò significa che in qualunque intorno di X_0 vi sono sia punti (quelli della prima retta) in cui f vale più che in X_0 , sia punti (quelli della seconda retta) in cui f vale meno che in X_0 : dunque (conclusione negativa) X_0 non può essere né un punto di minimo locale né di massimo locale per f .

Se però i nostri esperimenti con le rette dessero tutti lo stesso esito, ad esempio lungo tutte le rette per X_0 la funzione f ha un minimo locale stretto in X_0 , non possiamo ancora concludere che f ha un minimo locale in X_0 , e anzi questo può essere falso. La funzione

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5$$

ha gradiente nullo in $(0, 0)$ e il suo luogo di zeri è rappresentato in figura: la linea tratteggiata è il grafico di x^2 con $x \geq 0$, le due linee continue sono i grafici di $x^2 \pm x^{5/2}$, e la funzione f è negativa all'interno del "baffo" e positiva in tutti gli altri punti (escluso naturalmente dove vale zero).

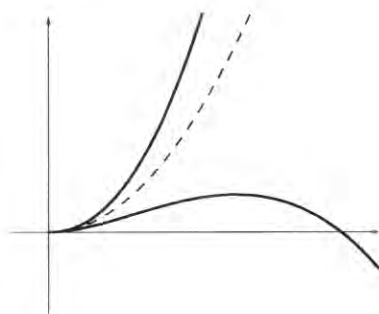


Fig. A3.1 : il luogo di zeri di f

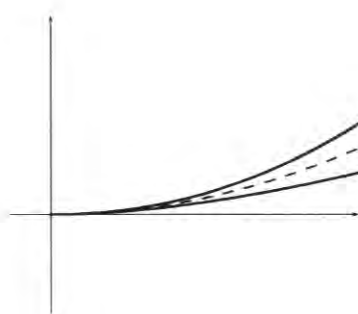


Fig. A3.2 : ingrandimento vicino all'origine

Come si vede (meglio nell'ingrandimento) presa una qualunque retta per l'origine c'è sulla retta un più o meno piccolo intorno dell'origine in cui f è positiva, ma f è nulla nell'origine: dunque su ogni retta l'origine è un punto di minimo locale stretto, ma non è un minimo locale di f sul piano dato che se ci avviciniamo lungo la linea tratteggiata (cioè con $y = x^2$ ed $x > 0$) la funzione vale $-x^5 < 0$.

Da questo esempio impariamo (ancora!) che le rette sono troppo poche per dare risposte già nel piano: qui avvicinandoci lungo una parabola le cose vanno in modo diverso. Potremmo costruire esempi in cui la curva "critica" non è una parabola, ma

chissà quale altra. Di certo possiamo dire questo: se f ha un minimo locale in X_0 , cioè $f(X) \geq f(X_0)$ per ogni X con $X \in B_\varepsilon(X_0)$, allora presa qualsiasi curva ϕ che ha sostegno nel dominio di f e tale che $\phi(0) = X_0$, per $|t|$ abbastanza piccolo avremo $\phi(t) \in B_\varepsilon(X_0)$ e quindi $f(\phi(t)) \geq f(\phi(0))$, ossia f letta lungo ϕ ha un minimo locale quando passa per X_0 . L'interessante è che vale anche il viceversa: se f ha un minimo locale al passaggio per X_0 lungo **qualsiasi** curva, allora ha un minimo locale in X_0 . Enunciamolo meglio.

Teorema A3.3 : *sia f una funzione il cui dominio contiene un intorno di X_0 . Se per ogni curva ϕ che ha sostegno nel dominio di f e tale che $\phi(0) = X_0$ il punto 0 è di minimo locale per $f(\phi(t))$ allora X_0 è un punto di minimo locale per f .*

Infatti, se X_0 non fosse di minimo locale dovrebbero esistere punti arbitrariamente vicini a X_0 in cui f vale meno che in X_0 : prendiamo una successione di questi punti, tendente a X_0 , e chiamiamoli X_k . Definiamo una curva su $]0, 1[$ così: $\phi(1/k) = X_k$ e fra $1/k$ e $1/(k+1)$ la curva percorre nel modo standard il segmento da X_k a X_{k+1} . Osserviamo che $\phi(t) \rightarrow X_0$ per $t \rightarrow 0^+$, quindi possiamo proseguire la curva definendola su $[-1, 0]$ come $\phi(t) = X_0$. Questa è continua (dunque una curva) ma vi è una successione tendente a zero (i punti $1/k$) in cui $f \circ \phi$ vale meno che in $t = 0$, dunque avremmo trovato una curva su cui $f \circ \phi$ non ha minimo locale al passaggio per il punto X_0 .

L'ipotesi sul dominio di f potrebbe essere un po' limata ma l'enunciato diventa illeggibile; serve che due punti qualsiasi del dominio possano essere congiunti con un arco tutto contenuto nel dominio, ma non basta: occorre che questo arco sia "corto", nel senso che l'arco che congiunge A e B deve essere contenuto in una palla di raggio non superiore a $g(\|A - B\|)$ per qualche funzione continua g nulla nell'origine.

Appendice 3.4 - Centri di massa e minimi

Al termine della Sezione 1.1 avevamo lasciato in sospeso un problema difficile, \clubsuit (A1.2), che consisteva nel minimizzare fra i punti X di un triangolo ABC la funzione continua

$$f(X) = (m_a\|X - A\| + m_b\|X - B\| + m_c\|X - C\|) - Lm.$$

I teoremi di questo capitolo si applicano a funzioni differenziabili, ed f non è differenziabile, o perlomeno non in tutti i punti: infatti il grafico della funzione $\|X\|$ è una superficie conica con vertice nell'origine, quindi la funzione $\|X\|$ è differenziabile in tutti i punti, tranne che nell'origine dove il grafico non ha piano tangente e quindi non è differenziabile. Allora la funzione $\|X - A\|$ è differenziabile in tutti i punti tranne A , e $\|X - B\|$ lo è in tutti i punti tranne B . Osserviamo che questo ci consente

di affermare che in tutti i punti tranne A e B la somma $\|X - A\| + \|X - B\|$ è differenziabile per la Proposizione 3.8, e (ma non è immediato) che non è differenziabile in A e B : infatti se fosse differenziabile in A lo dovrebbe essere anche la differenza $(\|X - A\| + \|X - B\|) - \|X - B\| = \|X - A\|$, che sappiamo non essere differenziabile. In conclusione, f è differenziabile in tutti i punti del triangolo tranne i vertici. Notiamo che questo ci consente ugualmente di applicare il Teorema di Fermat 3.12, che si usa nei punti **interni** al triangolo, e il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange 3.23 nei punti interni ai lati del triangolo. Calcoliamo il gradiente di f nei punti diversi dai vertici: basta calcolare il gradiente di $d(X) = \|X\|$ e poi lavorare sulla composizione. Ora,

$$d(X) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \implies \frac{\partial d}{\partial X_1} = \frac{1}{2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \cdot 2X_1 = \frac{X_1}{\|X\|},$$

e lo stesso per l'altra coordinata, quindi (questo è vero in dimensione qualunque)

$$X \neq 0 \implies \nabla \|X\| = \frac{X}{\|X\|} :$$

ricordate che per $x \neq 0$ era $D|x| = x/|x|$? A questo punto

$$\nabla f = m_a \frac{X - A}{\|X - A\|} + m_b \frac{X - B}{\|X - B\|} + m_c \frac{X - C}{\|X - C\|}$$

e per trovare gli eventuali punti stazionari interni va risolta l'equazione $\nabla f(X) = 0$ nel triangolo ABC . Il problema è complicato, e ci contentiamo di due osservazioni: intanto poniamo (poi vedrete perché è comodo cambiar segno)

$$-\frac{X - A}{\|X - A\|} = v_a$$

e lo stesso per v_b e v_c ; si tratta di tre versori (che dipendono dall'incognita X) e un punto stazionario deve verificare

$$0 = -\nabla f(X) = m_a v_a + m_b v_b + m_c v_c. \quad (A3.6)$$

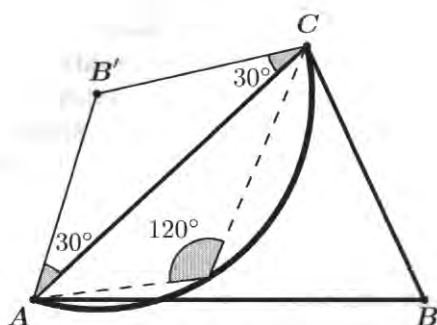
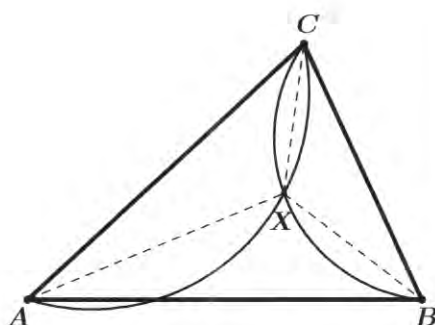
Dato che questo equivale a

$$\frac{m_a v_a + m_b v_b}{m_c} = -v_c,$$

il primo membro deve avere norma unitaria, e questo è certamente impossibile se ad esempio $m_a + m_b < m_c$, dato che $\|m_a v_a + m_b v_b\| \leq m_a \cdot 1 + m_b \cdot 1$ per la disuguaglianza triangolare (1.4). Dunque se le masse sono molto sbilanciate il punto di minimo di f (che sappiamo esistere per il Teorema di Weierstraß) non può essere interno al triangolo, ma è su un lato o in un vertice. L'ultima osservazione riguarda il caso di tre masse uguali, in cui (A3.6) diventa

$$v_a + v_b + v_c = 0.$$

La somma di due versori ha norma unitaria se e solo se questi formano un angolo di 120° , quindi i tre versori v_a , v_b e v_c , che escono da X e puntano rispettivamente verso A , B e C , devono formare angoli di 120° , e il punto stazionario cercato è l'unico (se esiste) punto del triangolo che vede i tre lati con angoli di 120° ciascuno.

Fig. A3.3 : l'arco che vede AC con un angolo di 120° Fig. A3.4 : il punto X

Questo eventuale punto stazionario è quello di minimo, dato che f è somma di tre funzioni convesse (come è fatto l'epigrafo di $\|X\|$?) e si può applicare il Corollario 3.19.

Appendice 3.5 - Cambiamenti di variabile e operatori differenziali

La formula di derivazione delle funzioni composte contenuta nella Proposizione 3.8 può essere usata per effettuare cambiamenti di variabili. Vediamone un esempio applicato alle equazioni alle derivate parziali, che riprenderemo (► appendice 5.11).

Esempio : la divergenza di una funzione $f(x, y)$, che per semplicità supponiamo definita in tutto \mathbb{R}^2 , è la somma

$$\partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) .$$

Consideriamo il cambiamento di variabile, corrispondente a una rotazione di $\pi/4$ degli assi (x, y) in senso antiorario per ottenere gli assi (t, s) ,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(t - s) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(t + s) \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ s = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \end{cases}$$

e poniamo

$$g(t, s) = f(x(t, s), y(t, s)) \iff f(x, y) = g(t(x, y), s(x, y))$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [g(t(x, y), s(x, y))] \\ &= (\partial_t g)(t(x, y), s(x, y)) \partial_x t(x, y) + (\partial_s g)(t(x, y), s(x, y)) \partial_x s(x, y) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_t g)(t(x, y), s(x, y)) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_s g)(t(x, y), s(x, y))\end{aligned}$$

e analogamente

$$\partial_y f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_t g)(t(x, y), s(x, y)) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_s g)(t(x, y), s(x, y)) ,$$

per cui

$$(\operatorname{div} f)(x, y) = \sqrt{2} (\partial_t g)(t(x, y), s(x, y))$$

o anche

$$(\operatorname{div} f)(x(t, s), y(t, s)) = \sqrt{2} \partial_t g(t, s) . \quad (\text{A3.7})$$

Dunque letta nelle variabili (t, s) la divergenza di f è (un multiplo della) derivata parziale di g rispetto a t .

Oltre alla divergenza, vediamo un altro operatore importante.

Definizione : se f è una funzione reale derivabile due volte in un aperto A di \mathbb{R}^n , il suo **laplaciano** è

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} .$$

In particolare in due dimensioni

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} .$$

Esempio : potete provare da soli a seguire quanto fatto sopra ed esprimere il laplaciano in coordinate polari, con il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \theta(x, y) . \end{cases}$$

Come vedete, interviene la funzione $\theta(x, y)$ della Sezione 1.5, che è definita a tratti; però le derivate parziali della funzione θ sono come quelle che otterremmo dalla funzione $\arctan(y/x)$, dato che in ogni tratto questa differisce da $\theta(x, y)$ per una costante, dunque

$$\partial_x \theta(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} , \quad \partial_y \theta(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

Allora provate che, posto $g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$, si ha

$$(\Delta f)(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r g(r, \theta)) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 g(r, \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}. \quad (\text{A3.8})$$

In particolare, se f è una funzione che dipende solo dal raggio, cioè

$$f(x, y) = g(\|(x, y)\|),$$

si ha

$$\Delta f(x, y) = g''(\|(x, y)\|) + \frac{1}{\|(x, y)\|} g'(\|(x, y)\|).$$

Provate a generalizzare l'uguaglianza precedente al caso di funzioni f definite su \mathbb{R}^n con n qualsiasi, che dipendono solo dal raggio, cioè

$$f(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|),$$

e dimostrate che allora si ha

$$\Delta f(\mathbf{x}) = g''(\|\mathbf{x}\|) + \frac{n-1}{\|\mathbf{x}\|} g'(\|\mathbf{x}\|).$$

Appendice 3.6 - Il Teorema del Dini in meccanica

Il Teorema 3.22 può essere usato per stabilire se gli stati di un sistema meccanico costituiscano una superficie regolare, e possano quindi essere descritti mediante parametrizzazioni regolari o ancora meglio con un'espressione cartesiana.

Esempio : consideriamo il caso di due sbarrette rigide collegate tra loro ad un estremo e libere di muoversi nel piano; il punto di giunzione permette tutte le rotazioni ma impedisce alle sbarrette di separarsi.

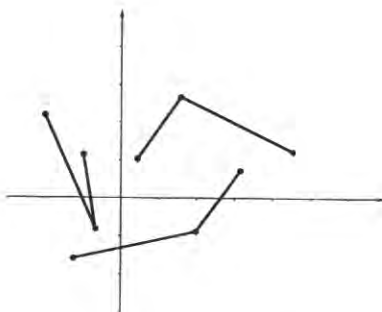


Fig. A3.5 : varie posizioni delle sbarrette

Indichiamo con L_1 la lunghezza della prima sbarretta e con (x, y) le coordinate del suo estremo libero, con L_2 la lunghezza della seconda sbarretta e con (z, w) le coordinate del suo estremo libero; infine indichiamo con (s, t) le coordinate del punto di giunzione. Gli stati del sistema costituiscono quindi un insieme S descritto dalle sei variabili (x, y, z, w, s, t) e dai due vincoli

$$(x-s)^2 + (y-t)^2 = L_1^2, \quad (z-s)^2 + (w-t)^2 = L_2^2.$$

In altri termini l'insieme S è il luogo di zeri della funzione $\phi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\phi(x, y, z, w, s, t) = ((x-s)^2 + (y-t)^2 - L_1^2, (z-s)^2 + (w-t)^2 - L_2^2).$$

Per vedere che S è effettivamente una superficie regolare di dimensione 4 in \mathbb{R}^6 dobbiamo far vedere che il sistema (3.29), che ha $2 + \binom{6}{2} = 17$ equazioni, non ha soluzione. Abbiamo che $\nabla\phi$ è una matrice 2×6 data da

$$\nabla\phi(x, y, z, w, s, t) = \begin{pmatrix} 2(x-s) & 2(y-t) & 0 & 0 & 2(s-x) & 2(t-y) \\ 0 & 0 & 2(z-s) & 2(w-t) & 2(s-z) & 2(t-w) \end{pmatrix},$$

per cui il sistema (3.29), eliminando le equazioni inutili o ripetute, si riduce a

$$\begin{cases} (x-s)^2 + (y-t)^2 = L_1^2 \\ (z-s)^2 + (w-t)^2 = L_2^2 \\ (x-s)(z-s) = 0 \\ (x-s)(w-t) = 0 \\ (y-t)(z-s) = 0 \\ (y-t)(w-t) = 0 \\ (x-s)(w-t) = (z-s)(y-t). \end{cases}$$

Guardiamo la terza equazione: se supponiamo $z-s \neq 0$, necessariamente $x-s=0$; allora dalla prima equazione si ha $y-t \neq 0$ e quindi, dalla quinta equazione, $z-s=0$, contro l'ipotesi. Se invece supponiamo $z-s=0$, dalla seconda equazione abbiamo $w-t \neq 0$, dalla quarta e dalla sesta ricaviamo $x-s=y-t=0$ ma questo è in contrasto con la prima equazione. In definitiva, il sistema non ha soluzione e quindi l'insieme S degli stati ammissibili è una superficie regolare di dimensione 4 in \mathbb{R}^6 .

Esempio : consideriamo la circonferenza di raggio R e centro l'origine, di equazione

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

e l'asse delle ascisse $\{y=0\}$. Una sbarretta rigida di lunghezza L è libera di muoversi nel piano ma con il vincolo di avere un estremo sulla circonferenza e l'altro sull'asse delle ascisse. Se indichiamo con (x, y) le coordinate dell'estremo della sbarretta che sta sulla circonferenza e con $(z, 0)$ quelle dell'estremo che sta sull'asse delle ascisse, gli stati del sistema costituiscono un insieme S descritto dalle tre variabili (x, y, z) e dai due vincoli

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (x-z)^2 + y^2 = L^2.$$

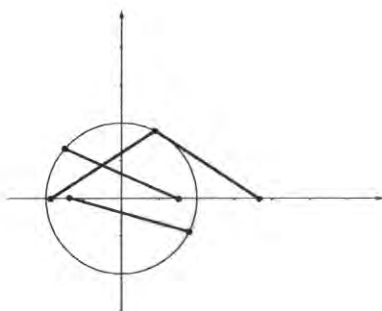


Fig. A3.6: varie posizioni della sbarretta

Di nuovo, l'insieme S può essere visto come il luogo di zeri della funzione $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - R^2, (x - z)^2 + y^2 - L^2).$$

La matrice jacobiana $\nabla\phi$ è una matrice 2×3 data da

$$\nabla\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2(x-z) & 2y & 2(z-x) \end{pmatrix},$$

per cui il sistema (3.29), che ha $2 + \binom{3}{2} = 5$ equazioni, diventa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - z)^2 + y^2 = L^2 \\ zy = 0 \\ x(z - x) = 0 \\ y(z - x) = 0. \end{cases} \quad (\text{A3.9})$$

Non può essere $y = 0$, altrimenti dalle prime due equazioni ricaveremmo che sia x che $z - x$ sono diversi da zero, il che contrasta con la quarta equazione. Dunque deve essere $y \neq 0$ e quindi dalla terza equazione abbiamo $z = 0$ e dalla quinta $z - x = 0$. Il sistema (A3.9) si riduce allora a

$$\begin{cases} y^2 = R^2 \\ y^2 = L^2 \end{cases}$$

e se $R \neq L$ non esistono soluzioni. In tali casi dunque l'insieme S degli stati del sistema meccanico è una superficie regolare di dimensione 1 (cioè una curva liscia) in \mathbb{R}^3 . Invece, se $L = R$, il sistema (A3.9) possiede le soluzioni

$$(x, y, z) = (0, \pm R, 0).$$

Dunque nel caso $R = L$ vicino a tutti gli altri punti di S il luogo S è una curva liscia, e vicino a $(0, \pm R, 0)$ il luogo S potrebbe non esserlo. Come nell'esempio (3.30), se $R = L$ l'insieme S è composto da due rami che si incrociano in $(0, \pm R, 0)$ e quindi non è una curva liscia.

Capitolo 4

Integrali multipli

In questo capitolo estendiamo (per quanto possibile) la teoria dell'integrazione, già vista in una variabile, al caso di funzioni di più variabili. Un grosso ostacolo è costituito dalla mancanza dell'ordinamento in \mathbb{R}^n se $n > 1$; infatti questo ordinamento è essenziale per passare dall'integrale su un intervallo all'integrale definito, che a sua volta ci ha permesso, tramite il Teorema fondamentale del calcolo e il Teorema di Torricelli 1.50, di calcolare esplicitamente gli integrali (o almeno, alcuni).

4.1 - Integrale su un rettangolo

Ricordiamo rapidamente cosa si era fatto per definire l'integrale di una funzione f a valori reali definita su un intervallo $I = [a, b]$: limitandoci (inizialmente) al caso $f \geq 0$, si era introdotto il *sottografico*, che è un sottoinsieme di $I \times \mathbb{R}$, e lo si era riempito dal basso con unioni finite di rettangoli (i *plurirettangoli*), le cui basi ricoprivano tutto I . Riducendo la base dei rettangoli si otteneva una approssimazione via via migliore (l'area della zona del sottografico non coperta dai rettangoli si riduceva), e il limite, quando la lunghezza della base dei rettangoli tende a zero, si chiamava *integrale inferiore* o *somma inferiore* di f su I . Facendo lo stesso dall'alto (e qui è indispensabile che f sia limitata) si definiva l'*integrale superiore*, che per le *funzioni integrabili* (e in particolare per quelle continue) coincide con quello inferiore; il comune valore veniva chiamato *integrale di f sull'intervallo I* . A questo punto si estendeva la definizione di integrale a funzioni di segno variabile, e infine si passava a funzioni non limitate su domini non limitati mediante un processo di limite che conduceva a definire gli integrali impropri.

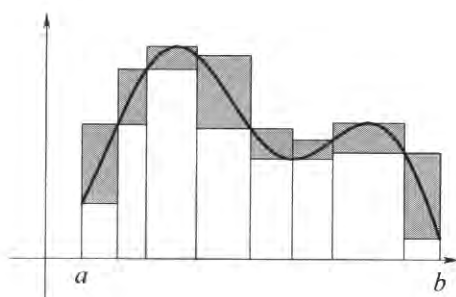


Fig. 4.1 : costruzione dell'integrale unidimensionale

Ricordiamo (è importante fra poco) che ci sono alcune funzioni che *non sono integrabili*, ovvero tali che se cerchiamo di approssimare il loro sottografico da dentro (cioè per difetto) e da fuori (cioè per eccesso) con unioni di rettangoli, otteniamo dei valori irrimediabilmente diversi, che non si avvicinano mai: la *funzione di Dirichlet*, che sull'intervallo $[0, 1]$ vale 1 nei numeri razionali e 0 nei numeri irrazionali, è una di queste. Abbiamo dunque per $0 \leq t \leq 1$

$$f_D(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } t \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \quad (4.1)$$

e se chiamiamo $D \subset \mathbb{R}^2$ il sottografico della funzione di Dirichlet, risulta che:

- 1) se P è un'unione finita di rettangoli contenuta in D , allora l'area di P è zero;
- 2) se P è un'unione finita di rettangoli contenente D , allora l'area di P è almeno 1.

In seguito, si era introdotto il concetto di *integrale definito*, orientando gli intervalli e facendo dipendere il valore di $\int_a^b f(x) dx$ dall'ordine fra a e b (cioè da chi è più grande).

Cosa si può recuperare per funzioni di più variabili? Certamente non quest'ultima parte, che richiede la relazione d'ordine, ma il resto sì, quasi del tutto: riproduciamo l'analogo in due dimensioni. Sia R un rettangolo, diciamo $R = [a, b] \times [c, d]$, e sia f una funzione limitata e non negativa definita su R ; il sottografico di f è un insieme tridimensionale, al di sopra del rettangolo R , limitato dall'alto dalla superficie grafico di f , e allo stesso modo in cui in una dimensione avevamo modellato l'integrale per calcolare l'area del sottografico (bidimensionale) di f , così in due dimensioni modelliamo l'integrale per approssimare il volume del sottografico (tridimensionale) di f . Possiamo suddividere $[a, b]$ in sottointervalli, mediante dei punti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_h = b$. Facciamo lo stesso con $[c, d]$, mediante i punti $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$. Se tracciamo nel piano (x, y) le rette parallele all'asse y che passano per i punti di ascisse x_0, \dots, x_h , e le rette parallele all'asse x che passano per i punti di ordinate y_0, \dots, y_k , queste suddividono R in tanti rettangolini (sono in numero di $h \cdot k$). I rettangoli in cui abbiamo suddiviso il dominio di f sono l'analogo (in due dimensioni) della suddivisione dell'intervallo I in una dimensione.

Su ognuno di questi rettangoli possiamo immaginare di costruire un parallelepipedo che sia contenuto entro il sottografico di f : l'unione di questi parallelepipedi ha volume

non superiore al volume del sottografico di f . Osserviamo che finora abbiamo utilizzato soltanto la formula che fornisce il volume di un parallelepipedo:

$$\text{volume}([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [0, h]) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot h.$$

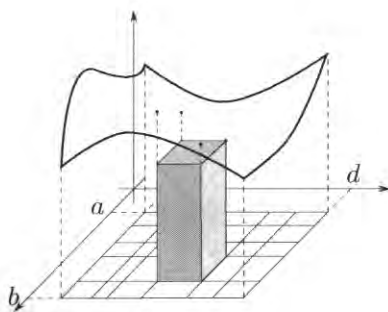
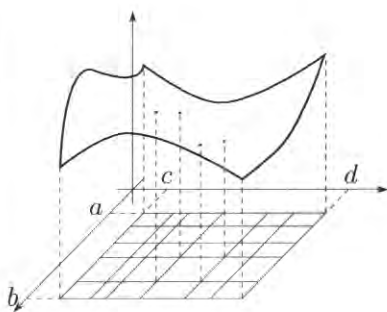


Fig. 4.2 : dividiamo il dominio R ... Fig. 4.3 : ... e costruiamo un prisma nel sottografico

Infittendo le suddivisioni di $[a, b]$ e $[c, d]$ si ottiene una approssimazione per difetto sempre migliore del sottografico di f , e al limite (quando l'ampiezza degli intervallini delle suddivisioni tende a zero) otterremo l'*integrale inferiore* di f . Facendo lo stesso per eccesso (con parallelepipedi contenenti il sottografico di f) si ottiene l'*integrale superiore*, e le *funzioni integrabili* sono quelle per le quali i due valori coincidono. Ricordiamo che per ora ci siamo limitati al caso di funzioni limitate e non negative.

Definizione : una funzione limitata e non negativa sul rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ si dice **integrabile** se gli integrali superiore e inferiore coincidono; in tal caso il comune valore degli integrali superiore e inferiore si chiama **integrale di f sul rettangolo R** e si indica col simbolo

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

Come in una variabile, potremmo estendere le considerazioni precedenti al caso di funzioni limitate ma di segno variabile; preferiamo però ricorrere alla rappresentazione di una funzione come differenza di funzioni di segno costante.

Definizione : la **parte positiva** e la **parte negativa** di un numero reale c sono

$$c^+ = \max\{c, 0\} = \frac{|c| + c}{2}, \quad c^- = \max\{-c, 0\} = \frac{|c| - c}{2}.$$

La **parte positiva** e la **parte negativa** di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono le due funzioni f^+ ed f^- definite per ogni $x \in A$ da

$$f^+(x) = [f(x)]^+, \quad f^-(x) = [f(x)]^-.$$

Osservazione : sia la parte positiva che quella negativa sono numeri maggiori o uguali a zero; inoltre

$$c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-, \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Infine

$$0 \leq c^\pm \leq |c|.$$

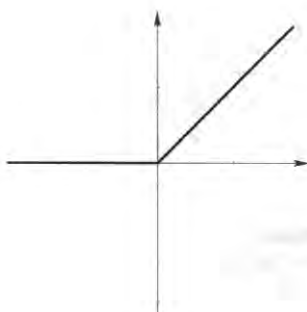


Fig. 4.4 : la parte positiva di x

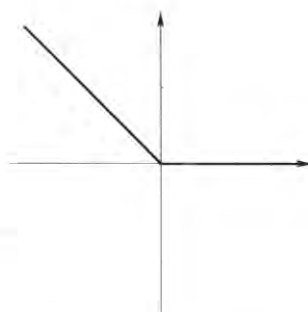


Fig. 4.5 : la parte negativa di x

Definizione : una funzione limitata f sul rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ si dice **integrabile** se sono integrabili sia f^+ che f^- ; in tal caso si chiama **integrale di f sul rettangolo R** il numero

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R f^+(x, y) \, dx \, dy - \iint_R f^-(x, y) \, dx \, dy.$$

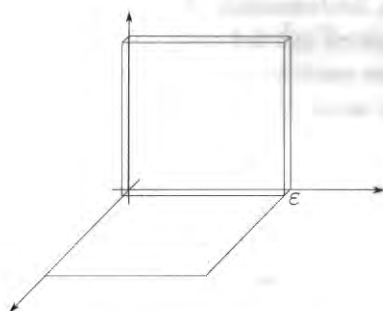
Per un po' distingueremo gli integrali bidimensionali da quelli unidimensionali scrivendo il simbolo del doppio integrale, poi, a partire dalla Sezione 4.5, useremo anche per gli integrali bidimensionali il consueto simbolo $\int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, con un solo segno di integrale. Come in una variabile, molte funzioni comuni sono integrabili.

Proposizione 4.1 : tutte le funzioni continue su un rettangolo (chiuso) $R \subset \mathbb{R}^2$ sono integrabili.

Osservazione : non tutte le funzioni integrabili sono continue; vediamo un esempio che serve anche più avanti. Ricordiamo la definizione (4.1) della funzione di Dirichlet, e consideriamo la funzione definita su $[0, 1] \times [0, 1]$ da

$$g_D(x, y) = \begin{cases} f_D(y) & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Questa è chiaramente discontinua, ma il suo sottografico ha volume zero: infatti g_D è maggiore o uguale a zero, quindi il suo sottografico contiene il plurirettangolo di altezza zero e in particolare l'integrale inferiore di g_D è maggiore o uguale a zero. D'altra parte il sottografico di g_D è contenuto nel plurirettangolo che ha altezza 1 sulla striscia $[0, \varepsilon] \times [0, 1]$, con $\varepsilon > 0$ qualsiasi, e altezza zero sulla striscia $[\varepsilon, 1] \times [0, 1]$.

Fig. 4.6 : il sottografico di g_D sta tutto dentro al parallelepipedo

Dato che questo plurirettangolo ha volume ε ed ε è arbitrario, l'integrale superiore di g_D è minore o uguale a zero. Dunque g_D è integrabile e ha integrale zero.

Fin qui, apparentemente tutto bene, a parte il fatto che non sappiamo ancora *come* calcolare materialmente l'integrale di una funzione su un rettangolo: ricordiamo che in una dimensione questo era stato possibile solo grazie al Teorema di Torricelli, che aveva richiesto l'introduzione dell'integrale definito. In due dimensioni, ci viene in aiuto il prossimo risultato.

Teorema di riduzione degli integrali doppi 4.2 : sia f una funzione continua sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Allora

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (4.3)$$

L'enunciato va interpretato in questo senso: intanto, per ogni fissato $\bar{x} \in [a, b]$ la funzione (della sola variabile y)

$$y \mapsto f(\bar{x}, y)$$

è integrabile (in quanto continua) su $[c, d]$; poi, il suo integrale su $[c, d]$, che è la funzione (della sola variabile x)

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy,$$

è integrabile su $[a, b]$, e il suo integrale vale quanto l'integrale di f su R . Osserviamo che nell'enunciato precedente non avremmo potuto mettere "integrabile" al posto di "continua": infatti se g_D è la funzione introdotta in (4.2), essa è integrabile ma **non è vero** che per ogni fissato $\bar{x} \in [a, b] = [0, 1]$ la funzione (della sola variabile y)

$$y \mapsto g_D(\bar{x}, y)$$

è integrabile su $[c, d] = [0, 1]$, dato che per $\bar{x} = 0$ si ha $g_D(\bar{x}, y) = f_D(y)$, che non è integrabile. Sugeriamo allo studente di non perdersi (almeno in prima battuta) in questi

dettagli sulla misurabilità e sull'integrabilità, che in un libro è indispensabile mettere ma possono sviare dai punti fondamentali. Avremmo potuto mettere, nell'enunciato del Teorema di riduzione, un'ipotesi più debole della continuità, ma lunga e complessa da leggere, e preferiamo scrivere enunciati meno generali ma più comprensibili.

Naturalmente possiamo scambiare i ruoli di x e y , ottenendo quindi

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (4.4)$$

Spieghiamo questa formula con un esempio pratico: immaginiamo che il pavimento di una stanza rettangolare R sia coperto da uno spesso strato di polvere, il cui spessore nel punto di coordinate (x, y) sia il numero $f(x, y)$. Vogliamo raccogliere tutta la polvere per calcolarne il volume (che è l'integrale di f su R), e agiamo così: fissiamo un punto \bar{x} dello spigolo della parete x , e raccogliamo in quel punto tutta la polvere che c'è sulla riga (parallela alla parete y) che passa per quel punto; quel che abbiamo fatto è l'integrale di $f(\bar{x}, y)$ nella direzione y . Ripetiamo lo stesso per tutti i valori di \bar{x} : ora la polvere è tutta raccolta nello spigolo della parete x , e per riunirla tutta in un punto basta raccoglierla (cioè fare l'integrale degli integrali già fatti) nella direzione x (es. 4.1).

Esempio: calcoliamo l'integrale della funzione $f(x, y) = ax^2 + 2xy$ sul rettangolo $[0, 2] \times [1, 4]$, cioè

$$\iint_{[0,2] \times [1,4]} (ax^2 + 2xy) dx dy = \int_0^2 \left(\int_1^4 (ax^2 + 2xy) dy \right) dx.$$

Nell'integrale fra parentesi, la variabile di integrazione è y , dunque la lettera x , al pari della lettera a , viene trattata come un parametro qualunque. In particolare una primitiva (rispetto alla variabile y) della funzione $ax^2 + 2xy$, ovvero una funzione che derivata rispetto alla variabile y dia $ax^2 + 2xy$, è $ax^2y + xy^2$. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} (ax^2y + xy^2) = ax^2 + 2xy.$$

Allora

$$\int_1^4 (ax^2 + 2xy) dy = [ax^2y + xy^2]_1^4 = (4ax^2 + 16x) - (ax^2 + x) = 3ax^2 + 15x,$$

così che

$$\int_0^2 \left(\int_1^4 (ax^2 + 2xy) dy \right) dx = \int_0^2 (3ax^2 + 15x) dx = [ax^3 + 15x^2/2]_0^2 = 8a + 30,$$

e il risultato cercato è $8a + 30$.

Esempio : calcoliamo

$$\iint_{[-1,1] \times [1,3]} (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dx dy .$$

Usando la formula (4.3) otterremmo

$$\dots = \int_{-1}^1 \left(\int_1^3 (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dy \right) dx ,$$

e ci ritroviamo a calcolare un integrale che ci farebbe fare un po' di conti. Se al posto di $y^{7/5}$ ci fosse stato e^{-y^2} , *non avremmo potuto* calcolare esplicitamente l'integrale in y , come vedremo meglio nell'esempio (4.12). Vediamo però che accade se scambiamo l'ordine di integrazione come in (4.4): abbiamo

$$\iint_{[-1,1] \times [1,3]} (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dx dy = \int_1^3 \left(\int_{-1}^1 (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dx \right) dy ,$$

ma

$$\int_{-1}^1 (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dx = \left[x^2 y \sin y + x^4 y^{7/5} \right]_{-1}^1 = 0 ,$$

perciò

$$\iint_{[-1,1] \times [1,3]} (2xy \sin y + 4x^3 y^{7/5}) dx dy = \int_1^3 0 dy = 0 .$$

4.2 - Integrale su un insieme normale

Nella Sezione 4.1 abbiamo definito gli integrali doppi solo per funzioni definite su rettangoli: cosa si può dire se il dominio E su cui vogliamo integrare f **non** è un rettangolo con i lati paralleli agli assi? Iniziamo a generalizzare, partendo da un caso ovvio.

Definizione : un **plurirettangolo** è un sottoinsieme $P \subset \mathbb{R}^2$ che è unione finita di rettangoli chiusi R_1, \dots, R_h con i lati paralleli agli assi, e che sono a due a due disgiunti (salvo eventualmente toccarsi per i bordi). L'**area** di P è

$$\text{Area}(P) = \sum_{i=1}^h \text{Area}(R_i) .$$

Una funzione $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ è **integrabile** se è integrabile su ciascuno degli R_i , e in tal caso

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^h \iint_{R_i} f(x, y) dx dy .$$

Se E non è di questo tipo, la risposta che potrebbe venire in mente è di approssimare E da dentro e da fuori con una unione finita di rettangoli di questo tipo ma, ahimè, questo *non è sempre possibile*, o meglio, a volte le approssimazioni da dentro sono molto lontane da quelle da fuori, proprio come accade al sottografico della funzione di Dirichlet che abbiamo incontrato all'inizio della sezione.

Definizione : un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **misurabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare due plurirettangoli P_1 e P_2 con

$$P_1 \subset E \subset P_2, \quad \text{Area}(P_2) - \text{Area}(P_1) < \varepsilon.$$

Se E è misurabile allora

$$\begin{aligned} \text{Area}(E) &= \sup \{ \text{Area}(P) : P \subset E \text{ plurirettangolo} \} \\ &= \inf \{ \text{Area}(P) : P \supset E \text{ plurirettangolo} \}. \end{aligned}$$

Osservazione : dato che un insieme misurabile deve essere contenuto in qualche plurirettangolo, abbiamo

$$E \text{ misurabile} \implies E \text{ limitato.} \quad (4.5)$$

Il viceversa non è vero, dato che non tutti gli insiemi limitati sono misurabili; il sottografico $D \subset \mathbb{R}^2$ della funzione di Dirichlet non è misurabile, dato che per due plurirettangoli $P_1 \subset D \subset P_2$ avremmo sempre, come sottolineato subito dopo (4.1),

$$\text{Area}(P_1) = 0, \quad \text{Area}(P_2) \geq 1.$$

Tuttavia, molti insiemi che si incontrano frequentemente sono misurabili (4.6). Possiamo ora definire l'integrale su insiemi misurabili.

Definizione : se $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile, una funzione limitata e non negativa $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile** se è integrabile su ogni plurirettangolo $P \subset E$, e in tal caso

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \sup \left\{ \iint_P f(x, y) dx dy : P \subset E, P \text{ plurirettangolo} \right\}.$$

Una funzione limitata $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile** se sono integrabili sia f^+ che f^- , e in tal caso si chiama **integrale di f su E** il numero

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_E f^+(x, y) dx dy - \iint_E f^-(x, y) dx dy.$$

Osservazione : in realtà avremmo potuto anche procedere in modo diverso; se f è limitata su un misurabile $E \subset \mathbb{R}^2$, dato che E è necessariamente limitato esiste un rettangolo R che contiene tutto E (non importa prenderlo piccolo). Estendiamo f ponendo

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in E \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus E \end{cases}$$

a questo punto avremmo potuto definire l'integrale di f su E come l'integrale di \tilde{f} su R . Non è difficile dimostrare che le due definizioni sono equivalenti. È tuttavia comodo disporre della definizione di integrale su un insieme E senza dover ogni volta riportarsi a rettangoli.

Come in una variabile, vale il seguente risultato.

Proposizione 4.3 : *una funzione limitata e continua su un insieme misurabile E è integrabile.*

Osserviamo che, non essendo necessariamente E chiuso, una funzione continua su E potrebbe essere illimitata: ecco il perché dell'ipotesi che abbiamo messo. Introduciamo una importante categoria di insiemi misurabili.

Definizione : *un sottoinsieme E di \mathbb{R}^2 si chiama **normale rispetto all'asse x** se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ tali che*

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} . \quad (4.6)$$

Se un insieme è normale rispetto all'asse x , tutte le sue sezioni con rette ortogonali all'asse x (cioè parallele all'asse y) sono segmenti: la sezione con la retta di equazione $x = x_0$ è il segmento $[\alpha(x_0), \beta(x_0)]$.

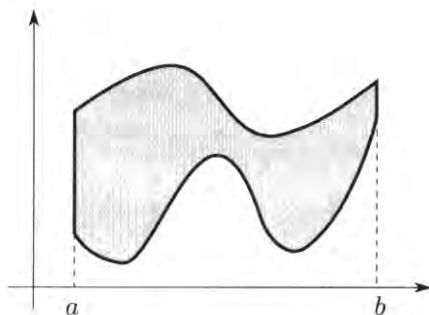


Fig. 4.7 : un insieme normale rispetto all'asse x

Esempio : il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ è un insieme normale rispetto all'asse x , dato che

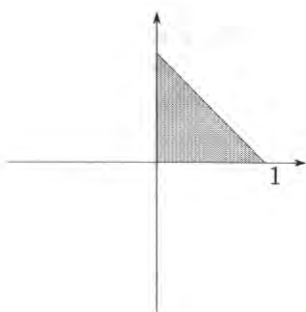
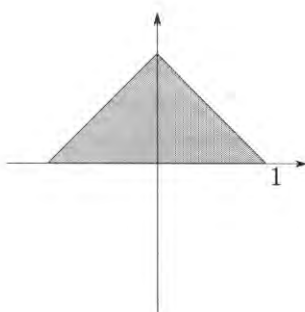
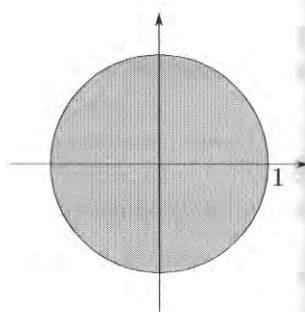
$$T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\} . \quad (4.7)$$

Il triangolo S di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ è anch'esso normale rispetto all'asse x , dato che

$$S = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - |x|\} . \quad (4.8)$$

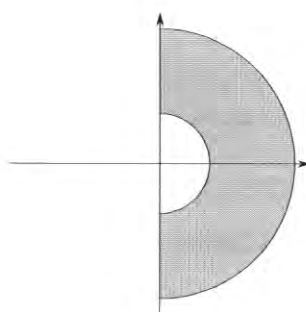
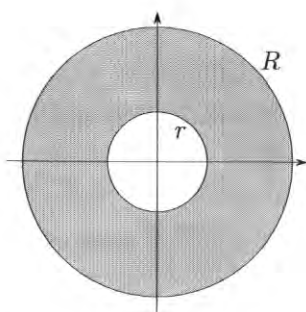
Il cerchio C centrato nell'origine e di raggio r è normale rispetto all'asse x , infatti

$$C = \{(x, y) : -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\} . \quad (4.9)$$

Fig. 4.8 : il triangolo T Fig. 4.9 : il triangolo S Fig. 4.10 : il cerchio C

Invece, se prendiamo la corona circolare A centrata nell'origine e di raggi r ed R , questa non è un insieme normale rispetto all'asse x : la sua sezione con la retta di equazione $x = 0$ (vale a dire con l'asse y) è infatti costituita da due segmenti. Lo stesso vale se prendiamo la sola metà destra di A ,

$$A^+ = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0\}. \quad (4.10)$$

Fig. 4.11 : la corona A non è un insieme normale Fig. 4.12 : la mezza corona A^+ invece lo è

Tuttavia, in quest'ultimo caso, sono le sezioni con rette *ortogonali all'asse y* ad essere segmenti. Scambiando i ruoli di x e y , si passa dagli insiemi normali rispetto all'asse x a quelli normali rispetto all'asse y .

Definizione : un sottoinsieme E di \mathbb{R}^2 si chiama **normale rispetto all'asse y** se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha(y) \leq \beta(y)$ per ogni $y \in [c, d]$ tali che

$$E = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}.$$

Tutte le proprietà degli insiemi normali rispetto all'asse x valgono anche (scambiando i ruoli delle variabili x ed y nelle formule) per quelli normali rispetto all'asse y . Non tutti gli insiemi sono normali rispetto a qualche asse (la corona A non lo è), e talvolta, anche se un insieme è normale, non è del tutto agevole scrivere le due funzioni α e β .

Osserviamo che se E è normale rispetto all'asse x , possiamo vedere E (almeno se le due funzioni α, β sono non negative) come differenza dei due sottografici di β e di α , pertanto è naturale la prossima osservazione.

Proposizione 4.4 : *un insieme normale rispetto a un asse è misurabile. Se*

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

allora

$$\text{Area}(E) = \int_{[a,b]} (\beta(x) - \alpha(x)) \, dx.$$

Rileggiamo la formula (4.3): il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ è un insieme normale rispetto all'asse x , dato che basta prendere $\alpha(x) \equiv c$ e $\beta(x) \equiv d$. Per calcolare l'integrale di f su R abbiamo preso ogni valore \bar{x} e letto la funzione f sul segmento verticale $\{\bar{x}\} \times [c, d]$, che è la sezione del rettangolo R con la retta verticale che passa all'ascissa \bar{x} , dopo di che abbiamo integrato questa funzione fra c e d , che sono i valori di y agli estremi della sezione, e infine integrato il risultato rispetto a x . Non dovrebbe allora stupire il prossimo (cruciale) risultato.

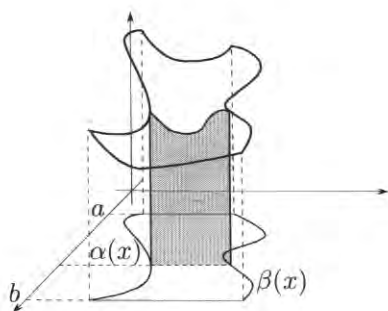


Fig. 4.13 : in grigio il sottografico di $y \mapsto f(x, y)$

Teorema 4.5 : *se $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue e $\alpha \leq \beta$,*

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

ed f è continua e limitata su E allora

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) \, dx. \quad (4.11)$$

Esempio : calcoliamo l'integrale di $3xy^2$ sul triangolo T (4.7). Abbiamo

$$[a, b] = [0, 1], \quad \alpha(x) = 0, \quad \beta(x) = 1 - x,$$

quindi

$$\iint_T 3xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 [xy^3]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^3 dx.$$

Possiamo svolgere il cubo e calcolare agevolmente i vari integrali, o anche agire con astuzia scrivendo

$$\int_0^1 x(1-x)^3 dx \underset{1-x=t}{=} - \int_1^0 (1-t)t^3 dt = \int_0^1 (t^3 - t^4) dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Esempio : calcoliamo ora l'integrale di $3xy^2$ sul triangolo S (4.8). Come prima,

$$\iint_S 3xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-|x|} 3xy^2 dy \right) dx = \dots$$

Tuttavia c'è un modo più veloce per fare i calcoli: il triangolo S è normale anche rispetto all'asse y , dato che

$$S = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y-1 \leq x \leq 1-y\}.$$

Allora possiamo usare l'analoga di (4.11) per insiemi normali rispetto all'asse y :

$$\iint_S 3xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} 3xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 [3x^2 y^2 / 2]_{-(1-y)}^{1-y} dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Come abbiamo già notato al termine della Sezione 4.1, anche questo esempio mostra che, talvolta, conviene assai di più vedere lo stesso insieme come normale rispetto a un asse piuttosto che a un altro (es. 4.3) o che, addirittura, è impossibile eseguire i calcoli integrando prima rispetto a una certa variabile, e possibile integrando prima rispetto all'altra, come vediamo nel prossimo esempio (es. 4.2).

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione $x + e^{-y^2}$ sul triangolo

$$T' = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

Se scriviamo

$$\iint_{T'} (x + e^{-y^2}) dx dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x + e^{-y^2}) dy \right) dx \quad (4.12)$$

ci troviamo a dover calcolare una primitiva di e^{-y^2} , che come è noto non può essere scritta in termini di funzioni elementari. Ma anche T' è normale rispetto a entrambi gli assi, e

$$T' = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\},$$

per cui possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \iint_{T'} (x + e^{-y^2}) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y (x + e^{-y^2}) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xe^{-y^2} \right]_0^y dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + ye^{-y^2} \right) dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{1}{2}e^{-y^2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Esempio : calcoliamo l'integrale di $f(x, y) = x^2 + y^2$ sul cerchio C (4.9). In questo caso è indifferente rispetto a quale asse considerare normale C , quindi scriviamo direttamente

$$\iint_C (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right) dx, \quad (4.13)$$

che dà un integrale fattibile ma piuttosto laborioso. Sospendiamo il calcolo, dato che troveremo un modo molto più veloce per risolvere la questione (4.23).

Talvolta conviene scomporre l'insieme di integrazione in parti dove i calcoli risultano più agevoli, come si faceva per le funzioni di una variabile con la formula di spezzamento (es. 4.4). Questo è possibile grazie alla prossima Proposizione 4.6, che facciamo precedere da due definizioni.

Definizione : la **differenza** di due insiemi A e B è l'insieme dei punti di A che non stanno in B ,

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

La **differenza simmetrica** di A e B è l'insieme dei punti che stanno in uno solo dei due insiemi,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

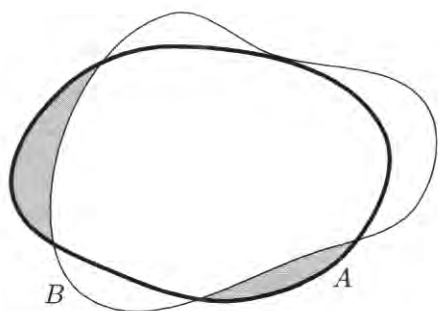


Fig. 4.14 : la differenza $A \setminus B$ (più sottile B)

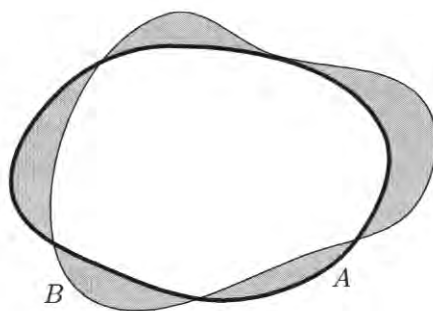


Fig. 4.15 : la differenza simmetrica $A \Delta B$

Definizione : un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **trascurabile** se (è misurabile e) $\text{Area}(E) = 0$. Due insiemi limitati $A, B \subset \mathbb{R}^2$ si dicono **essenzialmente disgiunti** se $A \cap B$ è trascurabile. Due insiemi limitati $A, B \subset \mathbb{R}^2$ si dicono **essenzialmente equivalenti** se $A \Delta B$ è trascurabile.

Proposizione (formula di spezzamento) 4.6 : se un insieme si può scrivere come unione di un numero finito di insiemi E_1, \dots, E_k che sono misurabili e sono a due a due essenzialmente disgiunti, allora è misurabile. Inoltre

$$\text{Area}(E) = \text{Area}(E_1) + \dots + \text{Area}(E_k)$$

e per ogni funzione integrabile $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \cdots + \iint_{E_k} f(x, y) dx dy. \quad (4.14)$$

Se un insieme A è essenzialmente equivalente a un insieme misurabile E , allora è anch'esso misurabile. Inoltre

$$\text{Area}(A) = \text{Area}(E), \quad \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy. \quad (4.15)$$

Esempio : la mezza corona A^+ (4.10), è normale rispetto all'asse y , quindi è misurabile. Dato che lo stesso vale per la sua simmetrica, la mezza corona A^- a sinistra dell'asse y , la loro unione (che è l'intera corona circolare A) è misurabile, e per calcolare un integrale su A basta sommare gli integrali su A^+ e A^- , dato che la parte comune $A^+ \cap A^-$ è costituita da due segmenti ed è quindi trascurabile (es. 4.5).

Le formule che riguardano l'area somigliano a quelle per gli integrali, dei quali in effetti l'area è un caso particolare. Infatti, se consideriamo il sottografico V della funzione costante 1 su un insieme piano E , l'insieme V è un cilindro (Sezione 1.3, di altezza 1 e base E , quindi il volume di V è pari a (uno moltiplicato per) l'area di E . D'altra parte V è il sottografico della funzione positiva 1 su E , quindi il suo volume è l'integrale su E della funzione costante 1.

Proposizione 4.7 : se $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 dx dy. \quad (4.16)$$

Esempio : calcoliamo l'area della parte I di piano che sta fra le due parabole di equazioni

$$y = x^2, \quad x = y^2.$$

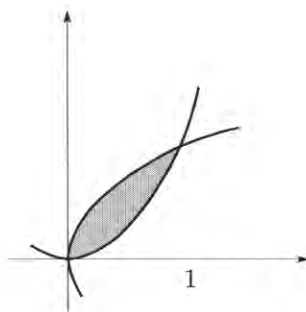


Fig. 4.16 : l'insieme I

La zona di intersezione è un insieme normale tanto rispetto all'asse x che all'asse y , e possiamo scriverla

$$I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

perciò

$$\begin{aligned} \text{Area}(I) &= \iint_I 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Per gli integrali multipli valgono le consuete formule algebriche viste in una dimensione (compresa la proprietà di spezzamento), e inoltre (dato che ci siamo fermati agli integrali su un insieme, analoghi di quelli su un intervallo, e non siamo passati all'analogo degli integrali su un intervallo orientato) la proprietà di monotonia.

Proposizione 4.8 : se E è misurabile, f e g sono integrabili su E e k è una costante allora

$$\iint_E (f(x, y) + g(x, y)) \, dx \, dy = \iint_E f(x, y) \, dx \, dy + \iint_E g(x, y) \, dx \, dy;$$

$$\iint_E k f(x, y) \, dx \, dy = k \iint_E f(x, y) \, dx \, dy;$$

$$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in E \implies \iint_E f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_E g(x, y) \, dx \, dy.$$

Inoltre se $E = E_1 \cup E_2$ ed E_1, E_2 sono essenzialmente disgiunti (4.14)

$$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{E_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{E_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Corollario 4.9 : se E ed F sono misurabili ed $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa e integrabile, allora

$$F \subset E \implies \int_F f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_E f(x, y) \, dx \, dy.$$

Infatti $E = F \cup (E \setminus F) = F \cup F'$, questi due insiemi sono misurabili (omettiamo la dimostrazione) e disgiunti, ma essendo $f \geq 0$ abbiamo

$$\int_{F'} f(x, y) \, dx \, dy \geq \int_{F'} 0 \, dx \, dy = 0,$$

quindi per la proprietà di spezzamento

$$\int_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_F f(x, y) \, dx \, dy + \int_{F'} f(x, y) \, dx \, dy \geq \int_F f(x, y) \, dx \, dy + 0.$$

4.3 - Cambiamenti di variabile

Apriamo la sezione ricordando che la formula di cambiamento di variabile per integrali in *una dimensione*, che si può dare per gli integrali definiti (cioè su intervalli orientati) come nel Teorema 1.51, vale anche per gli integrali su un intervallo, se ϕ è di classe C^1 e invertibile sull'intervallo $[a, b]$:

$$\int_{\phi([a,b])} f(x) dx = \int_{x=\phi(t)}^{\uparrow} f(\phi(t)) |\phi'(t)| dt. \quad (4.17)$$

Infatti se ϕ è invertibile (ossia iniettiva) su un intervallo allora per la Proposizione 1.40 è o strettamente crescente o strettamente decrescente, quindi o sempre $\phi'(t) \geq 0$, nel qual caso il valore assoluto nella formula (4.17) non serve e $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$, o è sempre $\phi'(t) \leq 0$, nel qual caso $\phi([a, b]) = [\phi(b), \phi(a)]$, dato che ϕ rovescia l'ordine.

In entrambi i casi, la funzione ϕ manda ogni intervallino $[t_0, t]$ di una partizione di $[a, b]$ in un intervallino di estremi $x_0 = \phi(t_0)$ e $x = \phi(t)$. La sua lunghezza è (ricordiamo che $x_0 < x$ se ϕ è crescente, altrimenti è il contrario)

$$|x - x_0| = |\phi(t) - \phi(t_0)| = \left| \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \right| (t - t_0) \simeq |\phi'(t_0)| (t - t_0).$$

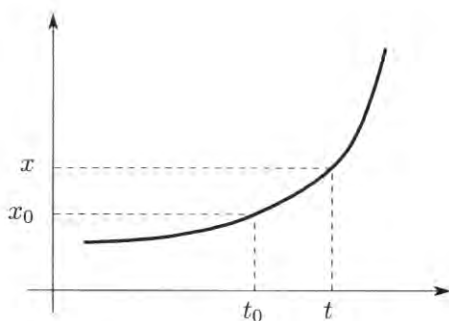


Fig. 4.17 : tra dominio e immagine la lunghezza cambia

Dunque il termine $|\phi'(t)|$ corregge la diversa misura di lunghezza nello spazio della variabile t rispetto allo spazio della variabile x . Possiamo scrivere, per ϕ invertibile,

$$|\phi'(t_0)| = \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \right| = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\text{lunghezza}(\phi([t_0, t]))}{\text{lunghezza}([t_0, t])}.$$

È ragionevole, allora, che se Φ è una funzione invertibile da un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R}^2 , in seguito al cambiamento di variabile

$$(x, y) = \Phi(s, t)$$

si ottenga una formula analoga alla (4.17),

$$\iint_{\Phi(\Omega)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\Phi(s, t)) \cdot (\text{correttore}) ds dt, \quad (4.18)$$

\uparrow
 $(x, y) = \Phi(s, t)$

dove il correttore sarà il limite del rapporto (area dell'immagine) / (area di partenza) per un rettangolino nello spazio (s, t) , che è l'analogo in due dimensioni dell'intervallino visto sopra.

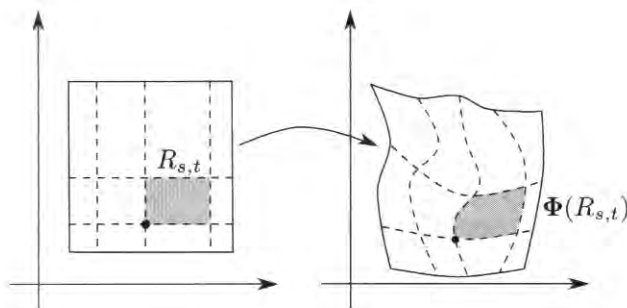


Fig. 4.18 : tra dominio e immagine l'area cambia

Il problema è dunque determinare l'area dell'immagine di un rettangolo

$$R_{s,t} = [s_0, s] \times [t_0, t]$$

mediante la trasformazione Φ , o meglio determinare

$$\lim_{s \rightarrow s_0, t \rightarrow t_0} \frac{\text{Area}(\Phi(R_{s,t}))}{\text{Area}(R_{s,t})}.$$

Cominciamo con il caso in cui Φ è lineare, cioè per una certa matrice A si ha

$$\Phi(s, t) = A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

In tal caso il rettangolo $R_{s,t}$ ha come immagine un parallelogramma, che ha un vertice in $\Phi(s_0, t_0)$. Gli altri sono le immagini di (s, t_0) , di (s_0, t) e di (s, t) , che sono i restanti vertici del rettangolo $R_{s,t}$: dunque il parallelogramma è generato dai vettori

$$\Phi(s, t_0) - \Phi(s_0, t_0) = \Phi(s - s_0, 0), \quad \Phi(s_0, t) - \Phi(s_0, t_0) = \Phi(0, t - t_0).$$

Ora

$$\Phi(s - s_0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11}(s - s_0) \\ a_{21}(s - s_0) \end{pmatrix}, \quad \Phi(0, t - t_0) = \begin{pmatrix} a_{12}(t - t_0) \\ a_{22}(t - t_0) \end{pmatrix},$$

pertanto (1.15)

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Phi(R_{s,t})) &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11}(s - s_0) & a_{12}(t - t_0) \\ a_{21}(s - s_0) & a_{22}(t - t_0) \end{pmatrix} \right| = (s - s_0)(t - t_0) |\det(A)| \\ &= \text{Area}(R_{s,t}) \cdot |\det A|. \end{aligned}$$

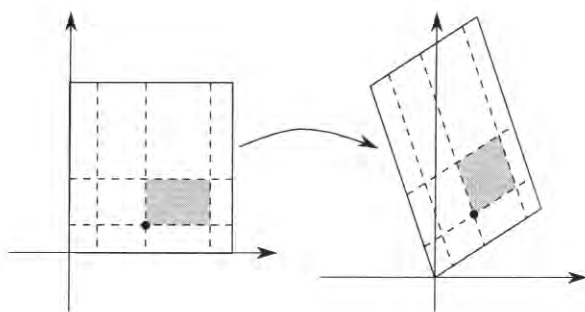


Fig. 4.19 : il caso lineare

Dunque in questo caso il correttore è $|\det(A)|$. Ricordiamo che per una funzione lineare

$$\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} \phi^1(s, t) \\ \phi^2(s, t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

la matrice jacobiana di Φ è (3.3)

$$\nabla \Phi = A,$$

quindi il correttore è

$$|\det A| = |\det(\nabla \Phi)|.$$

Vediamo di capire perché questo è vero anche in generale.

Teorema di cambiamento di variabile negli integrali doppi 4.10 : *sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile, sia $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione iniettiva, e con derivate parziali continue in tutto Ω . Allora*

$$\text{Area}[\Phi(\Omega)] = \int_{\Omega} |\det(\nabla \Phi(s, t))| \, ds \, dt$$

e per ogni funzione continua e limitata f definita sull'immagine $\Phi(\Omega)$ si ha

$$\iint_{\Phi(\Omega)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\substack{\uparrow \\ (x, y) = \Phi(s, t)}} \iint_{\Omega} f(\Phi(s, t)) \cdot |\det(\nabla \Phi(s, t))| \, ds \, dt. \quad (4.19)$$

Una dimostrazione precisa richiederebbe qualche sforzo tecnico. Ci accontentiamo di vedere perché la formula è ragionevole, e suggerire come si potrebbe agire per ricavare una vera dimostrazione.

Consideriamo due (piccoli) numeri positivi δs e δt , e cerchiamo di individuare approssimativamente l'immagine tramite Φ del rettangolo $R = [s_0, s_0 + \delta s] \times [t_0, t_0 + \delta t]$.

Dato che Φ è di classe C^1 , possiamo supporre che δs e δt siano così piccoli che in tutto R si abbia

$$D_s \Phi_1(s, t) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(s, t) \simeq \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(s_0, t_0)$$

e lo stesso per le altre derivate parziali. Poniamo $P_0 = (s_0, t_0)$ e

$$V_0 = \Phi(s_0, t_0),$$

l'immagine tramite Φ dell'angolo inferiore sinistro P_0 di R . L'immagine del lato inferiore di R , cioè di $[s_0, s_0 + \delta s] \times \{t_0\}$, è un arco di curva parametrizzato da

$$\phi(r) = \Phi(s_0 + r, t_0), \quad 0 \leq r \leq \delta s.$$

Questo parte da V_0 ; inoltre in ogni punto dell'arco il suo vettore tangente è

$$\phi'(r) = (D_s \Phi_1(s_0 + r, t_0), D_s \Phi_2(s_0 + r, t_0)) \sim (D_s \Phi_1(P_0), D_s \Phi_2(P_0)) = \phi'(0),$$

quindi l'arco in questione è “quasi dritto”, dato che il suo vettore tangente è pressoché costante. Allora l'arco “somiglia molto” al segmento che parte da V_0 e prosegue per tutto l'intervallo $[0, \delta s]$ con vettore tangente $\phi'(0)$: si tratta del segmento di estremi

$$V_0 \quad \text{e} \quad V_0 + \delta s \phi'(0).$$

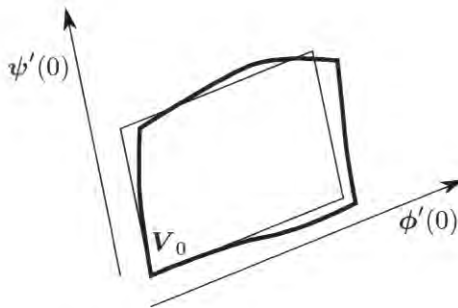


Fig. 4.20 : la vera immagine e il parallelogramma approssimante

Analogamente, per vedere l'immagine del lato sinistro di R , poniamo

$$\psi(r) = \Phi(s_0, t_0 + r), \quad 0 \leq r \leq \delta t,$$

osserviamo che

$$\psi'(r) = (D_t \Phi_1(s_0, t_0 + r), D_t \Phi_2(s_0, t_0 + r)) \sim (D_t \Phi_1(P_0), D_t \Phi_2(P_0)) = \psi'(0)$$

e quindi l'immagine del lato sinistro di R "somiglia molto" al segmento che parte da V_0 e prosegue per il tempo δt con vettore tangente $\psi'(0)$, che è il segmento di estremi

$$V_0 \quad \text{e} \quad V_0 + \delta t \psi'(0) .$$

Dunque l'immagine $\Phi(R)$ "somiglia molto" al parallelogramma generato da questi due segmenti orientati, la cui area è \approx (1.16)

$$|\det(\delta s \cdot \phi'(0), \delta t \cdot \psi'(0))| = |\det(\nabla \Phi(P_0))| \delta s \delta t$$

(per una dimostrazione precisa dovremmo trasformare tutti questi "somiglia" in coppie di disuguaglianze, ma questo allungherebbe di molto la discussione). Allora il correttore cercato è, come avevamo anticipato,

$$\frac{\text{Area}[\Phi(R)]}{\text{Area}(R)} \simeq \frac{|\det(\nabla \Phi(P_0))| \delta s \delta t}{\delta s \delta t} = |\det(\nabla \Phi(P_0))| .$$

Esempio : per una *traslazione di coordinate*, già incontrata nella Sezione 1.4, abbiamo

$$(x, y) = \Phi(x', y') = (x' + a, y' + b) \implies \nabla \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(\nabla \Phi) = 1$$

e quindi (come in una variabile) il fattore di correzione è 1. Per una *omotetia* di coefficienti a (nella direzione x) e b (nella y)

$$(x, y) = \Phi(x', y') = (ax', by') \implies \nabla \Phi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \implies \det(\nabla \Phi) = ab . \quad (4.20)$$

Infine, per una *rotazione*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ,$$

quindi

$$\begin{aligned} \Phi(x', y') = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &\implies \nabla \Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\implies \det(\nabla \Phi) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 . \end{aligned}$$

I risultati ottenuti sono quelli che ci si poteva aspettare: la prima e la terza trasformazione mandano un rettangolo in un rettangolo con le stesse dimensioni (e quindi la stessa area), spostato nel primo caso e girato nel terzo. Invece la seconda ne cambia le dimensioni, ma lo lascia un rettangolo.

Esempio : calcoliamo l'area dell'ellisse. Possiamo limitarci a un'ellisse E centrata nell'origine, con assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati e semiasse di lunghezze a nella direzione x e b nella direzione y . Sappiamo che (4.16)

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 \, dx \, dy$$

e che

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) : -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - (x/a)^2} \leq y \leq b\sqrt{1 - (x/a)^2} \right\}, \end{aligned}$$

e usando la formula di riduzione (4.11) otteniamo

$$\text{Area}(E) = \int_{-a}^a \left(\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} 1 \, dy \right) dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - (x/a)^2} \, dx.$$

Questo però è un integrale non velocissimo da calcolare. Invece, trasformiamo l'ellisse in un cerchio: con il cambiamento di variabile (che è una omotetia)

$$(x, y) = \Phi(s, t) = (as, bt)$$

abbiamo

$$(x, y) \in E \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \iff \frac{a^2 s^2}{a^2} + \frac{b^2 t^2}{b^2} \leq 1 \iff s^2 + t^2 \leq 1 \iff (s, t) \in C,$$

dove C è il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine dello spazio (s, t) . Allora, visto (4.20), abbiamo per la formula di cambiamento di variabili (4.19)

$$\begin{aligned} \text{Area}(E) &= \iint_E 1 \, dx \, dy = \iint_{\Phi(C)} 1 \, dx \, dy \stackrel{\substack{+ \\ (x,y)=\Phi(s,t)}}{=} \iint_C 1 \cdot ab \, ds \, dt \\ &= ab \iint_C 1 \, ds \, dt = ab \, \text{Area}(C) = \pi ab. \end{aligned}$$

4.4 - Coordinate polari

Un caso particolarmente importante di cambiamento di coordinate è quello delle coordinate polari (Sezione 1.5). La funzione

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (4.21)$$

è definita su $\mathbb{R}_+^2 = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, ma non è invertibile da \mathbb{R}_+^2 a \mathbb{R}^2 , per due motivi: intanto

$$\Phi(0, \theta) = \mathbf{0} \quad \forall \theta;$$

poi, essendo periodica,

$$\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \theta + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Tuttavia la stessa risulta invertibile da $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Consideriamo un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^2$; come osservato in (4.5) questo è limitato, ovvero

$$E \subset B_R(0) \quad \text{per qualche } R > 0.$$

Poi, posto

$$\begin{aligned} E_0 &= E \setminus \{0\} \\ \Omega_0 &= \{(r, \theta) : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, \Phi(r, \theta) \in E\} \\ &= \{(r, \theta) : 0 < r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, \Phi(r, \theta) \in E\} \\ \Omega &= \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \Phi(r, \theta) \in E\} \end{aligned}$$

risulta

$$\text{Area}(E \setminus E_0) = 0, \quad \text{Area}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0, \quad E_0 = \Phi(\Omega_0)$$

e quindi per ogni funzione continua f definita su E si ha (4.15)

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{E \setminus \{0\}} f(x, y) dx dy$$

e per ogni funzione continua g definita su Ω si ha

$$\iint_\Omega g(r, \theta) dr d\theta = \iint_{\Omega_0} g(r, \theta) dr d\theta.$$

Allora possiamo scrivere senza tema di confusione

$$\iint_E f(x, y) dx dy \stackrel{\uparrow}{\underset{(x, y) = \Phi(r, \theta)}} = \iint_\Omega f(\Phi(r, \theta)) |\det(\nabla \Phi(r, \theta))| dr d\theta$$

dato che l'uguaglianza si ottiene con il cambiamento di variabili applicato fra Ω_0 ed E_0 . Calcoliamo il determinante della matrice jacobiana $\nabla \Phi(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) = \cos \theta, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = -r \sin \theta, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta) = \sin \theta, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta) = r \cos \theta, \end{aligned}$$

pertanto

$$\nabla \Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \implies \det(\nabla \Phi(r, \theta)) = r.$$

Proposizione 4.11 : per ogni insieme misurabile $\Omega \subset [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ ed ogni funzione continua e limitata f definita sull'immagine di Ω tramite le coordinate polari (4.21) si ha

$$\iint_{\Phi(\Omega)} f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{(x,y)=\Phi(r,\theta)}{=} \iint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta. \quad (4.22)$$

Osserviamo che abbiamo parlato dell'insieme $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ solo per essere certi che le coordinate polari (4.21) fossero invertibili su un suo sottoinsieme qualunque. Se l'invertibilità è garantita da qualcos'altro, naturalmente non serve tale limitazione.

Proposizione 4.12 : siano $\Omega \subset [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ un insieme misurabile e $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ la sua immagine tramite le coordinate polari. Se $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$ è iniettiva allora la formula (4.22) continua a valere.

Vediamo alcuni esempi (es. 4.6).

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione xy sull'insieme

$$E = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y > 0\}$$

che è la parte della corona circolare di raggi $\sqrt{2}$ e 2 che sta nel primo quadrante.

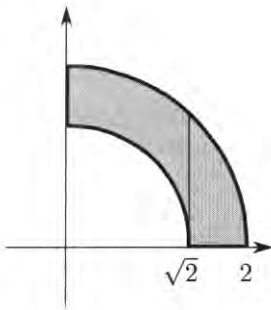


Fig. 4.21 : l'insieme di integrazione $E \dots$

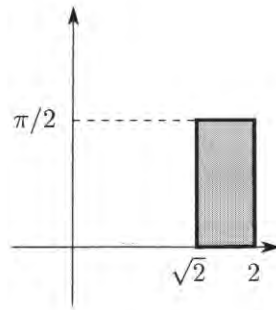


Fig. 4.22 : \dots e l'insieme Ω

Come abbiamo già detto, che i punti di norma $\sqrt{2}$ facciano parte o no dell'insieme E è influente ai fini del valore dell'integrale, e lo stesso vale per il bordo esterno della corona, nonché per i lati rettilinei di E . L'insieme E si descrive molto bene in coordinate polari, dato che

$$(x, y) \in E \iff \begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta \\ \sqrt{2} < r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Posto allora

$$\Omega = \{(r, \theta) : \sqrt{2} < r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\} =]\sqrt{2}, 2] \times [0, \pi/2]$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_E xy \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} (r \cos \theta)(r \sin \theta)r \, dr \, d\theta = \iint_{] \sqrt{2}, 2] \times [0, \pi/2]} r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta \right) dr = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{r^3}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \, d\theta \right) dr \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{r^3}{2} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} dr = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{r^3}{2} \cdot 1 \, dr = \left[\frac{r^4}{8} \right]_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Avremmo potuto calcolare l'integrale (con più fatica) in coordinate cartesiane. L'insieme E (o meglio l'insieme \bar{E} che si ottiene aggiungendo a E il bordo interno della corona circolare, il che non fa variare l'integrale per la Proposizione 4.6) è normale rispetto a entrambi gli assi, dato che ad esempio

$$\bar{E} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{se } \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \beta(x) = \sqrt{4-x^2}$$

per cui

$$\iint_E xy \, dx \, dy = \int_0^2 x \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} y \, dy \right) dx.$$

Dato che α cambia espressione a seconda se x superi o meno $\sqrt{2}$, conviene proseguire spezzando l'integrale:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left(\int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 x \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{2} ((4-x^2) - (2-x^2)) \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x}{2} ((4-x^2) - 0) \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{4x-x^3}{2} \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} + \left[x^2 - \frac{x^4}{8} \right]_{\sqrt{2}}^2 = 1 + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione $y^3 \sin x$ sull'insieme E dell'esempio precedente. Come abbiamo visto, in coordinate polari E si scrive benissimo, dato che la sua immagine inversa è un rettangolo; tuttavia, a differenza di quel che accade in una dimensione, in due variabili un integrale è "bello" non se lo è l'insieme d'integrazione o se

lo è la funzione integranda, ma se i due sono bene assortiti. In questo caso, in coordinate polari la funzione integranda diventa

$$r(r^3 \sin^3 \theta) \sin(r \cos \theta)$$

(il primo r viene dal determinante jacobiano), una funzione piuttosto scomoda da integrare. Sarebbe stato meglio restare in coordinate cartesiane e procedere come nell'esempio precedente, ottenendo che l'integrale vale

$$\int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2) \sin x \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(4 - x^2)^2}{4} \sin x \, dx ,$$

un integrale che contiene un termine un po' laborioso ma trattabile. Prima di cambiare coordinate, dunque, è opportuno vedere anche la forma assunta dalla funzione integranda dopo il cambio di variabili, comprendendo il determinante jacobiano.

Esempio : avevamo interrotto il calcolo dell'integrale (4.13). Il cerchio C è l'immagine tramite le coordinate polari del rettangolo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, sempre trascurando punti e segmenti, e la funzione integranda si riscrive r^2 , che moltiplicato per il determinante jacobiano dà r^3 . Allora possiamo scrivere

$$\iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} . \quad (4.23)$$

Esempio : consideriamo le due spirali di Archimede di equazioni polari (A2.1)

$$\gamma_1 : r = 1 + \theta , \quad \gamma_2 : r = 2 + \theta .$$

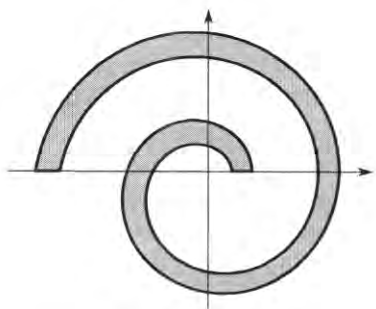


Fig. 4.23 : l'insieme E ...

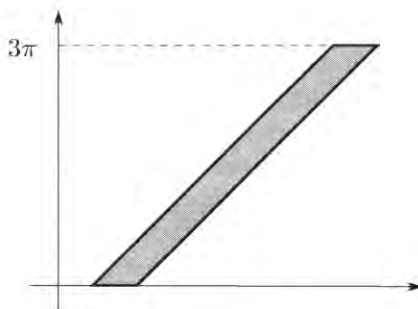


Fig. 4.24 : ... e l'insieme Ω

Vogliamo determinare l'area della parte E di piano che è racchiusa fra le due spirali e fra i due segmenti σ_1 , di estremi $(1, 0)$ e $(2, 0)$, e σ_2 , di estremi $(-3\pi - 2, 0)$ e $(-3\pi - 1, 0)$. Si tratta di una specie di salsiccia che fa un giro e mezzo intorno all'origine; in questo caso posto

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 3\pi, 1 + \theta \leq r \leq 2 + \theta\}$$

la funzione Φ definita in (4.21) è invertibile fra Ω ed E , quindi possiamo usare la Proposizione 4.12 ottenendo

$$\begin{aligned} \text{Area}(E) &= \iint_E 1 \, dx \, dy = \iint_{\Omega} r \, dr \, d\theta = \int_0^{3\pi} \left(\int_{1+\theta}^{2+\theta} r \, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{(2+\theta)^2 - (1+\theta)^2}{2} d\theta = \int_0^{3\pi} \frac{3+2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{3\theta + \theta^2}{2} \right]_0^{3\pi} \\ &= \frac{9\pi + 9\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

4.5 - Integrali in tre dimensioni e più

Dal punto di vista della definizione non cambia nulla di sostanziale rispetto agli integrali su un insieme piano: solo, anziché partire da funzioni positive definite su un rettangolo (bidimensionale) $R = [a, b] \times [c, d]$ e costruire parallelepipedi (tridimensionali) su una base che è un rettangolino (bidimensionale) contenuta nel dominio R (bidimensionale) si parte da funzioni definite su un oggetto tridimensionale, $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, che conviene continuare a chiamare rettangolo. Allora, formalmente costruiamo parallelepipedi (quadrimensionali, ma quel che conta è solo che la formula del volume non cambia: è il prodotto di *tutte* le dimensioni — in questo caso, quattro) su basi che sono rettangolini (tridimensionali) contenuti in R . Anche le definizioni di integrabile e misurabile sono del tutto simili a quelle in due dimensioni.

I cambiamenti intervengono quando si vuole estendere il Teorema 4.2 di riduzione degli integrali doppi definiti su un rettangolo; rivediamo lo spirito di questo enunciato: la formula (4.3) lega un integrale bidimensionale (che fino a quel momento non sapevamo come calcolare) a una sequenza di due operazioni (due integrali unidimensionali) che sapevamo fare. C'era solo la scelta se integrare prima rispetto a y , come nella formula (4.3), o prima rispetto a x , come nella formula (4.4). Ora, invece, sappiamo calcolare sia integrali unidimensionali che integrali bidimensionali, perciò il teorema di riduzione offrirà (oltre a scegliere l'ordine delle variabili) anche la possibilità di eseguire prima un integrale bidimensionale e poi uno unidimensionale, o fare il viceversa. D'ora in poi torniamo al simbolo \int anche per indicare gli integrali bi- e tridimensionali — se no, cosa dovremmo scrivere per quelli in dieci o venti dimensioni?

Teorema 4.13 : sia g una funzione continua sul rettangolo (chiuso) $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Allora

$$\begin{aligned} \int_R g(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{[c, d] \times [e, f]} g(x, y, z) dy dz \right) dx \\ &= \int_{[a, b] \times [c, d]} \left(\int_e^f g(x, y, z) dz \right) dx dy . \end{aligned}$$

Conviene vedere subito cosa accade per integrali in un numero qualunque di dimensioni: la prossima formula lega un integrale n -dimensionale a due integrali di dimensione più bassa, quindi assicura che se si sanno calcolare gli integrali di dimensione più bassa si sa calcolare anche quello di dimensione n . Consideriamo dunque un rettangolo in \mathbb{R}^n dove

$$n = h + k, \quad h, k \geq 1,$$

e per comodità, come già detto in (1.1), chiamiamo le n variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, \dots, y_k,$$

e poniamo

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_h), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k), \quad d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_h, \quad d\mathbf{y} = dy_1 \cdots dy_k \quad (4.24)$$

(lo scopo è riportare l'integrale in dimensione n a due integrali, prima nelle k variabili \mathbf{y} e poi nelle h variabili \mathbf{x}). Indichiamo le dimensioni di R con

$$R = ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_h, b_h]) \times ([c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k]) = R_{\mathbf{x}} \times R_{\mathbf{y}}.$$

Il teorema di riduzione prende allora la forma seguente.

Teorema 4.14 : per ogni funzione continua f definita su R si ha

$$\int_R f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{R_{\mathbf{x}}} \left(\int_{R_{\mathbf{y}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione $x + yz$ sul rettangolo

$$R = [0, 2] \times [0, 3] \times [-1, 1].$$

Possiamo scegliere di calcolare l'integrale in molti modi, applicando il teorema precedente:

1) indicando con \mathbf{x} la variabile x e con \mathbf{y} la coppia di variabili (y, z) ci riportiamo a

$$\int_{[0, 2]} \left(\int_{[0, 3] \times [-1, 1]} (x + yz) dy dz \right) dx,$$

oppure potremmo indicare con \mathbf{x} la variabile y e con \mathbf{y} la coppia (x, z) riportandoci a

$$\int_{[0,3]} \left(\int_{[0,2] \times [-1,1]} (x + yz) dx dz \right) dy,$$

o infine integrare prima (cioè nell'integrale più interno) in (x, y) e poi in z ;

2) indicando con \mathbf{x} la coppia di variabili (x, y) e con \mathbf{y} la variabile z ci riportiamo a

$$\int_{[0,2] \times [0,3]} \left(\int_{[-1,1]} (x + yz) dz \right) dx dy,$$

e analogamente scegliendo come \mathbf{x} le altre due possibili coppie di variabili.

Che facciamo? In questo caso i calcoli sono sempre piuttosto semplici, ma in altri casi il volume di calcoli da eseguire è assai diverso a seconda della scelta che si è fatta (es. 4.8), o talora impossibile in un modo e possibile in un altro, come nell'esempio (4.12). La scelta più agevole è probabilmente l'ultima proposta, che dà

$$\begin{aligned} \int_{[0,2] \times [0,3]} \left[xz + y \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^1 dx dy &= \int_{[0,2] \times [0,3]} 2x dx dy = \int_0^2 [2xy]_0^3 dx \\ &= \int_0^2 6x dx = [3x^2]_0^2 = 12. \end{aligned}$$

Per gli integrali in due variabili, siamo passati da quelli su un rettangolo a quelli su insiemi normali. Generalizziamo la situazione a \mathbb{R}^n , ricordando che da ora in poi "rettangolo" significa il prodotto di n intervalli, "plurirettangolo" significa unione finita di rettangoli n -dimensionali e dire che un insieme E è "misurabile" significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurirettangoli n -dimensionali, uno contenuto e uno contenente E , la cui differenza delle misure è inferiore a ε .

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile; con le notazioni già usate in (4.24), la **proiezione di E sulle variabili \mathbf{x}** è l'insieme

$$\Pi_{\mathbf{x}}(E) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^h : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \}.$$

Per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Pi_{\mathbf{x}}(E)$, la **sezione di E in corrispondenza di \mathbf{x}_0** è l'insieme

$$S_{\mathbf{x}_0}(E) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k : (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in E \}.$$

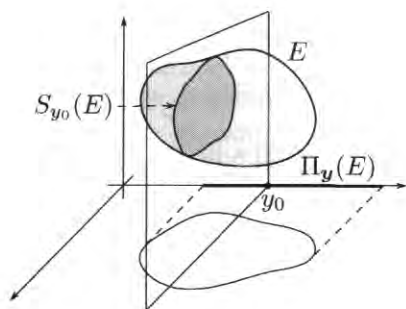
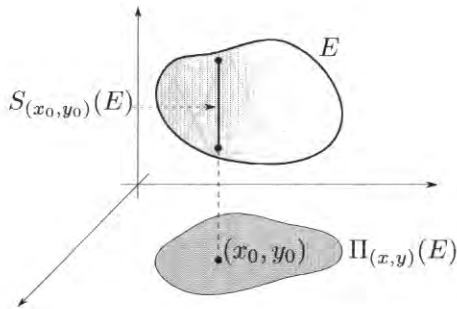


Fig. 4.25 : la proiezione sull'asse y e la sezione corrispondente a y_0

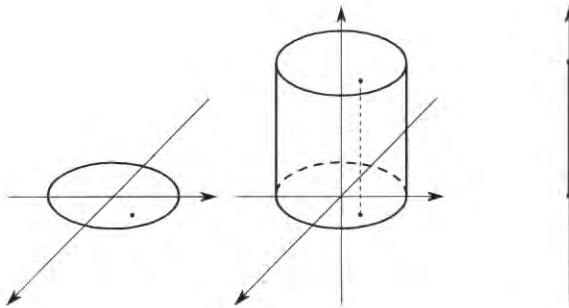

 Fig. 4.26 : la proiezione sul piano (x, y) e la sezione corrispondente a (x_0, y_0)

Esempio : il cilindro

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$$

ha proiezione sul piano (x, y) uguale al cerchio unitario:

$$\Pi_{(x,y)}(A) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

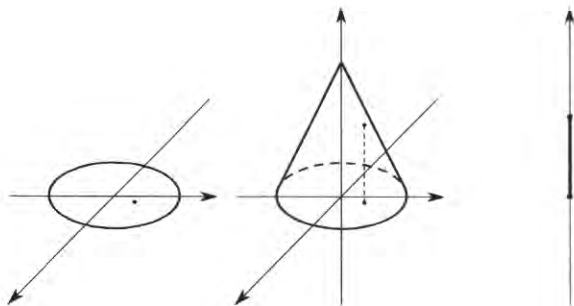

 Fig. 4.27 : il cilindro, la proiezione su x, y (a sinistra) e la sezione (a destra)

e per ogni punto di questa proiezione la sezione corrispondente è il segmento $0 \leq z \leq 3$.
Invece il cono

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 - 3\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

ha la stessa proiezione di A sul piano (x, y) , ma preso un punto (x_0, y_0) del cerchio unitario la sezione corrispondente è

$$S_{(x_0, y_0)}(B) = [0, 3 - 3\sqrt{x_0^2 + y_0^2}] .$$

Fig. 4.28 : il cono, la proiezione su x, y (a sinistra) e la sezione (a destra)

Vediamo le proiezioni e sezioni di A e B sull'asse z :

$$\Pi_z(A) = \Pi_z(B) = [0, 3]$$

e per ogni $z_0 \in [0, 3]$

$$S_{z_0}(A) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad S_{z_0}(A) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z_0/3\}.$$

Vediamo infine (prima cercate di visualizzarle da soli) le proiezioni e sezioni rispetto all'asse x :

$$\Pi_x(A) = \Pi_x(B) = [-1, 1]$$

e per ogni $x_0 \in [-1, 1]$ la sezione di A è un rettangolo di altezza 3 e la cui base è un intervallo $[-y_0, y_0]$ dove $x_0^2 + y_0^2 = 1$, cioè

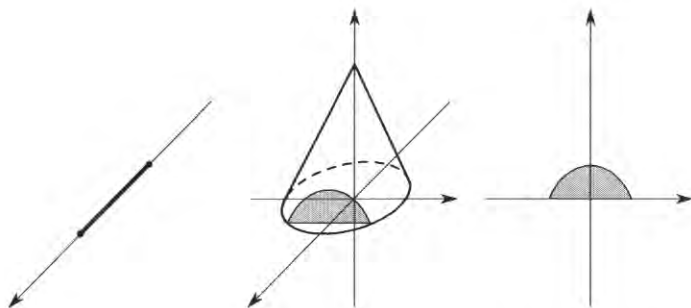
$$S_{x_0}(A) = [-\sqrt{1 - x_0^2}, \sqrt{1 - x_0^2}] \times [0, 3].$$

Invece la sezione di B è la parte di piano con

$$0 \leq z \leq 3 - 3\sqrt{x_0^2 + y^2},$$

quindi necessariamente $|y| \leq \sqrt{1 - x_0^2}$ perché altrimenti $3 - 3\sqrt{x_0^2 + y^2} < 0$. Questa parte (escluso il caso $x_0 = 0$) sta sotto il ramo inferiore dell'iperbole di equazione

$$\frac{(z - 3)^2}{(3x_0)^2} - \frac{y^2}{x_0^2} = 1,$$

Fig. 4.29 : il cono, la proiezione su x (a sinistra) e la sezione (a destra)

mentre per $x_0 = 0$ l'iperbole degenera e la sezione è il triangolo di vertice $z = 3$, $y = 0$ e base $z = 0$, $|y| \leq 1$.

Nel prossimo risultato utilizziamo le notazioni già introdotte in (4.24).

Teorema di riduzione degli integrali multipli 4.15 : sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, tale che la sua proiezione $\Pi_x(E)$ sulle variabili x sia misurabile (come sottoinsieme di \mathbb{R}^h) e che per ogni $x \in \Pi_x(E)$ la corrispondente sezione $S_x(E)$ sia misurabile (come sottoinsieme di \mathbb{R}^k). Se f è una funzione continua e limitata su E allora

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\Pi_x(E)} \left(\int_{S_x(E)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Con il teorema di riduzione, abbiamo un gran numero di modi in cui possiamo impostare il calcolo di un integrale (\Rightarrow appendice 4.1). Nel frequente caso di tre dimensioni, si distinguono la *integrazione per fili* in cui si proietta su un piano, e quindi le sezioni corrispondenti sono sottoinsiemi di una retta (fili, appunto) e la *integrazione per strati* in cui si proietta su una retta e le sezioni corrispondenti sono insiemi piani. A partire dal prossimo esempio, usiamo una notazione semplificata: quando si tratta di integrare su un insieme definito tramite una equazione, sovente si omettono le parti non essenziali, scrivendo ad esempio

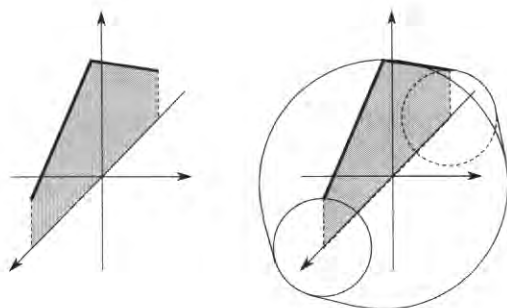
$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \dots$$

al posto del più corretto ma più lungo e dispersivo

$$\int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq 1\}} \dots$$

Esempio : calcoliamo il volume dei solidi di rotazione in \mathbb{R}^3 . Consideriamo una funzione continua f definita su un intervallo $[a, b]$ e non negativa, e tracciamo il suo grafico nel piano (x, z) . Questo è un sottoinsieme del piano (x, z) definito da

$$A = \{(x, z) : a \leq x \leq b, 0 \leq z \leq f(x)\}.$$

Fig. 4.30 : il solido ottenuto ruotando un sottografico intorno all'asse x

Pensiamo il piano (x, z) come immerso in \mathbb{R}^3 , ovvero come il sottoinsieme $\{(x, y, z) : y = 0\}$, e facciamo ruotare A intorno all'asse x . Questo genera un solido R , detto appunto di rotazione, che possiamo rappresentare nella forma

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\}. \quad (4.25)$$

Vogliamo calcolare il volume di R . Conviene in questo caso integrare per strati, proiettando sull'asse x . Abbiamo

$$\Pi_x(R) = [a, b]$$

e per ogni $x_0 \in [a, b]$ la sezione di R è un cerchio di raggio $f(x_0)$:

$$S_{x_0}(R) = \left\{ (y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x_0) \right\}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \int_R 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Pi_x(R)} \left(\int_{S_x(R)} 1 \, dy \, dz \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{y^2+z^2 \leq f^2(x)} 1 \, dy \, dz \right) dx = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx. \end{aligned}$$

Esempio : calcoliamo il volume di un cono C di raggio di base r e altezza h . Questo si può vedere come solido di rotazione, ma è più pratico il calcolo diretto, per strati: il cono

$$C = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq h - (h/r)\sqrt{x^2 + y^2} \right\} \quad (4.26)$$

ha proiezione sull'asse z uguale a $[0, h]$ e per ogni $z \in [0, h]$ la sezione è il cerchio centrato in $x = y = 0$ di raggio $r(1 - z/h)$. Allora il volume di un solido ottenuto per rotazione attorno all'asse x è

$$\text{Vol}(C) = \int_0^h \pi r^2 (1 - z/h)^2 \, dz \underset{h-z=ht}{=} \pi r^2 \int_1^0 t^2 (-h \, dt) = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Chiaramente vale la formula analoga per rotazioni attorno agli altri assi.

Esempio : calcoliamo l'integrale di $f(x, y, z) = 6x^2y^2 + z^4$ sull'ellissoide di rotazione

$$E = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Proiettando sull'asse z abbiamo

$$\Pi_z(E) = [-1, 1]$$

mentre per $z \in [-1, 1]$

$$S_z(E) = \{(x, y) : 2(x^2 + y^2) \leq 1 - z^2\},$$

che rappresenta un cerchio. Abbiamo

$$\int_E (6x^2y^2 + z^4) dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2+y^2 \leq (1-z^2)/2} (6x^2y^2 + z^4) dx dy \right) dz.$$

Per calcolare l'integrale interno possiamo (dopo una piccola semplificazione) usare le coordinate polari (4.22):

$$\begin{aligned} & \int_{x^2+y^2 \leq (1-z^2)/2} (6x^2y^2 + z^4) dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq (1-z^2)/2} (6x^2y^2) dx dy + \int_{x^2+y^2 \leq (1-z^2)/2} z^4 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{(1-z^2)/2}} 6r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dr \right) d\theta + z^4 \cdot \pi \frac{1-z^2}{2} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left[r^6 \right]_0^{\sqrt{(1-z^2)/2}} d\theta + z^4 \cdot \pi \frac{1-z^2}{2} \\ &= \frac{(1-z^2)^3}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta + z^4 \cdot \pi \frac{1-z^2}{2}. \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\sin 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 t dt \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad 2\theta=t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \left[\frac{t - \sin t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq (1-z^2)/2} (6x^2y^2 + z^4) dx dy &= \frac{\pi}{32} (1-z^2)^3 + \frac{\pi}{2} z^4 (1-z^2) \\ &= \frac{\pi}{32} (1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6 + 16z^4 - 16z^6) = \frac{\pi}{32} (1 - 3z^2 + 19z^4 - 17z^6). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_E (6x^2y^2 + z^4) dx dy dz &= \frac{\pi}{32} \int_{-1}^1 (1 - 3z^2 + 19z^4 - 17z^6) dz \\ &= \frac{\pi}{32} \left[z - z^3 + \frac{19}{5}z^5 - \frac{17}{7}z^7 \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{16} \left(1 - 1 + \frac{19}{5} - \frac{17}{7} \right) \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{48}{35} = \frac{3\pi}{35}. \end{aligned}$$

La formula di cambiamento di variabile negli integrali (4.19) vale anche per integrali in più di due dimensioni: chiaramente la funzione Φ sarà definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^n . La formula diventa quindi

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \underset{\mathbf{x}=\Phi(\mathbf{y})}{=} \int_{\Omega} f(\Phi(\mathbf{y})) |\det(\nabla\Phi(\mathbf{y}))| d\mathbf{y}. \quad (4.27)$$

Esempio : calcoliamo il volume del toro pieno (non la sola superficie, naturalmente); modifichiamo la parametrizzazione (3.24) della sola superficie in

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos \alpha) \cos \theta \\ y = (R + \rho \cos \alpha) \sin \theta \\ z = \rho \sin \alpha \end{cases} \quad \rho \in [0, r], \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (4.28)$$

con $0 < r \leq R$. Dunque

$$\Phi(\rho, \alpha, \theta) = ((R + \rho \cos \alpha) \cos \theta, (R + \rho \cos \alpha) \sin \theta, \rho \sin \alpha)$$

e la matrice gradiente è

$$\nabla\Phi(\rho, \alpha, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta & -\rho \sin \alpha \cos \theta & -\sin \theta (R + \rho \cos \alpha) \\ \cos \alpha \sin \theta & -\rho \sin \alpha \sin \theta & \cos \theta (R + \rho \cos \alpha) \\ \sin \alpha & \rho \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$|\det \nabla\Phi(\rho, \alpha, \theta)| = \rho(R + \rho \cos \alpha)$$

(osserviamo che $R + \rho \cos \alpha \geq R - r \geq 0$). Allora posto

$$\Omega =]0, r[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}_\rho \times \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\theta$$

(che gli intervalli siano chiusi o aperti non cambia il volume) per la formula di cambiamento di variabili (4.27) il volume del toro di raggio R e spessore $2r$ è

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(\Omega)} 1 d\mathbf{x} &\underset{\mathbf{x}=\Phi(\rho, \alpha, \theta)}{=} \int_{\Omega} \rho(R + \rho \cos \alpha) d\rho d\alpha d\theta \\ &= \int_0^r \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho(R + \rho \cos \alpha) d\theta \right) d\alpha \right] d\rho \\ &= 2\pi \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} (R\rho + \rho^2 \cos \alpha) d\alpha \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^r (2\pi R\rho) d\rho = 2\pi^2 Rr^2. \end{aligned}$$

Un caso particolarmente importante è quello delle coordinate polari. In tre dimensioni abbiamo visto due tipi di cambiamenti di variabile in coordinate simili a quelle polari: il primo sono le coordinate polari vere e proprie (1.26)

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in [0, \pi]$$

per le quali la matrice jacobiana è

$$\nabla \Phi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il valore assoluto del determinante jacobiano è

$$|\det \nabla \Phi(r, \phi, \theta)| = r^2 \sin \phi. \quad (4.29)$$

L'altro tipo sono le coordinate cilindriche (1.27)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$

per le quali

$$\nabla \Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto (es. 4.7)

$$|\det \nabla \Phi(r, \phi, \theta)| = r. \quad (4.30)$$

Esempio : calcoliamo l'integrale della funzione z^2 sul cono C visto nell'esempio (4.26). In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dx dy dz &= \int_0^h \left[\int_0^{r(1-z/h)} \left(\int_0^{2\pi} \rho z^2 d\theta \right) d\rho \right] dz \\ &= \int_0^h \left(\int_0^{r(1-z/h)} 2\pi z^2 \rho d\rho \right) dz = \int_0^h \pi r^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= \pi r^2 \int_0^h \left(z^2 - 2\frac{z^3}{h} + \frac{z^4}{h^2} \right) dz = \pi r^2 h^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi r^2 h^3}{30}. \end{aligned}$$

Potremmo anche considerare le coordinate polari in n dimensioni (1.28). Queste si incontrano meno di frequente, e tutto quel che può interessare è che il determinante jacobiano è

$$|\det \nabla \Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)| = r^{n-1} \sin \phi_1 \sin^2 \phi_2 \cdots \sin^{n-2} \phi_{n-2}.$$

In particolare osserviamo (lo useremo poi) che

$$|\det \nabla \Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)| = r^{n-1} q(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}), \quad 0 \leq q(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}) \leq 1. \quad (4.31)$$

Esempio : calcoliamo il volume n -dimensionale ω_n della palla unitaria di \mathbb{R}^n

$$B_n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1 \} .$$

Passando a coordinate polari in \mathbb{R}^n ed utilizzando la formula di cambiamento di variabili negli integrali abbiamo

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_n) &= \int_{B_n} 1 \, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{[0,\pi]^{n-2}} r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin^k \phi_k \, d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-2} \right) d\theta \right] dr \\ &= \frac{2\pi}{n} \prod_{k=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^k \phi_k \, d\phi_k . \end{aligned}$$

Gli integrali

$$\int_0^\pi \sin^k t \, dt$$

sono tutti calcolabili esplicitamente dato che (integrando per parti)

$$\int_0^\pi \sin^{k+2} x \, dx = \frac{k+1}{k+2} \int_0^\pi \sin^k x \, dx$$

e, con un po' di pazienza, si trova infine

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{n!!} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \quad (4.32)$$

dove il simbolo $n!!$ indica il *semifattoriale* di n , cioè il prodotto degli interi fino ad n con la stessa parità di n . In particolare abbiamo

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = 4\pi/3,$$

come è ben noto, e poi

$$\omega_4 = \pi^2/2, \quad \omega_5 = 8\pi^2/15, \quad \omega_6 = \pi^3/6.$$

Una volta noto il volume n -dimensionale ω_n della palla unitaria B_n , il volume di una palla di raggio r sarà semplicemente $\omega_n r^n$. Osserviamo che per $n \rightarrow +\infty$ il volume di $B_n \dots$ tende a zero!

4.6 - Integrali impropri

Generalizzare la teoria degli integrali impropri a più di una dimensione presenta qualche problema: anzitutto, gli insiemi su cui integriamo delle funzioni in \mathbb{R} sono di solito gli intervalli, o unioni finite di intervalli, mentre in più dimensioni la varietà di insiemi su cui possiamo pensare di integrare una funzione è enorme, il tutto senza bisogno di ricorrere ad esempi patologici.

Esempio : l'insieme aperto

$$Z = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 > 1, (x-2)^2 + y^2 < 4\}$$

è la differenza (in senso insiemistico) tra il cerchio di centro $(2, 0)$ e raggio 2 ed il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1 : è una specie di lunetta, che vicino all'origine ha due corna che si assottigliano.

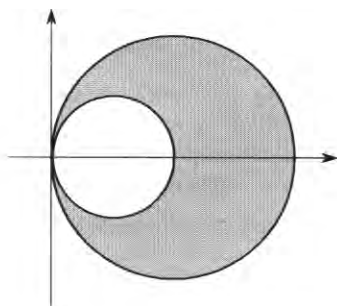


Fig. 4.31 : la lunetta Z

La funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ è continua ma vicino all'origine tende a $+\infty$. Avrà senso

$$\int_Z \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad (4.33)$$

e sarà finito o infinito?

Vediamo un secondo problema, anch'esso in più rispetto al caso unidimensionale: per approssimare l'intervallo $[0, +\infty]$ l'unico modo che pare sensato è usare intervalli $[0, M]$ e far tendere M a $+\infty$. L'integrale su $[0, +\infty[$ di una funzione f è allora definito come il limite (se esiste) dell'integrale di f su $[0, M]$.

Invece, per invadere il quadrante $Q = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ potremmo pensare di usare i quadrati

$$Q_M = [0, M] \times [0, M],$$

oppure i quarti di cerchio

$$C_M = Q \cap \{x^2 + y^2 \leq M^2\},$$

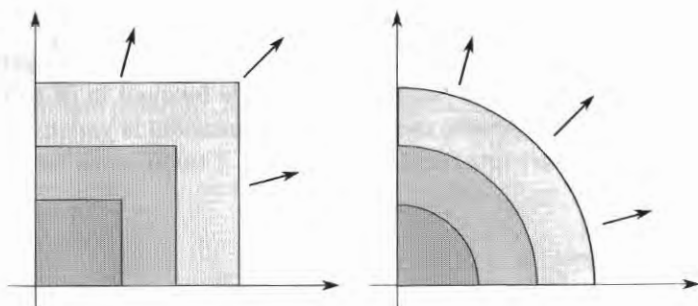


Fig. 4.32 : invadiamo un quadrante con quadrati, cerchi, ...

o magari i rettangoli

$$R_{M,N} = [0, M] \times [0, N]$$

oppure, perché no, delle porzioni di settore parabolico

$$P_M = \{(x, y) : x^2/M \leq y \leq M\}.$$

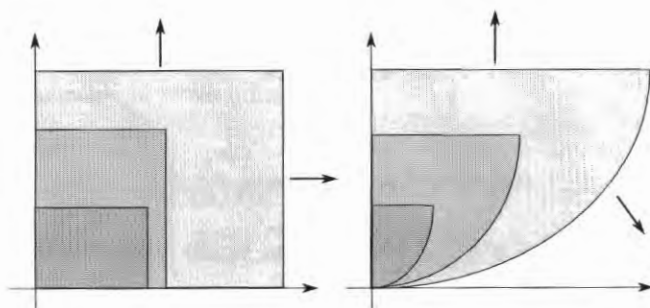


Fig. 4.33 : ..., rettangoli, settori parabolici

In effetti potrebbe accadere che i vari limiti

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{Q_M} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{C_M} f(x, y) \, dx \, dy, \\ \lim_{M, N \rightarrow +\infty} \int_{R_{M,N}} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{P_M} f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

siano diversi fra loro. Quale scegliere per definire l'integrale di f su Q ? E ancora peggio, che insiemi possiamo usare per approssimare la lunetta Z dell'esempio precedente?

Cerchiamo in poche parole di risolvere questi problemi. Lavoreremo solo con funzioni non negative, poi passeremo a quelle generiche grazie alle parti positiva e negativa.

Definizione : un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è **approssimabile** se esiste una successione $\{E_i\}$ tale che

- 1) ogni E_i è (limitato e) misurabile,
- 2) $E_i \subset E_{i+1} \subset \Omega$ per ogni i ,
- 3) ogni punto di Ω appartiene a qualche E_i , cioè $\Omega = \bigcup_i E_i$.

Una **successione che invade Ω** è una successione che verifica le tre proprietà precedenti.

Definizione : se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme approssimabile, ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, che sia integrabile su qualche successione che invade Ω , definiamo l'**integrale generalizzato di f su Ω** come

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sup \left\{ \int_E f(x) dx : E \subseteq \Omega, E \text{ misurabile, } f \text{ integrabile su } E \right\}. \quad (4.34)$$

Osserviamo che se aveva già senso l'integrale di f su Ω , cioè se Ω era esso stesso un insieme misurabile ed f era integrabile su Ω , per ogni misurabile $E \subset \Omega$ si ha $\int_E f dx \leq \int_{\Omega} f dx$ grazie al Corollario 4.9, quindi l'estremo superiore in (4.34) è il "vecchio" integrale su Ω : non ne abbiamo quindi cambiato il significato. Osserviamo poi che l'estremo superiore potrebbe essere anche $+\infty$, come nel caso unidimensionale.

Ci si pone un problema: come determinare questo estremo superiore? Fortunatamente abbiamo il prossimo risultato.

Proposizione 4.16 : se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme approssimabile, $\{E_i\}_i$ è una successione che invade Ω ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, che sia integrabile sulla successione $\{E_i\}_i$, allora

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{E_i} f(x) dx.$$

La proposizione precedente dice, in particolare, che il limite non dipende dalla scelta della successione. Vediamo allora come si può procedere nell'esempio che abbiamo iniziato poco sopra.

Esempio : determiniamo (4.33). Intanto Z è misurabile, ma f non è una funzione integrabile su Z dato che non è limitata. Però f , essendo continua fuori dall'origine, è integrabile su ogni insieme misurabile su cui essa sia limitata, come ad esempio sulla successione

$$E_i = \{(x, y) \in Z : x^2 + y^2 > 1/i^2\}$$

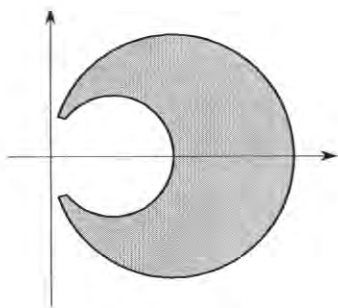
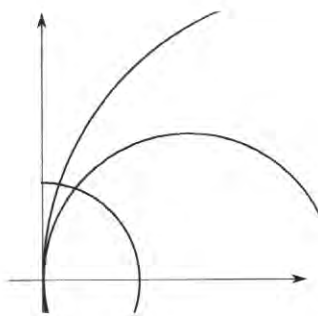
Fig. 4.34 : un insieme E_i 

Fig. 4.35 : un ingrandimento

(alla lunetta Z abbiamo tolto ogni volta una pallina centrata nell'origine, di raggio $1/i$). Abbiamo, in coordinate polari,

$$(x-1)^2 + y^2 > 1 \iff r^2 - 2r \cos \theta > 0 \iff r > 2 \cos \theta,$$

e

$$(x-2)^2 + y^2 < 4 \iff r^2 - 4r \cos \theta < 0 \iff r < 4 \cos \theta,$$

pertanto

$$(x, y) \in Z \iff -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 2 \cos \theta < r < 4 \cos \theta.$$

La circonferenza di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1/i^2$ ha equazione polare $r = 1/i$, ed interseca le due circonferenze di equazioni

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

rispettivamente nei due punti in cui $\cos \theta = 1/2i$ e nei due in cui $\cos \theta = 1/4i$. Per la simmetria della funzione integranda e degli insiemi su cui integrare, posto

$$E_i^+ = \{(x, y) \in E_i : y \geq 0\}$$

abbiamo

$$\int_{E_i} f(x, y) dx dy = 2 \int_{E_i^+} f(x, y) dx dy$$

e ci possiamo limitare a calcolare l'integrale su E_i^+ . Per quanto visto sopra, in coordinate polari l'insieme E_i^+

- 1) non contiene punti con $\theta > \arccos(1/4i)$
- 2) per $\arccos(1/2i) < \theta \leq \arccos(1/4i)$ contiene i punti con $(1/i) < r < 4 \cos \theta$
- 3) per $0 \leq \theta \leq \arccos(1/2i)$ contiene i punti con $2 \cos \theta < r < 4 \cos \theta$,

pertanto grazie a (4.22)

$$\begin{aligned} \int_{E_i^+} f(x, y) dx dy &= \int_0^{\arccos(1/2i)} \left(\int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \frac{1}{r^2} \cdot r dr \right) d\theta + \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} \left(\int_{1/i}^{4 \cos \theta} \frac{1}{r^2} \cdot r dr \right) d\theta \\ &= A_i + B_i . \end{aligned}$$

Iniziamo con A_i :

$$\begin{aligned} A_i &= \int_0^{\arccos(1/2i)} \left[\log r \right]_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta = \int_0^{\arccos(1/2i)} \log \frac{4 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = (\log 2) \arccos(1/2i) \\ &\rightarrow (\log 2) \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \log 2 . \end{aligned}$$

Per quanto riguarda B_i abbiamo

$$\begin{aligned} B_i &= \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} \left[\log r \right]_{1/i}^{4 \cos \theta} d\theta = \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} \log(4i \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} (\log \cos \theta + \log(4i)) d\theta . \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \arccos(1/2i) < \theta < \arccos(1/4i) &\Rightarrow \frac{1}{4i} < \cos \theta < \frac{1}{2i} \\ &\Rightarrow \log \frac{1}{4i} < \log \cos \theta < \log \frac{1}{2i} < 0 \\ &\Rightarrow |\log \cos \theta| < \left| \log \frac{1}{4i} \right| = \log(4i) , \end{aligned}$$

quindi (1.46)

$$\begin{aligned} |B_i| &\leq \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} |\log \cos \theta + \log(4i)| d\theta \\ &\leq 2 \int_{\arccos(1/2i)}^{\arccos(1/4i)} \log(4i) d\theta = [\log(4i)] [\arccos(1/4i) - \arccos(1/2i)] . \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \arccos(1/4i) - \arccos(1/2i) &= \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen \frac{1}{4i} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen \frac{1}{2i} \right) \\ &= \arcsen \frac{1}{2i} - \arcsen \frac{1}{4i} = \frac{1}{2i} + o\left(\frac{1}{i}\right) - \frac{1}{4i} = \frac{1}{4i} + o\left(\frac{1}{i}\right) , \end{aligned}$$

perciò

$$0 \leq |B_i| \leq [\log(4i)] \left[\frac{1}{4i} + o\left(\frac{1}{i}\right) \right] \rightarrow 0 .$$

Dunque $B_i \rightarrow 0$ e quindi

$$E_i^+ = A_i + B_i \rightarrow \frac{\pi}{2} \log 2 \Rightarrow E_i \rightarrow \pi \log 2$$

così che per la Proposizione 4.16

$$\int_Z \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \pi \log 2 .$$

Esempio : calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Posto

$$Q_i = [-i, i] \times [-i, i] , \quad B_i = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq i^2\}$$

entrambe le successioni invadono \mathbb{R}^2 e la funzione integranda, essendo continua, è integrabile su entrambe, quindi per la Proposizione 4.16

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{Q_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Il più facile da calcolare è l'integrale su B_i : in coordinate polari (4.22)

$$\int_{B_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^i e^{-r^2} r dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^i = \pi (1 - e^{-i^2}) \rightarrow \pi .$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi .$$

Osserviamo in particolare che abbiamo provato

$$\int_{Q_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \rightarrow \pi . \quad (4.35)$$

Traiamo da questo esempio una conseguenza inaspettata: è noto che la funzione e^{-x^2} non è integrabile elementarmente, cioè non ha una primitiva che possa essere scritta in termini di funzioni elementari. Questo impedisce di calcolare esplicitamente $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx$ per α e β generici. Tuttavia proviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} : \quad (4.36)$$

poniamo

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx , \quad X_i = \int_{-i}^i e^{-x^2} dx .$$

Osserviamo che per definizione

$$\begin{aligned} X &= \left(\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \right) + \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{-i}^0 e^{-x^2} dx \right) + \left(\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_0^i e^{-x^2} dx \right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} X_i \end{aligned} \quad (4.37)$$

dato che entrambi i limiti esistono e sono non negativi. D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{Q_i} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-i}^i \left(\int_{-i}^i e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \int_{-i}^i \left(e^{-y^2} \int_{-i}^i e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-i}^i (e^{-y^2} X_i) dy = X_i \int_{-i}^i e^{-y^2} dy = (X_i)^2. \end{aligned}$$

Ma da (4.35) segue allora

$$(X_i)^2 \rightarrow \pi \implies X_i \rightarrow \sqrt{\pi}$$

(dato che $X_i \geq 0$), e da (4.37) segue infine (4.36).

Nel volume *“Primo Corso di Analisi Matematica”* degli stessi autori del presente testo, nell'Appendice 8.14, avevamo già calcolato l'integrale (4.36) usando soltanto metodi di Analisi Matematica 1 ma con grande fatica; come abbiamo visto, l'utilizzo degli integrali doppi ha semplificato enormemente i calcoli.

Per gli integrali generalizzati di funzioni non-negative, valgono assai pochi dei criteri visti in una dimensione, dato che quasi tutti questi ultimi hanno fra le ipotesi il limite della funzione integranda nel “punto di improprietà”. Ma in più dimensioni, come si è detto, generalmente non vi è “un” punto di improprietà. Si salva il criterio del confronto.

Proposizione 4.17 : se $0 \leq f \leq g$ in Ω ed esistono, finiti o infiniti, $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ e $\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ allora

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = +\infty \implies \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = +\infty$$

e equivalentemente

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty \implies \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty.$$

Utilizzando le coordinate polari ne ricaviamo due importanti conseguenze, una all'infinito e l'altra per integrali impropri in un punto. Usiamo la notazione B_t per la palla aperta centrata nell'origine e di raggio t .

Corollario 4.18 : sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme approssimabile, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa, che sia integrabile su qualche successione che invade Ω . Se esiste una funzione continua

$$g : [r_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus B_{r_0}$$

e che

$$\int_{r_0}^{+\infty} r^{n-1} g(r) dr < +\infty$$

allora

$$\int_{\Omega \setminus B_{r_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty.$$

Infatti, usando le coordinate polari, grazie a (4.31) e al Teorema di riduzione degli integrali multipli 4.15, che usiamo proiettando sulla coordinata r , abbiamo (supponendo che Ω non sia limitato, altrimenti la dimostrazione è assai più facile e non serve l'ipotesi di integrabilità all'infinito su g)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_{r_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega \setminus B_{r_0}} g(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} \\ &= \int_{r_0}^{+\infty} \left(g(r) r^{n-1} \int_{S_r(\Omega)} q(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}) d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

Ma $q \leq 1$, quindi

$$\int_{\Omega \setminus B_{r_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{r_0}^{+\infty} \left(g(r) r^{n-1} \int_{S_r(\Omega)} 1 d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} d\theta \right) dr.$$

La sezione S_r è un sottoinsieme del rettangolo in cui abbiamo preso le variabili $\phi_1, \dots, \phi_{n-2}$ e θ , che è

$$[0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

ed ha dunque volume $(n-1)$ -dimensionale pari a $2 \cdot \pi^{n-1}$, perciò anche S_r ha volume $(n-1)$ -dimensionale non superiore a $2\pi^{n-1}$, quindi

$$\int_{\Omega \setminus B_{r_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq 2\pi^{n-1} \int_{r_0}^{+\infty} g(r) r^{n-1} dr < +\infty$$

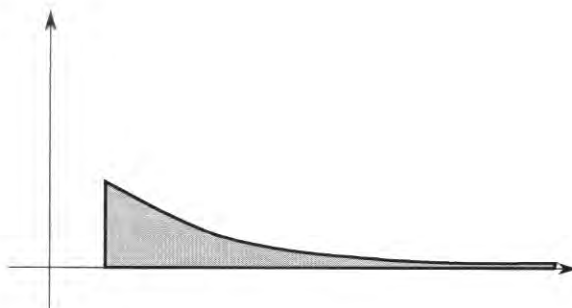
che conclude la dimostrazione del corollario. Osserviamo che se invece fosse stato

$$f(\mathbf{x}) \geq g(\|\mathbf{x}\|), \quad \int_{r_0}^{+\infty} r^{n-1} g(r) dr = +\infty$$

non avremmo potuto concludere che anche $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = +\infty$: infatti Ω avrebbe potuto essere limitato, oppure avrebbe potuto assottigliarsi sempre più man mano che ci si allontana dall'origine.

Esempio : sia

$$f(x) = 1 + x^2, \quad \Omega = \{(x, y) : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/(1+x^2)^2\}.$$

Fig. 4.36 : l'insieme Ω (in realtà è molto più schiacciato)

osserviamo che per ogni $(x, y) \in \Omega$ si ha $0 \leq y \leq 1$, quindi

$$(x, y) \in \Omega \implies f(x, y) = x^2 + 1 \geq x^2 + y^2,$$

e posto $g(r) = r^2$ abbiamo $f(x, y) \geq g(\|(x, y)\|)$. Chiaramente $\int_1^{+\infty} r g(r) dr = +\infty$, ma

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{(1+x^2)^{-2}} (1+x^2) dy \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Vediamo un risultato utile per integrali impropri in un punto.

Corollario 4.19 : sia $\Omega \subset B_{r_0} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme approssimabile, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa, che è continua e limitata su $\Omega \setminus B_r$ per ogni $r > 0$. Se esiste una funzione continua

$$g :]0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

e che

$$\int_0^{r_0} r^{n-1} g(r) dr < +\infty$$

allora

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty.$$

La dimostrazione ricalca quella del corollario precedente.

Esempio : l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/4}(1 + x^2 + y^2)} dx dy \quad (4.38)$$

converge. Infatti detta f la funzione integranda e posto

$$\Omega_0 = B_1, \quad g_0(r) = \frac{1}{r^{3/2}}$$

abbiamo

$$(x, y) \in \Omega_0 \implies f(x, y) \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/4}} = g_0(\|(x, y)\|)$$

(in realtà la disuguaglianza è vera ovunque) e

$$\int_0^1 r g_0(r) dr = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}} dr < +\infty,$$

quindi

$$\int_{\Omega_0} f(x, y) dx dy < +\infty.$$

Poi, posto

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus B_1, \quad g_\infty(r) = \frac{1}{r^{5/2}}$$

abbiamo

$$(x, y) \in \Omega_\infty \implies f(x, y) \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/4}(x^2 + y^2)} = g_\infty(\|(x, y)\|)$$

(anche questa disuguaglianza è vera ovunque) e

$$\int_1^{+\infty} r g_\infty(r) dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{3/2}} dr < +\infty,$$

quindi anche

$$\int_{\Omega_\infty} f(x, y) dx dy < +\infty,$$

ma $\mathbb{R}^2 = \Omega_0 \cup \Omega_\infty$ quindi anche l'integrale di f su \mathbb{R}^2 è finito. In questo caso il valore dell'integrale (4.38) si può calcolare esplicitamente, vi consigliamo di farlo per esercizio.

Esempio : fissato un numero reale $\alpha > 0$ consideriamo la funzione

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$$

definita per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq 0$. Ci chiediamo per quali valori di α la funzione risulti integrabile (in senso improprio) in un intorno dell'origine, ad esempio sulla palla unitaria $B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Passando a coordinate polari si ha

$$\int_{B_n} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} d\mathbf{x} = \int_0^1 r^{n-1-\alpha} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{[0, \pi]^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} \sin \phi_k d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-2} \right) d\theta \right] dr.$$

Usando quanto visto in (4.32) l'integrale precedente si scrive come

$$n\omega_n \int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr = n\omega_n \int_0^1 \frac{1}{r^{1+\alpha-n}} dr$$

che sappiamo essere convergente se e solo se $1 + \alpha - n < 1$, cioè $\alpha < n$.

In maniera analoga ci chiediamo in quali casi la stessa funzione f risulti integrabile al di fuori di un intorno dell'origine, ad esempio sull'insieme $B_n^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$. Ragionando come sopra, ci si riconduce all'integrale in una variabile

$$n\omega_n \int_1^{+\infty} r^{n-1-\alpha} dr$$

che sappiamo essere convergente se e solo se $\alpha > n$.

Concludiamo la sezione definendo l'integrale per funzioni di segno qualunque.

Definizione : siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se ha senso il secondo membro, si chiama **integrale generalizzato di f su Ω** la somma

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

In particolare, perché il secondo membro abbia senso, occorre che Ω sia approssimabile, che sia f^+ che f^- rispettino la condizione per la quale hanno senso i rispettivi integrali, e che i due integrali non siano entrambi $+\infty$.

4.7 - Integrali di superficie

A conclusione del capitolo estendiamo al caso delle superfici quello che abbiamo fatto per integrare una funzione su una curva nella Sezione 2.8. Osserviamo che nella formula (2.24) appare una struttura simile a (4.17) e (4.18). In effetti ora possiamo vedere il termine $\|\phi'(t)\|$ come il correttore, limite del rapporto fra lunghezza dell'immagine e lunghezza in partenza: un intervallino $[t_0, t_0 + \delta t]$ viene mandato dalla curva ϕ in un arco di estremi

$$\phi(t_0) \quad \text{e} \quad \phi(t_0 + \delta t) \simeq \phi(t_0) + \phi'(t_0) \delta t,$$

la cui lunghezza è pressappoco $\|\phi'(t_0)\| \delta t$.

Una curva è una funzione continua da \mathbb{R} a \mathbb{R}^n ; come si è visto nella Sezione 3.9, una superficie regolare bidimensionale in \mathbb{R}^n è una funzione $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ da un aperto

A di \mathbb{R}^2 , con jacobiano di rango massimo (quindi pari a 2) in ogni punto $t = (t, s) \in A$. L'integrale di una funzione f (definita sul sostegno di ϕ) sarà

$$\int_A f(\phi(t)) \cdot \text{correttore} dt,$$

dove il correttore, in ogni punto (t_0, s_0) , sarà il limite, per $\delta t, \delta s \rightarrow 0$, del rapporto fra l'area (bidimensionale) dell'immagine di un rettangolino $[t_0, t_0 + \delta t] \times [s_0, s_0 + \delta s]$ e quella del rettangolino stesso. Per δt molto piccolo, il lato inferiore $[t_0, t_0 + \delta t] \times \{s_0\}$ del rettangolino viene mandato da ϕ in un breve arco di estremi

$$\phi(t_0, s_0) \quad \text{e} \quad \phi(t_0 + \delta t, s_0) \simeq \phi(t_0, s_0) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0) \delta t,$$

cioè è un arco pressoché uguale al vettore

$$v_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, s_0) \delta t,$$

ma applicato in $\phi(t_0, s_0)$. Invece, per δs molto piccolo il lato sinistro $\{t_0\} \times [s_0, s_0 + \delta s]$ viene mandato da ϕ nel breve arco di estremi

$$\phi(t_0, s_0) \quad \text{e} \quad \phi(t_0, s_0 + \delta s) \simeq \phi(t_0, s_0) + \frac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0) \delta s,$$

a sua volta pressoché uguale al vettore

$$v_s = \frac{\partial \phi}{\partial s}(t_0, s_0) \delta s,$$

Dunque l'immagine del rettangolino avrà area simile a quella del parallelogramma generato dai due vettori v_t e v_s . Grazie al Corollario 1.7 il fattore di correzione è la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori 2×2 della matrice $2 \times n$ che ha come righe i due vettori v_t e v_s , che è la matrice jacobiana di ϕ nel punto (t_0, s_0) . Indicata con $\sigma_2(t_0, s_0)$ questa radice quadrata, si capisce il perché della prossima definizione (\Rightarrow appendice 4.3).

Definizione : sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, e sia $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione con jacobiano di rango due in ogni punto. L'**elemento di superficie su $\phi(A)$** è

$$\sigma_2(t, s) = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\det \begin{pmatrix} \partial_t \phi_i & \partial_s \phi_i \\ \partial_t \phi_j & \partial_s \phi_j \end{pmatrix} \right]^2}.$$

Se $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{R}$, l'**integrale superficiale di f su ϕ** è

$$\int_{\phi} f d\sigma_2 = \int_A f(\phi(t, s)) \sigma_2(t, s) dt ds. \quad (4.39)$$

Se poi ϕ è iniettiva si definiscono l'**integrale di f sulla superficie $\phi(A)$**

$$\int_{\phi(A)} f d\sigma_2 = \int_A f(\phi(t, s)) \sigma_2(t, s) dt ds$$

e l'**area di $\phi(A)$**

$$\text{Area}(\phi(A)) = \int_A \sigma_2(t, s) dt ds. \quad (4.40)$$

Osservazione : Nel caso $n = 3$ i determinanti sotto radice nella definizione precedente sono solo tre, per cui si ha:

$$\sigma_2(t, s) = \sqrt{\left[\det \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1 & \partial_s \phi_1 \\ \partial_t \phi_2 & \partial_s \phi_2 \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1 & \partial_s \phi_1 \\ \partial_t \phi_3 & \partial_s \phi_3 \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} \partial_t \phi_2 & \partial_s \phi_2 \\ \partial_t \phi_3 & \partial_s \phi_3 \end{pmatrix} \right]^2}.$$

Esempio : calcoliamo l'area della superficie di una sfera. Per riportarci al caso di una superficie definita su un aperto, modifichiamo il dominio della parametrizzazione (3.20) ponendo

$$(x, y, z) = \phi(\theta, \alpha) = (r \sin \alpha \cos \theta, r \sin \alpha \sin \theta, r \cos \alpha)$$

con però

$$0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \alpha < \pi :$$

questa parametrizza tutta la superficie della sfera centrata nell'origine (il che non guasta la generalità) e di raggio r , ad eccezione di una semicirconferenza (che però ha area nulla), quella che percorre il mezzo meridiano $\theta = 0$ dal polo nord al polo sud compresi. Abbiamo già trovato (nel caso $r = 1$) i minori 2×2 della matrice jacobiana (3.21), e dato che nel caso generale ogni componente della matrice risulta moltiplicato per r possiamo calcolare

$$\sigma_2(\theta, \alpha) = \sqrt{r^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + r^4 \sin^4 \alpha \sin^2 \theta + r^4 \sin^4 \alpha \cos^2 \theta} = r^2 \sin \alpha.$$

Allora l'area è

$$\int_{]0, 2\pi[\times]0, \pi[} \sigma_2(\theta, \alpha) d\theta d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi r^2 \sin \alpha d\alpha \right) d\theta = \int_0^{2\pi} 2r^2 d\theta = 4\pi r^2,$$

come ci era stato insegnato.

Esempio : vediamo ora come si calcola l'area della superficie laterale di un solido di rotazione. Consideriamo l'insieme R descritto in (4.25) e la sua superficie laterale

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\}; \quad (4.41)$$

vogliamo calcolare l'area di S . Usando le variabili cilindriche con asse l'asse x , ovvero le coordinate x, r, θ , possiamo descrivere la superficie S nella forma parametrica

$$x = x, \quad y = f(x) \cos \theta, \quad z = f(x) \sin \theta,$$

cioè mediante la funzione $\phi : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta), \quad x \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

Dalla formula (4.40) otteniamo

$$\text{Area}(S) = \int_{[a, b] \times [0, 2\pi]} \sigma_2(x, \theta) dx d\theta$$

dove $\sigma_2(x, \theta)$ è la radice quadrata della somma dei quadrati dei minori 2×2 della matrice $\nabla \phi(x, \theta)$. Essendo

$$\nabla \phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) \cos \theta & -f(x) \sin \theta \\ f'(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{pmatrix}$$

si ha

$$\sigma_2(x, \theta) = [f^2(x) \sin^2 \theta + f^2(x) \cos^2 \theta + f^2(x) (f'(x))^2]^{1/2} = f(x) [1 + (f'(x))^2]^{1/2},$$

per cui

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.42)$$

Chiaramente se abbiamo una superficie di rotazione intorno all'asse z data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} = f(z)\}$$

otteniamo la formula analoga

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz, \quad (4.43)$$

e lo stesso per l'asse y .

Esempio : consideriamo la superficie laterale S del cono

$$S = \{mz = \sqrt{x^2 + y^2} : 0 \leq z \leq h\}.$$

Si tratta della parte superiore del cono visto in (1.22), di vertice l'origine, altezza h , avente per asse l'asse z e ampiezza $\arctan m$. Possiamo usare quindi la formula (4.43) con $f(z) = mz$ ottenendo

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_0^h mz \sqrt{1 + m^2} dz = \pi h^2 m \sqrt{1 + m^2}.$$

Esempio : consideriamo la superficie del toro di raggi r, R descritta in (3.24). La sua equazione è

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2,$$

e la superficie si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z una circonferenza, quella che nel piano (x, z) ha centro $(R, 0)$ e raggio r e dunque equazione

$$(x - R)^2 = r^2 - z^2.$$

Ma la circonferenza non è un grafico $x = f(z)$, quindi non rientriamo direttamente nel caso che abbiamo appena visto. Conviene dividere la circonferenza nelle due semicirconferenze con $x \geq R$ e con $x \leq R$, che sono grafici rispettivamente delle funzioni

$$f_+(z) = R + \sqrt{r^2 - z^2} \quad \text{e} \quad f_-(z) = R - \sqrt{r^2 - z^2}.$$

Ruotando attorno all'asse z , queste generano le parti "esterna" e "interna" della superficie del toro,

$$S_+ = \{ \sqrt{x^2 + y^2} = R + \sqrt{r^2 - z^2}, z \in [-r, r] \}$$

$$S_- = \{ \sqrt{x^2 + y^2} = R - \sqrt{r^2 - z^2}, z \in [-r, r] \},$$

che sono entrambe superfici di rotazione: possiamo applicare la formula (4.43) e, cominciando con S_+ , otteniamo

$$\text{Area}(S_+) = 2\pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - z^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \right)^2} dz.$$

Analogamente, per la parte interna,

$$\text{Area}(S_-) = 2\pi \int_{-r}^r (R - \sqrt{r^2 - z^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \right)^2} dz.$$

Anziché calcolare separatamente le aree, è evidente che conviene prima sommarle, così la superficie totale del toro sarà data da

$$\begin{aligned} \text{Area}(S_+) + \text{Area}(S_-) &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2 - z^2}} dz \\ &= 8\pi r R \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - z^2}} dz \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ z=r \sin t}}{=} 8\pi r R \int_0^{\pi/2} dt = 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

Esercizi relativi al capitolo 4

In tutti gli esercizi sugli integrali va descritto e disegnato il dominio di integrazione; inoltre occorre dire se si tratta di un insieme normale, e rispetto a che variabili.

Esercizio 4.1 : calcolate $\int_E x \sin(x+y) dx dy$ con $E = [0, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 4.2 : calcolate $\int_D e^{x+y} dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

Esercizio 4.3 : calcolate l'integrale doppio

$$\int_1^e \left(\int_0^{\sqrt{\log x}} y dy \right) dx ,$$

disegnate la regione su cui si integra e scambiate l'ordine di integrazione.

Esercizio 4.4 : calcolate l'integrale doppio $\int_D x^2 y^2 dx dy$ dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\} .$$

Esercizio 4.5 : calcolate i seguenti integrali doppi:

a) $\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) $\int_D y^2 dx dy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 8\}$.

c) $\int_D (x+y) dx dy$ con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 36, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\} .$$

d) $\int_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dx dy$ con

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}, 2x^2 \leq y \leq 3x^2 \right\} .$$

e) $\int_D xy \, dx \, dy$ con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2(y-1)^2 \leq 36, |x| + |y| \geq 1\}.$$

f) $\int_D |y| \, dx \, dy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}.$

g) $\int_D x^2 \, dx \, dy$ con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Esercizio 4.6 : calcolate le aree delle regioni piane seguenti:

a) la regione delimitata dalla curva

$$\gamma(t) = (\sin t + \sin t \cos t, 1 + \cos t) \quad t \in [0, 2\pi];$$

b) la regione interna alla curva data in coordinate polari da

$$\rho = \cos^2 \theta \quad \theta \in [0, 2\pi];$$

c) la regione piana delimitata dalla curva

$$\gamma(t) = (e^t + t, e^t - t) \quad t \in [0, a]$$

e dal segmento che ne congiunge gli estremi $P = (1, 1)$ e $Q = (e^a + a, e^a - a)$, al variare del parametro reale $a > 0$.

Esercizio 4.7 : dato l'insieme

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z + x - 3 \leq 0, z - x - 3 \leq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 4\},$$

calcolate il volume di P integrando per fili e per strati.

Esercizio 4.8 : calcolate i seguenti volumi o integrali tripli, dopo aver disegnato anche le proiezioni dei domini stessi sui tre piani coordinati:

a) $\int_V dx \, dy \, dz$ con

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3, \frac{1}{3}(x^2 + y^2) < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}.$$

b) volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y + z \leq 2\}.$$

c) $\int_V xyz \, dx \, dy \, dz$ con

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

d) $\int_T z \, dx \, dy \, dz$ con $T = A \setminus B$ e

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 4z + y^2 + 3 \leq 0\}.$$

e) volume di E e $\int_E x^2 y \, dx \, dy$ con

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

f) $\int_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

g) volume di $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ e $\int_E z^2 \, dx \, dy \, dz$ (in tre modi diversi).

h) volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq e^y\}$$

e $\int_E x^2(1-y) \, dx \, dy \, dz$.

i) volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -\sqrt{x} \leq z \leq 0\}$$

e $\int_E (1-x)y^2 |z| \, dx \, dy \, dz$.

j) volume di $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$ e $\int_E 4yz \, dx \, dy \, dz$.

k) volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq z^2\}$$

e $\int_E x^2 z \, dx \, dy \, dz$.

l) $\int_E xyz \, dx \, dy \, dz$ con

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

m) volume del sottoinsieme di \mathbb{R}^3 :

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq e^{2 \arctan(y/x)}, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq \frac{5x}{x^2 + y^2} \right\}.$$

n) volume della regione S che risulta interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $x + y + z = 4$.

Appendice al capitolo 4

Appendice 4.1 - Integrali ed energie

Sappiamo che l'energia potenziale di un punto materiale di massa m , che si trova ad un'altezza h nel campo gravitazionale, aumenta di mgh rispetto a quella che avrebbe se fosse ad altezza zero; tuttavia i punti materiali pesanti non sono di questo mondo, popolato invece di oggetti tridimensionali. Gli integrali ci permettono di trovare una versione più adeguata alla realtà: supponiamo di avere un corpo formato di una sostanza con densità uniforme μ e che occupa una regione Ω nel campo gravitazionale (o in generale in un campo di forze costante). Una microscopica porzione di quel corpo, diciamo una sferetta di piccolo volume v e il cui centro $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ha quota z , è sostanzialmente assimilabile al punto materiale precedente, quindi contribuirebbe all'energia potenziale del corpo per una quantità $(\mu v)gz = (\mu z g) \cdot v$ — sempre, non lo ripetiamo più, rispetto all'energia che avrebbe se fosse a quota zero. Allora, pensando che accade suddividendo tutto Ω in porzioni piccole e facendo tendere a zero il volume di queste, è naturale che l'energia potenziale del corpo sia

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} \mu z g \, d\mathbf{x} = \mu g \int_{\Omega} z \, d\mathbf{x} . \quad (\text{A4.1})$$

Se il corpo ha densità non omogenea, e $\mu(\mathbf{x})$ è la densità di massa nel punto \mathbf{x} , la formula diventa

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}) z g \, d\mathbf{x} = g \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}) z \, d\mathbf{x} .$$

Possiamo dire che la *densità di energia* associata al campo gravitazionale $-g\mathbf{e}_3$ in un punto \mathbf{x} è $g\mu(\mathbf{x})z = g\mu(\mathbf{x})x_3$. Questo procedimento è molto utile, in quanto consente

di calcolare energie molto complicate: ad esempio, in meccanica si definiscono varie energie elastiche a ciascuna delle quali corrisponde una relativa densità, e se $W(\mathbf{x})$ indica la densità di energia elastica il corpo ha energia totale data dall'integrale di W (qui in realtà stiamo molto semplificando, in quanto la densità di energia in un punto dipende dallo stato di deformazione vicino a quel punto). Il discorso non si ferma qui (→ appendice 4.4).

Appendice 4.2 - Baricentri e navi

Abbiamo visto che il baricentro di una curva (2.25) è la media sulla curva stessa della funzione posizione \mathbf{x} , vale a dire l'integrale della funzione \mathbf{x} diviso per la lunghezza della curva, che è l'integrale sulla curva della funzione 1. Generalizziamo questa situazione alle figure piane e ai solidi (e anzi direttamente per sottoinsiemi "grassi" in \mathbb{R}^n).

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia

$$V_n(E) = \int_E 1 \, d\mathbf{x} > 0.$$

Il **baricentro di E** è il punto

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V_n(E)} \int_E \mathbf{x} \, d\mathbf{x}$$

(dove l'integrale è inteso per componenti).

Esempio : mostriamo che il baricentro di un triangolo è quello che ci hanno insegnato. Consideriamo il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e (b,c) con $a, c > 0$, il che non lede la generalità (è un triangolo qualsiasi, con gli assi messi in modo comodo). La sua area è

$$V_2(T) = \frac{1}{2}ac,$$

e le equazioni delle rette su cui stanno i lati non orizzontali sono (converrà integrare prima rispetto a x , dato che T è normale rispetto all'asse y , quindi prepariamo già le equazioni nella forma comoda)

$$x = \frac{b}{c} y, \quad x = a + \frac{b-a}{c} y :$$

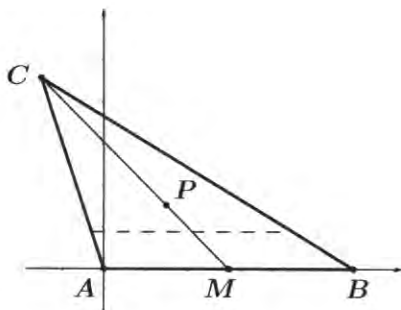


Fig. A4.1 : calcolo del baricentro

dunque per un dato valore di $y \in [0, c]$ la sezione è il segmento (tratteggiato in figura) compreso fra $x = by/c$ e $x = a + (b-a)y/c$. Allora (lasciando i facili calcoli allo studente)

$$\int_T x \, dx \, dy = \int_0^c \left(\int_{by/c}^{a+(b-a)y/c} x \, dx \right) dy = \frac{ac(a+b)}{3}$$

e (ancora più facile)

$$\int_T y \, dx \, dy = \int_0^c y \left(\int_{by/c}^{a+(b-a)y/c} 1 \, dx \right) dy = \frac{ac^2}{6}.$$

Allora le coordinate del baricentro sono

$$P = \left(\frac{2}{ac} \frac{ac(a+b)}{3}, \frac{2}{ac} \frac{ac^2}{6} \right) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3} \right).$$

Potete verificare facilmente che

$$P = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}C,$$

come sapevamo dalle Scuole Superiori essere per il punto d'intersezione delle mediane.

Esempio : calcoliamo ora il baricentro di un cono circolare retto C , di altezza h e raggio di base r , che possiamo pensare con il vertice in $(0, 0, h)$ e la base sul piano $z = 0$. Per "ragioni di simmetria" il baricentro si trova sull'asse del cono, quindi ha coordinate $x = y = 0$ (ma potete calcolarle molto facilmente, dato che si tratta di integrare la funzione dispari x su un segmento simmetrico rispetto a x , e lo stesso per y), dunque ci concentriamo sulla ricerca della coordinata z . Dato che la sezione del cono all'altezza z è un cerchio di raggio $(h-z)r/h$ abbiamo

$$\int_C z \, dx \, dy \, dz = \int_0^h z \cdot \pi \frac{(h-z)^2}{h^2} r^2 \, dz = \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^4}{2} - 2\frac{h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right) = \frac{5}{12} \pi r^2 h^2,$$

perciò la coordinata z del baricentro vale $5h/4$. Vi pare corretto che non dipenda dal valore di r ?

Osserviamo che il risultato ottenuto in (A4.1) dice che l'energia potenziale di un corpo Ω di volume V , avente densità di massa uniforme μ e soggetto solo alla gravità, vale

$$E(\Omega) = \mu g \int_{\Omega} z \, d\mathbf{x} = (\mu V) g \frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} z \, d\mathbf{x} = \text{Peso}(\Omega) \cdot P_z$$

dove P_z è la coordinata z del baricentro: dunque il corpo si comporta, per quanto riguarda la gravità, come un punto materiale concentrato nel suo baricentro.

Più in generale si può calcolare il baricentro di altri sottoinsiemi, con una certa precauzione (il che spiegherà la parola "grassi" usati all'inizio). Osserviamo che se a un triangolo pieno aggiungiamo un punto all'esterno, o un segmento, questi non spostano il baricentro, dato che hanno area zero (e sono l'idealizzazione di una pallina o di un filo così piccoli da avere massa che, rispetto a quella positiva del triangolo, è trascurabile). Tuttavia abbiamo calcolato il baricentro di una curva: in quel caso non vi erano masse importanti (figure con area o volume positivo), quindi è stato corretto considerare solo la (pur piccola) massa del filo. Si può definire (A4.2) la k -area di una k -superficie in \mathbb{R}^n , e se

$$\text{Area}_k(\phi(A)) > 0$$

il baricentro di $\phi(A)$ è

$$B = \frac{1}{\text{Area}_k(\phi(A))} \int_{\phi(A)} \mathbf{x} \, d\sigma_k.$$

Potete per esercizio provare a calcolare il baricentro della sola superficie laterale di un cono (di nuovo, serve solo la coordinata z).

La ricerca del baricentro è importante in ingegneria navale: infatti una nave (che essenzialmente è una superficie di metallo, cava) ha un certo baricentro, e in quel punto possiamo pensare che agisca tutta la forza di gravità.

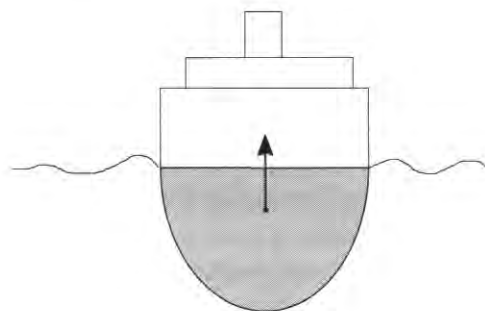


Fig. A4.2 : il punto metacentrico

D'altra parte la nave riceve la spinta idrostatica, che è pari al volume dell'acqua spostata ed è applicata nel *punto metacentrico*, il baricentro del *solido* che costituisce la parte sommersa (la parte, lamiere esterne e vuoto interno, che sta sotto il pelo dell'acqua, pensata composta interamente di acqua).

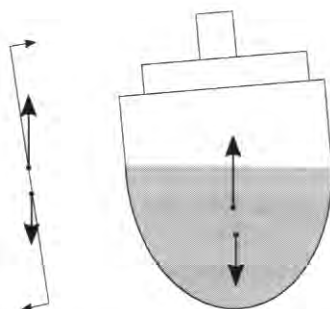


Fig. A4.3 : se il punto metacentrico è sopra il baricentro, stabilizza la nave, ma se no...

Naturalmente la nave non galleggia se il suo peso è superiore a quello del liquido spostato, ma perché la nave stia in equilibrio **stabile** sull'acqua, occorre che le due forze in gioco (la gravità e la spinta idrostatica) non generino mai una coppia che tenda a ribaltare lo scafo. Appena la nave rolla o beccheggia un poco, i due punti non si trovano più sulla stessa verticale, e se il baricentro sta **sopra** il punto metacentrico la coppia che si produce capovolge la nave: questo è il motivo dell'affondamento del Vasa, che aveva sovrastrutture imponenti ma pesanti che alzavano il baricentro, nonché il motivo delle grandi quantità di sassi che (contro l'intuizione) venivano caricati in fondo alla stiva delle navi greche, per abbassare il baricentro a costo di diminuzione del carico e aumento del peso totale.

Appendice 4.3 - Integrali superficiali multidimensionali

La situazione bidimensionale si generalizza alle k -superfici in \mathbb{R}^n : se ϕ va da un aperto di \mathbb{R}^k a \mathbb{R}^n , con $k \leq n$, ed ha in ogni punto jacobiano di rango massimo (cioè k), indichiamo con $\sigma_k(t)$ la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti i minori $k \times k$ della matrice jacobiana di ϕ in un punto $t \in A$.

Definizione : sia $A \subset \mathbb{R}^k$ un aperto, e sia $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione con jacobiano di rango k in ogni punto $t \in A$. Se $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{R}$, l'**integrale k -superficiale di f su ϕ** è

$$\int_{\phi} f d\sigma_k = \int_A f(\phi(t)) \sigma_k(t) dt.$$

Se poi ϕ è iniettiva si definiscono l'**integrale di f sulla k -superficie $\phi(A)$**

$$\int_{\phi(A)} f d\sigma_k = \int_A f(\phi(t)) \sigma_k(t) dt$$

e la **k-area** di $\phi(A)$

$$\text{Area}_k(\phi(A)) = \int_A \sigma_k(t) dt. \quad (\text{A4.2})$$

Esempio : proviamo a calcolare l' $\text{Area}_{n-1}(S_{n-1})$, dove S_{n-1} è la superficie della palla unitaria di \mathbb{R}^n

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Utilizzando le coordinate polari viste in (1.28) si potrebbe scrivere la rappresentazione parametrica

$$x = \phi(\theta, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}),$$

per cui si potrebbe calcolare la matrice $\nabla \phi(\theta, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})$, che è una matrice di dimensione $n \times (n-1)$, poi il termine σ_{n-1} , ed infine l' $\text{Area}_{n-1}(S_{n-1})$ utilizzando la formula (A4.2).

Possiamo però procedere in maniera più rapida ricordando i calcoli fatti per ottenere il volume ω_n della palla unitaria di \mathbb{R}^n . L' $\text{Area}_{n-1}(S_{n-1})$, moltiplicata per un piccolo spessore ε , sarà all'incirca la differenza tra il volume della palla di raggio $1+\varepsilon$ e quella di raggio 1, cioè

$$\varepsilon \text{Area}_{n-1}(S_{n-1}) \simeq \omega_n((1+\varepsilon)^n - 1).$$

Per ε piccolo, ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione $(1+x)^n$ intorno al punto $x=0$, avremo

$$(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon,$$

per cui

$$\text{Area}_{n-1}(S_{n-1}) \simeq n\omega_n.$$

Quando ε diventa molto piccolo, l'approssimazione diventa via via più precisa, per cui al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\text{Area}_{n-1}(S_{n-1}) = n\omega_n.$$

Ad esempio si ha, ricordando i valori di ω_n visti nella Sezione 4.5,

$$\text{Area}_1(S_1) = 2\pi, \quad \text{Area}_2(S_2) = 4\pi, \quad \text{Area}_3(S_3) = 2\pi^2.$$

Appendice 4.4 - Integrali ed energie di superficie

In molti casi incontriamo *energie di superficie*: ad esempio, la tensione superficiale (grazie alla quale il leggero insetto idrometra cammina sull'acqua) o più in generale l'energia di contatto (o di bagnamento) che si ha quando due sostanze diverse hanno una superficie in comune. Ad esempio, una bolla d'olio nell'acqua ha una superficie in comune fra olio e acqua; una bolla di sapone ha ben due superfici (la faccia interna e quella esterna) in comune fra aria e soluzione saponosa.

Le energie di superficie sono date (per oggetti solidi in \mathbb{R}^3) da integrali di superficie, e sono del tipo

$$\int_S e(\sigma) d\sigma_2$$

dove $e(\sigma)$ è la densità di energia superficiale nel punto σ (vi sono anche forme più complete ma più complicate), mentre per oggetti bidimensionali in \mathbb{R}^2 la "superficie esterna" è semplicemente la curva ϕ che ne costituisce il bordo, e l'energia diviene

$$\int_{\phi} e(\phi(t)) \, dt.$$

Ad esempio se una bolla di sapone occupa uno spazio Ω il cui bordo è la superficie $\partial\Omega$, e β è l'energia di contatto fra aria e soluzione saponosa per unità di superficie, l'energia totale è data da

$$E(\Omega) = 2 \int_{\partial\Omega} \beta d\sigma_2 = 2\beta \text{Area}_2(\partial\Omega) :$$

dato che la natura cerca sovente di minimizzare l'energia, la bolla cerca di assumere la forma Ω che minimizza E **fra tutte le forme che hanno lo stesso volume** (l'aria che abbiamo soffiato dentro la bolla). Si tratta di un problema di minimo assai diverso da quelli visti nei corsi di Analisi matematica 1 e 2, dato che l'incognita qui è un insieme, non un numero o più numeri. La soluzione comunque è la sfera.

Vediamo un altro esempio interessante, quello del menisco che si forma quando un liquido è in un recipiente. Fissiamoci con un liquido di densità costante, ad esempio l'acqua (o poi il mercurio), contenuto in un bicchiere (dunque col fondo) a pareti cilindriche, fatto tutto dello stesso materiale, diciamo vetro, e che il tutto avvenga nell'aria. Senza la pretesa di trovare la forma del menisco (problema difficile quanto quello della bolla di sapone) mostriamo che la configurazione piatta non è energeticamente la migliore: proveremo che il profilo di destra nella figura A4.4 ha energia minore. Chiamiamo R il raggio del recipiente e h l'altezza dello smusso (a 45°) nella figura di destra, e vediamo quali sono le energie in gioco (i calcoli sono tutti di geometria elementare).

- a) L'energia potenziale: rispetto alla figura di sinistra, gran parte del liquido si è abbassato, ma una porzione vicino al bordo del bicchiere si è alzata. Facendosi i conti, la differenza di energia potenziale fra destra e sinistra è

$$\delta P = \mu \left[\frac{\pi h^3}{3} \left(R - \frac{h}{4} \right) - \frac{\pi h^4}{2} \left(1 - \frac{h}{3R} \right)^2 \right] = \frac{\pi \mu R}{3} h^3 + o(h^3)$$

dove μ è la densità di massa (un parametro).

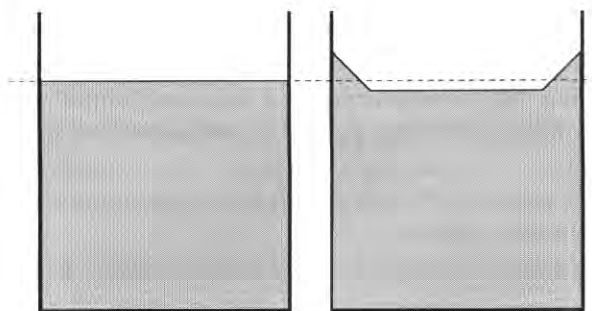


Fig. A4.4 : la configurazione piatta e una configurazione migliore

- b) L'energia di superficie fra liquido e aria: detta σ la densità di tale energia per unità di superficie (un altro parametro), supponendo per semplicità che questa dipenda solo dalle due sostanze e sia quindi proporzionale all'area, la differenza di energia superficiale fra destra e sinistra è

$$\delta S = \sigma\pi(\sqrt{2} - 1)h(2R - h) = 2\pi(\sqrt{2} - 1)\sigma Rh + o(h).$$

- c) L'energia di superficie data dalla interazione fra il bicchiere e il resto: una parte del bicchiere era a contatto con l'aria nella configurazione di sinistra, mentre in quella di destra è a contatto con il liquido. Dette rispettivamente α e λ le densità di energia di bagnamento fra bicchiere e aria, e fra bicchiere e liquido, la differenza di energia di bagnamento fra destra e sinistra sarà pari a $(\lambda - \alpha)$ volte l'area della porzione della superficie di bicchiere interessata, quindi pari a

$$\delta B = (\lambda - \alpha)2\pi R\left(h - \frac{h^2}{R} + \frac{h^3}{3R^2}\right) = 2\pi(\lambda - \alpha)Rh + o(h).$$

In totale la differenza di energia fra destra e sinistra è

$$\delta E = \delta P + \delta S + \delta B = 2\pi[\lambda - \alpha + (\sqrt{2} - 1)\sigma]Rh + o(h) \quad (\text{A4.3})$$

(e in particolare per h piccolo le energie di superficie sono molto più importanti dell'energia potenziale). Da questa espressione si vede che se il coefficiente di h è negativo, ovvero se

$$\alpha > \lambda + (\sqrt{2} - 1)\sigma$$

(il che accade se il recipiente si fa bagnare dal liquido più volentieri che rimanere a contatto con l'aria — questo è il caso di acqua e vetro), per h piccolo la differenza di energia fra destra e sinistra è negativa, cioè conviene energeticamente la configurazione di destra. Se, invece di acqua, nel bicchiere di vetro avessimo del mercurio, il coefficiente λ sarebbe assai più alto che per l'acqua, dunque il coefficiente di h in (A4.3) sarebbe positivo e la configurazione di destra sarebbe peggiore di quella piatta, anzi sarebbe conveniente la configurazione opposta a quella di destra, con lo smusso girato verso il basso: e difatti il menisco formato dal mercurio è al contrario di quello dell'acqua.

Capitolo 5

Equazioni differenziali

In questo capitolo introduciamo le equazioni differenziali: un tipo particolare di equazioni, in cui l'incognita non è un numero o un vettore, ma una funzione, e in cui intervengono esplicitamente sia la funzione incognita che alcune sue derivate.

5.1 - Introduzione alle equazioni differenziali

Iniziamo presentando alcuni problemi, espressi per ora in forma puramente matematica, in cui l'incognita è una funzione; il primo è: “trovate tutte le funzioni la cui derivata è la funzione $\cos x$ ”. Possiamo riscrivere il problema in formula, introducendo l'incognita, che è una funzione $y(x)$ alla quale imponiamo che abbia come derivata la funzione $\cos x$. Dato che questa derivata è definita su tutto \mathbb{R} , vogliamo che la relazione di essere la derivata dell'incognita y valga su tutto \mathbb{R} , quindi il primo problema si riscrive

$$y'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

o, volendo,

$$y'(x) - \cos x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo già che le soluzioni sono infinite, e sono le primitive della funzione coseno. Ricordiamo, per i prossimi problemi, che le primitive di una funzione sono definite *su un intervallo*.

Il secondo problema è: “trovate tutte le funzioni la cui derivata è uguale alla funzione stessa”. Qui il problema si riscrive formalmente

$$y'(x) = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad y'(x) - y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Il terzo problema è: “trovate tutte le funzioni la cui derivata è la radice quadrata della funzione stessa”. Nulla da dire sull'equazione, che sarà $y'(x) = \sqrt{y(x)}$, ma la presenza della radice quadrata ci fa sorgere un dubbio: dove sarà definita la funzione incognita $y(x)$? Questa domanda si sarebbe dovuta porre anche per il problema precedente, nel quale non avevamo pensato che potessero sorgere difficoltà: da dove possono mai nascere, dato che il secondo membro $y(x)$ dell'uguaglianza $y'(x) = y(x)$ non sembra ne possa presentare? Invece, per l'equazione $y'(x) = \sqrt{y(x)}$ la forma del secondo membro ci suggerisce di essere più cauti. Fra le incognite, mettiamo anche l'intervallo I in cui risulterà definita la soluzione $y(x)$, così il problema si riscrive

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \quad \forall x \in I \quad (5.3)$$

oppure con l'equazione nella forma $y'(x) - \sqrt{y(x)} = 0$. Ripareremo più tardi di questo argomento (5.18).

Il quarto problema è: “trovate tutte le funzioni la cui derivata è il quadrato della funzione stessa”. Sembra molto facile: introduciamo anche qui (anche se pare un eccesso di prudenza) l'intervallo I , e scriviamo

$$y'(x) = [y(x)]^2 \quad \forall x \in I. \quad (5.4)$$

Come talvolta accade, l'intuizione gioca brutti scherzi: a posteriori, vedremo che le soluzioni di (5.3) risultano definite su tutto \mathbb{R} , mentre (5.23) quelle di (5.4) no! Dunque l'introduzione dell'intervallo (incognito) I non è discrezionale, ma obbligatoria. Concludiamo con altri problemi; il quinto è: “trovate tutte le funzioni la cui derivata seconda è l'opposto della funzione stessa”, che si traduce in

$$y''(x) = -y(x) \quad \forall x \in I:$$

qui nella formula (che potremmo riscrivere $y''(x) + y(x) = 0$) interviene la derivata seconda dell'incognita (5.41).

L'ultimo problema preliminare è direttamente in formula:

$$[y'(x)]^2 = [\sin x]^2 \quad \forall x \in I. \quad (5.5)$$

La differenza rispetto agli altri è che non sembra possibile, o almeno non ovvio, scrivere questa formula come $y'(x) = \dots$: come liberarsi del \pm ? Come vedremo, questo fatto rappresenta una difficoltà notevole (5.59). È ora di definire le equazioni differenziali, facendo precedere la definizione da una semplificazione: quando è chiaro qual è il nome della funzione incognita, e quale quello della variabile indipendente (l'argomento della funzione incognita, ovvero la variabile rispetto alla quale deriviamo), per non appesantire la scrittura la omettiamo quando possibile, così le equazioni che compaiono nei problemi presentati all'inizio si scriveranno rispettivamente

$$y' = \cos x, \quad y' = y, \quad y' = \sqrt{y}, \quad y' = y^2, \quad y'' = -y, \quad (y')^2 = \sin^2 x,$$

Definizione : si chiama **equazione differenziale di ordine n** ogni espressione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \forall x \in I,$$

dove F è una funzione dipendente da $n+2$ variabili definita in un sottoinsieme E di \mathbb{R}^{n+2} , e $y^{(k)}$ è la derivata k -esima (rispetto alla variabile x) della funzione incognita $y(x)$, definita in un intervallo incognito $I \subset \mathbb{R}$.

Se $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$ è un vettore di dimensione $d > 1$ ed $\mathbf{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ con E sottoinsieme di $\mathbb{R}^{(n+1)d+1}$ ed $m > 1$, la scrittura

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n)}) = \mathbf{0} \quad \forall x \in I$$

è un sistema di m equazioni differenziali nelle d incognite Y_1, \dots, Y_d , di ordine n .

Un'equazione differenziale si dirà **in forma normale** se la funzione F si può scrivere nella forma

$$F(x, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_n - f(x, z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$

per una funzione f opportuna, così che l'equazione differenziale diventa del tipo

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (5.6)$$

Analogamente, un sistema di equazioni differenziali è in forma normale se lo si può riscrivere

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}).$$

Una **soluzione** di una equazione differenziale (o sistema) di ordine n è una funzione definita in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, derivabile n volte in I , e che in tutti i punti di I verifica l'equazione (o sistema).

Osservazione : se un sistema è in forma normale, necessariamente ha tante equazioni quante sono le componenti dell'incognita \mathbf{Y} , cioè $d = m$.

Osservazione : l'intervallo di definizione della soluzione è anch'esso una incognita; questo potrà creare qualche problema però, come abbiamo visto, è una richiesta da cui non possiamo prescindere (Teorema 5.7).

Osservazione : in svariati enunciati che seguono (ad esempio tutti quelli che sfruttano la locale lipschitzianità) richiederemo che l'insieme E sia un aperto; se il dominio dell'equazione (o sistema) non è aperto, vengono a mancare molti strumenti fondamentali come il Teorema di esistenza 5.2, e si è costretti a impiegare tecniche *ad hoc*, caso per caso (5.17).

Esempio : la più semplice equazione differenziale (5.1) è data dall'espressione $y' = f(x)$ dove f è una assegnata funzione continua definita in un intervallo I . Sappiamo che le soluzioni sono tutte e sole le primitive della funzione f , che per il Teorema fondamentale del calcolo integrale Teorema 1.50 sono definite su tutto I e sono date da

$$y(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

con $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, non è obbligatorio chiamare x la variabile indipendente e y la funzione incognita: quando la variabile indipendente riveste il ruolo del tempo (o del parametro in una curva) è frequente indicarla con la lettera t ; quando la funzione incognita è una massa la potremo indicare m , e così via.

Esempio : sui camion è installato un tachigrafo, che registra ad ogni istante t la velocità v del mezzo; dalla funzione $v(t)$ è possibile risalire allo spazio s percorso dal camion dall'inizio del viaggio, fissato per $t = 0$: infatti $s' = v(t)$, quindi $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ senza altre costanti additive. Se il tachigrafo ha registrato la velocità solo da un certo tempo t_0 , e in quel momento lo spazio già percorso dal camion era s_0 , la funzione $s(t)$ verifica (1.47)

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t s'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$$

e perciò, essendo $s(t_0) = s_0$, è data da

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

Esempio : un'altro caso semplice (5.2) è dato dall'equazione $y' = ay$, con a costante reale. In un intervallo in cui è $y(x) > 0$, dividendo per y , l'equazione equivale a $(\log y)' = a$ da cui si ricava $\log y = ax + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, e quindi $y = ce^{ax}$ con $c = e^k > 0$ costante arbitraria. Osserviamo che questa soluzione rimane positiva su tutto \mathbb{R} , quindi $I = \mathbb{R}$. Analogamente, in un intervallo in cui è $y(x) < 0$ si trova $y = ce^{ax}$ con $c < 0$ costante arbitraria. E se in un punto una soluzione valesse zero? Nulla di male, la funzione identicamente nulla verifica l'equazione, quindi è anch'essa una soluzione. In definitiva, siccome le soluzioni y cercate sono derivabili (e quindi continue), si trova che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = ay$ sono le funzioni $y = ce^{ax}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Esempio : in una colonia di batteri, ogni minuto si divide circa il 5% dei batteri presenti, dunque se $b(t)$ è il numero di batteri al tempo t , misurato in minuti, è

$$b(t+1) - b(t) = 0.05 \cdot b(t).$$

Se da ciò potessimo dedurre che $b'(t) = 0.05 \cdot b(t)$, da quanto visto prima avremmo $b(t) = b(0)e^{0.05 \cdot t}$, cioè i batteri crescono esponenzialmente (supponendo che non vi siano

altri fattori che influenzino la vita o la morte dei batteri). Sostituire $b(t+1) - b(t)$ con $b'(t)$ è però in generale errato, visto che la derivata è il *limite* del rapporto incrementale, e non l'incremento di b corrispondente a un incremento unitario di t ; vediamo come possiamo procedere in questo caso. Intanto è ragionevole supporre che la derivata (ovvero la velocità di crescita) sia direttamente proporzionale al numero di batteri esistenti, cioè $b'(t) = ab(t)$ per qualche a da determinarsi, ma abbiamo risolto poco fa questa equazione, ottenendo che $b(t) = b(0)e^{at}$. Se vogliamo che dopo un minuto i batteri siano aumentati del 5%, cioè $b(1) = 1.05 \cdot b(0)$, occorre che $b(1) = b(0)e^{a \cdot 1} = 1.05 \cdot b(0)$, ovvero la costante esatta è

$$a = \log 1.05 \sim 0.04879$$

e non $a = 0.05$; allora l'equazione differenziale soddisfatta dai batteri è

$$b' = b \log 1.05 \quad (5.7)$$

e la popolazione di batteri cresce secondo la legge

$$b(t) = b(0)e^{t \log 1.05} = b(0)(1.05)^t. \quad (5.8)$$

Esempio : per i materiali radioattivi si parla di *tempo di dimezzamento*, che è il tempo T_d dopo il quale metà degli n_0 atomi radioattivi iniziali sono decaduti; pertanto se chiamiamo $n(t)$ il numero di atomi che non sono ancora decaduti al tempo t abbiamo

$$n(0) = n_0, \quad n(T_d) = \frac{1}{2}n_0.$$

La situazione è analoga a quella dell'esempio precedente, e partendo da

$$n'(t) = -an(t)$$

per qualche a positivo (il numero diminuisce col tempo, quindi n' deve essere negativa) ricaviamo

$$n(t) = n_0 e^{-at}.$$

Imponendo che al tempo T_d metà degli atomi sia decaduta otteniamo

$$n_0 e^{-aT_d} = n(T_d) = \frac{1}{2}n_0 \implies e^{-aT_d} = \frac{1}{2} = e^{-\log 2} \implies a = \frac{\log 2}{T_d},$$

quindi

$$n(t) = n_0 e^{-(\log 2)t/T_d} = n_0 2^{-t/T_d}. \quad (5.9)$$

Possiamo a questo punto vedere quanto sia la *vita media* di un atomo radioattivo, e verificare che questa *non* è il tempo di dimezzamento: se infatti ricaviamo da (5.9) il tempo t in funzione di n , scriviamo cioè

$$\log n(t) = \log n_0 - \frac{t \log 2}{T_d} \implies t = -\frac{T_d}{\log 2} \log \frac{n(t)}{n_0},$$

otteniamo la funzione

$$t(n) = -\frac{T_d}{\log 2} \log(n/n_0), \quad 0 < n \leq n_0,$$

che esprime dopo quanto tempo t sono rimasti radioattivi ancora n degli n_0 atomi iniziali; chiaramente per $n = n_0$ (vale a dire *tutti* gli atomi iniziali sono ancora radioattivi) il tempo risulta zero, dato che il numero di atomi radioattivi comincia subito a scendere in base alla legge (5.9). Allo stesso modo, per $n \rightarrow 0$ abbiamo $t \rightarrow +\infty$. Se $t(n) = k$, vuol dire che n atomi sono rimasti attivi per il tempo k : dunque la vita media di un atomo è la media integrale della funzione t fra 0 e n_0 , vale a dire

$$\begin{aligned} VM &= \frac{1}{n_0} \int_0^{n_0} -\frac{T_d}{\log 2} \log(n/n_0) \, dn \underset{n=n_0 s}{=} -\frac{T_d}{\log 2} \int_0^1 \log s \, ds \\ &= -\frac{T_d}{\log 2} [s \log s - s]_0^1 = \frac{T_d}{\log 2} \simeq 1.44 T_d. \end{aligned}$$

Ci si potrebbe chiedere: ma che senso ha fare derivate o integrali rispetto a una variabile che, come n , ha valori interi? Ricordiamo che, salvo in condizioni di vuoto estremo, il numero n_0 di atomi presente anche in una piccola quantità di sostanza è generalmente strabiliante (la costante di Avogadro è circa $6 \cdot 10^{23}$), e se riportassimo su una scala lunga 10 cm l'intervallo $[0, n_0]$ la distanza fra i vari valori sarebbe del tutto trascurabile: dunque possiamo assimilare quella che sarebbe in realtà una sommatoria a un integrale e un rapporto incrementale a una derivata.

5.2 - Il problema di Cauchy: esistenza

Riesaminiamo l'esempio del camion: se non avessimo saputo quanto era il kilometraggio percorso dal mezzo all'istante t_0 , non avremmo certo potuto dire quanto era il kilometraggio all'istante t o, in altre parole, se non avessimo saputo che $s(t_0)$ aveva un certo valore, avremmo solo potuto dire che

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \, d\tau + c \tag{5.10}$$

per qualche costante arbitraria c : la funzione s sarebbe stata indeterminata, dato che ci sono infinite funzioni (una per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$) che soddisfano questa uguaglianza. Dunque la *condizione iniziale* $s(t_0) = s_0$ ci permette di determinare l'unica, fra le soluzioni di (5.10), che risolve il problema. Vediamo un altro caso.

Esempio : un corpo di massa m cade al suolo (nel vuoto, o trascurando l'attrito dell'aria) sotto l'azione della gravità. Detta $h(t)$ la sua altezza dal suolo all'istante t , per la legge di Newton la sua accelerazione h'' è data da

$$mh''(t) = -mg \implies h''(t) \equiv -g. \quad (5.11)$$

Supponiamo che a un certo istante t_0 l'altezza dal suolo $h(t_0)$ e la velocità $h'(t_0)$ siano note e siano date da

$$h(t_0) = h_0, \quad h'(t_0) = h_1. \quad (5.12)$$

Le condizioni sulla funzione incognita h sono allora l'equazione differenziale (5.11) e le due condizioni (5.12). Ricordando (1.47), la velocità h' , essendo una primitiva dell'accelerazione, verifica

$$h'(t) - h'(t_0) = \int_{t_0}^t h''(\tau) d\tau = -g(t - t_0) \implies h'(t) = h_1 - g(t - t_0).$$

Allora l'altezza, a sua volta una primitiva della velocità, verifica

$$\begin{aligned} h(t) - h(t_0) &= \int_{t_0}^t h'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t [h_1 - g(\tau - t_0)] d\tau \\ &= h_1(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

ed è pertanto data da

$$h(t) = h_0 + h_1(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2.$$

Rispetto all'esempio del camion, l'equazione è del secondo ordine anziché del primo, ed è chiaro che per determinare la legge del moto abbiamo bisogno di entrambe le condizioni (5.12). Questa è una situazione molto semplice e generale, e per l'accoppiata equazione differenziale in forma normale - condizioni iniziali dei due esempi appena visti è disponibile una teoria completa.

Vi sono altri problemi in cui un'equazione differenziale è sottoposta a condizioni di tipo diverso dalle condizioni di Cauchy; ad esempio, per un'equazione del secondo ordine si può imporre il valore della soluzione in due punti diversi. Rimandiamo alla Sezione 5.9, in cui mostreremo anche qualche esempio di equazione differenziale non in forma normale.

Definizione : dati l'equazione differenziale di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.13)$$

con f definita in un sottoinsieme E di \mathbb{R}^{n+1} , ed un punto

$$P_0 = (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in E,$$

il sistema

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

si chiama **problema di Cauchy con dato iniziale** P_0 per l'equazione (5.13). Una **soluzione** del problema di Cauchy è una funzione y definita in un intorno I di x_0 , che in I risolve l'equazione e che verifica nel punto x_0 tutte le condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

In particolare, per il caso delle equazioni del primo ordine, il problema di Cauchy si riduce a

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove (x_0, y_0) è un punto del sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^2$ in cui è definita f (es. 5.1). Il problema di Cauchy ha senso naturalmente anche per i sistemi; dato che si deve trattare di sistemi in forma normale, il numero m delle equazioni deve essere pari alla dimensione del vettore funzione incognita Y . Anche se il caso delle equazioni rientra come caso particolare in quello dei sistemi, abbiamo preferito dare due definizioni separate per non spaventare il lettore con il caso generale, e per presentare subito il caso più frequente.

Definizione : dati il sistema di m equazioni differenziali di ordine n in forma normale

$$Y^{(n)} = f(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}), \quad (5.14)$$

con f definita in un sottoinsieme E di \mathbb{R}^{mn+1} a valori in \mathbb{R}^m , ed un punto

$$P_0 = (x_0, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}) \in E,$$

il sistema

$$\begin{cases} Y^{(n)} = f(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) \\ Y(x_0) = Y_0 \\ Y'(x_0) = Y_1 \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(x_0) = Y_{n-1} \end{cases}$$

si chiama **problema di Cauchy con dato iniziale** P_0 per il sistema (5.14). Una **soluzione** del problema di Cauchy è una funzione Y definita in un intorno I di x_0 a valori in \mathbb{R}^m , che in I risolve il sistema (5.14) e che verifica nel punto x_0 tutte le condizioni iniziali

$$Y(x_0) = Y_0, \quad Y'(x_0) = Y_1, \quad \dots, \quad Y^{(n-1)}(x_0) = Y_{n-1}.$$

Nel caso particolarmente frequente dei sistemi del primo ordine il problema si riduce a

$$\begin{cases} Y' = f(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove (x_0, Y_0) è un punto del sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$ in cui è definita f .

Il prossimo importante risultato mostra che le equazioni e i sistemi di ordine n possono essere viste come particolari sistemi del primo ordine.

Teorema 5.1 : sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sia $(x_0, P_0) \in E$ e sia $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ la funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ definita da

$$\phi_1(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = y_1$$

$$\phi_2(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = y_2$$

$$\vdots$$

$$\phi_{n-1}(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = y_{n-1}$$

$$\phi_n(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Se y è una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di ordine n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (y, y', \dots, y^{(n-1)})(x_0) = P_0, \quad (5.15)$$

la funzione

$$Z(x) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

è una soluzione del problema di Cauchy

$$Z' = \phi(x, Z), \quad Z(x_0) = P_0; \quad (5.16)$$

viceversa, se Z è una soluzione del problema di Cauchy (5.16) la funzione

$$y(x) := Z_1(x)$$

è una soluzione del problema di Cauchy (5.15).

DIMOSTRAZIONE : è una semplice verifica; il sistema (5.16) si scrive, per esteso,

$$Z'_1 = Z_2$$

$$Z'_2 = Z_3$$

$$\vdots$$

$$Z'_{n-1} = Z_n$$

$$Z'_n = f(x, Z_1, \dots, Z_n),$$

e se y risolve (5.15) chiaramente

$$(y)' = y'$$

$$(y')' = y''$$

$$\vdots$$

$$(y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

cioè (controllando anche la condizione iniziale) la funzione Z risolve (5.16); la verifica contraria è analoga. ■

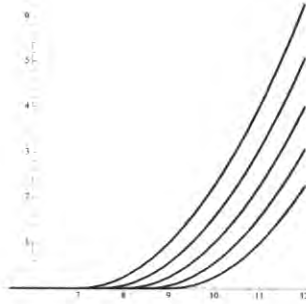


Fig. 5.1 : alcune soluzioni y_k dell'equazione $y' = \sqrt{|y|}$

La tecnica usata nell'esempio è importante, e si generalizza nel prossimo risultato. Per non distrarre con inutili complicazioni, lo diamo solo per una equazione del primo ordine in forma normale, ma vale più in generale.

Teorema di incollamento 5.3 : sia f una funzione continua in un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^2$ e sia $(x_0, y_0) \in E$; siano y_1, y_2 due funzioni tali che per a e b opportuni con $a < x_0 < b$ sia

$$y_1 :]a, x_0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua,} \quad y_1' = f(x, y_1) \quad \text{per } a < x < x_0, \quad y_1(x_0) = y_0,$$

$$y_2 : [x_0, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continua,} \quad y_2' = f(x, y_2) \quad \text{per } x_0 < x < b, \quad y_2(x_0) = y_0.$$

La funzione $y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{se } a < x \leq x_0 \\ y_2(x) & \text{se } x_0 \leq x < b \end{cases}$$

è continua e derivabile in $I =]a, b[$ e risolve in I il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Il teorema vale anche per equazioni (o sistemi) in forma normale di ordine n .

DIMOSTRAZIONE : che y sia continua è chiaro, dato che lo sono y_1 e y_2 e hanno lo stesso valore in x_0 . Come visto poco fa, per $a < x < x_0$ la funzione y coincide con la funzione y_1 in tutto un intorno di x , quindi \square Proposizione 1.38

$$y'(x) = y_1'(x) \quad \text{per } a < x < x_0,$$

e analogamente

$$y'(x) = y_2'(x) \quad \text{per } x_0 < x < b.$$

Lo stesso risultato vale per sistemi di ordine n , che sono equivalenti a (grossi) sistemi del primo ordine. Dunque moltissime delle proprietà delle equazioni (o sistemi) di ordine n si deducono da proprietà analoghe per sistemi di ordine uno, il che semplifica molto il lavoro dimostrativo.

Esempio : nel caso visto sopra della crescita dei batteri (5.7), supponiamo di sapere che dopo un'ora, cioè al tempo $t = 60$ minuti, i batteri siano 10^6 . Allora la popolazione di batteri risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} b' = b \log 1.05 \\ b(60) = 10^6 ; \end{cases}$$

sappiamo che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$b(t) = c(1.05)^t$$

con c costante arbitraria, e dobbiamo determinare c in modo che la funzione $b(t)$ verifichi anche la condizione iniziale: dobbiamo cioè richiedere che

$$10^6 = b(60) = c(1.05)^{60} ,$$

ovvero

$$c = \frac{10^6}{(1.05)^{60}} \simeq 53536 .$$

La crescita dei batteri segue allora la legge

$$b(t) = \frac{10^6}{(1.05)^{60}} \cdot (1.05)^t \simeq 53536 \cdot (1.05)^t .$$

È chiaro che il punto fondamentale è stato disporre della formula che ci dà *tutte le soluzioni* dell'equazione differenziale, tra le quali abbiamo poi scelto quella che verificava la condizione iniziale. Va detto che *non tutte le equazioni differenziali hanno soluzione*, nemmeno quelle di tipo più semplice come $y' = f(x)$, pertanto il teorema di esistenza che segue Teorema 5.2 ha grande importanza per la teoria.

Esempio : sia f_D la funzione di Dirichlet (4.1) che vale 1 sui numeri razionali e 0 sui numeri irrazionali. Sappiamo Proposizione 1.47 che se g è la derivata di qualche funzione su un intervallo I , l'immagine di g su tale intervallo è anch'essa un intervallo. Se l'equazione differenziale

$$y' = f_D(x)$$

avesse una soluzione y su qualche intervallo I , la derivata f_D della funzione y dovrebbe avere come immagine un intervallo, ma l'immagine di f_D è $\{0, 1\}$ che non è un intervallo, pertanto l'equazione differenziale $y' = f_D(x)$ non ha alcuna soluzione.

La funzione di Dirichlet è un esempio patologico, dato che è discontinua in tutti i punti di \mathbb{R} . Come vediamo ora, se si rimuove questa ostruzione il fenomeno appena visto non si presenta più: diamo il teorema di esistenza direttamente per i sistemi, dato che per le equazioni l'unica differenza è scrivere f e y al posto di \mathbf{f} e \mathbf{Y} . Mettiamo in appendice la dimostrazione che risulta piuttosto tecnica (\Rightarrow appendice 5.12).

Teorema di esistenza di Peano 5.2 : *se la funzione \mathbf{f} è continua in un intorno di $(x_0, \mathbf{Y}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il problema di Cauchy per il sistema*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$$

ha almeno una soluzione \mathbf{Y} , definita in un intorno I di x_0 .

Osservazione : se il dominio E di \mathbf{f} non è un aperto, vi sono punti $P_0 \in E$ che non hanno alcun intorno contenuto in E ; per tali valori iniziali sarà impossibile applicare il teorema di esistenza, che è il punto di partenza da cui non si può prescindere. Qualcosa si può dire specificando meglio le ipotesi: se \mathbf{f} è continua in E , ed E contiene

$$\{(x, \mathbf{Y}) : x_0 \leq x < x_0 + a, \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0\| < b\}$$

allora esiste una soluzione definita in un *intorno destro* di x_0 , e analogamente se E contiene

$$\{(x, \mathbf{Y}) : x_0 - a < x \leq x_0, \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0\| < b\}$$

allora esiste una soluzione definita in un *intorno sinistro* di x_0 .

Le equazioni differenziali vengono sovente usate in modelli matematici della realtà per poter predire “il” comportamento di un sistema dinamico, “la” numerosità di una popolazione, “la” posizione a un dato istante, e altri fenomeni simili. Sottolineiamo l'uso dell'articolo determinativo, che sottintende l'*unicità* della soluzione: sapere che la posizione di un automezzo a un dato istante potrebbe essere un qualunque punto fra Milano e Roma non sarebbe probabilmente di grande aiuto. Abbiamo già visto che in generale una equazione differenziale può avere infinite soluzioni: ad esempio tutte le primitive della funzione seno risolvono l'equazione $y' = \sin x$. L'aggiunta della condizione iniziale, cioè il passaggio dall'equazione differenziale a un problema di Cauchy, sembrava aver eliminato questa incertezza: nell'esempio visto, conoscere la posizione del camion all'istante t_0 (e lo stesso per la popolazione di batteri) ci permetteva di scegliere, fra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale, l'unica per la quale anche la condizione iniziale era verificata. Tuttavia le cose non sono sempre così facili, e anche problemi di Cauchy per equazioni apparentemente molto semplici possono avere infinite soluzioni.

Esempio : abbiamo considerato \square (5.3) l'equazione differenziale $y' = \sqrt{y}$; ora studiamo il problema

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0. \quad (5.17)$$

Dato che la funzione $f(x, y) = \sqrt{y}$ non è definita in un aperto, non possiamo usare il Teorema di esistenza 5.2, almeno se $P_0 = (x_0, 0)$. Certamente, se $P_0 = (x_0, y_0)$ con

$y_0 > 0$, possiamo considerare lo stesso problema, ma nell'aperto $\Omega' = \{(x, y) : y > 0\}$: per il Teorema 5.2, questo problema di Cauchy ha una soluzione y definita in un intorno I di x_0 , e dovendo essere $(x, y(x)) \in \Omega'$ per ogni $x \in I$ necessariamente $y(x) > 0$, quindi $y(x)$ risolve anche il problema originario.

Vediamo (ma non vi sono metodi generali, purtroppo) come ce la possiamo cavare ugualmente, anche se $y_0 = 0$; studiamo ad esempio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(7) = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

le due funzioni

$$y(x) \equiv 0, \quad y_7(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 7 \\ \frac{1}{4}(x-7)^2 & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

risolvono entrambe il problema di Cauchy (e sono evidentemente diverse). Per y non c'è nulla da dire; la funzione y_7 è derivabile per $x < 7$, dato che in quell'intervallo aperto coincide con la funzione nulla che è derivabile, quindi per $x < 7$ la derivata di y_7 coincide con la derivata della funzione nulla, che vale zero ed è la radice della funzione zero: dunque per $x < 7$ la condizione $y' = \sqrt{|y|}$ è soddisfatta. È derivabile anche nell'intervallo aperto $x > 7$, dato che in quell'intervallo coincide con la funzione derivabile $(x-7)^2/4$, quindi lì ha derivata $(x-7)/2$, che è la radice di $(x-7)^2/4$. Poi, per $x = 7$ è continua, ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} y_7'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} y_7'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x-7}{2} = 0$$

la funzione y_7 è derivabile \square Proposizione 1.48 anche per $x = 7$, con derivata zero. In conclusione

$$y_7'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 7 \\ \frac{1}{2}(x-7) & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

e in particolare $y_7'(x) = \sqrt{|y_7(x)|} = \sqrt{y_7(x)}$ in ogni punto x . Allora y_7 risolve l'equazione differenziale, e dato che verifica anche la condizione iniziale risolve il problema di Cauchy originario (5.17), che come si è detto ha (almeno) due soluzioni. In realtà possiamo vedere che ne ha infinite: tutte le funzioni

$$y_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq k \\ \frac{1}{4}(x-k)^2 & \text{se } x \geq k \end{cases}$$

con $k \geq 7$ risolvono il problema di Cauchy (5.17), e anzi addirittura tutte le funzioni

$$y_{h,k}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-h)^2 & \text{se } x \leq h \\ 0 & \text{se } h \leq x \leq k \\ \frac{1}{4}(x-k)^2 & \text{se } x \geq k \end{cases}$$

con $h \leq 7 \leq k$ risolvono il problema di Cauchy (5.18).

Dato che $y(x) = y_1(x)$ per $a < x < x_0$, abbiamo per tali valori di x

$$y'(x) = y_1'(x) = f(x, y_1(x)) = f(x, y(x)) ,$$

cioè y risolve l'equazione differenziale per $a < x < x_0$, e analogamente per $x_0 < x < b$. Poi, osserviamo che dalla continuità di f in (x_0, y_0) e dal fatto che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y_1(x) = y_1(x_0) = y_0$$

segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y_1'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x, y_1(x)) = f(x_0, y_0)$$

e analogamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_2'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x, y_2(x)) = f(x_0, y_0) ,$$

quindi per la Proposizione 1.48 la funzione y è derivabile anche in x_0 con derivata $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, ma allora

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = f(x_0, y(x_0)) ,$$

dunque $y' = f(x, y)$ in tutto $]a, b[$. ■

Il Teorema di incollamento asserisce che se abbiamo due soluzioni di una equazione differenziale, una definita a sinistra e l'altra a destra di un punto x_0 , e le due funzioni si raccordano con continuità in x_0 , la funzione che si ottiene incollando le due soluzioni è ancora una soluzione, stavolta definita intorno a x_0 . Questo teorema è utilizzato, fra l'altro, per semplificare molte dimostrazioni. Ad esempio vediamo che il Teorema di esistenza di Peano si ricava dal seguente enunciato, analogo ma "solo a destra".

Proposizione 5.4 : *se f è una funzione continua in un intorno di (x_0, y_0) , esiste una funzione continua y definita in un intorno destro $]x_0, b[$ che verifica*

$$y' = f(x, y) \quad \text{in }]x_0, b[, \quad y(x_0) = y_0 .$$

Usando questa proposizione (nella cui dimostrazione sono insite tutte le difficoltà vere) proviamo il Teorema di esistenza 5.2: se vale questa proposizione abbiamo direttamente una funzione y_2 che verifica

$$y_2 : [x_0, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua} , \quad y_2' = f(x, y_2) \quad \text{per } x_0 < x < b , \quad y_2(x_0) = y_0 .$$

Ora, per poter usare nuovamente questa proposizione per trovare una soluzione anche a sinistra di x_0 , tutto quel che facciamo è girare il foglio di 180° (quindi il punto (x_0, y_0) si sposta in $(-x_0, -y_0)$, dalla parte opposta), trovare una soluzione che va verso destra partendo da $(-x_0, -y_0)$ e rigirare il foglio. Matematicamente, poniamo

$$g(x, y) = f(-x, -y)$$

(notiamo che il dominio di g è il simmetrico rispetto all'origine del dominio di f) in modo che ora g è continua in un intorno di $(-x_0, -y_0)$. Applicando la proposizione precedente troviamo una funzione z_1 definita in un intorno destro di $-x_0$, che chiamiamo per comodità $[-x_0, -a[$ con $a < x_0$, tale che

$$z_1 : [-x_0, -a[\rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } z_1' = g(x, z_1(x)) \text{ per } -x_0 < x < -a, \quad z_1(-x_0) = -y_0.$$

Poniamo ora $y_1(x) = -z_1(-x)$ (il grafico di y_1 è quindi il simmetrico rispetto all'origine del grafico di z_1 : per capire la prossima formula, visualizzate da soli quel che accade alle rette tangenti ai due grafici) e vediamo che per $a < x < x_0$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= D[-z_1(-x)] = -z_1'(-x) \cdot (-1) = z_1'(-x) \\ &= g(-x, z_1(-x)) = g(-x, -y_1(x)) = f(x, y_1(x)), \end{aligned}$$

dunque

$$y_1 :]a, x_0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } y_1' = f(x, y_1) \text{ per } a < x < x_0, \quad y_1(x_0) = y_0$$

e per il Teorema di incollamento 5.3 la funzione ottenuta incollando y_1 e y_2 risolve il problema di Cauchy per f in $]a, b[$.

Conviene formalizzare la tecnica introdotta (una rotazione del piano per dedurre il caso sinistro da quello destro) in un enunciato, che utilizzeremo in seguito per ridurre alcune dimostrazioni al solo caso destro.

Proposizione 5.5 : *sia $y(x)$ una soluzione del problema di Cauchy*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.19}$$

definita in un intorno destro (oppure sinistro) di x_0 . Posto

$$g(\xi, \eta) = f(-\xi, -\eta), \quad \eta(\xi) = -y(-\xi), \quad (\xi_0, \eta_0) = -(x_0, y_0),$$

la funzione $\eta(\xi)$ risolve il problema di Cauchy

$$\eta'(\xi) = g(\xi, \eta(\xi)), \quad \eta(\xi_0) = \eta_0 \tag{5.20}$$

in un intorno sinistro (oppure destro) di ξ_0 .

Approfittiamo per aggiungere un'altra tecnica che permette di semplificare varie situazioni; se consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione differenziale del primo ordine $y' = f(x, y)$, con un certo dato iniziale (x_0, y_0) , e trasliamo gli assi in modo che la nuova origine sia il punto che aveva coordinate (x_0, y_0) , la soluzione del problema di Cauchy originario, letta nelle nuove variabili, ora dovrebbe risolvere un problema di Cauchy con dato iniziale $(0, 0)$. Naturalmente anche la funzione f va letta nelle nuove variabili — tanto per cominciare, il punto (x_0, y_0) appartiene al dominio di f , mentre il dominio della nuova funzione che prende il posto di f dovrà contenere $(0, 0)$. Vale la pena di dare un enunciato preciso a questa osservazione, che utilizzeremo in seguito.

Proposizione 5.6 : sia $y(x)$ una soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) \underset{1}{=} f(x, y(x)) , \quad y(x_0) = y_0 . \quad (5.21)$$

Posto

$$g(\xi, \eta) \underset{2}{=} f(\xi + x_0, \eta + y_0) , \quad \eta(\xi) \underset{3}{=} y(\xi + x_0) - y_0 ,$$

la funzione $\eta(\xi)$ risolve il problema di Cauchy

$$\eta'(\xi) = g(\xi, \eta(\xi)) , \quad \eta(0) = 0 . \quad (5.22)$$

Analogamente, se $\eta(\xi)$ è una soluzione del problema di Cauchy (5.22) allora posto

$$f(x, y) = g(x - x_0, y - y_0) , \quad y(x) = \eta(x - x_0) + y_0$$

la funzione $y(x)$ risolve il problema di Cauchy (5.21).

DIMOSTRAZIONE : proviamo solo la prima implicazione (la seconda è analoga). Che $\eta(0) = 0$, è una semplice verifica; poi

$$\eta'(\xi) \underset{3}{=} y'(\xi + x_0) \underset{1}{=} f(\xi + x_0, y(\xi + x_0)) \underset{3}{=} f(\xi + x_0, \eta(\xi) + y_0) \underset{2}{=} g(\xi, \eta(\xi))$$

come dovevamo dimostrare. ■

Osservazione : i due enunciati precedenti valgono anche per sistemi in forma normale del primo ordine, con notazione di poco più complicata: ad esempio, per l'ultimo enunciato, il problema di Cauchy è

$$Y'(x) = f(x, Y(x)) , \quad Y(x_0) = Y_0$$

e le sostituzioni sono

$$g(\xi, \eta) = f(\xi + x_0, \eta + Y_0) , \quad \eta(\xi) = Y(\xi + x_0) - Y_0 .$$

Valgono anche, con notazione più complicata, per equazioni di ordine n , dove la traslazione riguarda tutte le componenti che appaiono nei dati del problema di Cauchy, cioè non solo $y(x_0)$ ma anche $y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$, e anche per sistemi di ordine n . Per la Proposizione 5.5 la situazione è più delicata (solo a livello di notazione!) dato che se $\eta(\xi) = -y(-\xi)$ allora $\eta'(\xi) = +y'(-\xi)$, $\eta''(\xi) = -y''(-\xi)$, $\eta'''(\xi) = +y'''(-\xi)$ e così via. In definitiva conviene ricordare che se si dimostra qualche proprietà per un problema di Cauchy con tutte le componenti del dato iniziale nulle in $x = 0$, la stessa proprietà vale (con le modifiche dovute alla traslazione) per un problema di Cauchy qualsiasi, e analogamente (ma con una certa attenzione), molte delle proprietà dimostrate a destra di x_0 valgono anche a sinistra di x_0 . Useremo le proposizioni precedenti dicendo semplicemente che “basta trattare il caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ” oppure “basta trattare il caso $x \geq x_0$ ”.

Il teorema di esistenza permette di sollevare e risolvere anche un'altra questione, quella del significato dell'espressione "l'unica soluzione è ...". Infatti, riguardando sia la definizione di soluzione di una equazione differenziale che la definizione di soluzione del problema di Cauchy è chiaro che l'intervallo I che vi compare entra a far parte del concetto di soluzione, la quale quindi dovrebbe essere la coppia (y, I) data dalla funzione e dal suo intervallo di definizione.

Esempio : consideriamo le tre funzioni

$$\begin{cases} y_1 :]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}, & y_1(x) = x; \\ y_2 :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, & y_2(x) = x; \\ y_3 :]0, 4[\rightarrow \mathbb{R}, & y_3(x) = x. \end{cases}$$

Detti I_1, I_2, I_3 i tre intervalli di definizione, abbiamo che

- 1) le tre funzioni sono diverse, dato che ad esempio $y_1(2)$ ha senso e $y_2(2)$ no;
 - 2) le tre funzioni hanno derivata 1 e valgono 0 per $x = 0$
- e quindi
- 3) le tre funzioni y_1, y_2 e y_3 , ovvero le coppie $(y_1, I_1), (y_2, I_2)$ e (y_3, I_3) , sono tre soluzioni diverse del problema di Cauchy

$$y' = 1, \quad y(0) = 0.$$

L'obiezione che si può porre subito è che le tre funzioni sono in effetti restrizioni a intervalli più o meno piccoli della funzione definita su tutto \mathbb{R} da $\tilde{y}(x) = x$. Formalizziamo questo concetto.

Definizione : date due soluzioni y_1 e y_2 di una stessa equazione differenziale, e detti I_1 e I_2 i rispettivi intervalli di definizione, si dice che **y_2 è una estensione di y_1** se

$$I_1 \subseteq I_2, \quad y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1$$

(vale a dire se y_1 è la restrizione di y_2 a I_1). Si dice che è una **estensione propria** se in aggiunta $I_1 \neq I_2$. Le stesse definizioni valgono per soluzioni Y di sistemi di equazioni differenziali.

Nell'esempio precedente, osserviamo che la soluzione y_3 è una estensione di y_1 , ma non lo è di y_2 . Certamente tutte e tre le coppie hanno come estensione la soluzione \tilde{y} , la quale (dato che il dominio è ormai tutto \mathbb{R}) non può avere ulteriori estensioni proprie.

Definizione : una soluzione y di una equazione differenziale si dice **definita su un intervallo massimale** se non esistono altre soluzioni dell'equazione differenziale che siano estensioni proprie di y . La stessa definizione vale per soluzioni Y di sistemi di equazioni differenziali.

Usando strumenti matematici delicati si dimostra il prossimo risultato, che ci permette di chiarire in modo definitivo il concetto di soluzione; diamo l'enunciato direttamente per sistemi.

Teorema 5.7 : se Y è una soluzione di un sistema di equazioni differenziali, ne esiste una estensione \tilde{Y} che è definita su un intervallo massimale.

D'ora in poi, per "soluzione" intenderemo sempre una soluzione definita su un intervallo massimale.

Il Teorema di Peano 5.2 assicura soltanto l'esistenza di *almeno una* soluzione, definita in qualche intorno di x_0 . È chiaro che, se ad esempio la funzione $f(x, y)$ è definita solo per $-1 < x < 1$, il problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

non può avere una soluzione $y(x)$ definita su un intervallo più ampio di $] -1, 1[$, visto che $f(x, y)$ non ha senso per $x \notin] -1, 1[$. Tuttavia, anche se $f(x, y)$ è definita su tutto \mathbb{R}^2 la soluzione di un problema di Cauchy può *non potere* essere definita in tutto \mathbb{R} .

Esempio : la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$$

è l'unica primitiva della funzione $1/\sqrt{1-x^2}$ (ricordiamo ancora che le primitive sono definite in un intervallo) definita in un intorno di $x = 0$ e nulla in zero, vale a dire

$$\hat{y}(x) = \arcsen x, \quad -1 < x < 1.$$

Come già detto, dato che l'equazione differenziale è della forma $y' = f(x, y)$ per $f(x, y) = 1/\sqrt{1-x^2}$ e che f è definita in $] -1, 1[\times \mathbb{R}$, non si poteva pensare di soddisfare l'equazione per $x \notin] -1, 1[$.

Esempio : abbiamo incontrato all'inizio della Sezione 5.1 l'equazione differenziale (5.4); ora consideriamo il problema di Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \tag{5.23}$$

di cui cerchiamo una soluzione. La funzione $f(x, y) = y^2$ è continua su \mathbb{R}^2 , e la nostra equazione differenziale è esattamente $y' = f(x, y)$, perciò si applica il Teorema di esistenza di Peano 5.2 e sappiamo che esiste una soluzione \hat{y} del problema di Cauchy, definita in qualche intorno di $x = 0$ che sia un intervallo massimale. Dato che

$$\hat{y}(0) = 1 > 0$$

e che \hat{y} è continua, per il Teorema di permanenza del segno e la Proposizione 1.35 questa è positiva in un intorno di $x = 0$: chiamiamo $]a, b[$ il più grande di tali intorni. Finché rimaniamo in $]a, b[$ possiamo dividere per $\hat{y}^2(x) \neq 0$ ambo i membri dell'equazione, ottenendo

$$a < x < b \implies \frac{1}{[\hat{y}(x)]^2} \cdot \hat{y}'(x) = 1$$

e quindi per $a < x < b$

$$\int_0^x \frac{1}{[\hat{y}(t)]^2} \cdot \hat{y}'(t) dt = \int_0^x 1 dt \quad \Longleftrightarrow \quad \left[-\frac{1}{\hat{y}(t)} \right]_0^x = \left[t \right]_0^x$$

ovvero, essendo $\hat{y}(0) = 1$,

$$-\frac{1}{\hat{y}(x)} + 1 = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\hat{y}(x)} = 1 - x.$$

Abbiamo detto che questa uguaglianza è valida fin tanto che $\hat{y}(x)$ resta positiva, e come si vede questo accade per $1 - x > 0$, ovvero per $x < 1$. Allora possiamo prendere $]a, b[=]-\infty, 1[$ e otteniamo che l'unica soluzione del problema di Cauchy è la funzione definita per $x < 1$ da

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{1-x} :$$

è evidente che questa soluzione non può essere definita in un intervallo più grande, dato che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 1$, quindi $] -\infty, 1[$ è l'intervallo massimale di definizione.

Nei due esempi precedenti avevamo le seguenti situazioni: nel primo, f era definita in una striscia verticale di \mathbb{R}^2 , e il grafico della soluzione \hat{y} arrivava fino ai bordi destro e sinistro della striscia. Nel secondo, f era definita su tutto \mathbb{R}^2 , e il grafico della soluzione \hat{y} arrivava, in un certo senso, all'estremità sinistra (quando $x \rightarrow -\infty$) e a quella superiore (quando $\hat{y} \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 1^-$) del dominio di f . Vediamo che questa è una situazione generale. Diamo l'enunciato dapprima per sistemi (o equazioni) del primo ordine in forma normale.

Teorema di esistenza globale (I) 5.8 : sia \hat{Y} una soluzione (definita in un intervallo massimale) del sistema in forma normale $Y' = f(x, Y)$, dove f è una funzione continua definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sia $K \subset \Omega$ un compatto e sia

$$\hat{Y}(x_0) = Y_0, \quad \text{con } (x_0, Y_0) \in K.$$

Allora sia per $x \geq x_0$ che per $x \leq x_0$ il grafico di \hat{Y} non può essere tutto contenuto in K .

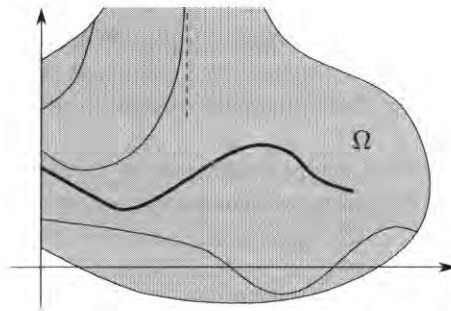


Fig. 5.2 : la curva più spessa non può essere una soluzione massimale a destra di 0

DIMOSTRAZIONE : basta lavorare solo per $x \geq x_0$; inoltre scriviamo la dimostrazione solo per una equazione, per alleggerire la notazione. Supponiamo che il risultato sia falso, e sia $I =]a, b[$ l'intervallo di definizione della soluzione (in realtà non sappiamo ancora se I contiene o no b , ma come vedremo questo non è importante). Proveremo che possiamo estendere \hat{y} a destra di b , contraddicendo l'ipotesi che si trattasse di una soluzione definita su un intervallo massimale. Dato che il grafico di \hat{y} è contenuto in K che è chiuso e limitato, abbiamo in particolare $b < +\infty$. Poi, la funzione continua f ha massimo e minimo su K per il Teorema di Weierstraß 1.20, quindi in particolare

$$\exists L : \forall (x, y) \in K, \quad |f(x, y)| \leq L.$$

Allora

$$a < x < b \implies (x, \hat{y}(x)) \in K \implies |f(x, \hat{y}(x))| \leq L \implies |\hat{y}'(x)| \leq L$$

e quindi \Leftarrow Proposizione 1.45 la funzione \hat{y} è lipschitziana di costante L . Ma allora \Leftarrow Proposizione 1.46 esiste finito

$$y_b = \lim_{x \rightarrow b^-} \hat{y}(x).$$

Sia $x_k \nearrow b$: abbiamo $\hat{y}(x_k) \rightarrow y_b$, quindi \Leftarrow Proposizione 1.12 anche

$$X_k = (x_k, \hat{y}(x_k)) \rightarrow (b, y_b);$$

dato che K è un compatto, è chiuso, quindi \Leftarrow Teorema 1.13

$$(b, y_b) \in \overline{K} = K \subset \Omega.$$

Osserviamo che la funzione

$$y_1(x) = \begin{cases} \hat{y}(x) & \text{se } a < x < b \\ y_b & \text{se } x = b \end{cases}$$

è continua in $]a, b]$. Ora invochiamo il Teorema di esistenza di Peano, per il problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(b) = y_b,$$

che è ammissibile dato che $(b, y_b) \in \Omega$, e otteniamo una soluzione di questo problema, definita in un intorno $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ di b . Chiamiamo y_2 la restrizione di questa soluzione all'intervallo $[b, b + \varepsilon[$: le funzioni y_1, y_2 verificano le ipotesi del Teorema di incollamento 5.3, quindi possiamo ottenere una soluzione che estende \hat{y} ad $]a, b + \varepsilon[$, contraddicendo l'ipotesi che \hat{y} fosse una soluzione su un intervallo massimale. ■

Dunque i due esempi visti sopra non sono casi fortuiti: in entrambi, il grafico della soluzione esce da qualunque compatto contenuto nel dominio di f e contenente un punto per il quale il grafico è passato. Un caso particolarmente utile è il seguente.

Corollario 5.9 : nelle ipotesi del Teorema 5.8, se Ω contiene una striscia $[x_0, b[\times \mathbb{R}^n$ allora a destra di x_0 la soluzione \hat{Y} o non è limitata, o è definita su tutto $[x_0, a[$. Lo stesso vale a sinistra, se Ω contiene una striscia $]a, x_0] \times \mathbb{R}^n$.

Esempio : studiamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}, \quad y(0) = 0. \quad (5.24)$$

Chiamiamo \hat{y} la sua soluzione, definita in un intervallo massimale $]a, b[$; posto

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}, \quad P_0 = (0, 0)$$

la funzione f è definita in tutto il piano tranne la circonferenza unitaria, che chiamiamo γ . Il dominio di f è un insieme composto da due parti connesse: l'interno del cerchio e l'esterno del cerchio. Chiamiamo Ω l'interno del cerchio unitario,

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

e proviamo che il grafico di \hat{y} sta sempre in Ω . Chiaramente nessun punto $(x, \hat{y}(x))$ può stare sulla circonferenza γ , dove f non è definita, dunque la funzione $r(x) = x^2 + \hat{y}^2(x) - 1$, che è continua e definita sull'intervallo $]a, b[$, non si annulla mai: però $r(0) < 0$, quindi l'immagine di r è un intervallo per il Teorema dei valori intermedi 1.37, non contiene 0 e contiene qualche numero negativo, dunque è contenuta in $] -\infty, 0[$. Questo dice che $x^2 + \hat{y}^2(x) < 1$, ossia che $(x, \hat{y}(x)) \in \Omega$.

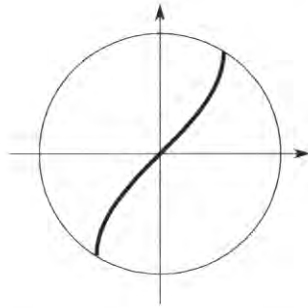


Fig. 5.3 : il grafico della soluzione di $y' = 1/(1 - x^2 - y^2)$ con dato $y(0) = 0$

La funzione f è positiva in Ω , quindi per ogni $x \in I$

$$\hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}(x)) > 0$$

dato che $(x, \hat{y}(x)) \in \Omega$. Allora \hat{y} è crescente, pertanto ■ Proposizione 1.36 esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \hat{y}(x) = y_b.$$

Se (b, y_b) fosse interno a Ω , il grafico di \hat{y} (per $x \geq 0$) sarebbe tutto compreso nel rettangolo $[0, b] \times [0, y_b]$ che è un compatto contenuto in Ω , il che è impossibile per il Teorema di esistenza globale 5.8.

Osserviamo poi che, siccome $f(x, \hat{y}(x)) > 1$, si ha $\hat{y}'(x) > 1$ e quindi $\hat{y}(x) > x$, per cui

$$x^2 + x^2 < x^2 + \hat{y}^2(x) < 1$$

e dunque abbiamo che l'intervallo massimale di esistenza è sicuramente contenuto nell'intervallo $]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[$. Notiamo che la soluzione è dispari, come avremmo potuto dire sin dall'inizio con i risultati della prossima sezione (5.28).

Ora rifacciamo una parte dei calcoli di questo esempio, con una tecnica diversa ma che si può applicare in casi più generali. Abbiamo provato che, visto che la soluzione aveva il punto iniziale all'interno del disco Ω , poi non poteva trovarsi all'esterno di Ω senza essere passata per γ . Nella dimostrazione abbiamo usato la forma di Ω , che ha come bordo il luogo dove la distanza dall'origine è 1. Proviamo lo stesso risultato, ma senza usare la forma del cerchio: poniamo

$$\Omega' = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$$

e osserviamo che la funzione $x \mapsto (x, \hat{y}(x))$ è continua su $]a, b[$, dato che le sue due componenti

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto \hat{y}(x)$$

sono continue (Proposizione 1.15, quindi la sua immagine, che è il grafico G di \hat{y} , è un connesso (Teorema 1.18. Però, $G \cap \gamma = \emptyset$, quindi

$$(G \cap \Omega) \cup (G \cap \Omega') = G.$$

Sappiamo che $G \cap \Omega$ non è vuoto, dato che contiene $(0, 0)$, e se fosse $G \cap \Omega' \neq \emptyset$ l'insieme G sarebbe sconnesso, quindi necessariamente $G \cap \Omega' = \emptyset$ ovvero

$$G \subset \Omega.$$

Esempio : studiamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = 2 \operatorname{sen}(\cdots), \quad y(0) = 0$$

dove \cdots è una non meglio specificata funzione continua, definita su $]-10, 23[\times \mathbb{R}$, e proviamo che una soluzione y con intervallo di definizione massimale I è definita su tutto $]-10, 23[$. Infatti abbiamo per ogni $x \in I$

$$|y'(x)| = |2 \operatorname{sen}(\cdots)| \leq 2$$

quindi per ogni $x \in I$ con $x \geq 0$, ricordando (1.47) e (1.46)

$$|y(x)| = |y(x) - y(0)| = \left| \int_0^x y'(t) dt \right| \leq \int_0^x |y'(t)| dt \leq \int_0^x 2 dt = 2x \leq 2 \cdot 23 = 46.$$

Se per assurdo fosse $I =]a, b[$ con $b < 23$, il grafico di y per $x \geq 0$ sarebbe tutto contenuto nel compatto $[0, b] \times [-46, 46]$, il che è impossibile per il Teorema di esistenza globale 5.8. Allora $b = 23$, e analogamente $a = -10$.

Vedremo più oltre il Teorema 5.19 che la situazione vista nell'esempio precedente si generalizza. Ora possiamo dare la versione del Teorema di esistenza globale valida per le equazioni di ordine n . Prima, riscriviamo la tesi del teorema come:

il grafico della funzione $x \mapsto \hat{y}(x)$ non può essere tutto contenuto in K .

Allora la versione per equazioni di ordine n del Teorema 5.8 è la seguente.

Corollario 5.10 : *sia f una funzione continua definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sia $K \subset \Omega$ un compatto e sia*

$$P_0 = (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in K;$$

sia \hat{y} una soluzione (definita in un intervallo massimale) dell'equazione differenziale di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

con dato iniziale P_0 . Allora sia per $x \geq x_0$ che per $x \leq x_0$ il grafico della funzione

$$x \mapsto (\hat{y}(x), \hat{y}'(x), \dots, \hat{y}^{(n-1)}(x))$$

non può essere tutto contenuto in K .

È importante aver afferrato che una soluzione di un'equazione differenziale (o di un sistema) in forma normale, definita in un intervallo massimale, non può arrestarsi a mezz'aria, deve spingersi fino ai confini del dominio di f (o \mathbf{f}). Vediamone una conseguenza, che ci servirà nella prossima sezione. Ricordiamo che $B_b(\mathbf{Y}_0)$ è la palla aperta di centro \mathbf{Y}_0 e raggio b .

Corollario 5.11 : *sia f una funzione continua definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sia $(x_0, \mathbf{Y}_0) \in \Omega$ e sia*

$$R = [x_0, x_0 + a] \times \overline{B_b(\mathbf{Y}_0)}$$

un cilindro chiuso contenuto in Ω . Se

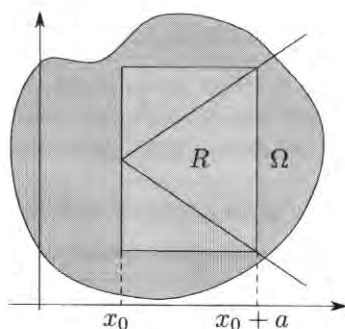
$$\frac{b}{a} \geq \max_R |f(x, y)|,$$

ogni soluzione del problema di Cauchy

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$$

è definita su tutto l'intervallo $[x_0, x_0 + a]$.

Facciamo precedere la dimostrazione, che daremo solo per una equazione, da una spiegazione, anch'essa nel caso delle equazioni per le quali, essendo $n = 1$, il cilindro R si riduce al rettangolo $[x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. I numeri $\pm b/a$ sono le pendenze delle due semirette che partono da (x_0, y_0) e passano per i due angoli di R con $x = x_0 + a$. Se sapessimo che il grafico della soluzione, finché questa è definita, sta dentro a R , allora sapremmo che y' , che è il valore di f in un punto del grafico di y , non vale più di b/a .

Fig. 5.4 : le semirette escono da (x_0, y_0) con pendenze $\pm b/a$

Ma allora y non può uscire dalla base superiore di R , perché ha pendenza insufficiente, e analogamente non può uscire dalla base inferiore. Dovendo uscire dal compatto R , il grafico deve farlo dal lato destro — cioè y esiste fino almeno a $x = x_0 + a$. Purtrutto abbiamo detto “se sapessimo che”, e questo ci costerà qualche complicazione tecnica.

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO : come abbiamo detto, lavoriamo solo con una equazione; possiamo anche supporre $x_0 = y_0 = 0$, inoltre chiamiamo M il massimo della funzione continua $|f|$ sul compatto R \Leftarrow Teorema 1.20. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che la soluzione $y(x)$ non sia definita fino ad a . Dato che la soluzione $y(x)$ parte dal punto $(0, 0)$ di R , il suo grafico non può essere tutto contenuto in R per il Teorema di esistenza globale 5.8. Non essendo $y(x)$ definita per $x \geq a$, necessariamente il grafico di y contiene punti $(\bar{x}, y(\bar{x}))$ con $0 < \bar{x} < a$ che non appartengono a R , dunque stanno o sopra il lato superiore di R o sotto quello inferiore. Ma allora, sull'intervallo $[0, \bar{x}]$, la funzione continua $|y(x)| - b$ assume valore negativo per $x = 0$ e positivo per $x = \bar{x}$, dunque esiste \Leftarrow Proposizione 1.24 il primo punto in cui si annulla, vale a dire un punto c tale che

$$(1) \quad 0 < c < \bar{x}, \quad (2) \quad |y(c)| = b, \quad (3) \quad |y(x)| < b \quad \forall x \in [0, c].$$

Osserviamo subito che $c < \bar{x} < a$; per la condizione (3) abbiamo per ogni $x \in [0, c]$

$$(x, y(x)) \in R \implies |f(x, y(x))| \leq M \leq \frac{b}{a} \implies |y'(x)| \leq \frac{b}{a}$$

e quindi usando (1.47) e (1.46)

$$|y(c)| = \left| y(0) + \int_0^c y'(x) dx \right| \leq \int_0^c |y'(x)| dx \leq \frac{b}{a} c < b,$$

che contraddice (2). ■

Ecco due casi particolarmente utili.

Corollario 5.12 : se la funzione continua f è limitata sulla striscia $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(x_0) = Y_0$$

è definita su tutto $[x_0, x_0 + a]$.

Se per ogni $a > 0$ la funzione continua f è limitata sulla striscia $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$, eventualmente da una costante che dipende da a , la soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(x_0) = Y_0$$

è definita su tutto $[x_0, +\infty[$.

Osservazione : dei due corollari precedenti, abbiamo dato un enunciato solo verso destra. Naturalmente valgono anche verso sinistra, sostituendo in ipotesi e tesi $[x_0, x_0 + a]$ con $[x_0 - a, x_0]$, e anche da entrambi i lati.

Esempio : una qualunque (nella prossima sezione vedremo che ce n'è una sola) soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \sin x^2 + \sin y^2, \quad y(2) = 7$$

è definita su tutto \mathbb{R} , dato che $|f(x, y)| = \sin x^2 + \sin y^2 \leq 2$.

Esempio : consideriamo una soluzione y del problema di Cauchy

$$y' = 3x \sin y - 2x^2, \quad y(0) = 0,$$

e proviamo che esiste su tutto \mathbb{R} ; nella striscia $[-a, a] \times \mathbb{R}$ è

$$|3x \sin y - 2x^2| \leq 3a + 2a^2,$$

e possiamo applicare il Corollario 5.12.

5.3 - Il problema di Cauchy: unicità

Abbiamo visto (5.18) un esempio di problema di Cauchy che ha più soluzioni differenti. In quel caso il secondo membro era

$$f(x, y) = \sqrt{|y|},$$

una funzione continua su \mathbb{R}^2 . Tuttavia la funzione $\sqrt{|y|}$ non è derivabile per $y = 0$, dato che ha derivate sinistra e destra uguali a $\mp\infty$. Ricordando la Proposizione 1.45 possiamo dire che, vista come funzione della variabile y , la funzione f non è lipschitziana. Generalizziamo questo concetto.

Definizione : sia $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$; si dice che f è *lipschitziana rispetto a Y nell'insieme E* se per qualche costante $L > 0$

$$\forall (x, Y_1), (x, Y_2) \in E, \quad \|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| \leq L \|Y_1 - Y_2\|.$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$; si dice che f è *localmente lipschitziana rispetto a Y* se per ogni $(x_0, Y_0) \in \Omega$ esiste un cilindro $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times \overline{B_b(Y_0)}$ tale che f è lipschitziana rispetto a Y in R .

Sottolineiamo che si valuta la lipschitzianità solo su segmenti “verticali” (l’ascissa x è la stessa), ma che la costante (nell’insieme E) non deve dipendere da x . Per la lipschitzianità locale, la costante può naturalmente dipendere dal cilindro scelto, e in particolare dal suo centro. La nozione di lipschitzianità locale rispetto a Y è cruciale per ottenere l’unicità; la condizione di Lipschitz può essere però difficile da verificare, ma vale anche in \mathbb{R}^n un risultato simile alla Proposizione 1.45:

Proposizione 5.13 : se $f(x, Y)$ è definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e ha tutte le derivate parziali rispetto alle variabili Y_i continue, allora è localmente lipschitziana rispetto a Y .

Dato che chiediamo la lipschitzianità locale, possiamo restringerci a considerare una palla contenuta in Ω , che è convessa.

Teorema di unicità di Cauchy-Lipschitz 5.14 : sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$; se f è anche localmente lipschitziana rispetto a Y , per ogni $(x_0, Y_0) \in \Omega$ il problema di Cauchy

$$Y' = f(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

ha una e una sola soluzione.

Deduciamo questo risultato da un analogo enunciato locale, cioè valido solo in un intorno di un punto, che si impiega frequentemente.

Teorema 5.15 : sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua su un insieme $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e sia $(x_0, Y_0) \in E$; se esiste un intorno di (x_0, Y_0) nel quale f è anche lipschitziana rispetto a Y , allora esiste un intorno di x_0 nel quale il problema di Cauchy

$$Y' = f(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

ha una e una sola soluzione.

Esempio : prima della dimostrazione, risolviamo (di nuovo!) l'equazione differenziale

$$y' = ay ;$$

questa equivale a

$$(y'(x) - ay(x)) = 0 .$$

L'uguaglianza precedente equivale a

$$e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0 ,$$

dato che l'esponenziale non è mai nullo. Ma ora

$$e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = y'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}y(x) = \frac{d}{dx}(y(x)e^{-ax}) ,$$

quindi l'equazione di partenza equivale a

$$\frac{d}{dx}(y(x)e^{-ax}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x)e^{-ax} = k \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = ke^{ax} .$$

Ora possiamo impiegare questa tecnica nella dimostrazione.

DIMOSTRAZIONE : al solito diamo la dimostrazione solo per una equazione; inoltre lavoreremo solo a destra di x_0 : cominciamo col procurarci un intervallo nel quale siamo certi che la soluzione esista. Sia

$$R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

un rettangolo in cui f è L -lipschitziana, e poniamo

$$M = \max_R |f(x, y)| , \quad a' = \min\{a, b/M\} , \quad R' = [x_0, x_0 + a'] \times [y_0 - b, y_0 + b] :$$

dato che $a' \leq a$ abbiamo $R' \subset R \subset E$, e dato che $a' \leq b/M$ abbiamo $M \leq b/a'$, ma allora essendo $R' \subset R$

$$\max_{R'} |f(x, y)| \leq \max_R |f(x, y)| = M \leq \frac{b}{a'}$$

e nel rettangolo R' possiamo applicare il Corollario 5.11, perciò tutte le soluzioni del problema di Cauchy hanno intervallo massimale di definizione che contiene $[x_0, x_0 + a']$.

Supponiamo ora che y_1 e y_2 siano due soluzioni del problema di Cauchy, e mostriamo che coincidono su tutto $[x_0, x_0 + a']$. Ricordiamo che per il Teorema 1.50 per $x_0 < x \leq x_0 + a$

$$y_1(x) = y_1(x_0) + \int_{x_0}^x y_1'(t) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

e analogamente

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt.$$

Sottraendo membro a membro,

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt;$$

per $x \geq x_0$, usando (1.46) abbiamo

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Per la lipschitzianità di f rispetto a y in R abbiamo allora

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt. \quad (5.26)$$

Poniamo

$$\delta(x) = |y_1(x) - y_2(x)|, \quad \phi(x) = \int_{x_0}^x \delta(t) dt = \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt,$$

così $\phi'(x) = \delta(x)$ e Teorema 1.50 e la disuguaglianza (5.26) si riscrive

$$\phi'(x) \leq L\phi(x) \iff (\phi'(x) - L\phi(x)) \leq 0.$$

Moltiplicando ambo i membri per il numero positivo $e^{-L(x-x_0)}$ la disuguaglianza si mantiene, ed equivale a

$$e^{-L(x-x_0)}(\phi'(x) - L\phi(x)) \leq 0 \iff \frac{d}{dx}(\phi(x)e^{-L(x-x_0)}) \leq 0.$$

Allora la funzione fra parentesi è debolmente decrescente, quindi in particolare

$$x \geq x_0 \implies \phi(x)e^{-L(x-x_0)} \leq \phi(x_0)e^0 = 0 \implies \phi(x) \leq 0$$

(dato che $\phi(x_0) = 0$). Però la funzione ϕ è l'integrale di una funzione non negativa, dunque $\phi(x) \geq 0$ per $x \geq x_0$, pertanto

$$\phi(x) \equiv 0 \quad \text{in } [x_0, x_0 + a'].$$

Allora anche la derivata di ϕ è identicamente nulla in $[x_0, x_0 + a']$, ovvero

$$0 \equiv \phi'(x) = \delta(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$$

il che significa che $y_1 \equiv y_2$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI UNICITÀ DI CAUCHY-LIPSCHITZ : ci limitiamo al caso di una equazione. Supponiamo che y_1 e y_2 siano due soluzioni del problema di Cauchy, definite su due intorni massimali I_1 e I_2 di x_0 , e mostriamo che su $I_1 \cap I_2$ le due funzioni coincidono: fatto questo, la funzione definita su $I_1 \cup I_2$ da

$$y(x) = y_1(x) \quad \text{se } x \in I_1, \quad y(x) = y_2(x) \quad \text{se } x \in I_2$$

per il Teorema di incollamento 5.3 è ancora una soluzione, ed è una estensione comune di y_1 e y_2 . Se fosse $I_1 \neq I_2$, la funzione y sarebbe una estensione propria di almeno una delle due, contro l'ipotesi che I_1 e I_2 sono massimali. Allora $I_1 = I_2$ e quindi $y_1 = y_2$.

Sia dunque $I_1 \cap I_2 =]a, b[$ con $a < x_0 < b$. Proveremo che $y_1(x) = y_2(x)$ per $x_0 \leq x < b$, cioè a destra di x_0 , dato che il ragionamento a sinistra di x_0 è analogo, o si ricava da quello che facciamo ora, passando a $-y(-x)$. Poniamo

$$\delta(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

e osserviamo che $\delta(x_0) = 0$: vogliamo provare che $\delta(x) = 0$ in tutto $[x_0, b[$. Se la funzione continua δ non fosse identicamente nulla, applicando la Proposizione 1.26 esisterebbe un punto \hat{x} tale che

$$x_0 \leq \hat{x} < b, \quad \delta(x) \equiv 0 \quad \text{in } [x_0, \hat{x}]$$

ma

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in]\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon[: \delta(x') \neq 0. \quad (5.27)$$

Osserviamo che le due funzioni y_1 e y_2 sono definite fino a b che è maggiore di \hat{x} , e sono uguali fino a \hat{x} , perciò poniamo

$$\hat{y} = y_1(\hat{x}) = y_2(\hat{x})$$

e osserviamo che y_1 e y_2 sono soluzioni nell'intervallo $[\hat{x}, b[$ del problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(\hat{x}) = \hat{y}.$$

Ma per il Teorema di unicità locale 5.15 esiste un intorno destro $[\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon[$ di \hat{x} in cui questo problema di Cauchy ha una sola soluzione, pertanto le due soluzioni y_1 e y_2 coincidono anche in $[\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon[$ e dunque $\delta(x) \equiv 0$ in $[\hat{x}, \hat{x} + \varepsilon[$, il che contraddice (5.27). ■

Il Teorema di unicità, grazie al Teorema 5.1, vale anche per equazioni e sistemi di ordine n qualunque, in forma normale. Osserviamo una fondamentale conseguenza del Teorema di unicità locale, frequentemente impiegata.

Corollario 5.16 : sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, localmente lipschitziana rispetto a Y , e siano V, W due soluzioni del sistema

$$Y' = f(x, Y).$$

Se in qualche punto x_0 si ha $V(x_0) = W(x_0)$ allora le due soluzioni coincidono ovunque. In particolare questo risultato vale se f è di classe C^1 .

Infatti, posto $Y_0 = V(x_0) = W(x_0)$, nelle ipotesi del corollario le due funzioni V , W risolvono lo stesso problema di Cauchy

$$Y' = f(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0,$$

che ha soluzione unica.

Esempio : riguardiamo l'esempio (5.24) e osserviamo che f è di classe C^1 ; dunque per il Corollario 5.16 il problema di Cauchy con dato iniziale $(0, 0)$ ha una unica soluzione $y(x)$. Tuttavia $f(-x, -y) = f(x, y)$, perciò per la Proposizione 5.5 la funzione

$$\hat{y}(x) = -y(-x) \tag{5.28}$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di $y(x)$, dunque coincide con $y(x)$, vale a dire $y(x) = -y(-x)$ ossia y è dispari.

5.4 - Teoremi di confronto

Nella teoria dei limiti di funzioni e successioni, come pure in quella degli integrali impropri e delle serie (non per caso, dato che si tratta di limiti di funzioni – le primitive – o di successioni – le somme parziali), giocano un ruolo importante i teoremi di confronto. Vediamo un risultato simile, per equazioni differenziali, partendo da un esempio.

Esempio : un'automobile u viaggia a non più di 100 km/h, sull'autostrada A1, in direzione da Nord a Sud. Se alle tre del pomeriggio si trova al kilometro 243, cosa possiamo dire della sua posizione alle quattro del pomeriggio? Naturalmente nulla di troppo preciso, ma certamente non si troverà oltre il kilometro 343. Potrebbe benissimo avere viaggiato a meno di 100 km/h e trovarsi a un kilometro antecedente al 343, diciamo al 271, dato che non conosciamo la sua velocità vera, ma certamente non può aver superato il 343. E alle due del pomeriggio? Dato che dopo un'ora, viaggiando a non più di 100 km/h, ha raggiunto il 243, non poteva essere in un punto precedente il kilometro 143. Rivediamo questo esempio in un'altra luce. Ora ci sono due automobili, che viaggiano entrambe come detto prima. A un dato istante t_0 , si trovano nello stesso punto dell'autostrada. L'automobile u viaggia sempre a non più di 100 km/h, mentre l'automobile v viaggia esattamente a 100 km/h. Cosa possiamo dire delle posizioni $u(t)$ e $v(t)$ delle due automobili a un altro istante t ? Da quanto detto prima possiamo ricavare la risposta:

$$t > t_0 \Rightarrow u(t) \leq v(t), \quad t < t_0 \Rightarrow u(t) \geq v(t),$$

ovvero “dopo t_0 l'automobile u è rimasta più indietro, mentre prima di t_0 l'automobile u doveva essere più avanti della v ”.

Alla stessa conclusione saremmo arrivati sostituendo l'ipotesi “l'automobile u viaggia sempre a non più di 100 km/h, mentre l'automobile v viaggia costantemente a 100 km/h” con “l'automobile u viaggia sempre a una velocità non superiore a quella dell'automobile v ”.

Nel corso di Analisi Matematica 1 abbiamo già incontrato la formulazione matematica dell'esempio precedente: se f e g sono due funzioni definite sull'intervallo I e $f(t) \leq g(t)$ per ogni t , allora se $x_0 \in I$

$$x > x_0 \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt \leq \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad x < x_0 \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt \geq \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Tradotto in termini di equazioni differenziali, se

$$u'(x) = f(x), \quad v'(x) = g(x), \quad u(x_0) = v(x_0)$$

e se

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x,$$

allora

$$x > x_0 \Rightarrow u(x) \leq v(x), \quad x < x_0 \Rightarrow u(x) \geq v(x).$$

La situazione si generalizza; dato che abbiamo a che fare con disuguaglianze, il solo caso che possiamo considerare è quello delle equazioni, in cui l'incognita è una funzione scalare, visto che fra vettori non abbiamo un ordine.

Teorema di confronto (I) 5.17 : sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 , sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, e localmente lipschitziane rispetto a y . Siano u e v le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v'(x) = g(x, v) \\ v(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Se

$$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

allora nell'intorno I di x_0 in cui sono definite sia u che v

$$x > x_0 \Rightarrow u(x) \leq v(x), \quad x < x_0 \Rightarrow u(x) \geq v(x).$$

Se indeboliamo le informazioni, la situazione si complica.

Esempio : usiamo le solite automobili u e v , sapendo che la velocità di u è sempre minore o uguale a quella di v . A un dato istante t_0 , l'automobile u si trova *più avanti* di v : cosa possiamo dire? Sicuramente prima di t_0 la u doveva trovarsi più avanti di v , ma dopo t_0 ? Non possiamo dir nulla, dato che le due automobili potrebbero proseguire a uguale velocità (e allora v non raggiungerà mai u) oppure u potrebbe fermarsi e v proseguire velocemente fino a raggiungere e superare u : dunque per $t > t_0$ non sappiamo chi è più avanti fra u e v .

Teorema di confronto (II) 5.18 : sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 , siano $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in \Omega$ e siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, e localmente lipschitziane rispetto a y . Siano u e v le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(x_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v'(x) = g(x, v) \\ v(x_0) = y_2 \end{cases}.$$

Se

$$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

allora nell'intorno I di x_0 in cui sono definite sia u che v si ha:

$$\text{se } y_1 \leq y_2 \text{ allora } u(x) \leq v(x) \text{ per ogni } x > x_0$$

$$\text{se } y_1 \geq y_2 \text{ allora } u(x) \geq v(x) \text{ per ogni } x < x_0.$$

Esempio : sia

$$f(x, y) = e^x + \sin y$$

e sia y la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0.$$

Dato che f è di classe \mathcal{C}^1 in tutto $\Omega = \mathbb{R}^2$, sappiamo che tale soluzione esiste ed è unica, definita in un intervallo massimale $I =]a, b[$ che è un intorno di 0 . Nonostante non sia possibile trovare esplicitamente la soluzione, possiamo dirne qualcosa: poniamo

$$g(x, y) = e^x + 1$$

e osserviamo che

$$f(x, y) \leq g(x, y).$$

Allora se v è la soluzione del problema di Cauchy

$$v' = g(x, v), \quad v(0) = 0 \tag{5.29}$$

per il Teorema di confronto 5.17 avremo che a destra di 0 , cioè per $0 < x < b$, vale la disuguaglianza

$$y(x) \leq v(x)$$

mentre per $a < x < 0$ vale la disuguaglianza opposta, $v(x) \leq y(x)$. Ma il problema (5.29) si può risolvere:

$$v(x) = e^x + x - 1.$$

Allora abbiamo provato che

$$a < x < 0 \Rightarrow y(x) \geq e^x + x - 1, \quad 0 < x < b \Rightarrow y(x) \leq e^x + x - 1.$$

Ora poniamo

$$h(x, y) = e^x - 1 ,$$

osserviamo che

$$h(x, y) \leq f(x, y) ,$$

consideriamo la soluzione w del problema di Cauchy

$$w' = h(x, w) , \quad w(0) = 0 \quad (5.30)$$

(che possiamo facilmente determinare, $w(x) = e^x - x - 1$) e analogamente a prima avremo

$$a < x < 0 \Rightarrow y(x) \leq e^x - x - 1 , \quad 0 < x < b \Rightarrow y(x) \geq e^x - x - 1 .$$

Abbiamo provato che

$$0 < x < b \implies e^x - x - 1 \leq y(x) \leq e^x + x - 1 ,$$

mentre a sinistra di 0 si ha

$$a < x < 0 \Rightarrow e^x + x - 1 \leq y(x) \leq e^x - x - 1 .$$

Mettendo insieme le disuguaglianze precedenti si ha

$$e^x - |x| - 1 \leq y(x) \leq e^x + |x| - 1 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Quindi, nonostante non abbiamo risolto l'equazione di partenza sappiamo (con una certa approssimazione) dove si trova la soluzione!

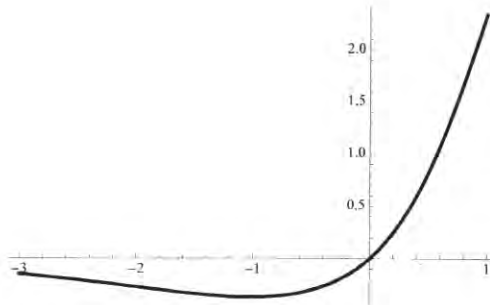


Fig. 5.5 : il grafico della soluzione di $y' = e^x + \sin y$ con dato $y(0) = 0$

Addirittura, da queste disuguaglianze deduciamo che y è definita su tutto $[0, +\infty[$: infatti, se invece fosse $b < +\infty$, avremmo che in tutto $[0, b[$ il valore della funzione y sarebbe compreso fra $e^0 - b - 1$ ed $e^b + b - 1$. Ma allora il suo grafico sarebbe tutto dentro un rettangolo chiuso, che è un compatto del dominio \mathbb{R}^2 di f , contraddicendo il Teorema di esistenza globale 5.8. Analogamente si prova che $a = -\infty$.

Dopo aver studiato le equazioni differenziali lineari potremo dare una generalizzazione di questo esempio \Leftarrow Teorema 5.19.

Osservazione : i teoremi di confronto di questa sezione valgono in ipotesi lievemente più generali: basta che

$$f(x, u(x)) \leq g(x, u(x)),$$

cioè che la disuguaglianza fra f e g valga *sul grafico* di una delle due soluzioni anziché in tutti i punti.

5.5 - Equazioni lineari del primo ordine

In questa sezione ci occupiamo dello studio delle **equazioni lineari del primo ordine**, equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (5.31)$$

dove a e b sono due funzioni continue definite su un intervallo I . Per queste esiste una formula che permette (teoricamente!) di determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

Nel seguito chiameremo *soluzione generale di una equazione differenziale (o sistema)* una qualsiasi espressione, contenente uno o più parametri, che al variare dei parametri fornisce tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (o sistema). Nel caso di un problema di Cauchy poi i parametri si determineranno imponendo le condizioni iniziali.

Esempio : abbiamo visto che *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \cos x$$

sono le funzioni della forma

$$y(x) = \sin x + c$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Questa è dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale.

Esempio : vedremo nella Sezione 5.7 che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' = -y$$

sono le funzioni della forma

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e questa è dunque la soluzione generale.

Talvolta, anche in casi molto semplici, la soluzione generale si riesce a scrivere solo in forma poco soddisfacente, come nel caso

$$y' = e^{-x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt + c$$

in cui nella soluzione generale compare un integrale non calcolabile esplicitamente. La maggior parte delle equazioni differenziali, però, *non* si risolve esplicitamente. La cosa non deve stupire: già per equazioni fra numeri reali (anziché funzioni e loro derivate) possiamo provare che l'equazione $x - \cos x = 0$ ha una ed una sola soluzione, ma non la possiamo determinare "esplicitamente".

In questa ottica, le equazioni lineari del primo ordine sono importanti per la disponibilità di una formula della soluzione generale, anche se questa fa intervenire un integrale che non sempre si sa calcolare esplicitamente. Risolviamo l'equazione (5.31) sfruttando la stessa tecnica impiegata per l'equazione $y' = ay$ con a costante reale.

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; allora si ha (omettiamo la x , ma bisogna ricordare che a , b e A non sono delle costanti)

$$(ye^{-A})' = y'e^{-A} - ye^{-A}a = (y' - ay)e^{-A} :$$

dunque, se vogliamo che y risolva l'equazione (5.31), che può essere riscritta $y' - ay = b$, deve essere

$$(ye^{-A})' = be^{-A} .$$

In altri termini, ye^{-A} è una primitiva di be^{-A} , quindi

$$\int be^{-A} dx = y(x)e^{-A(x)} + c ,$$

da cui si ricava che le soluzioni di (5.31) sono tutte e sole le funzioni $y(x)$ della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int_{x_0}^x be^{-A} dt + c \right) \quad (5.32)$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$. Nel caso di un problema di Cauchy la costante arbitraria c si determina imponendo la condizione iniziale: ad esempio, se $y(x_0) = y_0$ è la condizione iniziale, prendendo

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt , \quad y(x)e^{-A(x)} = \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt + c$$

e imponendo che $y(x_0) = y_0$ si ricava $c = y_0$, e quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è la funzione (es. 5.2)

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \left[y_0 + \int_{x_0}^x b(t) \exp\left(-\int_{x_0}^t a(s) ds\right) dt \right] .$$

Esempio : consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

È un'equazione lineare del primo ordine, con $a(x) = 1$, $A(x) = x$ e $b(x) = \sin x$: le soluzioni sono quindi della forma

$$y(x) = e^x \left[c + \int e^{-x} \sin x \, dx \right] = e^x \left[c - e^{-x} \frac{\sin x + \cos x}{2} \right].$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 1/2$, quindi la soluzione è

$$y(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{2}.$$

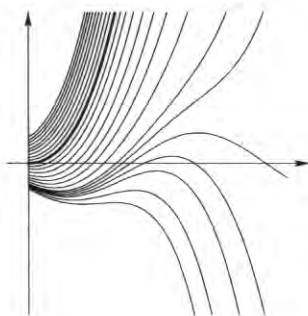


Fig. 5.6 : alcune soluzioni di $y' = y + \sin x$, più spesso quella con $y(0) = 0$

Esempio : se dalla vasca di coltura dei batteri dell'esempio (5.7) vengono sistematicamente prelevati un certo numero k di batteri per ogni unità di tempo, l'equazione differenziale (5.7) va modificata in

$$b' = b \log 1.05 - k;$$

dato che la soluzione generale di questa equazione è

$$b(t) = \frac{k}{\log 1.05} + c(1.05)^t,$$

se al tempo $t = 0$ erano presenti B batteri, la popolazione diviene

$$b(t) = \frac{k}{\log 1.05} + \left(B - \frac{k}{\log 1.05} \right) (1.05)^t.$$

Osserviamo che se il coefficiente davanti all'esponenziale è negativo, la funzione $b(t)$ tende a $-\infty$ e pertanto, trattandosi di una popolazione, a un certo tempo di batteri non ce ne saranno più (e questo fenomeno poteva essere facilmente predetto, a parte il valore esatto, pensando che se k è troppo grande stiamo svuotando la vasca più rapidamente di quanto i batteri possano riprodursi). Il valore limite $k = B \log 1.05$ indica quanti batteri si possono togliere nell'unità di tempo per lasciare la popolazione invariata (cioè costante).

Vediamo ora una applicazione della teoria delle equazioni lineari del primo ordine; iniziamo con un risultato preparatorio.

Osservazione : se $k \in \mathbb{R}$ e $b(x)$ è continua su un intervallo I che comprende x_0 , la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = b(x) + ky, \quad y(x_0) = y_0$$

è definita su tutto I ; se $b(x) \geq 0$ ed $y_0 \geq 0$, allora y è non negativa a destra di x_0 , mentre se $b(x) \leq 0$ allora $y(x) \leq 0$ a destra di x_0 . Infatti basta applicare la formula (5.32) e osservare che il secondo membro è definito su tutto I e nelle ipotesi aggiuntive contiene solo termini che a destra di x_0 hanno il segno di $b(x)$.

Teorema di esistenza globale (II) 5.19 : sia I un intervallo di \mathbb{R} , e sia f una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$, localmente lipschitziana rispetto a y . Se esistono due funzioni $a(x)$ e $k(x)$ non negative e continue su I tali che

$$|f(x, y)| \leq a(x) + k(x)|y| \quad \forall (x, y) \in I \times \mathbb{R},$$

allora per ogni $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

è definita su tutto I .

DIMOSTRAZIONE : lavoriamo solo a destra di x_0 ; supponiamo che sia $I =]\alpha, \beta[$, eventualmente con $\beta = +\infty$, e supponiamo che la soluzione y sia definita solo su $[x_0, b[$ con $b < \beta$. Riscriviamo l'ipotesi come

$$-a(x) - k(x)|y| \leq f(x, y) \leq a(x) + k(x)|y| \quad \forall (x, y) \in I \times \mathbb{R}. \quad (5.33)$$

Consideriamo la soluzione del problema di Cauchy

$$v' = a(x) + k(x)v, \quad v(x_0) = |y_0| :$$

abbiamo appena visto che questa esiste ed è non negativa su tutto $[x_0, \beta[$; ma allora risolve anche (a destra di x_0) il problema di Cauchy

$$v' = a(x) + k(x)|v|, \quad v(x_0) = |y_0|$$

pertanto per la disuguaglianza destra in (5.33) e per il Teorema di confronto 5.18 abbiamo

$$y(x) \leq v(x) \quad \forall x \in [x_0, b[.$$

Ma v è continua per $x < \beta$, dunque fin oltre b , quindi in particolare ha massimo su $[x_0, b]$, chiamiamolo M . Abbiamo provato che

$$y(x) \leq M \quad \forall x \in [x_0, b[.$$

Poniamo $w = -v$ e osserviamo che w risolve

$$w' = -v' = -a(x) - k(x)|v| = -a(x) - k(x)|w|, \quad w(x_0) = -|y_0|.$$

In particolare per la disuguaglianza sinistra in (5.33) e per il Teorema di confronto 5.18 abbiamo

$$y(x) \geq w(x) = -v(x) \quad \forall x \in [x_0, b[,$$

dunque

$$y(x) \geq -M \quad \forall x \in [x_0, b[.$$

Allora il grafico di y a destra di x_0 sarebbe tutto contenuto nel rettangolo $[x_0, b] \times [-M, M]$ che è un compatto di $I \times \mathbb{R}$, contraddicendo il Teorema di esistenza globale 5.8. ■

Osserviamo che per il problema di Cauchy (5.23) il secondo membro era quadratico in y , ed effettivamente non avevamo esistenza globale. Tuttavia non bisogna pensare che il Teorema 5.19 dia una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza globale!

Esempio : per il problema di Cauchy

$$y' = y^2 - 4, \quad y(0) = 1, \tag{5.34}$$

apparentemente del tutto simile a (5.23), vi è esistenza globale, nonostante il secondo membro sia quadratico in y . Infatti osserviamo anzitutto che il secondo membro è una funzione localmente lipschitziana, e che le funzioni costanti $y(x) \equiv 2$ e $y(x) \equiv -2$ risolvono l'equazione differenziale, perciò per il Corollario 5.16 la soluzione $y(x)$ di (5.34), che esiste ed è unica, non può mai assumere i valori 2 e -2. Essendo continua su un intervallo (incognito) I , e dato che $-2 < y(0) < 2$, necessariamente $-2 < y(x) < 2$ per ogni $x \in I$. Scelto un qualsiasi numero $M > 0$ consideriamo il compatto

$$K_M = [-2, 2] \times [0, M] :$$

per il Teorema di esistenza globale 5.8, a destra di 0 il grafico della soluzione non può essere tutto contenuto in K_M , ma dato che y non può assumere valori maggiori di 2 o minori di -2 necessariamente è definita in qualche punto $x > M$, e in particolare è definita su tutto $[0, M]$. Dato che M è arbitrario, è definita su tutto $[0, +\infty[$, e analogamente a sinistra di zero.

Osserviamo che con i metodi della prossima sezione avremmo potuto determinare esplicitamente la soluzione di (5.34).

5.6 - Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono quelle del tipo

$$y' = a(x)f(y) \quad (5.35)$$

dove a ed f sono due funzioni continue assegnate, con $f(y) \neq 0$ per ogni y (o almeno in un intorno del valore iniziale y_0). Supponiamo ad esempio $f > 0$; se G è una primitiva di $1/f$ ed A è una primitiva di a , l'equazione si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{f(y(x))} y'(x) = a(x) \quad \Longleftrightarrow \quad [G(y(x))]' = A'(x),$$

da cui

$$G(y) = A(x) + c.$$

Essendo $G' = 1/f > 0$ si ha che G è strettamente crescente, quindi invertibile, per cui tutte le soluzioni cercate sono della forma

$$y(x) = G^{-1}(A(x) + c).$$

Nel caso in cui la funzione a sia indipendente da x , ovvero sia costante, si dice che l'equazione è *autonoma*, e le soluzioni sono del tipo

$$y(x) = G^{-1}(ax + c).$$

Se la funzione $f(y)$ in (5.35) si annulla in qualche punto $y_* \in \mathbb{R}$, la funzione costante $y(x) \equiv y_*$ risolve l'equazione: infatti ha derivata identicamente nulla, e

$$0 = y'(x) = a(x)f(y_*).$$

Esempio : consideriamo l'equazione autonoma $y' - e^{-y} = 0$, che può essere riscritta

$$y' = e^{-y}.$$

Si trova $G(y) = e^y$, per cui le soluzioni sono date da $e^y = x + c$, cioè

$$y(x) = \log(x + c).$$

Notiamo che in tal caso le soluzioni non sono definite su tutto \mathbb{R} : ad esempio, se la condizione iniziale è $y(0) = \alpha$, si ricava $c = e^\alpha$, quindi l'unica soluzione sarà data da

$$y(x) = \log(x + e^\alpha)$$

e risulta definita nell'intervallo $] - e^\alpha, +\infty[$.

Esempio : consideriamo il problema di Cauchy

$$y' = \frac{1-y^2}{2}, \quad y(0) = a, \quad (5.36)$$

e osserviamo che per $y = \pm 1$ il secondo membro si annulla; allora le costanti $y \equiv 1$ e $y \equiv -1$ risolvono l'equazione, e anche il problema di Cauchy per $a = 1$ o $a = -1$ rispettivamente: per il teorema di unicità, allora, nessuna altra soluzione può mai valere ± 1 . Mettiamoci ora nel caso $a \neq \pm 1$ e dividiamo per $(1-y^2)/2$ ottenendo

$$\frac{2y'}{1-y^2} = 1 \implies \frac{y'}{1+y} + \frac{y'}{1-y} = 1,$$

da cui con le solite notazioni $A(x) = x$ e $G(y) = \log |(1+y)/(1-y)|$; allora ricordando la condizione iniziale abbiamo

$$\log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = x + \log \left| \frac{1+a}{1-a} \right|. \quad (5.37)$$

A questo punto consideriamo il caso $-1 < a < 1$: in un intorno di $x = 0$ la funzione continua y , che in zero vale a , sarà compresa fra -1 e 1 (Proposizione 1.35; la frazione $(1+a)/(1-a)$ è positiva, quindi sarà positiva anche $(1+y)/(1-y)$ e da (5.37) possiamo dedurre

$$\log \frac{1+y}{1-y} = x + \log \frac{1+a}{1-a} \implies \frac{1+y}{1-y} = \frac{1+a}{1-a} e^x$$

e quindi, posto per brevità $c_a = (1+a)/(1-a)$,

$$y = \frac{c_a e^x - 1}{c_a e^x + 1} = 1 - \frac{2}{c_a e^x + 1}. \quad (5.38)$$

Si vede bene che la soluzione è definita per ogni x , visto che $c_a > 0$, e che tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$, a -1 per $x \rightarrow -\infty$.

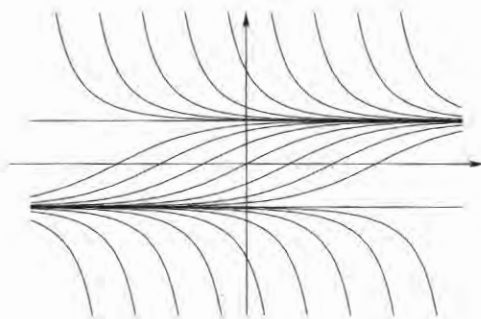


Fig. 5.7 : alcune soluzioni di $y' = (1-y^2)/2$

Nei casi $a < -1$ e $a > 1$, le quantità all'interno dei valori assoluti in (5.37) sono negative e si passa a

$$\log\left(-\frac{1+y}{1-y}\right) = x + \log\left(-\frac{1+a}{1-a}\right) \implies -\frac{1+y}{1-y} = -\frac{1+a}{1-a}e^x$$

e la forma della soluzione è sempre quella (5.38) di prima; però ora la costante c_a è negativa, pertanto il denominatore $1 + c_a e^x$ si annulla per

$$x = \log(-1/c_a) = -\log(-c_a) = x_a.$$

Ora, per $a > 1$ si ha

$$c_a = \frac{2}{1-a} - 1 < -1 \implies -\log(-c_a) < 0 \implies x_a < 0$$

e la soluzione è definita solo nell'intervallo $]x_a, +\infty[$, mentre se $a < -1$ abbiamo che $-\log(-c_a) > 0$ e la soluzione è definita solo in $] -\infty, x_a[$.

Più in generale si trattano come equazioni a variabili separabili anche le equazioni che si possono ricondurre al tipo (5.35) con semplici operazioni algebriche o cambi di variabile (es. 5.3).

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = (x + y)^2.$$

Essa non è a variabili separabili, ma operando la sostituzione

$$z(x) = x + y(x)$$

otteniamo l'equazione differenziale

$$z' = 1 + z^2$$

che è a variabili separabili (anzi addirittura autonoma) e si risolve facilmente, ottenendo la soluzione generale

$$z(x) = \tan(x + c)$$

da cui si ricava poi

$$y(x) = \tan(x + c) - x.$$

5.7 - Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Consideriamo qui un caso molto particolare di equazioni differenziali del secondo ordine: il caso di **equazioni lineari a coefficienti costanti**, cioè del tipo

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (5.39)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ ed f funzione continua; tali equazioni si dicono **omogenee** se il termine noto $f(x)$ è la funzione nulla. Ci limiteremo a dare un algoritmo di risoluzione suddiviso in vari passi.

Passo 1 : la prima cosa da fare per trovare le soluzioni dell'equazione (5.39) è scrivere l'*equazione caratteristica*

$$z^2 + az + b = 0$$

e determinarne le radici in campo complesso; siccome a e b sono numeri reali, le radici z_1 e z_2 saranno una sola, reale, oppure entrambe reali, oppure complesse coniugate.

Passo 2 : consideriamo l'*equazione omogenea associata* a (5.39),

$$y'' + ay' + by = 0; \quad (5.40)$$

in corrispondenza alle radici z_1 e z_2 si determinano due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$, dette *soluzioni fondamentali*, che risolvono la (5.40):

a) nel caso in cui z_1 e z_2 sono reali e distinte poniamo

$$y_1(x) = e^{z_1 x}, \quad y_2(x) = e^{z_2 x};$$

b) nel caso in cui z_1 è l'unica radice (reale) poniamo

$$y_1(x) = e^{z_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{z_1 x};$$

c) nel caso in cui z_1 e z_2 sono complesse coniugate, cioè del tipo $\alpha \pm i\beta$, poniamo

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Passo 3 : una volta determinate le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$, otteniamo l'espressione della *soluzione generale* di (5.40); questa è data da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie. Tutte le soluzioni di (5.39) con $f \equiv 0$ sono di questo tipo (§ es. 5.4).

Passo 4 : se la funzione f non è identicamente nulla, si cerca una *soluzione particolare* dell'equazione (5.39), cioè una funzione $\bar{y}(x)$ che risolve (5.39). A seconda della forma di f si tentano varie strade:

- a) se f è un polinomio di grado k si cerca una soluzione \bar{y} tra i polinomi di grado k (se il coefficiente b della y è diverso da zero), oppure $k+1$ (se $b=0$ ma $a \neq 0$) oppure $k+2$ (se $a=b=0$);
- b) se $f(x) = ae^{bx}$ si cerca una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = ke^{bx}$; se però b era una delle due soluzioni dell'equazione caratteristica, o se ne era l'unica soluzione, bisognerà provare con $\bar{y}(x) = kxe^{bx}$ o con $\bar{y}(x) = kx^2e^{bx}$ rispettivamente;
- c) se $f(x) = a \sin(bx)$ oppure se $f(x) = a \cos(bx)$ si cerca una soluzione della forma $\bar{y}(x) = h \sin(bx) + k \cos(bx)$; se però ib era una soluzione dell'equazione caratteristica (questo accade solo per l'equazione $z^2 + b^2 = 0$, che corrisponde a un primo membro dell'equazione differenziale del tipo $y'' + b^2y$), si cercherà una soluzione della forma $\bar{y}(x) = hx \sin(bx) + kx \cos(bx)$;
- d) se $f(x) = f_1(x) + \dots + f_k(x)$ è una somma di funzioni che rientrano nei tre tipi precedenti, si cerca una soluzione particolare \bar{y}_i per ciascuna funzione f_i , poi si sommano le soluzioni particolari: $\bar{y} = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_k$.

Più in generale si potrebbe considerare il caso $f(x) = P_k(x)e^{ax}$, con P_k polinomio di grado k : come soluzione si cerca fra le funzioni $Q(x)e^{ax}$ dove Q è un polinomio di grado k se a non è radice dell'equazione caratteristica, o $k+1$ [$k+2$] se invece è radice semplice [doppia]; in modo analogo si trattano i casi

$$f(x) = P_k(x) \sin(bx) \quad \text{e} \quad f(x) = P_k(x) \cos(bx)$$

o ancora più in generale i casi

$$f(x) = P_k(x)e^{ax} \sin(bx) \quad \text{e} \quad f(x) = P_k(x)e^{ax} \cos(bx).$$

Vi è poi un metodo generale per trattare un secondo membro qualsiasi, che esporremo poco più avanti (§ A5.21).

Passo 5 : si ricavano tutte le soluzioni di (5.39), che sono date da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$

al variare delle costanti c_1 e c_2 in \mathbb{R} (es. 5.5).

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = 0;$$

dato che l'equazione caratteristica $z^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $z = \pm i$, le soluzioni fondamentali sono $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$, e la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x. \quad (5.41)$$

Più in generale, per l'equazione differenziale

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (5.42)$$

la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x).$$

Esempio : consideriamo il problema di Cauchy

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

le soluzioni dell'equazione caratteristica $z^2 + 2z + 2 = 0$ sono $z = -1 \pm i$ e la soluzione generale dell'equazione differenziale risulta

$$y = c_1 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x,$$

così imponendo le condizioni iniziali ricaviamo $c_1 = c_2 = 1$, per cui si ha

$$y = (\cos x + \sin x) e^{-x}. \quad (5.43)$$

Come si vede, sono oscillazioni la cui ampiezza si smorza a zero per $x \rightarrow +\infty$.

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 2ay' + y = \sin t \quad (5.44)$$

con $a > 0$; questa equazione interviene nello studio delle piccole oscillazioni di un pendolo sottoposto alla resistenza dell'aria e in presenza di un termine forzante sinusoidale. L'equazione caratteristica $z^2 + 2az + 1 = 0$ ha:

- a) le due radici reali e distinte $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ se $a > 1$,
- b) la sola radice -1 se $a = 1$,
- c) le due radici complesse $-a \pm i\sqrt{1 - a^2}$ se $a < 1$,

per cui avremo le soluzioni fondamentali

$$\begin{aligned} & e^{(-a-\sqrt{a^2-1})t}, \quad e^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} && \text{se } a > 1, \\ & e^{-t}, \quad te^{-t} && \text{se } a = 1, \\ & e^{-at} \sin(t\sqrt{1-a^2}), \quad e^{-at} \cos(t\sqrt{1-a^2}) && \text{se } a < 1. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora trovare una soluzione particolare $\bar{y}(t)$; visto che il secondo membro è $\sin t = \Im(e^{it})$ e che i non è mai radice del polinomio caratteristico, cerchiamo $\bar{y}(t)$ della forma

$$\bar{y}(t) = h \sin t + k \cos t,$$

da cui

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= h \cos t - k \sin t \\ \bar{y}'' &= -h \sin t - k \cos t \end{aligned}$$

e perciò

$$\bar{y}'' + 2a\bar{y}' + \bar{y} = 2ah \cos t - 2ak \sin t.$$

Per far sì che \bar{y} risolva (5.44) serve che il secondo membro sia uguale a $\sin t$, quindi $h = 0$ e $k = -1/2a$: allora una soluzione particolare dell'equazione è data dalla funzione $\bar{y}(t) = -(1/2a) \cos t$, quindi la soluzione generale dell'equazione cercata è:

$$\begin{aligned} & c_1 e^{(-a-\sqrt{a^2-1})t} + c_2 e^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} - \frac{1}{2a} \cos t && \text{se } a > 1, \\ & c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - \frac{1}{2a} \cos t && \text{se } a = 1, \\ & c_1 e^{-at} \sin(t\sqrt{1-a^2}) + c_2 e^{-at} \cos(t\sqrt{1-a^2}) - \frac{1}{2a} \cos t && \text{se } a < 1. \end{aligned}$$

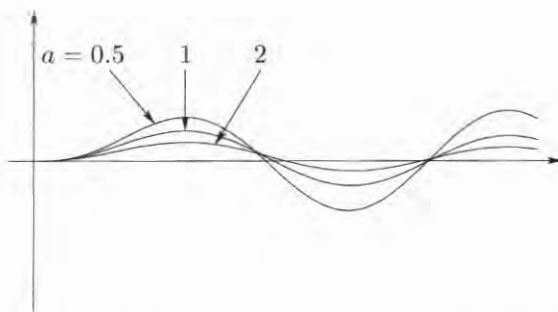


Fig. 5.8 : le soluzioni di (5.44) con $y(0) = y'(0) = 0$ e diversi valori di a

È interessante notare che, siccome tutte le soluzioni fondamentali sono infinitesime per $t \rightarrow +\infty$, ogni soluzione della (5.39) risulta asintotica, per $t \rightarrow +\infty$, alla funzione $-(1/2a) \cos t$, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Moltiplicando ciascuna soluzione (che dipende dal valore di a) per $2a$, questa dovrebbe risultare asintotica a $-\cos t$, e si vede bene in figura che ciò accade davvero (► appendice 5.3).

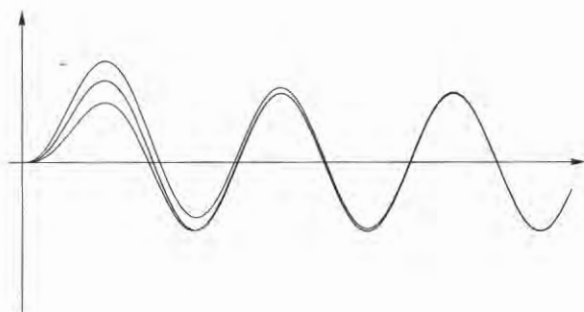


Fig. 5.9 : le stesse della figura precedente, moltiplicate ciascuna per $2a$

Esempio : risolviamo l'equazione

$$y'' - y = e^x ;$$

le soluzioni dell'equazione caratteristica $z^2 - 1 = 0$ sono 1 e -1 , per cui le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

La soluzione particolare, dato che il secondo membro è e^x e che 1 è una delle radici dell'equazione caratteristica, va cercata del tipo $\bar{y}(x) = kxe^x$; con facili calcoli, imponendo che \bar{y} risolva l'equazione si trova $k = 1/2$ e pertanto la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x}. \quad (5.45)$$

Esempio : risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = e/2 ; \end{cases}$$

sappiamo già la forma (5.45) della soluzione generale, da cui

$$y'(x) = \left(c_1 + \frac{x+1}{2}\right)e^x - c_2e^{-x}.$$

Sostituendo $x = 1$ ricaviamo

$$y(1) = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)e + \frac{c_2}{e}, \quad y'(1) = (c_1 + 1)e - \frac{c_2}{e},$$

e imponendo che $y(1) = 0$ e $y'(1) = e/2$ si trova $c_1 = -1/2$, $c_2 = 0$: la soluzione è

$$y(x) = \frac{x-1}{2}e^x.$$

Esempio : risolviamo l'equazione

$$y'' + y' - 2y = x - 3\sin x + \cos x ;$$

le soluzioni dell'equazione caratteristica sono 1 e -2 e le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Dato che il secondo membro è somma di un polinomio di grado 1 e di una funzione trigonometrica, per quanto visto nel passo 4 cominciamo a trovare una soluzione particolare \bar{y}_1 dell'equazione

$$y'' + y' - 2y = x$$

cercando tra i polinomi di primo grado, cioè con $\bar{y}_1(x) = ax + b$: dato che $\bar{y}_1' = a$ e $\bar{y}_1'' = 0$, deve essere

$$0 + a - 2(ax + b) = x,$$

da cui $a = b = -1/2$ e

$$\bar{y}_1(x) = -\frac{x+1}{2}.$$

Ora, sempre usando il passo 4, dobbiamo trovare una soluzione particolare $\bar{y}_2 = h \sin x + k \cos x$ dell'equazione

$$y'' + y' - 2y = -3\sin x + \cos x ;$$

risulta $h = 1$ e $k = 0$, così

$$\bar{y}_2(x) = \sin x$$

e la soluzione particolare dell'equazione di partenza risulta

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = \sin x - \frac{x+1}{2} ;$$

infine la soluzione generale è

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \sin x - \frac{x+1}{2}.$$

Abbiamo detto che le equazioni di ordine superiore sono equivalenti a sistemi, il che è stato molto comodo per la teoria, dato che non abbiamo dovuto provare nulla per equazioni di ordine n , riducendoci sempre al caso dei sistemi. Come talvolta accade, la pratica va nella direzione opposta: vediamo come, per risolvere un *sistema di due equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti*, convenga trasformarlo in una equazione del secondo ordine, per la quale abbiamo appena imparato un metodo risolutivo (es. 5.10).

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} u'(x) = au(x) + bv(x) + f(x) \\ v'(x) = cu(x) + dv(x) + g(x) \end{cases} \quad (5.46)$$

con le condizioni iniziali

$$u(x_0) = u_0, \quad v(x_0) = v_0.$$

Se il coefficiente b è zero la prima equazione del sistema si riduce a

$$u' = au + f(x)$$

che è una equazione lineare del primo ordine che sappiamo risolvere (Sezione 5.5, tenendo presente che $u(x_0) = u_0$ è assegnata. Determinata così la funzione $u(x)$, la seconda equazione del sistema (5.46) diventa

$$v' = dv + (cu(x) + g(x)),$$

di nuovo una equazione lineare del primo ordine nella sola incognita v .

Se invece $b \neq 0$, dalla prima equazione di (5.46) ricaviamo

$$v = \frac{1}{b}u' - \frac{a}{b}u - \frac{1}{b}f(x) \quad (5.47)$$

da cui derivando

$$v' = \frac{1}{b}u'' - \frac{a}{b}u' - \frac{1}{b}f'(x) :$$

sostituendo i valori di v e v' ora trovati nella seconda equazione di (5.46) questa diviene

$$\frac{1}{b}u'' - \frac{a}{b}u' - \frac{1}{b}f'(x) = cu + \frac{d}{b}u' - \frac{ad}{b}u - \frac{d}{b}f(x) + g(x)$$

che si riscrive

$$u'' - (a+d)u' + (ad-bc)u = f'(x) - df(x) + bg(x), \quad (5.48)$$

ed è una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti del tipo visto in questa sezione. Per quanto riguarda le condizioni iniziali, abbiamo già $u(x_0) = u_0$, e dalla prima equazione di (5.46) ricaviamo anche

$$u'(x_0) = au_0 + bv_0 + f(x_0) :$$

avendo a disposizione $u(x_0)$ e $u'(x_0)$ l'equazione (5.48) può essere risolta e ci dà la funzione $u(x)$, che a sua volta sostituita in (5.47) permette di ricavare v .

Vediamo come si può operare per trovare una soluzione particolare di un'equazione del secondo ordine non omogenea, quando il secondo membro non è in una delle forme studiate: si tratta del cosiddetto *metodo di variazione delle costanti*. Partiamo da (5.39) e supponiamo che due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea associata siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$: sappiamo che la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con c_1, c_2 costanti. Cerchiamo una soluzione particolare di (5.39) della forma

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

con c_1, c_2 funzioni di x . Stiamo cercando una soluzione, quindi abbiamo una certa libertà. Abbiamo

$$y'(x) = (c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x)) + (c_1(x) y'_1(x) + c_2(x) y'_2(x)) ;$$

imponiamo (a priori potrebbe essere eccessivo, ma vedremo che ce la caveremo nonostante questa imposizione)

$$c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x) = 0 \quad (5.49)$$

di modo che y' si riduce a

$$y'(x) = c_1(x) y'_1(x) + c_2(x) y'_2(x)$$

da cui

$$y''(x) = (c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x)) + (c_1(x) y''_1(x) + c_2(x) y''_2(x)) .$$

Sostituiamo ora y , y' e y'' nell'equazione e abbiamo:

$$y'' + ay' + by = (c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x)) + c_1(x) (y''_1 + ay'_1 + by_1) + c_2(x) (y''_2 + ay'_2 + by_2) .$$

ma y_1 era soluzione dell'equazione omogenea, quindi $y''_1 + ay'_1 + by_1 \equiv 0$, e lo stesso per y_2 , pertanto

$$y'' + ay' + by = c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x)$$

e se vogliamo che y sia una soluzione particolare di (5.39) otteniamo la condizione

$$c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x) = f(x) . \quad (5.50)$$

Dunque c'_1 e c'_2 risolvono per ogni x il sistema

$$\begin{cases} c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x) = 0 \\ c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x) = f(x) . \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

e questa è sempre invertibile (ha determinante nullo solo se le righe sono proporzionali, ma ciò significa che $y_1(x)/y_2(x)$ è costante, ossia y_1 e y_2 sono proporzionali, il che è impossibile dato che erano le due soluzioni fondamentali). Ricavate c_1' e c_2' non ci "resta" che integrarle (cosa non sempre facile) per ricavare c_1 e c_2 . Abitualmente è più pratico fare il calcolo ogni volta, come nel prossimo esempio, tuttavia non è difficile scrivere la soluzione del sistema:

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx.$$

Esempio : consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}. \quad (5.51)$$

Risolvendo l'equazione omogenea si trovano le soluzioni fondamentali

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x e^x.$$

Adesso cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ con il metodo di variazione delle costanti:

$$\bar{y} = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x. \quad (5.52)$$

Derivando,

$$\bar{y}' = (c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x) + (c_1(x)e^x + c_2(x)e^x + c_2(x)xe^x);$$

poniamo uguale a zero il primo addendo fra parentesi (in modo da non avere poi derivate seconde dei termini c_i) ottenendo sia la prima equazione sui c_i'

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \implies c_1' + xc_2' = 0 \quad (5.53)$$

che l'espressione della derivata

$$\bar{y}' = c_1(x)e^x + c_2(x)(1+x)e^x. \quad (5.54)$$

Derivando ancora abbiamo

$$\bar{y}'' = (c_1'(x)e^x + c_2'(x)(1+x)e^x) + (c_1(x)e^x + c_2(x)(2+x)e^x).$$

Inseriamo questa espressione di \bar{y}'' , insieme alle espressioni (5.54) e (5.52) di \bar{y}' e \bar{y} , nell'equazione differenziale (5.51) che vogliamo risolvere ottenendo (non è un miracolo

che si cancellino tutti i termini in cui i c_i non sono derivati, semplicemente y_1 e y_2 erano soluzioni dell'equazione omogenea)

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(1+x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2} \implies c_1' + (1+x)c_2' = \frac{1}{1+x^2},$$

la seconda equazione sui c_i' , che insieme a (5.53) dà il sistema

$$\begin{cases} c_1' + xc_2' = 0 \\ c_1' + (1+x)c_2' = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2' = \frac{1}{1+x^2} \\ c_1' = \frac{-x}{1+x^2} \end{cases}$$

da cui si ricavano subito le espressioni di c_1 e c_2 .

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \log(1+x^2) \\ c_2(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x. \end{aligned}$$

In definitiva, la soluzione generale dell'equazione in questione è quindi

$$y(x) = e^x \left(c_1 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right) + xe^x (c_2 + \arctan x)$$

con c_1 e c_2 costanti.

5.8 - Equazioni di ordine superiore al secondo

In questa sezione studiamo le equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al secondo, lineari e con coefficienti costanti, cioè del tipo

$$\sum_{j=0}^m a_j y^{(j)} = f(x). \quad (5.55)$$

I coefficienti a_j sono numeri reali con $a_m \neq 0$, $y^{(j)}$ indica la derivata j -esima della funzione y , ed $f(x)$ è la funzione "termine noto".

La risoluzione dell'equazione (5.55), cioè la ricerca della sua soluzione generale, si ottiene seguendo gli stessi passi visti nella Sezione 5.7 per il caso $m = 2$, che sono i seguenti.

Passo 1 : si considera il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$$

e si determinano le sue radici complesse z_1, \dots, z_m contate ciascuna con la relativa molteplicità, in modo che siano esattamente m : ad esempio se $P(z) = (z-5)^2$ avremo $z_1 = z_2 = 5$. Va osservato che, essendo il polinomio P a coefficienti reali, se un numero complesso z è radice lo è anche il suo coniugato \bar{z} . Notiamo esplicitamente che questo passo sarà spesso impossibile da completare, dato che sono ben pochi i polinomi di grado elevato di cui si riesce a trovare tutte le radici!

Passo 2 : si determinano tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\sum_{j=0}^m a_j y^{(j)} = 0 \quad (5.56)$$

individuando una famiglia $y_1(x), \dots, y_m(x)$ di *soluzioni fondamentali*, costruite mediante le radici z_1, \dots, z_m trovate nel Passo 1, come segue.

- a) Se z è una radice reale semplice, prendiamo la funzione e^{zx} .
- b) Se z è una radice reale multipla, con molteplicità k (cioè compare k volte nella lista delle m radici del polinomio P), prendiamo le k funzioni

$$e^{zx}, \quad xe^{zx}, \quad \dots, \quad x^{k-1}e^{zx}.$$

- c) Se $z = \alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate semplici, prendiamo le due funzioni

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

- d) Se $z = \alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate multiple, con molteplicità k , prendiamo le $2k$ funzioni

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \cos(\beta x), & xe^{\alpha x} \cos(\beta x), & \dots, & x^{k-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), & xe^{\alpha x} \sin(\beta x), & \dots, & x^{k-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}$$

Passo 3 : una volta determinate le m soluzioni fondamentali $y_1(x), \dots, y_m(x)$ come illustrato nel Passo 2, la soluzione generale dell'equazione omogenea (5.56) è data da

$$y(x) = \sum_{j=1}^m c_j y_j(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)$$

con c_1, \dots, c_m costanti reali arbitrarie.

Passo 4 : si cerca una *soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ dell'equazione (5.55); è questo il passo più delicato; a causa della linearità dell'equazione, se $f(x) = f_1(x) + \dots + f_k(x)$ si può cercare una soluzione particolare \bar{y}_i per ciascuna funzione f_i e poi si sommano

le soluzioni particolari per ottenere $\bar{y} = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_k$. Se f è di uno dei tipi visti nella Sezione 5.7 si può ricalcare la strategia usata là (polinomi di grado opportuno, esponenziali eventualmente moltiplicati per potenze, funzioni trigonometriche). Per una trattazione più generale rimandiamo all'appendice (► appendice 5.9).

Passo 5 : la soluzione generale dell'equazione (5.55) è data infine da

$$y(x) = \sum_{j=1}^m c_j y_j(x) + \bar{y}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x) + \bar{y}(x)$$

con c_1, \dots, c_m costanti reali arbitrarie. Nel caso di un problema di Cauchy con m condizioni iniziali assegnate, le costanti c_1, \dots, c_m si ricavano imponendo tali condizioni (es. 5.21).

Sistemi lineari a coefficienti costanti con più di due equazioni si possono ricondurre, con manipolazioni algebriche simili a quelle viste al termine della Sezione 5.7, a equazioni di ordine superiore al secondo, dopo di che si possono trattare con i metodi di questa sezione.

Esempio : risolviamo il problema di Cauchy

$$y''' - y'' + y' - y = 4e^{-x} - x^3, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

L'equazione omogenea associata è $y''' - y'' + y' - y = 0$, e l'equazione caratteristica

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z - 1)(z^2 + 1) = 0$$

ha le tre radici semplici $z = 1$, $z = i$ e $z = -i$, cui corrispondono le soluzioni fondamentali

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \sin x$$

per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Ora cerchiamo una soluzione particolare: visto il secondo membro $4e^{-x} - x^3$, la troveremo nella forma $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ dove \bar{y}_1 e \bar{y}_2 sono soluzioni particolari rispettivamente delle equazioni

$$y''' - y'' + y' - y = 4e^{-x}, \quad y''' - y'' + y' - y = -x^3.$$

Visto che e^{-x} non è tra le soluzioni fondamentali, cerchiamo \bar{y}_1 del tipo ce^{-x} , mentre \bar{y}_2 sarà un polinomio di grado 3. Abbiamo

$$\bar{y}_1 = ce^{-x}, \quad \bar{y}_1' = -ce^{-x}, \quad \bar{y}_1'' = ce^{-x}, \quad \bar{y}_1''' = -ce^{-x}$$

per cui

$$\bar{y}_1''' - \bar{y}_1'' + \bar{y}_1' - \bar{y}_1 = -4ce^{-x}$$

e dunque scegliamo $c = -1$ ossia

$$\bar{y}_1(x) = -e^{-x}.$$

Ora se $\bar{y}_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ abbiamo

$$\bar{y}_2' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad \bar{y}_2'' = 6ax + 2b, \quad \bar{y}_2''' = 6a$$

e con facilissimi calcoli

$$\bar{y}_2''' - \bar{y}_2'' + \bar{y}_2' - \bar{y}_2 = -x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1, \quad b = 3, \quad c = d = 0$$

per cui

$$\bar{y}_2(x) = x^3 + 3x^2.$$

Allora la soluzione generale dell'equazione di partenza è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - e^{-x} + x^3 + 3x^2.$$

Abbiamo

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 \sin x + c_3 \cos x + e^{-x} + 3x^2 + 6x$$

$$y''(x) = c_1 e^x - c_2 \cos x - c_3 \sin x - e^{-x} - 6x + 6$$

e quindi

$$y(0) = c_1 + c_2 - 1, \quad y'(0) = c_1 + c_3 + 1, \quad y''(0) = c_1 - c_2 + 5$$

e se vogliamo che y risolva il problema di Cauchy deve essere

$$c_1 + c_2 - 1 = c_1 + c_3 + 1 = c_1 - c_2 + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 1.$$

La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = -2e^x + 3 \cos x + \sin x - e^{-x} + x^3 + 3x^2.$$

5.9 - Condizioni diverse da quelle di Cauchy

In questa sezione illustriamo alcuni problemi per le equazioni differenziali ordinarie, diversi dal problema di Cauchy. Nelle sezioni precedenti abbiamo studiato il problema di Cauchy per equazioni e per sistemi di equazioni differenziali ordinarie; abbiamo visto che questo consiste nel fissare in un punto x_0 il valore $y(x_0)$ della soluzione che si cerca, insieme alle derivate $y^{(j)}(x_0)$, con $j = 0, \dots, m-1$ dove m rappresenta l'ordine dell'equazione. Per un'equazione del secondo ordine dunque si impongono i valori $y(x_0)$ ed $y'(x_0)$.

Non tutti i problemi però sono di questo tipo; ad esempio per un'equazione del secondo ordine possiamo:

- imporre i valori della funzione $y(x_0)$ ed $y(x_1)$ in due punti distinti x_0 ed x_1 (questo si chiama *problema di Dirichlet*);
- imporre i valori della derivata prima $y'(x_0)$ ed $y'(x_1)$ in due punti distinti x_0 ed x_1 (questo si chiama *problema di Neumann*);
- imporre delle combinazioni tra i valori della funzione e della sua derivata prima $y(x_0) + \alpha y'(x_0)$ ed $y(x_1) + \beta y'(x_1)$ in due punti distinti x_0 ed x_1 (questo si chiama *problema di Robin*).

Senza entrare nella casistica dei vari problemi possibili osserviamo che in ogni caso le condizioni iniziali, sia di tipo Cauchy che agli estremi dei tipi elencati sopra, nulla cambiano rispetto alla ricerca delle soluzioni generali; l'unica differenza sta nella determinazione delle costanti (due nel caso di equazioni del secondo ordine), che si ottengono volta per volta imponendo le condizioni corrispondenti.

Esempio : una corda elastica di costante elastica k è fissata ai suoi estremi a e b ed è caricata con dei pesi distribuiti lungo di essa. Se indichiamo con $y(x)$ la posizione verticale della corda al punto x , con $m(x)$ la distribuzione della massa caricata sulla corda, e supponiamo agli estremi $y(a) = y(b) = 0$, la teoria dell'elasticità lineare fornisce la posizione della corda caricata come soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$ky''(x) = m(x)g, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Ad esempio, se supponiamo la corda caricata uniformemente, cioè $m(x) = m$ costante, e prendiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$, otteniamo la soluzione generale

$$y(x) = \frac{mg}{2k}x^2 + c_1x + c_2$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni agli estremi si ottiene $c_2 = 0$ e $c_1 = -mg/(2k)$ e quindi la posizione della corda, data da

$$y(x) = \frac{mg}{2k}(x^2 - x),$$

quindi l'elastico assume una forma parabolica. Se la corda non è elastica (ad esempio una catena), la situazione è differente (\Rightarrow appendice 5.10).

Esempio : se invece di una corda elastica avessimo avuto una sbarra di acciaio *incastata* nell'estremo a ma completamente libera nell'estremo b , le equazioni dell'elasticità lineare ci avrebbero dato l'equazione differenziale del quarto ordine

$$ky^{(4)} = -m(x)g$$

con le condizioni di *incastro* nel punto a

$$y(a) = y'(a) = 0$$

e le condizioni di *estremo libero* in b

$$y''(b) = y'''(b) = 0.$$

Supponendo ad esempio $m(x) = m$ costante, e prendendo $a = 0$ e $b = 1$, si ottiene così la soluzione

$$y(x) = -\frac{mg}{24k}x^2(x^2 - 4x + 6)$$

il cui grafico è rappresentato in figura.

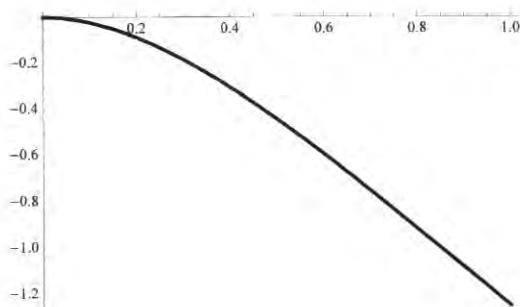


Fig. 5.10 : una sbarra incastata nell'origine ma libera nell'altro estremo

Esempio : fissato un numero reale $\omega^2 > 0$ ed un intervallo $[0, L]$ consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' = -\omega^2 y \tag{5.57}$$

con le condizioni al bordo

$$y(0) = y(L) = 0. \tag{5.58}$$

Tale problema di Dirichlet interviene nello studio delle vibrazioni di una corda elastica di lunghezza L , fissata ai suoi estremi. Abbiamo già visto (5.42) che la soluzione generale dell'equazione (5.57) è data dall'espressione

$$y(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni (5.58) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \sin(\omega L) = 0. \end{cases}$$

Dunque, se ωL non è un multiplo intero di π , l'unica soluzione dell'equazione (5.57) con le condizioni (5.58) è la funzione nulla. Se invece

$$\omega L = n\pi, \quad \text{cioè} \quad \omega = \frac{n\pi}{L},$$

abbiamo anche le soluzioni

$$y(x) = c_1 \sin(n\pi x/L)$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$ qualsiasi, pertanto in questi casi il problema di Dirichlet ha infinite soluzioni.

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale (non in forma normale)

$$(y')^2 = 1$$

e fissiamo un punto x_0 in cui imponiamo la condizione $y(x_0) = y_0$. Siccome per la proprietà di Darboux vista nella Proposizione 1.47 la derivata non può saltare da -1 a 1 , abbiamo che se $y'(x_0) > 0$ si ha $y'(x) > 0$ per ogni x e dunque $y'(x) = 1$, che fornisce la soluzione

$$y(x) = y_0 + (x - x_0).$$

Analogamente, se $y'(x_0) < 0$ abbiamo $y'(x) = -1$ per ogni x e quindi otteniamo la soluzione

$$y(x) = y_0 + (x_0 - x).$$

In definitiva, queste sono le due sole soluzioni possibili.

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale vista in (5.5)

$$(y')^2 = \sin^2 x \tag{5.59}$$

con la condizione $y(0) = y_0$. Possiamo quindi avere, per ogni singolo punto x ,

$$y'(x) = \sin x \quad \text{oppure} \quad y'(x) = -\sin x. \tag{5.60}$$

Per la proprietà di Darboux vista nella Proposizione 1.47 la derivata $y'(x)$ non può saltare da $\sin x$ a $-\sin x$ (o viceversa), a meno che non si abbia $\sin x = 0$ cioè $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$: dunque l'alternativa (5.60) vale non per ogni singolo punto, ma in ciascun intervallo $[k\pi, (k+1)\pi]$. Supponiamo che nell'intervallo $[0, \pi]$ sia $y'(x) = \sin x$; si ha allora $y(x) = -\cos x + c$ e dalla condizione iniziale si ricava

$$y(x) = y_0 + 1 - \cos x \quad \text{in } [0, \pi].$$

Invece, nel caso in cui $y'(x) = -\operatorname{sen} x$ in $[0, \pi]$, si otterrebbe la soluzione

$$y(x) = y_0 - 1 + \cos x \quad \text{in } [0, \pi] .$$

Siccome nel punto π entrambe le soluzioni hanno derivata nulla, nell'intervallo successivo $[\pi, 2\pi]$ si può di nuovo scegliere tra le opzioni $y'(x) = \operatorname{sen} x$ oppure $y'(x) = -\operatorname{sen} x$. Si ottengono quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, le quattro soluzioni

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + 1 - \cos x \quad \text{in } [0, \pi] ; \\ y_2(x) &= \begin{cases} y_0 + 1 - \cos x & \text{in } [0, \pi] \\ y_0 + 3 + \cos x & \text{in } [\pi, 2\pi]; \end{cases} \\ y_3(x) &= \begin{cases} y_0 - 1 + \cos x & \text{in } [0, \pi] \\ y_0 - 3 - \cos x & \text{in } [\pi, 2\pi]; \end{cases} \\ y_4(x) &= y_0 - 1 + \cos x \quad \text{in } [0, \pi] . \end{aligned}$$

Di nuovo, nel punto 2π tutte le soluzioni hanno derivata nulla, per cui nell'intervallo successivo $[2\pi, 3\pi]$ si potrà ancora scegliere tra le opzioni $y'(x) = \operatorname{sen} x$ oppure $y'(x) = -\operatorname{sen} x$, il che condurrà ad avere otto possibili soluzioni in $[0, 3\pi]$ (provate per esercizio a scriverle esplicitamente). Così di seguito si procede negli intervalli successivi $[k\pi, (k+1)\pi]$ con $k > 0$ e similmente a sinistra dell'origine, con $k < 0$.

Esercizi relativi al capitolo 5

Esercizio 5.1 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy mediante integrazione diretta:

- a) $y' = e^x$, $y(0) = 3$
- b) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$
- c) $y' = x \sin x + \cos x$, $y(0) = 1$.

Esercizio 5.2 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- a) $y' = 2y - e^x$, $y(0) = 0$
- b) $y' = xy + 2x$, $y(0) = 0$
- c) $y' = y + x$, $y(0) = 0$
- d) $y' = y + 1 + \sin x$, $y(1) = 1$
- e) $y' = xy + x^3$, $y(1) = 0$.

Esercizio 5.3 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- a) $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 1$
- b) $y' = \tan x \cdot \cos^2 y$, $y(0) = \pi$
- c) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

Esercizio 5.4 : determinate la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine, omogenee ed a coefficienti costanti:

- a) $y'' - y = 0$
- b) $y'' + y' = 0$
- c) $y'' + 5y' + y = 0$
- d) $y'' + 5y' - y = 0$
- e) $y'' = 10y' - 9y$.

Esercizio 5.5 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali lineari del secondo ordine ed a coefficienti costanti:

- a) $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$
- b) $y'' + 4y' + 4y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

c) $y'' - 6y' + 9y = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 5.6 : determinate la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine ed a coefficienti costanti:

a) $2y'' + y' - 3y = 3x + 2$

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$

c) $y'' - 2y' + 2y = 1$

d) $y'' + y = x$

e) $y'' - 2y' + 2y = e^x$

f) $y'' + 2y' + 2y = \sin x + \cos x$

g) $y'' + y = xe^x$.

Esercizio 5.7 : calcolate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = x \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.8 : determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema differenziale

$$\begin{cases} u'' + ku = 0 & \text{in }]0, 1[\\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.9 : determinate i numeri reali α, β tali che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \alpha y' + \beta y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

abbia una soluzione $y_{\alpha, \beta}$ infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Tra questi valori di α e β determinate poi quelli tali che risulti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x y_{\alpha, \beta}(x) = 1.$$

Esercizio 5.10 : determinate la soluzione generale dei seguenti sistemi di equazioni differenziali:

a) $\begin{cases} f' = g \\ g' = -f \end{cases}$

b) $\begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = u + 2v \end{cases}$

c) $\begin{cases} u' = 2u + 3v + x \\ v' = 6v - u - 2. \end{cases}$

Esercizio 5.11 : determinate le soluzioni $(x(t), y(t))$ dei seguenti sistemi differenziali del primo ordine:

a) $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 0 \\ y' = x - y, & y(0) = 2\sqrt{2}; \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = x + 3y \\ x(0) = y(0) = 0; \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x' = -y + \sin t \\ y' = -x + \cos t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5.12 : determinate la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} u' = u - v \\ v' = u + v + 1 \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} u' = 3u \\ v' = u - 2v \\ u(0) = 1, \quad v(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5.13 : determinate la soluzione massimale $y(x)$, per $x > 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' = y^2 + xy \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.14 : determinate esplicitamente la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y - 2x| \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.15 : indicata per ogni $a > 0$ con y_a la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = y \left(a + \frac{x}{a} \right), \quad y(0) = 1,$$

determinate il valore di $a \in]0, +\infty[$ per cui il valore $y_a(1)$ risulti minimo.

Esercizio 5.16 : risolveti il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^x e^y - 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.17 : studiate la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^3}{x(x^2 + y^2)} \quad y(1) = 1.$$

Dimostrate in particolare che la soluzione massimale $y(x)$ è definita su tutto $[1, +\infty[$ e determinate un'espressione di $y(x)$ in forma implicita.

Esercizio 5.18 : dimostrate che $y(x) = x$ è l'unica funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ che verifica l'equazione differenziale

$$2xy'(x) = y(x) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.19 : dimostrate che per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} y'' - k^2 y = x \\ y(0) = 0, & y(1) = 1, & y(-1) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 5.20 : determinate i valori delle costanti reali a, b, c, d per cui il sistema differenziale

$$\begin{cases} y' = ay + bz \\ z' = cy + dz \end{cases}$$

ha almeno una soluzione periodica non nulla.

Esercizio 5.21 : determinate le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy di ordine superiore al secondo:

- a) $y''' - y'' + y' - y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
- b) $y^{iv} - y'' + y = e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$;
- c) $y^{(iv)} + y = e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Esercizio 5.22 : determinate i numeri reali a, b, c per cui la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad y''(0) = c \end{cases}$$

è limitata.

Esercizio 5.23 : determinate tutte le funzioni $y \in C^3(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 & \text{su }]0, \pi[\\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.24 : determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} - 16y = \sin x$$

che risultano limitate su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 5.25 : studiate qualitativamente le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy; in particolare determinate per le soluzioni, dove possibile, le regioni di monotonia, quelle di convessità, il dominio di esistenza, gli eventuali asintoti. Disegnate poi un grafico approssimativo delle soluzioni.

- a) $y' = \frac{3x - y^2 + 1}{x^2 + y + 1}$, $y(0) = 1$;
- b) $y' = x + \arctan y$, $y(0) = 0$;
- c) $y' = \frac{y - e^x}{x - e^y}$, $y(0) = 1$;
- d) $y' = y^2 - y \sin x$, $y(0) = 1$;
- e) $y' = \frac{e^y - x^2}{e^y + x^2}$, $y(1) = 0$;
- f) $y' = \tan(y - x)$, $y(0) = 0$;

$$g) \quad y' = \frac{1}{y} - x, \quad y(1) = 1;$$

$$h) \quad y' = x - \sqrt{y}, \quad y(1) = 1;$$

$$i) \quad y' = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Esercizio 5.26 : studiate qualitativamente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

In particolare, stabilite se la soluzione $y(x)$ risulta definita su tutto $]0, +\infty[$.

Esercizio 5.27 : dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^y \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

studiate il comportamento qualitativo della soluzione. In particolare dimostrate che la soluzione massimale non è definita su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 5.28 : studiate qualitativamente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(xy) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e disegnate un grafico approssimativo. Studiate in particolare:

- (i) l'esistenza ed unicità locale, in un intorno del punto $x_0 = 1$;
- (ii) l'esistenza su tutta la semiretta $]0, +\infty[$;
- (iii) la convessità sulla semiretta $]0, +\infty[$;
- (iv) la limitatezza sull'intervallo $]0, 1]$.

Esercizio 5.29 : dimostrate che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non può essere definita su tutto \mathbb{R} e che, se $y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è la soluzione massimale, si ha

$$\int_0^b y(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5.30 : studiate qualitativamente per $x \geq 0$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(4 - x^2 - y^2) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

In particolare dimostrate che:

- (i) la soluzione è unica e globale per $x \geq 0$;

(ii) la soluzione è positiva e tende a zero per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 5.31 : dimostrate che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \operatorname{sen} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 5.32 : considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrate che la soluzione $y(t)$ è definita su tutto \mathbb{R} , che è monotona crescente, e che si ha

$$0 \leq y(t) \leq \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5.33 : dimostrate che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} ed è decrescente.

Esercizio 5.34 : dimostrate che per ogni $a \geq 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x - y^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

ha un'unica soluzione y_a definita su $[0, +\infty[$ e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_a(x) = +\infty.$$

Esercizio 5.35 : dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2 - y^2} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

dimostrate che esiste un'unica soluzione definita in $[2, +\infty[$. Dimostrare poi che tale soluzione è limitata in $[2, +\infty[$.

Esercizio 5.36 : sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare e strettamente crescente. Studiare qualitativamente la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(f(y) - f(x)) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

Esercizio 5.37 : determinate, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni u_n dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 2nu' + n^2u = n^\alpha \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

e stabilite per quali valori di α la successione u_n converge uniformemente a zero nell'intervallo $[0, +\infty[$.

Esercizio 5.38 : dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^4 t e^t}{3 + 2y + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (i) stabilite se la soluzione risulta definita su tutto \mathbb{R} ;
- (ii) determinate la soluzione in forma implicita;
- (iii) scrivete lo sviluppo di Taylor nell'origine di $y(t)$ fino all'ordine 2 compreso.

Esercizio 5.39 : determinate i valori del parametro $\alpha > -1$ per cui l'equazione differenziale

$$y' = t(y + |t|^\alpha)$$

ha una soluzione limitata su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 5.40 : determinate, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = |t|^\alpha y$$

che possono essere estese a funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.41 : considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1-y}{x^2+y^2} \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$$

Dimostrate che:

- (i) esiste una ed una sola soluzione massimale $y(x)$ definita in un intorno dell'origine;
- (ii) la soluzione $y(x)$ del punto precedente è definita su tutto \mathbb{R}^+ ;
- (iii) la soluzione $y(x)$ è definita anche su tutto \mathbb{R}^- ;
- (iv) la soluzione $y(x)$ è monotona crescente e quindi esistono i limiti

$$L^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x), \quad L^+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x);$$

- (v) si ha $L^+ < 1$.

Esercizio 5.42 : dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dimostrate che la soluzione massimale $y(x)$

- i) esiste ed è unica;
- ii) è monotona crescente;
- iii) è definita in un intervallo limitato I di \mathbb{R} ;
- iv) è una funzione dispari;
- v) è convessa su $I \cap \mathbb{R}^+$ e concava su $I \cap \mathbb{R}^-$.

Disegnare inoltre un grafico approssimativo della soluzione $y(x)$.

Esercizio 5.43 : fissato un numero reale $\alpha > 0$ considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{|x|^\alpha + |y|} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrate che:

- (i) esiste una ed una sola soluzione massimale $y(x)$ definita in un intorno dell'origine;
- (ii) la soluzione $y(x)$ del punto precedente è definita su tutto \mathbb{R} ;
- (iii) la soluzione $y(x)$ è monotona crescente e quindi esistono i limiti

$$L^- = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x), \quad L^+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x);$$

- (iv) per $\alpha > 1$ i limiti L^- ed L^+ sono finiti;
- (v) per $\alpha \leq 1$ si ha $L^- = -\infty$ ed $L^+ = +\infty$.

Appendice al capitolo 5

Appendice 5.1 - Un sistema che collassa

Consideriamo N punti su una circonferenza di raggio R , ai vertici di un poligono regolare di N lati, come in figura a); possiamo pensare che ogni punto rappresenti la posizione di un cane feroce. Al tempo $t = 0$ ogni cane si dirige verso il cane più vicino a destra, con velocità v ; vogliamo descrivere il movimento del sistema nel suo complesso, determinando la traiettoria di ogni cane.

Convienne descrivere le traiettorie nel piano complesso; in tal modo la traiettoria del cane k -esimo sarà $z_k(t)$, una curva in \mathbb{C} . Se usiamo gli indici $k = 0, 1, \dots, N-1$ è chiaro che, una volta determinata la traiettoria $z_0(t)$, le altre $z_k(t)$ saranno simili a $z_0(t)$ ma ruotate di un angolo $2\pi k/N$. In altri termini

$$z_k(t) = e^{i2\pi k/N} z_0(t). \quad (\text{A5.1})$$

Se scriviamo il numero complesso $z_0(t)$ in forma polare e indichiamo con $r(t)$ il suo raggio e con $\theta(t)$ il suo angolo, abbiamo

$$z_k(t) = r(t)e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)}. \quad (\text{A5.2})$$

Da come è stata descritta la dinamica dei punti si ricava il sistema differenziale

$$\dot{z}_k(t) = v \frac{z_{k+1}(t) - z_k(t)}{|z_{k+1}(t) - z_k(t)|} \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

dove \dot{z}_k indica la derivata di z_k rispetto a t . Utilizzando (A5.1) e (A5.2) si ottiene

$$\dot{r}(t)e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)} + ir(t)\dot{\theta}(t)e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)} = v \frac{e^{i(\theta(t)+2\pi(k+1)/N)} - e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)}}{|e^{i(\theta(t)+2\pi(k+1)/N)} - e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)}|}$$

da cui, dividendo per $e^{i(\theta(t)+2\pi k/N)}$, si ricava

$$\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\theta}(t) = v \frac{e^{i2\pi/N} - 1}{|e^{i2\pi/N} - 1|} = v \frac{e^{i2\pi/N} - 1}{2\sin(\pi/N)}$$

e, separando parte reale e parte immaginaria, troviamo il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -v \sin(\pi/N), & r(0) = R \\ r(t)\dot{\theta}(t) = v \cos(\pi/N), & \theta(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A5.3})$$

Il sistema (A5.3) si risolve facilmente e si trova

$$\begin{cases} r(t) = R - vt \sin(\pi/N) \\ \theta(t) = -\frac{1}{\tan(\pi/N)} \log\left(1 - t \frac{v \sin(\pi/N)}{R}\right). \end{cases} \quad (\text{A5.4})$$

Le funzioni $r(t)$ e $\theta(t)$ sono definite in un intervallo $[0, T]$, dove T è il *tempo di collasso*, in cui tutti i punti si trovano nell'origine:

$$T = \frac{R}{v \sin(\pi/N)}.$$

In particolare, per $N \rightarrow +\infty$, dallo sviluppo di Taylor della funzione seno, si ricava

$$T \approx \frac{RN}{v\pi}.$$

Per disegnare le traiettorie z_k conviene scrivere z_0 in forma polare $r = r(\theta)$; dalle (A5.4) si ricava

$$r(\theta) = R e^{-\theta \tan(\pi/N)}, \quad \theta \in [0, +\infty[,$$

e le traiettorie z_k sono rappresentate in figura b).

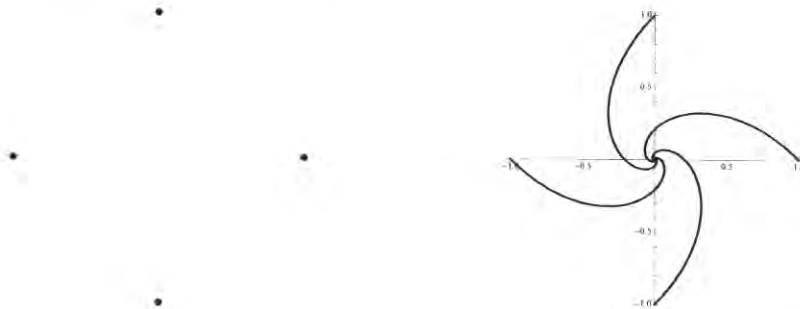


Fig. A5.1 : a) la configurazione iniziale con $N = 4$ Fig. A5.2 : b) le traiettorie con $N = 4$

Appendice 5.2 - Curve di inseguimento

Supponiamo che un velivolo sorvoli una data regione, con traiettoria $\phi(t)$; ad un certo istante t_0 (per comodità supporremo $t_0 = 0$) un missile parte dalla sua postazione (che per comodità supporremo nell'origine) per abbattere il velivolo. Il missile non conosce tutta la traiettoria $\phi(t)$, quindi ad ogni istante t si dirigerà verso il punto $\phi(t)$; indichiamo con v la velocità del missile, che supponiamo costante, e con $\mathbf{u}(t)$ la sua traiettoria. Da quanto detto sulla strategia di inseguimento del missile ricaviamo il sistema differenziale

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = v \frac{\phi(t) - \mathbf{u}(t)}{\|\phi(t) - \mathbf{u}(t)\|}$$

con la condizione iniziale $\mathbf{u}(0) = 0$.

Consideriamo in dettaglio il caso in cui il moto avvenga nel piano x, y con traiettoria del velivolo rettilinea $\phi(t) = (1, t)$; posto allora $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ otteniamo il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = v \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}}, & x(0) = 0 \\ \dot{y} = v \frac{t-y}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}}, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Vogliamo determinare la traiettoria del missile come grafico della funzione $y(x)$; abbiamo quindi, indicando con y' la derivata di y rispetto ad x ,

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{da cui} \quad (1-x)y' = t-y.$$

Derivando rispetto a t l'ultima uguaglianza si ottiene

$$-xy' + (1-x)\frac{dy'}{dt} = 1 - \dot{y}. \quad (\text{A5.5})$$

Tenuto conto dell'uguaglianza

$$\frac{dy'}{dt} = y''\dot{x}$$

e del fatto che $\dot{y} = y'\dot{x}$, l'equazione (A5.5) diventa

$$(1-x)y''\dot{x} = 1 \quad (\text{A5.6})$$

Ricordiamo ora che la velocità del missile è costante, cioè

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = (\dot{x})^2 + (y'\dot{x})^2 = (\dot{x})^2(1 + (y')^2)$$

da cui, essendo evidentemente $\dot{x}(t) > 0$ per ogni t , si ricava

$$\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

A questo punto, sostituendo l'espressione precedente in (A5.6), ricaviamo l'equazione differenziale

$$y'' = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(1-x)}. \quad (\text{A5.7})$$

Posto $z = y'$, l'equazione (A5.7) è del primo ordine a variabili separabili e si integra facilmente (cfr Sezione (5.6)) ottenendo

$$\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = -\frac{1}{v} \log(1-x) + c.$$

Per $x = 0$ il missile sarà diretto orizzontalmente verso il punto $(1, 0)$, per cui $z(0) = 0$, cioè $c = 0$, da cui ricaviamo l'uguaglianza

$$y' + \sqrt{1 + (y')^2} = (1-x)^{-1/v}.$$

Portando y' al membro destro ed elevando al quadrato si ottiene

$$1 + (y')^2 = (y')^2 + (1-x)^{-2/v} - 2y'(1-x)^{-1/v}$$

da cui

$$y' = \frac{(1-x)^{-2/v} - 1}{2(1-x)^{-1/v}} = \frac{1}{2}[(1-x)^{-1/v} - (1-x)^{1/v}].$$

Integrando si ha, se $v \neq 1$,

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{v}{1+v} (1-x)^{1+1/v} + \frac{v}{1-v} (1-x)^{1-1/v} \right] + k$$

e la costante k si ricava dalla condizione iniziale $y(0) = 0$:

$$k = -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{1+v} + \frac{v}{1-v} \right).$$

In definitiva, la traiettoria $y(x)$ del missile è data da

$$y(x) = \frac{v}{2} \left[\frac{(1-x)^{1+1/v} - 1}{1+v} + \frac{(1-x)^{1-1/v} - 1}{1-v} \right]. \quad (\text{A5.8})$$

Se $v > 1$ il punto di impatto tra il missile ed il velivolo sarà quindi

$$P = \left(1, \frac{v}{v^2 - 1} \right);$$

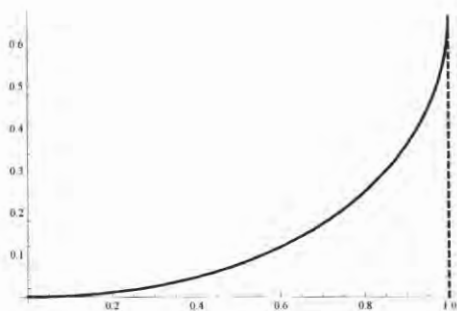
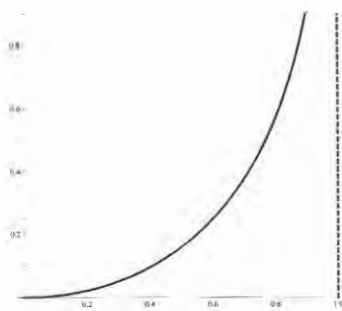
il tempo di impatto T si ricava calcolando il tempo necessario al velivolo per raggiungere il punto P :

$$T = \frac{v}{v^2 - 1}.$$

Se $v < 1$ la traiettoria è sempre data dalla (A5.8), ma ovviamente il missile non raggiunge mai il velivolo. Infine se $v = 1$, invece della (A5.8) si ha

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[-\log(1-x) - x + \frac{x^2}{2} \right]$$

e di nuovo il missile non raggiunge mai il bersaglio. La figura mostra due traiettorie: in a) con $v = 2$ ed in b) con $v = 1$.

Fig. A5.3 : curva di inseguimento con $v = 2$ Fig. A5.4 : curva di inseguimento con $v = 1$

Appendice 5.3 - Oscillazioni di un'altalena

Esaminiamo un problema interessante, quello dell'altalena. Supponiamo di trascurare l'attrito degli attacchi delle corde, e per semplicità usiamo l'approssimazione $\sin y \sim y$ che sarebbe giustificata solo per oscillazioni piccole; se partiamo da fermi, cioè $y(0) = y'(0) = 0$, tutti sanno cosa si deve fare: imprimere una spinta ritmica, sempre con lo stesso periodo, e non un periodo a caso, ma uno che si trova in base alle caratteristiche della singola altalena. Tutti sappiamo anche quel che succede: l'altalena oscilla sempre più, in sincronia con le nostre spinte (ma in ritardo di un quarto di periodo, visto che la spinta è massima quando l'altalena è nella posizione più bassa, che corrisponde a $y = 0$), e l'ampiezza dell'oscillazione aumenta a dismisura (beh, non esageriamo: questo non accade nella realtà, perché se l'angolo di oscillazione è grande l'approssimazione $\sin y \sim y$ non è più corretta).

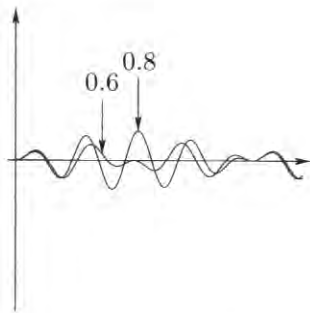
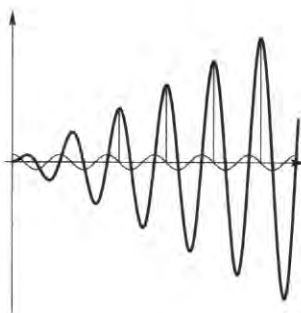
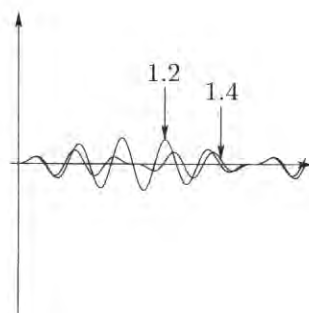
Matematicamente, l'equazione ha la forma $y'' + y = f(t)$, dove f è la nostra spinta; dato che questa è periodica, poniamo $f(t) = \cos(bt)$, con $b > 0$ da determinarsi, così il problema diviene

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(bt) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A5.9})$$

L'equazione caratteristica ha soluzioni $z = \pm i$, quindi conosciamo la soluzione generale (5.41) dell'equazione omogenea, ma ora si presentano due casi: se $b \neq 1$ possiamo cercare una soluzione particolare della forma $h \sin(bt) + k \cos(bt)$ e con facili calcoli ricaviamo la soluzione generale di (A5.9)

$$b \neq 1 \implies y(t) = \frac{1}{1-b^2} (\cos(bt) - \cos t);$$

osserviamo che questa funzione è limitata, perciò l'altalena non oscilla più di tanto, e potremmo vedere (Fig. A5.5 e A5.7) che oscilla in modo assai scomodo, esattamente come accade quando i bambini ancora non sanno “prendere il tempo”.

Fig. A5.5 : qualche $b < 1$ Fig. A5.6 : $b = 1$ e (fine) $\cos t$ Fig. A5.7 : qualche $b > 1$

Nel caso $b = 1$, dato che il numero complesso i è una soluzione dell'equazione caratteristica dobbiamo cercare la soluzione particolare nella forma $ht \sin t + kt \cos t$, e stavolta otteniamo

$$b = 1 \implies y(t) = \frac{1}{2}t \sin t :$$

l'altalena ha dunque l'andatura regolare e con ampiezza illimitata cui tutti miriamo (Fig. A5.6). Si tratta del fenomeno della *risonanza*, di cui si deve tenere grande conto nella progettazione di edifici complessi come grattacieli o ponti: la loro *frequenza di risonanza* non deve coincidere con la frequenza delle forze esterne alle quali possono essere soggetti. Nella Figura A5.6 è anche evidente l'altro fenomeno cui avevamo accennato all'inizio: le oscillazioni dell'altalena sono in ritardo di $\pi/2$ rispetto a quelle della spinta $\cos t$.

Appendice 5.4 - Caduta di un corpo in un campo di gravità

Come applicazione di quanto visto per le equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili, studiamo la caduta di un corpo in un campo di gravità costante e sottoposto alla resistenza dell'aria. Indichiamo con $y(t)$ la posizione del corpo (lungo la verticale, con il verso delle y orientato in basso), con m la sua massa, e con g la gravità. Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ il corpo abbia velocità nulla e che la resistenza dell'aria dipenda dalla velocità $y'(t)$ secondo la legge

$$R = k\phi(y'),$$

dove k è una costante che dipende dalla forma del corpo (coefficiente aerodinamico), mentre ϕ è una funzione che si determina sperimentalmente. Dalle equazioni della meccanica si trova

$$my'' = mg - k\phi(y'),$$

da cui si ricava l'equazione differenziale

$$y'' = g - \frac{k}{m}\phi(y').$$

Posto $y' = v$ si ottiene l'equazione autonoma del primo ordine

$$v' = g - \frac{k}{m}\phi(v)$$

che, in base a quanto visto nella Sezione 5.6 e ricordando che abbiamo supposto $v(0) = 0$, si integra nella forma

$$\int_0^v \frac{ds}{g - (k/m)\phi(s)} = t. \quad (\text{A5.10})$$

A seconda di quale sia la funzione ϕ si ottengono diverse espressioni della velocità del corpo: ad esempio, se $\phi(v) = v$, si ottiene dalla (A5.10)

$$\left[-\frac{m}{k} \log\left(g - \frac{k}{m}s\right) \right]_0^v = t,$$

da cui si ricava

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-tk/m})$$

e pertanto, integrando,

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(s) ds = y(0) + \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-tk/m} \right).$$

È interessante notare che in tal caso la velocità limite di caduta è finita ed è data da

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

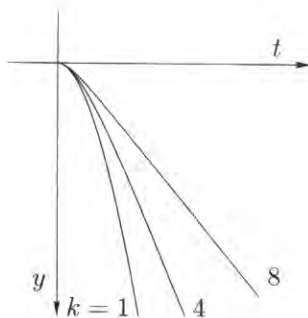


Fig. A5.8: soluzioni per $\phi(v) = v$, con $y(0) = 0$ e diversi valori della resistenza k

Se invece è $\phi(v) = v^2$, sempre dalla (A5.10) si ottiene

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{kg}} \log \left(\frac{\sqrt{mg/k} + s}{\sqrt{mg/k} - s} \right) \right]_0^v = t,$$

da cui si ricava

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k} \frac{e^{2t\sqrt{kg/m}} - 1}{e^{2t\sqrt{kg/m}} + 1}}$$

e (con la sostituzione $e^{2t\sqrt{kg/m}} = s$) si ottiene la legge oraria

$$y(t) = y(0) - \frac{m}{k} \log 2 + \sqrt{\frac{mg}{k}} (\sqrt{m/kg} \log(e^{2t\sqrt{kg/m}} + 1) - t),$$

In tal caso, la velocità limite di caduta è data da

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

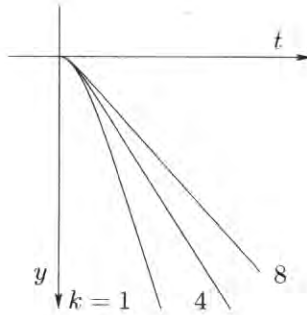


Fig. A5.9 : soluzioni per $\phi(v) = v^2$, con $y(0) = 0$ e diversi valori della resistenza k

In generale si potrebbe dimostrare, per una ϕ continua, crescente, e nulla in 0 , che la velocità limite v_∞ è data da:

- la più piccola soluzione dell'equazione $\phi(s) = mg/k$ se tale equazione ha soluzione;
- $+\infty$ se $\phi(s) < mg/k$ per ogni $s > 0$.

Appendice 5.5 - Traiettorie balistiche

Riprendiamo l'esempio visto nella Sezione 5.4 sul moto di un corpo sottoposto alla forza di gravità ed alla resistenza dell'aria. Vogliamo determinare ora la traiettoria (di solito chiamata *traiettoria balistica*) di un oggetto lanciato dall'origine con velocità v in modulo ed alzo (cioè l'angolo che il vettore velocità iniziale forma con il piano orizzontale) pari a θ . Indichiamo con $\mathbf{X} = (x, y)$ il vettore posizione e supponiamo per semplicità che la resistenza dell'aria sia data da $k\mathbf{X}'$ con il coefficiente aerodinamico k che dipende dalla forma del corpo. Per le leggi della Meccanica la traiettoria $\mathbf{X}(t)$ sarà allora la soluzione del sistema differenziale

$$m\mathbf{X}''(t) = -k\mathbf{X}'(t) + (0, -mg), \quad \mathbf{X}(0) = (0, 0), \quad \mathbf{X}'(0) = (v \cos \theta, v \sin \theta).$$

Scrivendolo nelle sue componenti (x, y) il sistema diventa

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{k}{m}x'(t), & x(0) = 0, & x'(0) = v \cos \theta \\ y''(t) = -\frac{k}{m}y'(t) - g, & y(0) = 0, & y'(0) = v \sin \theta. \end{cases}$$

Si tratta quindi di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Applicando quanto visto nella Sezione 5.7 e posto $c = m/k$ si trovano allora le soluzioni

$$\begin{cases} x(t) = cv \cos \theta (1 - e^{-t/c}) \\ y(t) = (cv \sin \theta + gc^2)(1 - e^{-t/c}) - gct, \end{cases}$$

che costituiscono la legge oraria della traiettoria. Per trovarne un'espressione cartesiana ricaviamo t dalla prima uguaglianza; si ha

$$t = -c \log \left(1 - \frac{x}{cv \cos \theta} \right)$$

e sostituendo nella seconda uguaglianza si trova l'equazione

$$y = x \tan \theta + \frac{gm}{k} \left[\frac{x}{v \cos \theta} + \frac{m}{k} \log \left(1 - \frac{kx}{mv \cos \theta} \right) \right]. \quad (\text{A5.11})$$

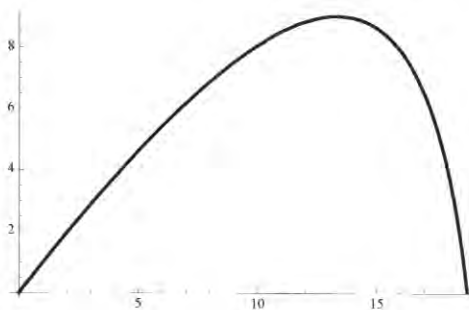


Fig. A5.10 : una traiettoria con resistenza dell'aria e angolo iniziale $\theta = \pi/4$

Quindi, se $k > 0$ le traiettorie non sono più paraboliche ma della forma rappresentata in figura, dove si è usato un coefficiente k di resistenza piuttosto grande. Va notato che la gittata massima non si ottiene più per $\theta = \pi/4$ ma per angoli più piccoli, dipendenti dai dati del problema. Se invece il coefficiente aerodinamico k è molto piccolo si ottiene, mediante lo sviluppo di Taylor dell'espressione in (A5.11) in un intorno di $k = 0$ (fatelo per esercizio), l'usuale traiettoria parabolica

$$y = x \tan \theta - \frac{g(1 + \tan^2 \theta)}{2v^2} x^2 .$$

Appendice 5.6 - Periodo di un pendolo

Vogliamo studiare come dipende il **periodo** di un pendolo, cioè il tempo impiegato dal pendolo per andare da un estremo all'altro e ritornare nell'estremo iniziale, dall'ampiezza dell'oscillazione. Consideriamo un pendolo senza attrito e indichiamo con L la lunghezza del filo, con $\alpha(t)$ l'angolo (orientato) che il filo fa con la verticale al tempo t , con $\theta \in]0, \pi/2[$ l'angolo iniziale.

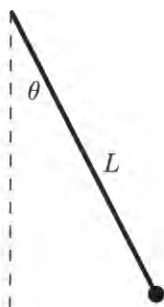


Fig. A5.11 : Il pendolo nella posizione iniziale

Dalle equazioni della Meccanica si trova facilmente che $\alpha(t)$ verifica il problema di Cauchy

$$L\alpha'' = -g \sin \alpha, \quad \alpha(0) = \theta, \quad \alpha'(0) = 0 .$$

Moltiplicando per $2\alpha'$ ambo i membri dell'equazione differenziale si ha

$$L((\alpha')^2)' = 2g(\cos \alpha)' ,$$

da cui si ricava

$$L(\alpha')^2 = 2g(\cos \alpha) + c$$

con c costante. Imponendo le condizioni iniziali si trova $c = -2g \cos \theta$ e quindi

$$L(\alpha')^2 = 2g(\cos \alpha - \cos \theta) .$$

Nel tempo fra 0 e $T/4$ il pendolo scende, quindi $\alpha' < 0$ e in particolare

$$\alpha' = -\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos \alpha - \cos \theta)} .$$

Dato che $\alpha' < 0$, la funzione $t \mapsto \alpha(t)$ è invertibile fra $[0, T/4]$ e $[0, \theta]$. Chiamiamo $\beta(s)$ l'inversa di $\alpha(t)$ fra questi intervalli: abbiamo

$$\alpha(0) = \theta, \quad \alpha(T/4) = 0 \quad \implies \quad \beta(0) = T/4, \quad \beta(\theta) = 0$$

e \square Proposizione 1.41

$$\beta'(s) = \frac{1}{\alpha'(\beta(s))} .$$

Allora ricordando che $\alpha(\beta(s)) = s$

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_0^{T/4} 1 \, dt \stackrel{t=\beta(s)}{=} \int_\theta^0 \frac{1}{\alpha'(\beta(s))} \, ds = \left(\frac{2L}{g}\right)^{1/2} \int_0^\theta \frac{1}{(\cos s - \cos \theta)^{1/2}} \, ds \\ &\stackrel{s=\theta u}{=} \left(\frac{2L}{g}\right)^{1/2} \int_0^1 \theta (\cos(\theta u) - \cos \theta)^{-1/2} \, du . \end{aligned}$$

Per θ piccolo lo sviluppo di Taylor (rispetto alla variabile θ !) di $\theta(\cos(\theta u) - \cos \theta)^{-1/2}$ è

$$\theta(\cos(\theta u) - \cos \theta)^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}} \left(1 + \frac{\theta^2}{24}(1+u^2) + O(\theta^4)\right)$$

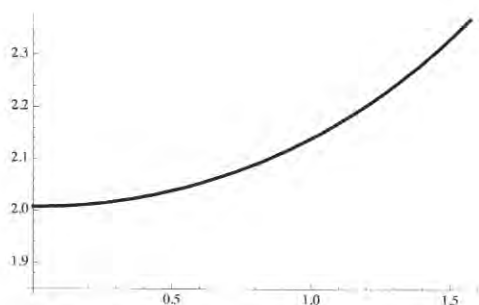
da cui si ricava l'espressione

$$T(\theta) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + O(\theta^4)\right) ,$$

il cui termine di ordine zero è il ben noto periodo del pendolo per piccole oscillazioni

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

La figura mostra il grafico del vero periodo $T(\theta)$, calcolato numericamente.

Fig. A5.12 : grafico del periodo $T(\theta)$ per $0 \leq \theta \leq \pi/2$

Appendice 5.7 - Oscillazioni smorzate

Vediamo ora un'applicazione che ha a che fare con gli ammortizzatori. Supponiamo di avere un oscillatore armonico, in altri termini un punto materiale di massa $m > 0$ collegato ad una molla con coefficiente elastico $k > 0$; la posizione $y(t)$ del punto è quindi determinata dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$my''(t) + ky(t) = 0 \quad (\text{A5.12})$$

con le condizioni che impongono posizione e velocità iniziali. Abbiamo visto (5.42) che la soluzione generale dell'equazione (A5.12) è data da

$$y(t) = c_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + c_2 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

dove le costanti c_1 e c_2 si trovano mediante le condizioni iniziali. Ad esempio, se il punto materiale si trova nella posizione iniziale y_0 con velocità iniziale nulla, si ricavano le costanti $c_1 = y_0$ e $c_2 = 0$ che forniscono la soluzione

$$y(t) = y_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Vogliamo ora smorzare le oscillazioni introducendo un ammortizzatore viscoso, che agisce sull'equazione (A5.12) mediante un termine aggiuntivo $hy'(t)$ con $h > 0$; l'equazione diventa quindi

$$my''(t) + hy'(t) + ky(t) = 0. \quad (\text{A5.13})$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione (A5.13) è

$$P(z) = mz^2 + hz + k$$

e le sue radici sono

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}(-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}) & \text{se } h^2 > 4mk \\ -\frac{1}{2m}h & \text{se } h^2 = 4mk \\ \frac{1}{2m}(-h \pm i\sqrt{4mk - h^2}) & \text{se } h^2 < 4mk, \end{cases}$$

entrambe negative o con parti reali negative. Lo scopo è determinare h in modo da avere il massimo smorzamento, ovvero fare in modo che l'ampiezza della soluzione diventi piccola il più rapidamente possibile. Si potrebbe ingenuamente pensare che quanto più potente è l'ammortizzatore viscoso tanto più le oscillazioni sono smorzate; vedremo che non è così a causa del fenomeno di *sovrasmorzamento*. Lo smorzamento è dovuto alle esponenziali negative nelle soluzioni fondamentali, a loro volta dovute alle radici reali negative o con parti reali negative. Delle due soluzioni fondamentali trascuriamo quella che si smorza più rapidamente, cioè quella relativa alla radice più negativa; lo smorzamento effettivo è quindi dovuto alla quantità

$$\begin{cases} s(h) = \frac{1}{2m}(-h + \sqrt{h^2 - 4mk}) & \text{se } h > 2\sqrt{mk} \\ s(h) = -\frac{1}{2m}h & \text{se } h = 2\sqrt{mk} \\ s(h) = -\frac{1}{2m}h & \text{se } h < 2\sqrt{mk}, \end{cases}$$

e vogliamo scegliere h in modo che $s(h)$ sia il più negativo possibile. Una breve analisi della funzione $h \mapsto s(h)$ ci fa concludere che lo smorzamento massimo si ha per $h = 2\sqrt{mk}$.

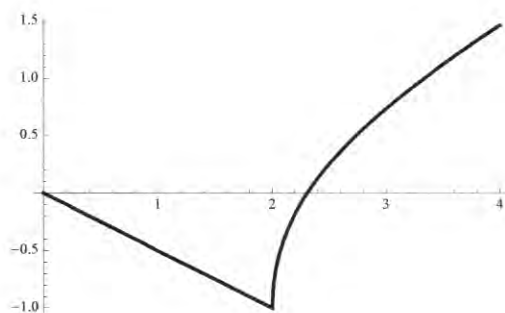


Fig. A5.13 : grafico della funzione $s(h)$ con $m = k = 1$

In tal caso, ad esempio partendo da y_0 con velocità iniziale nulla, si ha la legge oraria

$$y(t) = y_0(1 + t\sqrt{k/m})e^{-t\sqrt{k/m}}.$$

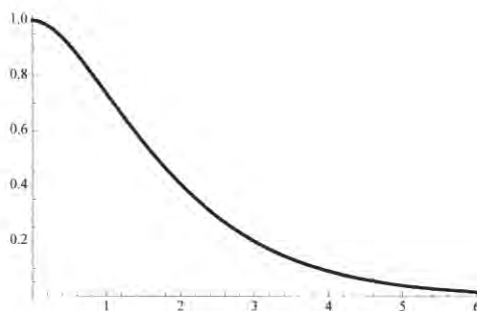


Fig. A5.14 : grafico di $y(t)$ nella situazione di massimo smorzamento

Appendice 5.8 - Dinamica di popolazioni

L'esempio seguente tratta la dinamica di due popolazioni in competizione ed il modello matematico corrispondente fa uso di un sistema differenziale. Consideriamo un certo territorio, su cui convivono dei bufali e dei leoni; abbiamo le seguenti relazioni euristiche:

- 1) il territorio fornisce erba e piante solo per al più un certo numero k di bufali;
- 2) i bufali tendono a crescere di numero finché sono meno di k , se no tendono a diminuire a causa della mancanza di risorse alimentari;
- 3) ogni leone mangia dei bufali;
- 4) dai leoni nascono altri leoni;
- 5) se i bufali sono particolarmente più numerosi dei leoni, le cucciolate di questi ultimi saranno più abbondanti.

Dette u e v le popolazioni di bufali e leoni, da queste relazioni segue che l'evoluzione di u e v è regolata da due equazioni differenziali, per opportuni coefficienti positivi a, b, c, d :

$$\begin{cases} u' = a(k - u) - bv \\ v' = c(u - v) + dv \end{cases}$$

per vedere cosa accade, scegliamo dei coefficienti e un numero k , e risolviamo il sistema. Prendiamo ad esempio

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = c = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

e poniamo $K = (k\sqrt{3})/4$, così il sistema diviene

$$\begin{cases} u' = -\frac{u}{2} - \frac{v\sqrt{3}}{2} + \frac{2K}{\sqrt{3}} \\ v' = \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{v}{2} \end{cases} \quad (\text{A5.14})$$

Con il metodo indicato alla fine della Sezione 5.7 otteniamo per i leoni l'equazione del secondo ordine

$$v'' + v' + v = K : \quad (\text{A5.15})$$

una soluzione particolare è $\bar{v}(t) = K$, e dall'equazione caratteristica $z^2 + z + 1 = 0$, che ha radici $-(1/2) \pm i\sqrt{3}/2$, ricaviamo che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata a (A5.15) è

$$e^{-t/2}(c_1 \cos(t\sqrt{3}/2) + c_2 \sin(t\sqrt{3}/2))$$

e pertanto la soluzione generale di (A5.15) è

$$v(t) = K + e^{-t/2}(c_1 \cos(t\sqrt{3}/2) + c_2 \sin(t\sqrt{3}/2)) . \quad (\text{A5.16})$$

Possiamo allora ricavare v' e sostituire nella seconda equazione di (A5.14), ricavando per i bufali l'espressione

$$u(t) = \frac{K}{\sqrt{3}} + e^{-t/2}(c_2 \cos(t\sqrt{3}/2) - c_1 \sin(t\sqrt{3}/2)) : \quad (\text{A5.17})$$

da questo si vede che per $t \rightarrow +\infty$ le funzioni $u(t)$ e $v(t)$ tendono rispettivamente a $K/\sqrt{3}$ e K , cioè le popolazioni si stabilizzano. Non avendo precisato i dati iniziali, non possiamo però fare questa affermazione, visto che le popolazioni non sono come le funzioni, che se vogliono vanno e vengono sopra e sotto zero: appena una popolazione raggiunge il valore zero, lì rimane per sempre. Se ad esempio $u(0) = K/\sqrt{3}$, esaminiamo due casi:

1) se $v(0) = K/2$ allora (cfr. figura A5.15)

$$u(t) = K\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}e^{-t/2}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right), \quad v(t) = K\left(1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right);$$

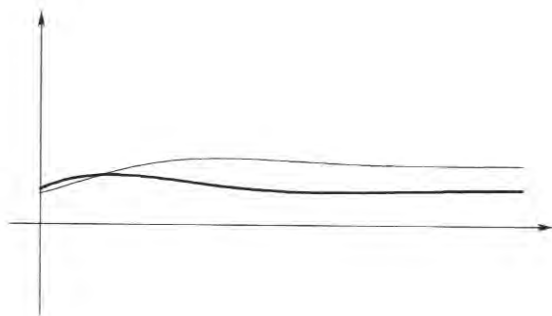


Fig. A5.15 : caso $v(0) = K/2$, in nero i bufali

2) se $v(0) = 3K$ allora per un certo tempo (cfr figura A5.16)

$$u(t) = K \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2e^{-t/2} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right), \quad v(t) = K \left(1 + 2e^{-t/2} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} \right).$$

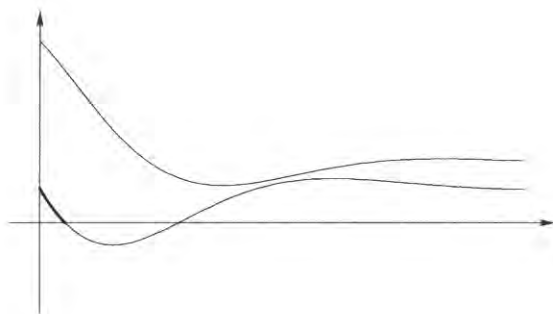


Fig. A5.16 : caso $v(0) = 3K$, a tratto più spesso i bufali

Come si vede in figura, nel primo caso le due popolazioni non si annullano mai, mentre nel secondo i bufali si estinguono rapidamente (dopo quel punto, chiaramente, l'evoluzione dei leoni segue ben altra legge: trovatela per esercizio).

Appendice 5.9 - Soluzioni particolari di equazioni di ordine superiore al secondo

Vediamo come si può ottenere una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ per poter completare il Passo 4 della Sezione 5.8. Come abbiamo già visto nella Sezione 5.7 per il caso $m = 2$, la situazione più semplice si ha quando il termine noto $f(x)$ è del tipo

$$f(x) = \Re(Q(x)e^{\gamma x}) = Q(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad (\text{A5.18})$$

oppure

$$f(x) = \Im(Q(x)e^{\gamma x}) = Q(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (\text{A5.19})$$

con $Q(x)$ polinomio reale di grado q e $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Osserviamo che α e/o β possono essere nulli, e magari $Q(x)$ costante, quindi il caso indicato comprende polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche. Nel caso (A5.18) cercheremo $\bar{y}(x)$ della forma

$$\bar{y}(x) = \Re(R(x)e^{\gamma x})$$

mentre nel caso (A5.19)

$$f(x) = \Im(R(x)e^{\gamma x})$$

dove γ è lo stesso di prima, mentre $R(x)$ è un polinomio complesso da determinare. La prima cosa da fare è vedere se c'è *risonanza*, cioè se il numero complesso γ è radice del polinomio caratteristico P ; indichiamo con p la molteplicità di γ come radice di P , intendendo che $p = 0$ se γ non è radice di P . Cercheremo allora il polinomio $R(x)$ di grado $q + p$, considerando inoltre nulli tutti i suoi termini di grado minore di p . Imponendo che la funzione $\bar{y}(x)$ risolva l'equazione differenziale (5.55) e sviluppando un po' di calcoli, si arriva ad individuare il polinomio $R(x)$ mediante la formula

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{P^{(k)}(\gamma)}{k!} R^{(k)}(x) = Q(x), \quad (\text{A5.20})$$

dove $P^{(k)}$ ed $R^{(k)}$ indicano le derivate di P e di R rispettivamente. Naturalmente, essendo P di grado m , nella sommatoria (A5.20) tutti i termini con $k > m$ sono nulli.

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$$

di cui vogliamo determinare la soluzione generale. Il polinomio caratteristico è

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$$

che si fattorizza in $(z - 1)(z^2 - 2z + 2)$, per cui le tre radici complesse di P sono

$$z = 1, \quad z = 1 + i, \quad z = 1 - i.$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x.$$

Il termine noto $f(x)$ si scrive come $\Im(Q(x)e^{\gamma x})$ con $Q(x) = x$ e $\gamma = 1 + i$; c'è dunque risonanza con $p = 1$ in quanto γ è una delle radici di P , per cui dovremo cercare il polinomio R di grado 2, cioè

$$R(x) = ax^2 + bx \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}.$$

Si ha

$$P'(z) = 3z^2 - 6z + 4, \quad P''(z) = 6z - 6$$

per cui si trova

$$P'(\gamma) = 3(1 + i)^2 - 6(1 + i) + 4 = -2, \quad P''(\gamma) = 6(1 + i) - 6 = 6i.$$

La formula (A5.20) diventa

$$-2(2ax + b) + 3i(2a) = x$$

da cui si ricava

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{4}i,$$

e quindi

$$\bar{y}(x) = \Im \left(-\frac{1}{4}(x^2 + 3ix)e^{(1+i)x} \right) = -\frac{1}{4}e^x(x^2 \sin x + 3x \cos x).$$

In definitiva, la soluzione generale dell'equazione considerata è

$$y(x) = e^x \left(c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \frac{1}{4}(x^2 \sin x + 3x \cos x) \right).$$

Resta da esaminare il caso in cui il termine noto $f(x)$ non è del tipo $Q(x)e^{\gamma x}$. In tali situazioni si usa il metodo della variazione delle costanti, detto anche *metodo di Lagrange*, che consente di determinare una soluzione particolare di equazioni del tipo (5.55) qualunque sia la funzione continua $f(x)$ che costituisce il termine noto. Se $y_1(x), \dots, y_m(x)$ sono le soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea si cercano soluzioni particolari del tipo

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^m c_j(x) y_j(x) \quad (\text{A5.21})$$

con i coefficienti $c_j(x)$ da determinare, da cui il nome di *metodo della variazione delle costanti*. A questo punto si introduce la *matrice wronskiana* $W(x)$ costruita mediante le soluzioni fondamentali nel modo seguente:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice $m \times m$ con i coefficienti dipendenti dalla variabile x ; siccome le soluzioni fondamentali sono linearmente indipendenti, la matrice $W(x)$ è invertibile, per cui $\det W(x) \neq 0$. Conviene anche indicare con $\mathbf{c}(x)$ il vettore

$$\mathbf{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_m(x))$$

e con $\mathbf{B}(x)$ il vettore ¹

$$\mathbf{B}(x) = (0, 0, \dots, f(x)).$$

Imponendo che la soluzione particolare (A5.21) verifichi l'equazione differenziale (5.55) si giunge, dopo alcune manipolazioni e semplificazioni, all'uguaglianza

$$W(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{B}(x).$$

Moltiplicando per la matrice inversa $W^{-1}(x)$ si ottiene

$$c'(x) = W^{-1}(x)B(x)$$

e dunque, integrando, otteniamo

$$c(x) = \int W^{-1}(x)B(x) dx$$

che ci fornisce le espressioni delle funzioni $c_j(x)$ mediante la regola di Cramer per i sistemi lineari:

$$c_j(x) = \int \frac{\det W_j(x)}{\det W(x)} dx$$

dove $W_j(x)$ è la matrice che si ottiene da $W(x)$ sostituendo la j -esima colonna con il vettore $B(x)$. Va segnalato che in generale il calcolo di un determinante è piuttosto laborioso se la dimensione m è alta.

Appendice 5.10 - Catene e bolle di sapone

Di nuovo un titolo con due protagonisti apparentemente lontani; Galileo (non fu certo il primo) si pose il seguente problema: qual è la forma assunta da una catena pesante, le cui estremità siano appese a due pali. La soluzione richiede impostare l'equazione delle forze (la tensione e il peso), e porta a una equazione differenziale. Precisamente, supponiamo che i due pali siano distanti $2a$, alti h e che la catena sia lunga 2ℓ (ci aspettiamo che ℓ non sia troppo grande, altrimenti la catena si appoggerà per terra). Matematicamente, cerchiamo una curva ϕ di lunghezza 2ℓ , contenuta nel semipiano $y > 0$ e che parta da $(-a, h)$ per arrivare ad (a, h) . Con considerazioni fisiche che tralasciamo, parametrizzando la curva con $(x, y(x))$ si arriva all'equazione differenziale

$$y'' = \frac{1}{c} \sqrt{1 + (y')^2}$$

dove la costante c è da determinarsi. Si tratta di una equazione del secondo ordine in forma normale, quindi vale il teorema di esistenza, però è un'equazione non lineare, dunque non possiamo applicare la relativa teoria. Osserviamo che nell'equazione non compaiono esplicitamente né x (dunque si tratta di una equazione autonoma) né y . In questi casi, in generale, ponendo $y' = v$ ci si riporta a un'equazione a variabili separabili: nella nostra situazione, diviene

$$v' = \frac{1}{c} \sqrt{1 + v^2} \iff \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} v' = \frac{1}{c}.$$

Sostituendo $v(x) = \sinh u(x)$ abbiamo

$$v'(x) = (\cosh u(x))u'(x), \quad \sqrt{1+v^2(x)} = \cosh u(x)$$

e quindi l'equazione si riscrive semplicemente

$$u'(x) = \frac{1}{c} \iff u(x) = k_1 + \frac{x}{c}$$

e perciò

$$y'(x) = v(x) = \sinh(k_1 + x/c) \Rightarrow y(x) = k_2 + c \cosh(k_1 + x/c) : \quad (\text{A5.22})$$

la catena assume dunque la forma di una catenaria (che da questa proprietà deriva il suo nome). Per le condizioni iniziali deve essere $k_1 = 0$, dato che $y(a) = y(-a)$; inoltre ricordando (2.21) e lavorando come in (2.22) deve essere

$$2\ell = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2(x/c)} dx = \int_{-a}^a \cosh(x/c) dx = 2c \sinh(a/c)$$

da cui

$$\frac{a}{c} = \text{sech} \sinh(\ell/c) = \log\left(\frac{\ell}{c} + \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{c^2}}\right).$$

Evidentemente ricavare c da questa equazione va demandato a una macchina. Determinato c , torniamo a (A5.22): dalle condizioni iniziali ricaviamo (notando che $\sinh(a/c) = \ell/c$)

$$y(-a) = y(a) = h \Rightarrow k_2 = h - c \cosh \frac{a}{c} = h - \sqrt{\ell^2 + c^2}$$

e infine

$$y(x) = h - \sqrt{\ell^2 + c^2} + c \cosh(x/c).$$

Peccato (o forse fortuna) che rimanga un'ultima condizione da verificare, la positività di y . Nel punto più basso, che è in corrispondenza di $x = 0$, abbiamo

$$y_{\min} = h - \sqrt{\ell^2 + c^2} + c = h - (\sqrt{\ell^2 + c^2} - c) :$$

il termine fra parentesi è negativo, dunque se h (l'altezza dei pali) è troppo piccolo la soluzione non è accettabile (la catena, come avevamo detto, striscia per terra).

Il legame con le bolle di sapone richiede più sforzo. Ci proponiamo un obiettivo ambizioso (che raggiungeremo solo lasciando indietro parecchi punti delicati), ovvero determinare **la forma della più piccola superficie di rotazione** che ha come bordo due cerchi. Possiamo trovare una soluzione concreta usando del filo metallico e una soluzione saponosa: infatti è noto che le bolle di sapone tendono a minimizzare la superficie. Creiamo dunque due anelli uguali di filo, e immergiamoli uniti nel sapone; quando li estraiano, buchiamo la bolla al centro, e poi separiamoli: vedremo distendersi fra i due anelli una superficie, che è quella di area minima fra tutte quelle che hanno come bordo i due anelli. Sembra una superficie di rotazione, e la sua sezione pare vagamente parabolica.

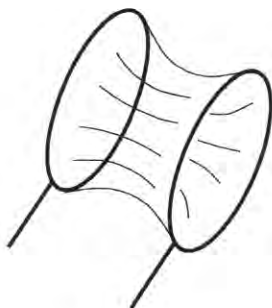


Fig. A5.17 : la bolla fra due anelli

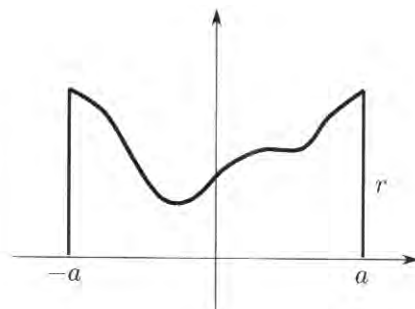


Fig. A5.18 : modello matematico

Matematizziamo il problema: intanto non cerchiamo di determinare “la” superficie di area minima fra tutte quelle che hanno come bordo i due anelli ma quella di area minima fra le sole superfici di rotazione. Poi, e questo punto è veramente delicato ma insuperabile con gli strumenti di Analisi matematica 2, supponiamo che tale superficie minima *esista* (e già che ci siamo, che ce ne sia *una sola* e che sia *molto regolare*), e proponiamoci di determinarla. Dunque dobbiamo trovare la funzione positiva f , di classe $C^2[-a, a]$ e tale che $f(-a) = f(a) = r$, che rende minima l’area della superficie di rotazione generata (un candidato, non certo il migliore, è la funzione f il cui grafico è rappresentato nella Figura A5.18); ricordiamo che per (4.42) quest’area è data da

$$A(f) = 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Inizialmente supporremo che r sia abbastanza grande rispetto ad a , ossia che il raggio degli anelli sia abbastanza grande rispetto alla loro distanza. Dire che f minimizza A vuol dire che, se modifichiamo f un pochino ma preservando la positività e la condizione che agli estremi il valore rimanga r , il valore di A aumenta. Ciò significa che presa una qualsiasi funzione $\phi \in C^1[-a, a]$ con $\phi(-a) = \phi(a) = 0$, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo (in modo che la funzione $f(x) + \varepsilon\phi(x)$ rimanga positiva su tutto l’intervallo) deve essere

$$A(f + \varepsilon\phi) \geq A(f).$$

Ma allora, posto

$$G(t) = A(f + t\phi)/2\pi,$$

la funzione G ha un minimo in $t = 0$, e se sapessimo che G è derivabile ne dedurremmo che $G'(0) = 0$. Osserviamo che

$$G(t) = \int_{-a}^a (f(x) + t\phi(x)) \sqrt{1 + (f'(x) + t\phi'(x))^2} dx = \int_{-a}^a g(t, x) dx$$

e che

$$\partial_t g(x, t) = \phi(x) \sqrt{1 + (f'(x) + t\phi'(x))^2} + (f(x) + t\phi(x)) \frac{(f'(x) + t\phi'(x))\phi'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x) + t\phi'(x))^2}},$$

che nelle ipotesi fatte è una (complicata) funzione continua. Allora grazie al Teorema di derivazione sotto il segno di integrale 3.10 la funzione G è derivabile e

$$G'(t) = \int_{-a}^a \partial_t g(x, t) dx$$

quindi

$$G'(0) = \int_{-a}^a \partial_t g(x, 0) dx = \int_{-a}^a \left(\phi(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} + \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \phi'(x) \right) dx.$$

Integriamo per parti il secondo addendo: ricordando che agli estremi la funzione ϕ si annulla,

$$\int_{-a}^a \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \phi'(x) dx = - \int_{-a}^a \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' \phi(x) dx$$

e quindi

$$G'(0) = \int_{-a}^a \left[\sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' \right] \phi(x) dx = \int_{-a}^a \mathcal{L}_f(x) \phi(x) dx.$$

Abbiamo detto che $G'(0) = 0$, quindi la quantità che abbiamo trovato deve essere nulla per ogni scelta della funzione ϕ . L'espressione

$$\mathcal{L}_f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)',$$

per quanto complicata, è una funzione continua di x . Se ci fosse un punto $x_0 \in]-a, a[$ in cui $\mathcal{L}_f(x_0)$ non vale zero (per fissare le idee, supponiamo sia positiva), per il Teorema di permanenza del segno \blacksquare Proposizione 1.35 avremmo

$$\mathcal{L}_f(x) > 0 \quad \text{in } [x_0 - b, x_0 + b] \subset]-a, a[$$

ma allora, presa una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^1 che si annulla fuori da $[x_0 - b, x_0 + b]$ ed è positiva in tutto $]x_0 - b, x_0 + b[$, come ad esempio

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x - x_0| \geq b \\ b^2 - (x - x_0)^2 & \text{se } |x - x_0| \leq b, \end{cases}$$

la funzione $\mathcal{L}_f(x)\phi(x)$ è positiva in $]x_0 - b, x_0 + b[$ e nulla all'esterno, quindi ha integrale positivo il che è impossibile dato che $G'(0)$ deve essere nulla. In conclusione $\mathcal{L}_f(x)$ deve essere identicamente nulla, ossia la funzione f deve risolvere l'equazione $\mathcal{L}_f(x) \equiv 0$, che è l'equazione differenziale

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' = 0.$$

Abbiamo supposto che la soluzione f esistesse e che fosse unica, quindi ci basta trovare una funzione che risolva l'equazione differenziale con le condizioni

$$f(-a) = f(a) = r, \quad f \in \mathcal{C}^2[-a, a], \quad f(x) > 0 \text{ in } [-a, a].$$

Ricordando che

$$D \cosh x = \sinh x, \quad 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x,$$

si vede facilmente che la funzione $\cosh x$ risolve l'equazione differenziale, come pure tutte le funzioni

$$f_\alpha(x) = \alpha \cosh(x/\alpha).$$

Queste sono positive e derivabili infinite volte, ma il problema è la condizione al bordo: essendo funzioni pari, basta controllarla per $x = a$, dove vogliamo che

$$f_\alpha(a) = r \iff \alpha \cosh(a/\alpha) = r \iff \cosh \frac{a}{\alpha} = \frac{r}{\alpha} = \frac{r}{a} \frac{a}{\alpha}.$$

Dobbiamo dunque risolvere l'equazione $\cosh z = (r/a)z$ e poi troveremo $\alpha = a/z$: ma l'equazione $\cosh z = mz$ è risolubile solo se m è abbastanza grande (maggiore di $m_0 \simeq 1.51$), dunque deve essere $r/a \geq m_0$.

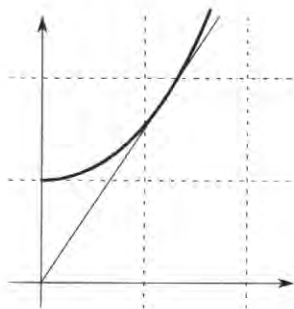


Fig. A5.19: per $m < m_0 \simeq 1.51$ si ha $\cosh x > mx$ per ogni x

Questa condizione fisicamente significa che gli anelli devono essere abbastanza vicini rispetto al loro raggio. In effetti quando gli anelli sono troppo lontani la superficie minima è formata dai due dischi piatti che chiudono gli anelli. Abbiamo (quasi) dimostrato che la superficie minima cercata è quella generata dalla rotazione di una catenaria (la superficie si chiama catenoide).

Appendice 5.11 - Qualche equazione alle derivate parziali

Le equazioni alle derivate parziali sono espressioni contenenti una funzione incognita dipendente da **più variabili** insieme alle sue derivate, come ad esempio

$$f_{xx}(x, y) = 2f(x, y) - f_y(x, y), \quad \partial_t f(x, t) = \partial_x f(x, t), \quad \operatorname{div} f = g.$$

Per queste non esiste una teoria “semplice” come quella vista in questo capitolo, e ne vediamo qui solo qualche esempio, rimandando altri esempi a più avanti (→ appendice 7.3).

Esempio : avevamo incontrato l'operatore divergenza, (A3.7). Proviamo a risolvere in \mathbb{R}^2 l'equazione alle derivate parziali

$$\operatorname{div} f = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) = 1.$$

Come nell'Appendice 3.5, con il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(t - s) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(t + s) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ s = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \end{cases} \quad (\text{A5.23})$$

e ponendo

$$g(t, s) = f(x(t, s), y(t, s)) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x, y) = g(t(x, y), s(x, y))$$

l'equazione si riscrive

$$\sqrt{2} \partial_t g(t, s) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_t g(t, s) = 1/\sqrt{2}.$$

Dunque per ogni fissato s la funzione della sola variabile t

$$t \mapsto g(t, s)$$

ha derivata $1/\sqrt{2}$, pertanto è uguale a $t/\sqrt{2}$ più una costante. Questa costante può dipendere da s , dunque abbiamo

$$g(t, s) = c(s) + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

per qualsiasi funzione c . Tornando alle variabili (x, y) abbiamo

$$f(x, y) = g(t(x, y), s(x, y)) = c(s(x, y)) + \frac{1}{\sqrt{2}}t(x, y) = c\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x+y}{2}.$$

Dato che vogliamo che f abbia derivate parziali serve che c sia derivabile; inoltre, sostituendo $c(s)$ con $c(s\sqrt{2})$ che è generica tanto quanto c , possiamo scrivere la soluzione generale dell'equazione di partenza come

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2} + c(y-x)$$

con c derivabile qualsiasi. Per determinare una soluzione speciale, non basta dare il dato in un punto solo: imponendo ad esempio $f(2, 8) = 3$ otterremmo che

$$3 = f(2, 8) = \frac{2+8}{2} + c(8-2) = 5 + c(6) \implies c(6) = -2$$

e conosciamo c in un punto solo. Dunque per determinare c ci serve conoscerne *tutti* i valori, il che significa imporre il valore di f in un insieme che ci dia tutti i valori di c . Se prendiamo una curva ϕ lungo la quale la funzione $y - x$ assuma una ed una sola volta ogni valore reale, e imponiamo il valore di f su tutta la curva ϕ , il gioco è fatto: ad esempio imponiamo i valori di f sull'asse y scegliendo (ad esempio) che su di esso f coincida con e^y . Ciò significa porre

$$\phi(u) = (0, u), \quad f(0, u) = e^u$$

e da qui deduciamo

$$\begin{aligned} e^u = f(0, u) &= \frac{0+u}{2} + c(u-0) \implies c(u) = e^u - \frac{u}{2} \\ &\implies f(x, y) = \frac{x+y}{2} + e^{y-x} - \frac{y-x}{2} = x + e^{y-x}. \end{aligned}$$

Esempio : risolviamo l'equazione delle onde

$$f_{xx} = f_{yy}.$$

Cerchiamo una soluzione \mathcal{C}^2 : col cambiamento di variabili (A5.23) otteniamo (svolgete i calcoli per esercizio e ricordate il teorema di Schwarz)

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \left[\frac{1}{2}g_{tt} + \frac{1}{2}g_{ss} - g_{ts} \right] (t(x, y), s(x, y)) \\ f_{yy}(x, y) &= \left[\frac{1}{2}g_{tt} + \frac{1}{2}g_{ss} + g_{ts} \right] (t(x, y), s(x, y)) \end{aligned}$$

e quindi

$$f_{xx} = f_{yy} \iff g_{ts} = 0.$$

Allora

$$0 = g_{ts} = \partial_t(\partial_s g) \implies \partial_s g = c(s)$$

e chiamando c_1 una primitiva di c

$$\implies g(t, s) = c_1(s) + c_2(t)$$

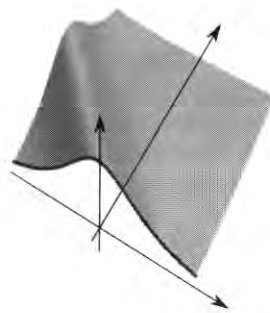
con c_1 e c_2 funzioni qualunque (che come nell'esempio precedente dovranno essere di classe \mathcal{C}^2). Tornando alle variabili (x, y) e sostituendo $c_1(s)$ e $c_2(t)$ con le altrettanto generiche $c_1(s\sqrt{2})$ e $c_2(t\sqrt{2})$ vediamo che tutte le soluzioni dell'equazione delle onde sono della forma

$$f(x, y) = c_1(y - x) + c_2(x + y).$$

Cosa c'entrano le onde? Cambiamo nome alle variabili usate, precisamente scriviamo t al posto di x e x al posto di y (non c'entra nulla con il cambiamento di variabili usato) e riscriviamo il risultato:

$$f_{tt} = f_{xx} \quad \Longleftrightarrow \quad f(t, x) = c_1(x - t) + c_2(x + t).$$

Se consideriamo una corda molto tesa che vibra per il solo effetto della tensione (e del fatto che qualcuno l'aveva pizzicata), lo spostamento f dalla posizione di equilibrio (zero) di un punto x all'istante t è determinata da una equazione differenziale che si può semplificare in $f_{tt} = f_{xx}$. E vediamo come sono fatti i grafici delle due funzioni $c(x - t)$ e $c(x + t)$ per una funzione c che usiamo come esempio, come può essere $c(y) = 1/(1 + y^2)$:

Fig. A5.20 : il grafico di $c(x - t)$ Fig. A5.21 : il grafico di $c(x + t)$

Come vedete sembra il movimento di due onde: allora f è la somma (o sovrapposizione) di due movimenti ondulatori.

Esempio : un problema più difficile è trovare qualche soluzione dell'equazione di Laplace (⇒ appendice 3.5)

$$\Delta f = 0.$$

Abbiamo visto (A3.8) che in coordinate polari, cioè ponendo

$$g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)),$$

si ha

$$(\Delta f)(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r g(r, \theta)) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 g(r, \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

dunque l'equazione di Laplace si trasforma in

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0.$$

Sfortunatamente, a differenza dei due esempi precedenti, questa è ancora una equazione alle derivate parziali e non si presta ad essere ridotta a una equazione ordinaria. Dunque ne cerchiamo un tipo speciale di soluzioni, quelle *radiali*, ossia tali che $g(r, \theta)$ dipende solo da r e non da θ . In tal caso l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} = 0$$

cioè

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r g(r)) = 0 \implies r \partial_r g(r) = c_1 \implies g(r) = \int \frac{c_1}{r} dr = c_1 \log r + c_2.$$

Allora le soluzioni radiali dell'equazione di Laplace sono quelle della forma

$$f(x, y) = c_1 \log \sqrt{x^2 + y^2} + c_2.$$

Appendice 5.12 - Dimostrazione del Teorema di esistenza di Peano

Iniziamo con due risultati fondamentali.

Proposizione A5.1 : *sia f continua in un intorno di (x_0, y_0) ; una funzione continua $y(x)$ risolve il problema di Cauchy*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

se e solo se risolve l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (\text{A5.24})$$

DIMOSTRAZIONE : l'equazione (A5.24) si chiama *equazione di Volterra*, dal matematico italiano Vito Volterra; la dimostrazione dell'equivalenza è molto semplice, infatti se y risolve il problema di Cauchy intanto è di classe C^1 , dato che la sua derivata è la funzione continua $f(x, y(x))$, quindi \boxtimes (1.47)

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(t) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Viceversa, se y risolve (A5.24) è una primitiva della funzione continua $f(x, y(x))$, quindi ha derivata $f(x, y(x))$, e in x_0 vale y_0 . ■

Proposizione A5.2 : sia f continua nel cilindro $R = [x_0, x_0 + a] \times \overline{B_b(\mathbf{y}_0)}$, e sia $\{\mathbf{y}_n\}_n$ una successione di funzioni continue in $[x_0, x_0 + a]$ tale che

$$\forall n, \forall x \in [x_0, x_0 + a] \quad \|\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_0\| \leq b \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_n \xrightarrow{\text{unif}} \mathbf{y} \text{ in } [x_0, x_0 + a].$$

Allora

$$f(x, \mathbf{y}_n(x)) \xrightarrow{\text{unif}} f(x, \mathbf{y}(x)) \text{ in } [x_0, x_0 + a].$$

Per dimostrare il Teorema di esistenza di Peano 5.2 faremo uso delle successioni di funzioni § Sezione 7.1. Il procedimento è molto naturale e va per approssimazione successiva della soluzione, partendo da una semplice constatazione.

Osservazione : se y è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, allora per $x = x_0$ il valore di y è $y(x_0)$, e il valore della derivata è

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)).$$

Allora il grafico di y , cioè la curva $(x, y(x))$, quando passa dal punto $(x_0, y(x_0))$, ossia per $x = x_0$, ha vettore tangente

$$(1, y'(x_0)) = (1, f(x_0, y(x_0))).$$

Questa è dunque la direzione con la quale il grafico di y passa per $(x_0, y(x_0))$.

Dimostreremo il teorema solo per una equazione: infatti la sola differenza (per i sistemi) è scrivere f e \mathbf{Y} , ma dato che avremo (come vedrete) abbondanza di indici e apici, non vogliamo rischiare di far confondere con le componenti di \mathbf{Y} .

L'idea della dimostrazione è la seguente: la soluzione parte da (x_0, y_0) con pendenza $f(x_0, y_0)$. Noi costruiamo una curva \bar{y} che speriamo sia vicina al grafico di y percorrendo per un breve tratto un segmento che parte da (x_0, y_0) con pendenza costante $f(x_0, y_0)$; nel frattempo la vera soluzione y sta continuamente cambiando pendenza, visto che al variare dell'ascissa x cambia anche la pendenza $f(x, y(x))$. Se però il segmento che percorriamo è abbastanza breve, diciamo per $x_0 \leq x \leq x' = x_0 + \varepsilon$, per la continuità di f (che quindi varia poco se ci si allontana di poco) la "vera" pendenza $f(x, y(x))$ non dovrebbe essere lontana dalla pendenza che abbiamo seguito con \bar{y} , quindi per $x = x'$ i punti si due grafici, quello $(x', y(x'))$ di y e quello $(x', \bar{y}(x'))$ di \bar{y} , non daranno distanti. Ma allora ripartiamo da $(x', \bar{y}(x'))$ con pendenza $f(x', \bar{y}(x'))$: questa pendenza non sarà lontana dalla pendenza $f(x', y(x'))$ che ha la soluzione y . Percorriamo un altro breve segmento, e ricominciamo. Certo alla lunga i piccoli errori si sommano, e chissà dove finiremmo. Ma possiamo ricominciare tutto da capo prendendo ε più piccolo, in modo da ridurre gli errori: otterremo così una successione di spezzate che (nelle ipotesi del teorema) convergono effettivamente a una soluzione.

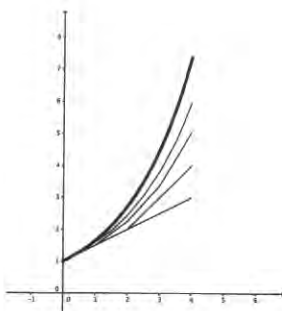


Fig. A5.22 : $y' = y/2$ con $y(0) = 1$: soluzione e approssimanti con passi $\varepsilon = 4, 2, 1, 0.5$

Per formalizzare l'idea prepariamoci a un lungo lavoro; supponiamo che f sia continua in un intorno U di (x_0, y_0) : per definizione questo contiene una palla di raggio $r > 0$ centrata in (x_0, y_0) e quindi, posto $b = r/2 < r/\sqrt{2}$, contiene il quadrato $Q = [x_0 - b, x_0 + b] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Dato che Q è compatto, per il Teorema di Weierstraß 1.20 esiste

$$M = 1 + \max_Q |f(x, y)|$$

e allora poniamo \Leftarrow Corollario 5.11

$$a = b/M, \quad R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

e d'ora in poi lavoreremo sempre in R (abbiamo aggiunto 1 nella definizione di M così siamo certi che $a \leq b$ e cioè che $R \subset Q$). Costruiamo la i -esima approssimante.

Passo 1: l'asse x . Dividiamo $[x_0, x_0 + a]$ in i intervalli uguali, lunghi a/i , e poniamo per $0 \leq j \leq i$

$$x_j^{(i)} = x_0 + j \frac{a}{i},$$

il j -esimo estremo di questi intervalli. Per non appesantire la notazione, per un po' manteniamo lo stesso i , quindi evitiamo di aggiungere l'apice (i) : torneremo a farlo quando necessario.

Passo 2: valore nei punti x_j . Supponiamo di aver già costruito la spezzata fino al punto x_j per qualche $j < i$ ed essere arrivati a una quota y_j : ripartiamo da lì con pendenza $f(x_j, y_j)$ sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ che è lungo a/i , quindi giungiamo alla quota

$$y_{j+1} = y_j + \frac{a}{i} f(x_j, y_j)$$

e perciò possiamo scrivere

$$y_j = y_0 + \sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} f(x_h, y_h) dt.$$

Passo 3: valore negli altri punti. Nell'intervallo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ la spezzata parte dalla quota y_j e prosegue con pendenza $f(x_j, y_j)$, quindi

$$y(x) = y_j + (x - x_j)f(x_j, y_j) = y_0 + \left(\sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} f(x_h, y_h) dt \right) + \int_{x_j}^x f(x_j, y_j) dt. \quad (\text{A5.25})$$

Passo 4: la spezzata esiste su $[x_0, x_0 + a]$ e sta in R . Intanto il primo estremo (x_0, y_0) sta in R . Se ci fosse un punto della spezzata fuori da R , prendiamo l'ultimo vertice (x_j, y_j) prima di questo punto: tutti i punti $(x_0, y_0), \dots, (x_j, y_j)$ stanno in R , ma allora, dato che $|f| \leq M$ su R , da (A5.25) abbiamo per $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ grazie a (1.4) e (2.1)

$$|y(x) - y_0| \leq \sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} M dt + \int_{x_j}^x M dt = M(x - x_0) \leq Ma = b$$

e quindi tutto il segmento da (x_j, y_j) a (x_{j+1}, y_{j+1}) sta in R , contro l'ipotesi. Allora tutti i vertici che costruiamo stanno in R , quindi ci fermiamo solo quando $j = i$, ovvero quando $x_j = x_0 + a$.

Passo 5: stima su ogni intervallo. Osserviamo che per $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ si ha

$$|y(x) - y_j| \leq \int_{x_j}^x M dt = M(x - x_j)$$

dunque per (1.6)

$$\|(x, y(x)) - (x_j, y_j)\| \leq |x - x_j| + |y(x) - y_j| \leq (M + 1)(x - x_j) \leq \frac{(M + 1)a}{i}.$$

Passo 6: distanza dall'essere soluzione. Vogliamo stimare "quanto lontana" è la spezzata y dall'essere una soluzione del problema di Cauchy. Se y verificasse (A5.24) sarebbe una soluzione, per la Proposizione A5.1; invece y verifica solo l'uguaglianza (A5.25), ma riusciremo a provare che scegliendo l'indice i abbastanza grande la differenza fra le due cose è piccola. Osserviamo che f è continua sul compatto R , quindi è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor 1.21. Fissiamo $\varepsilon > 0$: esiste $\delta > 0$ tale che presi due punti (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) in R

$$\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \implies |f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{a}. \quad (\text{A5.26})$$

D'ora in poi supporremo che fosse $i \geq \bar{i}$, con \bar{i} così grande che

$$\frac{(M + 1)a}{\bar{i}} < \delta. \quad (\text{A5.27})$$

Scrivendo allora per brevità $T(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ abbiamo per $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

$$\begin{aligned} |y(x) - T(x)| &= \left| \left[y_0 + \left(\sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} f(x_h, y_h) dt \right) + \int_{x_j}^x f(x_j, y_j) dt \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[y_0 + \left(\sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} f(t, y(t)) dt \right) + \int_{x_j}^x f(t, y(t)) dt \right] \right| \\ &\leq \sum_{h=0}^{j-1} \int_{x_h}^{x_{h+1}} |f(x_h, y_h) - f(t, y(t))| dt + \int_{x_j}^x |f(x_j, y_j) - f(t, y(t))| dt \end{aligned}$$

ma in ogni integrale l'integrando non supera ε/a per (A5.26), che possiamo applicare grazie al passo 5 e a (A5.27), quindi

$$|y(x) - T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{a}(x - x_0) \leq \varepsilon.$$

Passo 7: convergenza uniforme. Ora reintroduciamo la scrittura con i , dunque scriviamo $y^{(i)}$ al posto di y e $T^{(i)}$ al posto di T . Abbiamo provato che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{i} : \forall i \geq \bar{i}, \forall x \in [x_0, x_0 + a] \quad |y^{(i)}(x) - T^{(i)}(x)| < \varepsilon,$$

ossia che

$$y^{(i)} - T^{(i)} \xrightarrow{\text{unif}} 0 \quad \text{in } [x_0, x_0 + a]. \quad (\text{A5.28})$$

Passo 8: conclusione. Le funzioni $y^{(i)}$ sono equilimitate per $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, dato che abbiamo provato al Passo 4 che $|y^{(i)}(x) - y_0| \leq b$ e quindi

$$y_0 - b \leq y^{(i)}(x) \leq y_0 + b.$$

Inoltre sono funzioni continue, lineari a tratti, con pendenza che in ogni punto non supera M in valore assoluto, dunque sono lipschitziane tutte con la stessa costante M . Allora possiamo applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà 7.8, dunque esiste una sottosuccessione di $\{y^{(i)}\}_i$, che continueremo a indicare $\{y^{(i)}\}_i$ per non scrivere $\{y^{(k_i)}\}_i$ con esiti tipografici pessimi, che converge uniformemente in $[x_0, x_0 + a]$ a una funzione continua y :

$$y^{(i)} \xrightarrow{\text{unif}} y \quad \text{in } [x_0, x_0 + a]. \quad (\text{A5.29})$$

Allora per la Proposizione A5.2

$$f(x, y^{(i)}(x)) \xrightarrow{\text{unif}} f(x, y(x)) \quad \text{in } [x_0, x_0 + a]$$

e quindi per la Proposizione 7.4

$$T^{(i)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y^{(i)}(t)) dt \xrightarrow{\text{unif}} y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

e per (A5.29)

$$y^{(i)}(x) - T^{(i)}(x) \xrightarrow{\text{unif}} y(x) - \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right).$$

Ma ricordando (A5.28) otteniamo che questo limite è la funzione zero, ossia che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

e cioè y risolve il problema di Cauchy per la Proposizione A5.1.

Capitolo 6

Potenziali e integrali curvilinei

In questo capitolo cercheremo di trovare delle condizioni sotto cui una data funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A insieme aperto di \mathbb{R}^n , ammette un potenziale, cioè una funzione F tale che

$$f(x) = \nabla F(x) \quad \forall x \in A.$$

Vedremo che esiste un collegamento molto stretto tra l'esistenza di funzioni potenziali ed il lavoro svolto da f sulle curve, e faremo numerosi esempi.

6.1 - Primitive e potenziali

Useremo vari termini che provengono dalla Fisica; potremmo utilizzare una terminologia esclusivamente matematica, ma ci sembra utile che lo studente capisca l'origine dei concetti matematici che andiamo ad esporre.

Iniziamo con il ricordare che, come conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo integrale 1.50, ogni funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A intervallo della retta reale, ammette una *primitiva* F , cioè una funzione derivabile e tale che

$$f(x) = F'(x) \quad \forall x \in A.$$

Viene naturale chiedersi se lo stesso accada in più variabili, cioè se per ogni funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ (che in seguito chiameremo spesso *campo continuo* con un termine

che ricorda i campi di forze in Fisica), con A aperto di \mathbb{R}^n , esista una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Quando ciò succede, si potrebbe chiamare F una primitiva del campo \mathbf{f} , ma per analogia con i campi di forze conservativi, si usa una terminologia presa dalla Fisica.

Definizione : sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **potenziale del campo \mathbf{f}** se $\mathbf{f} = \nabla F$.

Grazie alla Proposizione 3.1, su un aperto connesso due funzioni potenziali della stessa \mathbf{f} differiscono per una costante, come in una variabile.

Osserviamo subito che, a differenza del caso di funzioni di una variabile, la sola continuità di \mathbf{f} non può essere sufficiente ad assicurare l'esistenza di un potenziale, e ci sono certamente delle ulteriori condizioni necessarie da imporre sul campo \mathbf{f} affinché ciò avvenga. Infatti, se supponiamo che il campo \mathbf{f} sia di classe C^1 , un'eventuale funzione potenziale F sarebbe di classe C^2 e per il Teorema di Schwarz 3.11 si avrebbe

$$\nabla_{ij} F = \nabla_{ji} F \implies \nabla_i f_j = \nabla_j f_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

In altri termini, vale il risultato seguente.

Proposizione 6.1 : siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 . Se \mathbf{f} ammette una funzione potenziale, necessariamente deve risultare

$$\nabla_i f_j = \nabla_j f_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Definizione : diremo che un campo di classe C^1 è **irrotazionale** se

$$\nabla_i f_j = \nabla_j f_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Il termine *irrotazionale* è anch'esso preso dalla Fisica; infatti il *rotore* di un campo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il vettore definito da

$$\text{rot } \mathbf{f} = (\nabla_2 f_3 - \nabla_3 f_2, \nabla_3 f_1 - \nabla_1 f_3, \nabla_1 f_2 - \nabla_2 f_1) \quad (6.2)$$

e si vede subito che $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ se e solo se sono verificate le condizioni (6.1) della definizione precedente (es. 6.1).

Esempio : la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$$

non può ammettere alcuna funzione potenziale in quanto

$$\nabla_1 f_2 = 0 \quad \text{mentre} \quad \nabla_2 f_1 = 1.$$

Esempio : consideriamo il campo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2} \right)$$

e proviamo a vedere se \mathbf{f} ammette un potenziale F . Deve intanto valere l'uguaglianza $\nabla_x F = f_1$ da cui si ha, integrando rispetto ad x per ogni fissato y ,

$$F(x, y) = \int \frac{y}{1+x^2y^2} dx = \arctan(xy) + C(y)$$

dove $C(y)$ è una funzione costante rispetto ad x e dunque dipendente solo da y . Deve poi valere anche l'uguaglianza $\nabla_y F = f_2$, da cui si trova

$$\nabla_y (\arctan(xy) + C(y)) = \frac{x}{1+x^2y^2},$$

ma ciò significa $C'(y) = 0$ e dunque $C(y)$ è una funzione costante, che possiamo scegliere uguale a zero dato che per ora cerchiamo non *tutte quante* ma *una* funzione potenziale. In definitiva abbiamo trovato che il campo \mathbf{f} ammette un potenziale F dato da

$$F(x, y) = \arctan(xy). \quad (6.3)$$

Per la Proposizione 3.1, ogni altro potenziale $G(x, y)$ sarà dato da

$$G(x, y) = \arctan(xy) + C$$

con C costante reale.

Osservazione : una classe importante di campi vettoriali è quella dei *campi centrali*. Prendendo ad esempio come centro l'origine, questi sono campi vettoriali $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in cui la direzione del campo in un punto \mathbf{x} è la stessa del vettore \mathbf{x} , mentre l'ampiezza dipende solo dal modulo $\|\mathbf{x}\|$ (o equivalentemente da $\|\mathbf{x}\|^2$); in altri termini possiamo scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} g(\|\mathbf{x}\|^2), \quad (6.4)$$

dove g è una funzione reale di variabile reale. Si verifica facilmente che tutti i campi centrali ammettono un potenziale; infatti, da (6.4) si trova subito che un potenziale del campo \mathbf{f} è dato da

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} G(\|\mathbf{x}\|^2)$$

dove G è una primitiva della funzione g .

Esempio : nel caso del campo gravitazionale, posto nell'origine il centro di massa, la forza di attrazione punta verso il centro (dunque in un punto \mathbf{x} ha versore direzione $-\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$) e intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza, vale a dire si ha

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -c \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

dove c è una costante positiva. Si ha dunque in (6.4)

$$g(t) = -ct^{-3/2} \quad \text{e quindi} \quad G(t) = 2ct^{-1/2}$$

per cui un potenziale del campo gravitazionale è dato da

$$F(\mathbf{x}) = \frac{c}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Esiste un interessante collegamento tra l'esistenza di funzioni potenziali per un campo \mathbf{f} ed il calcolo del lavoro del campo \mathbf{f} lungo le curve (2.27). Infatti, consideriamo un campo $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e supponiamo che ammetta un potenziale F ; sia poi $\phi : [a, b] \rightarrow A$ una curva chiusa, cioè tale che $\phi(a) = \phi(b)$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\left(F(\phi(t)) \right)' = (\nabla F)(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot \phi'(t),$$

da cui si ricava

$$\int_{\phi} \mathbf{f} = \int_a^b \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b \left(F(\phi(t)) \right)' dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = 0,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che la curva ϕ è chiusa. Abbiamo dunque visto che un campo dotato di potenziale non compie lavoro lungo una curva chiusa. La condizione di irrotazionalità non è però in generale sufficiente a stabilire che un dato campo \mathbf{f} ammette un potenziale, come mostra l'esempio seguente.

Esempio : sia A l'aperto di \mathbb{R}^2 costituito da tutti i punti diversi dall'origine e sia \mathbf{f} la funzione definita da

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

La condizione di irrotazionalità è soddisfatta, in quanto

$$\nabla_2 f_1(x, y) = \nabla_1 f_2(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in A,$$

come si verifica facilmente. Se esistesse una funzione potenziale F dovremmo avere, in base alla discussione precedente, $\int_{\phi} \mathbf{f} = 0$ per ogni curva chiusa ϕ . Prendendo come curva ϕ la circonferenza

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

abbiamo invece

$$\int_{\phi} \mathbf{f} = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Dunque, pur essendo irrotazionale, il campo \mathbf{f} non può avere una funzione potenziale.

Consideriamo ora un campo \mathbf{f} dotato di potenziale F e due punti A, B appartenenti al dominio A del campo \mathbf{f} . Siano ϕ, ψ due curve in A aventi entrambe il punto A come punto iniziale ed il punto B come punto finale. Con le notazioni viste nella Sezione 2.8 possiamo considerare la curva $\phi - \psi$ che risulta chiusa; abbiamo dunque, per quanto visto sopra

$$0 = \int_{\phi - \psi} \mathbf{f} = \int_{\phi} \mathbf{f} - \int_{\psi} \mathbf{f}$$

e possiamo quindi concludere che

$$\int_{\phi} \mathbf{f} = \int_{\psi} \mathbf{f}.$$

In definitiva abbiamo mostrato che il seguente risultato.

Proposizione 6.2 : *per un campo dotato di potenziale il lavoro lungo una curva non dipende dalla curva considerata ma soltanto dai punti iniziale e finale.*

È utile a questo punto introdurre la seguente definizione.

Definizione : *un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice **connesso per archi** se per ogni $x_0, x_1 \in A$ esiste una curva $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi(0) = x_0$, $\phi(1) = x_1$, e*

$$\phi(t) \in A \quad \forall t \in [0, 1] .$$

È facile vedere che i sottoinsiemi connessi per archi risultano in particolare anche connessi, mentre il viceversa non è vero in generale; però vale la proposizione seguente, che è importante dato che assai spesso capita di trattare con insiemi aperti.

Proposizione 6.3 : *sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n ; allora A è anche connesso per archi. Dunque un aperto di \mathbb{R}^n è connesso per archi se e solo se è connesso.*

Possiamo ora cercare di invertire l'implicazione della Proposizione 6.2 provando a mostrare che se un campo continuo è tale che il lavoro compiuto da esso lungo una curva dipende solo dai punti iniziale e finale della curva, allora necessariamente il campo deve avere un potenziale. L'idea della dimostrazione è molto naturale: supponiamo per semplicità che il dominio A sia un aperto connesso, dunque connesso per archi in base alla proposizione precedente, e fissiamo un punto $x_0 \in A$. Per ogni punto $x \in A$, grazie alla connessione di A , esiste almeno una curva ϕ_x che ha x_0 come punto iniziale e x come punto finale, e sostegno in A ; definiamo allora

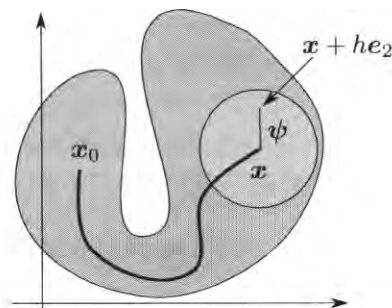
$$F(x) = \int_{\phi_x} f .$$

Osserviamo che la definizione di $F(x)$ è ben posta e non dipende dalla curva ϕ_x scelta ma solo dal punto finale x ; infatti per ipotesi il campo f ha tale proprietà. Si tratta ora di far vedere che $\nabla F = f$ o equivalentemente che

$$\nabla_i F(x) = f_i(x) \quad \forall x \in A .$$

Fissiamo $x \in A$: dato che A è aperto abbiamo $B_r(x) \subset A$ per qualche $r > 0$. Fissiamo ora un indice i , consideriamo una curva ϕ_x che congiunge x_0 ad x e calcoliamo $F(x + h e_i)$ con $|h| < r$, scegliendo come curva ϕ_{x+he_i} la curva $\phi_x + \psi$, dove ψ è il segmento $[x, x + h e_i]$, parametrizzato da

$$\psi(t) = x + t e_i \quad t \in [0, h] .$$

Fig. 6.1 : la palla B_r è più chiara

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{x}) &= \int_{\phi_{\mathbf{x} + \psi}} \mathbf{f} - \int_{\phi_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} = \int_{\psi} \mathbf{f} \\ &= \int_0^h \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i dt = \int_0^h f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt$$

e, passando al limite per $h \rightarrow 0$, abbiamo

$$\nabla_i F(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) dt = f_i(\mathbf{x})$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal Teorema fondamentale del calcolo integrale 1.50.

Riassumendo quanto visto, abbiamo il seguente risultato (es. 6.2).

Teorema 6.4 : sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n e sia $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo continuo. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

- il campo \mathbf{f} ammette un potenziale;
- il lavoro del campo \mathbf{f} lungo ogni curva chiusa con sostegno in A è nullo;
- il lavoro del campo \mathbf{f} lungo una curva qualsiasi con sostegno in A dipende solo dai punti iniziale e finale della curva.

Esempio : vogliamo calcolare il lavoro del campo

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{y}{1 + x^2 y^2}, \frac{x}{1 + x^2 y^2} \right)$$

(che è definito su tutto \mathbb{R}^2) lungo la curva

$$\phi(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right) \quad t \in [0, 1].$$

Invece che calcolare il lavoro $\int_{\phi} \mathbf{f}$ mediante la formula

$$\int_0^1 \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$$

ricordiamo che in (6.3) abbiamo trovato un potenziale F , che è dato da

$$F(x, y) = \arctan(xy)$$

ed allora il lavoro $\int_{\phi} \mathbf{f}$ cercato si ottiene semplicemente come $F(\mathbf{B}) - F(\mathbf{A})$, dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono rispettivamente il punto iniziale e finale della curva ϕ . Si ha

$$\mathbf{A} = (0, 0), \quad \mathbf{B} = (1/2, 1/2),$$

e quindi il lavoro del campo \mathbf{f} lungo la curva ϕ è dato da

$$\int_{\phi} \mathbf{f} = F(1/2, 1/2) - F(0, 0) = \arctan(1/4).$$

Anche se il teorema precedente fornisce delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un potenziale per un campo \mathbf{f} , la sua applicazione concreta risulta difficile, in quanto bisognerebbe calcolare il lavoro del campo \mathbf{f} su tutte le curve chiuse e verificare che esso è nullo, dunque effettuare un numero infinito di test. Vedremo ora che in alcuni casi la condizione necessaria di irrotazionalità diventa sufficiente e permette così di stabilire l'esistenza di un potenziale.

La definizione che seguirà richiederebbe, per essere precisata, un lungo lavoro. Preferiamo cercare di spiegarla a parole: consideriamo un elastico chiuso (tondo, insomma, e non spezzato) capace di contrarsi fino a ridursi a un punto. Se teniamo fermo un punto P dell'elastico e deformiamo il resto, quando lasciamo andare tutto (tranne P) l'elastico si contrae nel punto P . Immaginiamo per un po' di vivere nel piano; deformiamo l'elastico, tenendo fermo un suo punto P , e supponiamo che l'elastico, così deformato, non passi per l'origine. Ora imponiamo un divieto: l'elastico, quando si contrarrà, non può passare dall'origine. Siamo sicuri che riesca a contrarsi tutto nel punto P ? Se l'elastico deformato "girava intorno" all'origine, non riesce a contrarsi in P . Se invece l'elastico può muoversi nello spazio tridimensionale, gli è facile contrarsi saltando l'origine. Ma se l'insieme proibito fosse stato un anello, e sfortunatamente l'elastico faceva un giro intorno all'anello? Di nuovo non riesce a contrarsi in un punto.

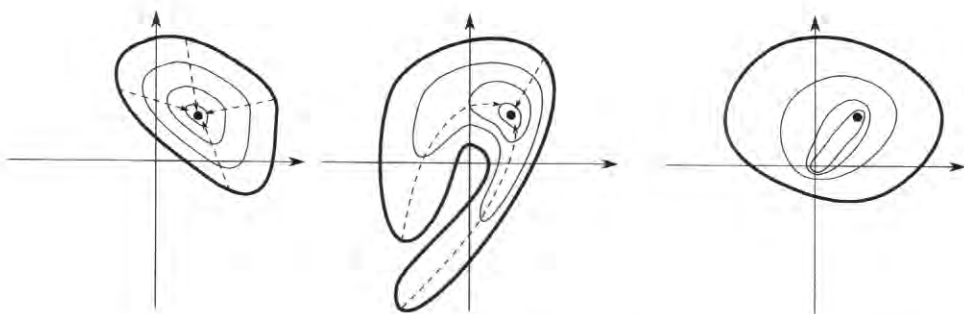


Fig. 6.2 : queste curve si contraggono a un punto evitando l'origine Fig. 6.3 : questa invece no

Definizione : un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa in A può essere deformata con continuità rimanendo in A fino a farla diventare un punto di A .

La definizione appena data non è del tutto rigorosa perchè bisognerebbe precisare il significato di *deformata con continuità*; preferiamo però lasciarla in tale forma intuitiva invece che rendere rigorosi tutti i dettagli. Si hanno allora i fatti seguenti.

- a) Ogni insieme **convesso** di \mathbb{R}^n è semplicemente connesso.
- b) Ogni insieme **stellato** di \mathbb{R}^n è semplicemente connesso; per insieme stellato intendiamo un insieme A tale che esiste un suo punto x_0 che può essere congiunto ad ogni altro punto di A mediante un *segmento* tutto contenuto in A , vale a dire ponendosi in x_0 si riesce a vedere qualunque altro punto di A con un raggio tutto contenuto in A .
- c) Preso un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$, l'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ non è semplicemente connesso; infatti una circonferenza di centro x_0 non può essere in alcun modo deformata con continuità fino a farla diventare un punto di A , cioè diverso da x_0 .
- d) Invece, se $x_0 \in \mathbb{R}^3$, l'insieme $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ è semplicemente connesso; avendo a disposizione una dimensione in più è facile vedere che una circonferenza di centro x_0 può essere deformata con continuità fino a farla diventare un qualunque punto di A . Lo stesso si può fare per ogni altra curva chiusa contenuta in A . Un analogo risultato vale in \mathbb{R}^n con $n \geq 3$.
- e) Se S è una retta in \mathbb{R}^3 oppure una curva chiusa di \mathbb{R}^3 , iniettiva salvo per gli estremi, l'insieme $A = \mathbb{R}^3 \setminus S$ non è semplicemente connesso. Infatti, una circonferenza *attraversata* dalla retta (o dalla curva chiusa) S non può in alcun modo essere deformata con continuità fino a farla diventare un punto di A .

L'utilità degli insiemi semplicemente connessi per determinare se un dato campo ammette una funzione potenziale è illustrata dal teorema seguente (di cui omettiamo la dimostrazione).

Teorema 6.5 : sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo di classe C^1 . Supponiamo che f sia irrotazionale e che il dominio A sia semplicemente connesso. Allora il campo f ammette una funzione potenziale.

Esempio : abbiamo già visto in un esempio precedente che il campo

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

non può ammettere un potenziale sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se invece prendiamo come A il semipiano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

abbiamo che A è semplicemente connesso (è addirittura convesso). Dunque il teorema precedente assicura l'esistenza di una funzione potenziale F su A . È facile trovare un'espressione esplicita di F : dall'uguaglianza

$$\nabla_y F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

si ha, integrando rispetto ad y ,

$$F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C(x),$$

dove $C(x)$ è una funzione costante rispetto ad y e dunque dipendente dalla sola variabile x . Dall'uguaglianza

$$\nabla_x F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

si ricava poi $C'(x) = 0$, per cui C deve essere costante e possiamo scegliere quindi $C = 0$. In definitiva, una funzione potenziale sull'insieme A è

$$F(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Consideriamo ora l'aperto B costituito dal complementare di una semiretta, ad esempio

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}.$$

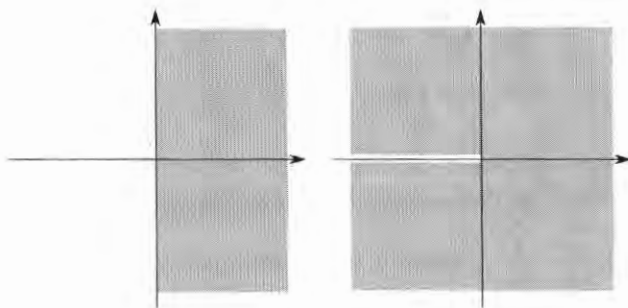


Fig. 6.4 : gli aperti A e B (la semiretta è un po' ingrossata...)

L'insieme B è semplicemente connesso e quindi, per il Teorema 6.5, esiste un potenziale F su B . Con calcoli analoghi a quelli appena fatti si trova che in questo caso si ha

$$F(x, y) = \theta(x, y)$$

dove $\theta(x, y)$ indica l'angolo (compreso fra $-\pi$ e π) che il punto (x, y) fa con la semiretta $\{(x, y) : y = 0, x \geq 0\}$. Notiamo che $\theta(x, y)$ è ben definito su B in quanto l'origine non appartiene all'aperto B .

Esempio : consideriamo il campo

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2, e^{-y^2}) \quad (6.5)$$

e supponiamo di voler calcolare il lavoro di \mathbf{f} lungo la curva

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

che è una semicirconferenza di punto iniziale $(1, 0)$ e finale $(-1, 0)$. Il campo \mathbf{f} è irrotazionale, come si verifica immediatamente, ed il suo dominio di definizione è tutto \mathbb{R}^2 , che è semplicemente connesso. Per il Teorema 6.5 quindi esiste un potenziale F , anche se non possiamo scriverlo esplicitamente perchè coinvolge una primitiva della funzione e^{-y^2} . Però, grazie al Teorema 6.4, possiamo equivalentemente calcolare il lavoro lungo una qualsiasi altra curva con gli stessi punti iniziale e finale. Scegliendo ad esempio la curva

$$\psi(t) = (1 - 2t, 0) \quad t \in [0, 1]$$

otteniamo

$$\int_{\phi} \mathbf{f} = \int_{\psi} \mathbf{f} = \int_0^1 \mathbf{f}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = -2 \int_0^1 (1 - 2t)^2 dt = -\frac{1}{3}.$$

Esempio : i risultati di questa sezione sono talvolta utili anche se \mathbf{f} non ammette un potenziale; supponiamo di voler calcolare il lavoro del campo

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (x^2 - 3y^2, e^{-y^2})$$

lungo la curva chiusa

$$\psi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il campo non è irrotazionale, però

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

dove \mathbf{f} è il campo in (6.5) e $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (-3y^2, 0)$. Allora il lavoro di \mathbf{h} su ψ è

$$\int_{\psi} \mathbf{h} = \int_{\psi} \mathbf{f} + \int_{\psi} \mathbf{g},$$

ma dato che \mathbf{f} è irrotazionale e ha dominio \mathbb{R}^2 il suo lavoro sulla circonferenza ψ è nullo, perciò dobbiamo solo calcolare un integrale molto più semplice,

$$\begin{aligned} \int_{\psi} (-3y^2, 0) &= \int_0^{2\pi} (-3 \sin^2 t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 3 \sin^3 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3(1 - \cos^2 t) \sin t dt = \left[-3 \cos t + \cos^3 t \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Grazie al Teorema 6.5, il problema di sapere se un campo \mathbf{f} di classe C^1 , definito su un dominio semplicemente connesso A , ammette un potenziale, è ridotto alla verifica dell'irrotazionalità di \mathbf{f} . Più precisamente:

\mathbf{f} è irrotazionale \Rightarrow esiste una funzione potenziale;

\mathbf{f} non è irrotazionale \Rightarrow non esiste una funzione potenziale.

La verifica dell'irrotazionalità è molto semplice e si riduce ad un calcolo di derivate parziali.

Possiamo ora schematizzare i passi da compiere per determinare se un campo \mathbf{f} ammette una funzione potenziale. La prima verifica da fare è quella dell'irrotazionalità di \mathbf{f} ; se \mathbf{f} non è irrotazionale, sicuramente non potrà esistere una funzione potenziale. Supponiamo allora che il campo \mathbf{f} sia irrotazionale; se il dominio A di \mathbf{f} è semplicemente connesso, allora, per il Teorema 6.5 esiste una funzione potenziale.

Resta il problema di sapere se esiste una funzione potenziale nei casi in cui il campo \mathbf{f} sia irrotazionale ma il dominio A non sia un insieme semplicemente connesso: potrebbe comunque esistere un potenziale.

Esempio : se $F(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ e $\mathbf{f} = \nabla F$, chiaramente \mathbf{f} ha un potenziale (non è altro che F), anche se è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ che non è semplicemente connesso.

Vediamo come si può procedere nel caso di un dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ il cui complementare ha un numero finito di componenti connesse.

Per il Teorema 6.4 dovremmo calcolare il lavoro $\int_{\phi} \mathbf{f}$ del campo \mathbf{f} lungo ogni curva chiusa ϕ contenuta in A e verificare che esso è nullo. Invece in \mathbb{R}^2 basterà calcolare il lavoro $\int_{\phi} \mathbf{f}$ solo per un numero finito di curve chiuse in A , una per ogni componente connessa (1.31) del complementare di A . Di nuovo, diamo una definizione che potrebbe essere precisata meglio, con un po' di fatica.

Definizione : se $K \subset \mathbb{R}^2$ è limitato e ϕ è una curva chiusa in \mathbb{R}^2 , iniettiva salvo per gli estremi e di sostegno Σ , si dice che **la curva ϕ circonda K** se $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ ha due sole componenti connesse (necessariamente una limitata e l'altra illimitata) e K è contenuto in quella limitata.

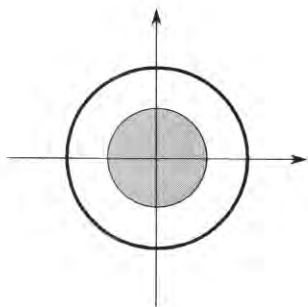


Fig. 6.5 : questa curva circonda la palla

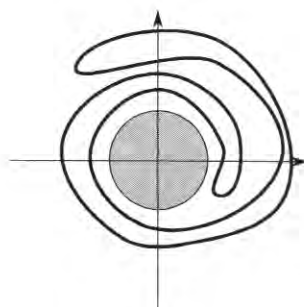


Fig. 6.6 : questa invece no

Esempio : se K è la palla unitaria di \mathbb{R}^2 , allora la consueta curva che ha come sostegno la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2 circonda K . Invece la curva della Figura 6.6 non circonda K .

Teorema 6.6 : sia \mathbf{f} un campo irrotazionale di classe C^1 e supponiamo che il complementare del dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ abbia un numero finito di componenti connesse K_1, \dots, K_N . Supponiamo di aver determinato per ogni $i = 1, \dots, N$ una curva chiusa ϕ_i contenuta in A e tale che

- a) ϕ_i circonda K_i ma nessuna delle altre K_j ;
- b) il lavoro $\int_{\phi_i} \mathbf{f}$ è nullo.

Allora esiste una funzione potenziale per il campo \mathbf{f} .

Esempio : consideriamo il campo

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Il suo dominio A è tutto \mathbb{R}^2 privato dell'origine, che non è un dominio semplicemente connesso. Calcolando le derivate parziali $\nabla_y f_1$ e $\nabla_x f_2$ si verifica facilmente che il campo \mathbf{f} è irrotazionale. Essendoci una sola componente connessa del complementare del dominio A , che è $\{(0, 0)\}$, per il Teorema 6.6, per verificare che esiste una funzione potenziale, basta trovare una curva chiusa che circonda l'origine, su cui il lavoro del campo \mathbf{f} è nullo. Prendiamo la circonferenza unitaria

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

e calcoliamo il lavoro di \mathbf{f} su ϕ : si ha

$$\begin{aligned} \int_{\phi} \mathbf{f} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t (\sin^2 t - \cos^2 t) + \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} [\sin(2t)]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

e dunque il campo \mathbf{f} ammette una funzione potenziale F . Dall'equazione

$$\nabla_x F = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

si trova, integrando rispetto ad x ,

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + C(y);$$

dall'equazione

$$\nabla_y F = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

si trova poi $C'(y) = 0$ per cui C è costante e si può quindi prendere $C = 0$. In definitiva una funzione potenziale per il campo \mathbf{f} è data da

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

6.2 - Il teorema della divergenza

Il teorema della divergenza trasforma un integrale di volume in un integrale di superficie ed è molto utilizzato in un gran numero di casi provenienti dalle più svariate applicazioni. Vedremo come, attraverso il teorema della divergenza, si possa calcolare l'area di una regione piana conoscendo una parametrizzazione della curva che ne delimita il contorno. Facciamo prima qualche considerazione sulla parola "flusso": piantiamo verticalmente in un corso d'acqua (profondo un metro) due pali A e B distanti anch'essi un metro. Se la velocità dell'acqua è di un metro al secondo, significa che fra i due pali fluisce un metro cubo d'acqua al secondo? Naturalmente no: se il segmento AB fra i due pali è parallelo alla corrente, non passa affatto acqua! Si capisce che quel che conta non è la velocità dell'acqua, ma la *componente della velocità ortogonale ad AB* . Questa è quella che, moltiplicata per la lunghezza di AB (e per la profondità...), dà la quantità di acqua che fluisce in un secondo attraverso AB , appunto il *flusso*.

Per giungere ad un enunciato rigoroso, introduciamo la classe di aperti su cui lavoriamo; è opportuno rivedere la Sezione 3.9, dato che saranno tutti aperti il cui bordo è una $(n-1)$ -superficie regolare.

Definizione : un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è un **aperto regolare** per ogni punto $x_0 \in \partial A$ esiste una palla U centrata in x_0 tale che $U \cap \partial A$ è una $(n-1)$ -superficie parametrica regolare e $U \setminus \partial A$ ha due componenti connesse, una contenuta in A e l'altra nel complementare di A .

Esempio : la palla unitaria aperta B di \mathbb{R}^2 è un aperto regolare; se a B togliamo la palla chiusa C concentrica a B ma di raggio $1/2$ otteniamo ancora un aperto regolare (un anello); se però a B togliamo solo il bordo di C , non abbiamo più un aperto regolare: infatti $E = B \setminus \partial C$ ha bordo formato da due parti: la circonferenza esterna di B , in ogni punto della quale è facile disegnare una pallina spaccata da ∂E in due parti, una dentro e una fuori da E , e la circonferenza bordo di C . Se prendiamo una (piccola) pallina centrata in un punto di questa circonferenza, ∂E divide sì la pallina in due, ma entrambe le parti sono interne a E .

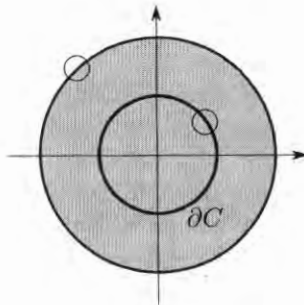


Fig. 6.7 : i punti di ∂C hanno E da entrambi i lati

Come abbiamo visto chiaramente nell'esempio, vicino a ogni punto del bordo di un aperto regolare sappiamo qual è la faccia rivolta verso il "dentro" dell'aperto e quale è rivolta verso il "fuori". Ricordiamo (3.17) che in ogni punto del bordo di un aperto regolare vi è una sola direzione normale.

Definizione : sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, e sia $x_0 \in \partial A$. Si dice che v è un **vettore normale esterno ad A in x_0** se v è normale a ∂A in x_0 , ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$x_0 - tv \in A \quad \text{e} \quad x_0 + tv \notin A \quad \text{per } 0 < t < \varepsilon.$$

Il **versore normale esterno ad A in x_0** (o semplicemente **la normale esterna ad A in x_0**) è il vettore

$$\nu(x_0) = \frac{v}{\|v\|}$$

dove v è un qualunque vettore normale esterno ad A in x_0 .

La frazione è ben definita, dato che un vettore normale esterno non può essere nullo.

Esempio : consideriamo nel piano l'ellisse

$$E = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$

e il suo punto di bordo $x_0 = (\sqrt{3}, 3/2)$. Il bordo dell'ellisse può essere parametrizzato come

$$\phi(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \implies x_0 = \phi(\pi/6).$$

Allora

$$\phi'(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t) \implies \phi'(\pi/6) = (-1, 3\sqrt{3}/2)$$

quindi (3.22) un vettore normale in x_0 è $(3\sqrt{3}/2, 1)$. Si vede subito che questo punta verso l'esterno dell'ellisse, quindi

$$\nu(x_0) = \frac{(3\sqrt{3}/2, 1)}{\|(3\sqrt{3}/2, 1)\|} = \frac{(3\sqrt{3}/2, 1)}{\sqrt{31/4}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}, \frac{2}{\sqrt{31}} \right).$$

Per esercizio, usando (3.23), potete trovare la normale esterna a un ellissoide.

Riprendendo l'esempio del corso d'acqua illustrato all'inizio di questa sezione, possiamo ora dare la definizione rigorosa di "flusso" attraverso una superficie S .

Definizione : sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e regolare, sia ν il versore normale esterno ad A , sia $f: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo di classe C^1 , e sia S una porzione della ipersuperficie ∂A . Chiameremo **flusso del campo f attraverso la superficie S** la quantità

$$\int_S f \cdot \nu \, d\sigma_{n-1}.$$

Osservazione : in realtà la definizione di flusso può essere data per superfici S qualunque, purché *orientabili*, nel senso precisato nella Sezione 6.3.

Possiamo enunciare il risultato principale, ricordando che la divergenza è stata definita in (3.5) e gli integrali di superficie nella Sezione 4.7.

Teorema della divergenza 6.7 : sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e regolare, sia ν il versore normale esterno ad A e sia $f: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo di classe C^1 . Allora

$$\int_A \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma_{n-1}. \quad (6.6)$$

Nella formula precedente abbiamo dunque l'uguaglianza fra un integrale di volume e un integrale di superficie. Usando una consuetudine consolidata, per indicare il differenziale di superficie $(n-1)$ -dimensionale scriveremo semplicemente $d\sigma$ anziché $d\sigma_{n-1}$.

Dal teorema precedente si possono ottenere diversi corollari interessanti, scegliendo di volta in volta opportuni campi f .

a) Scegliendo $f = g\mathbf{w}$, con g funzione scalare e \mathbf{w} vettore costante, si ha

$$\int_A \nabla g \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\partial A} g\mathbf{w} \cdot \nu \, d\sigma.$$

In particolare, se $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i$ è uno dei vettori della base euclidea di \mathbb{R}^n , si ha

$$\int_A \nabla_i g \, dx = \int_{\partial A} g\nu_i \, d\sigma.$$

b) Scegliendo $f = g\mathbf{w}$, con g scalare e \mathbf{w} campo vettoriale (non necessariamente costante), si ha

$$\int_A (\nabla g \cdot \mathbf{w} + g \operatorname{div} \mathbf{w}) \, dx = \int_{\partial A} g\mathbf{w} \cdot \nu \, d\sigma.$$

c) Scegliendo $f = \nabla g$, con g scalare, si ha

$$\int_A \Delta g \, dx = \int_{\partial A} \nabla g \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove abbiamo indicato con Δg l'operatore di Laplace

$$\Delta g = \operatorname{div}(\nabla g) = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 g.$$

d) In \mathbb{R}^3 , scegliendo $f = \mathbf{g} \wedge \mathbf{h}$, con \mathbf{g} e \mathbf{h} campi vettoriali, si ha

$$\int_A (\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) \, dx = \int_{\partial A} (\mathbf{g} \wedge \mathbf{h}) \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove l'operatore rot è quello definito in (6.2).

- e) Scegliendo in \mathbb{R}^2 un campo \mathbf{f} della forma $\mathbf{f} = (g_2, -g_1)$ il prodotto scalare $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu}$ si può esprimere mediante il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ al bordo ∂A percorso in senso antiorario, e si ha

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} = g_1 \nu_1 - g_1 \nu_2 = g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 = \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Quindi da (6.6) si ottiene l'uguaglianza

$$\int_A \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

che è nota come *formula di Gauss-Green* (es. 6.14).

6.3 - La formula di Stokes

Tornando al Teorema della divergenza 6.7 osserviamo che se S è il bordo di un aperto regolare $A \subset \mathbb{R}^3$ limitato si ha, per ogni campo \mathbf{f} sufficientemente regolare (6.2),

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = 0. \quad (6.7)$$

Infatti, trasformando l'integrale di superficie in un integrale di volume, si ottiene

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = \int_A \text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) d\mathbf{x} = 0,$$

essendo $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0$ per ogni campo \mathbf{f} regolare, in quanto

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = \partial_{x_1}(\partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2) + \partial_{x_2}(\partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3) + \partial_{x_3}(\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1) = 0.$$

La minima regolarità richiesta al campo \mathbf{f} è di essere di classe \mathcal{C}^1 in un intorno della superficie S , anche se, per giustificare l'uguaglianza $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0$ sarebbe necessario supporre inizialmente \mathbf{f} di classe \mathcal{C}^2 e poi procedere per approssimazione.

La questione che ora ci poniamo è di come si modifica la formula (6.7) quando la superficie S ha un bordo Γ che è quindi una curva chiusa in \mathbb{R}^3 , come in figura.

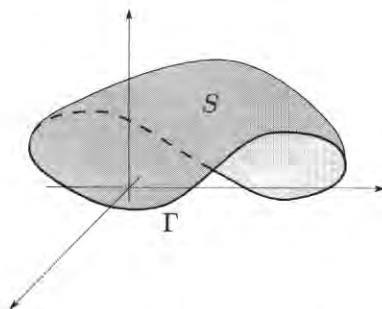


Fig. 6.8 : una superficie con bordo

Abbiamo usato la parola “bordo” in senso naïf, come parliamo normalmente del bordo di un bicchiere sapendo perfettamente cosa intendiamo. In realtà occorrerebbe essere molto più scrupolosi: se consideriamo un bicchiere come superficie S in \mathbb{R}^3 , questa è un insieme chiuso che coincide con la sua frontiera ∂S , quindi il “bordo” che intendiamo comunemente non è quello topologico ∂S . Nella Sezione 3.9 abbiamo definito le k -superfici regolari, che in un intorno di ogni punto sono immagine, tramite una funzione iniettiva che verifica il Teorema del Dini, di un insieme aperto (e quindi di una palla) in \mathbb{R}^k . Potremmo definire in modo simili le **k -superfici regolari con bordo** che in un intorno di ogni punto sono immagine o di una palla, o di una mezza palla

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k : \|\mathbf{y}\| < \varepsilon, y_k \geq 0\}$$

e in tal caso il bordo cui ci riferiamo in questa Sezione sono i punti di questo secondo tipo.

Dobbiamo poi limitarci a considerare delle superfici S cosiddette *orientabili*, cioè tali che si possa definire un vettore normale $\boldsymbol{\nu} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ che risulti continuo. Va osservato che in generale non sempre ciò è possibile; ad esempio il *nastro di Möbius* rappresentato in figura non è una superficie orientabile.

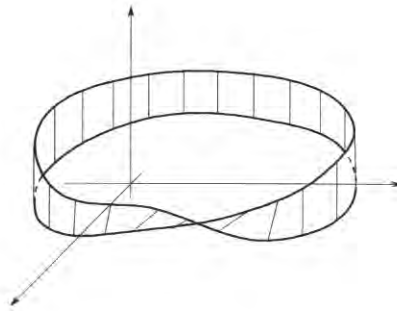


Fig. 6.9 : colorando una sola faccia... lo si colora tutto!

Invece tutte le superfici S che sono luoghi di zeri di funzioni $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 e verificanti la condizione del Teorema del Dini 3.29

$$\nabla F(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \text{ tale che } F(\mathbf{x}) = 0$$

sono superfici orientabili: basta scegliere come vettore normale proprio il gradiente di F , normalizzato: $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x}) / \|\nabla F(\mathbf{x})\|$.

Sia allora S una superficie orientabile di \mathbb{R}^3 che supponiamo limitata e sufficientemente regolare (almeno di classe \mathcal{C}^2); indichiamo con $\boldsymbol{\nu}$ un vettore normale ad S continuo. Va osservato che, non essendo in generale S una superficie chiusa, non è possibile definire il concetto di vettore normale *esterno*.

Infine, se indichiamo per ogni $\mathbf{x} \in \Gamma$ con $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ il versore tangente ad S che sia normale a Γ ed esterno ad S (siccome Γ è il bordo di S la superficie S sta tutta da una parte rispetto a Γ), scegliamo tra i versori $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ tangenti a Γ quello dato da

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

In altri termini, tra le due possibili direzioni del versore tangente a Γ scegliamo quella che rende la terna $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\nu}$ una terna destrorsa.

Teorema di Stokes 6.8 : *nelle ipotesi precedenti si ha, per ogni campo \mathbf{f} di classe \mathcal{C}^1 in un intorno di S ,*

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds. \quad (6.8)$$

Notiamo che il secondo integrale nella formula (6.8) non è altro che il lavoro del campo \mathbf{f} lungo la curva Γ , una volta che si sia scelto per essa il giusto verso di percorrenza.

Esercizi relativi al capitolo 6

Esercizio 6.1 : di ciascuno dei seguenti campi determinate il dominio, dite se è irrotazionale e calcolate il lavoro su γ :

- a) $f(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ e $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $-1 \leq t \leq 1$;
- b) $f(x, y) = (y, x^2)$ e $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cup \gamma_2(t) \cup \gamma_3(t)$ con $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, $\gamma_2(t) = (\cos t, \cos^2 t - 1)$, $t \in [0, \pi]$, e $\gamma_3(t) = (t, t + 1)$, $t \in [-1, 0]$;
- c) $f(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
- d) $f(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\gamma(t) = (1, 0, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$;
- e) $f(x, y, z) = (\sqrt{z}, x, y)$ e $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t^2)$ con $t \in [0, \pi/2]$;
- f) $f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$ e $\gamma(t)$ è il segmento da $(1, 0, 2)$ a $(3, 4, 1)$.

Esercizio 6.2 : di ciascuno dei seguenti campi dite se ammette potenziale e in caso affermativo calcolatelo:

- a) $f(x, y) = (x, y - 1)$;
- b) $f(x, y) = (1 + ye^{xy}, xe^{xy} + \cos y)$;
- c) $f(x, y) = (2x + 5y^3, 15xy^2 + 2y)$;
- d) $f(x, y) = \left(\frac{2x^3 - 2x}{y^2 + (x^2 - 1)^2}, \frac{y}{y^2 + (x^2 - 1)^2} \right)$;
- e) $f(x, y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$;
- f) $f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2}, \frac{2x^2y + 2y^3 + 2y}{x^2 + y^2} \right)$;
- g) $f(x, y, z) = \left(\frac{2}{y}, -\frac{2x + z}{y^2}, \frac{1}{y} \right)$ in $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$.

Esercizio 6.3 : dato il campo

$$f = \left(1 - \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, 1 - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

determinatene il dominio, dite se è irrotazionale, dite se ammette potenziale e calcolate $\int_{\gamma} \mathbf{f}$ dove γ è la metà superiore dell'ellisse di centro $(-2, 2)$ e semiassi $(2, 1)$, percorsa in verso orario.

Esercizio 6.4 : dato il campo vettoriale

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{Ax + By}{x^2 + y^2}, \frac{Cx + Dy}{x^2 + y^2} \right)$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, determinate:

- le condizioni su A, B, C, D per cui il campo \mathbf{f} è irrotazionale;
- le condizioni su A, B, C, D per cui il campo \mathbf{f} ammette un potenziale;
- il valore dell'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{f}$ nel caso in cui $A = -B = C = D = 1$, dove γ è la curva

$$\gamma(t) = (-t^3, 1 - 2t^2) \quad t \in [-1, 1].$$

Esercizio 6.5 : dato il campo

$$\mathbf{f} = \left(\frac{2x}{(x^2 + (y-1)^2)^2}, \frac{2y + \lambda}{(x^2 + (y-1)^2)^2} \right),$$

dove λ è un parametro reale, determinatene il dominio Ω , dite per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ è irrotazionale, dite se in corrispondenza a tale valore di λ il campo ammette potenziale e in caso affermativo calcolatelo.

Esercizio 6.6 : calcolate il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{f} = (y - z, z + x, x + y)$ lungo la curva $\gamma(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 6.7 : calcolate il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{f} = \left(xy, \frac{x^2}{2} \right)$$

lungo la curva γ di equazioni parametriche

$$x = t, \quad y = \arctan \left(\frac{1 - \cos 3t}{2 - \sin^2 t} \right), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Esercizio 6.8 : tra tutti i campi vettoriali del tipo

$$\mathbf{f}(x, y) = (xa(y), yb(x))$$

con a, b di classe $C^1(\mathbb{R})$, determinate quelli che ammettono un potenziale.

Esercizio 6.9 : determinate le funzioni $a(x, y)$ di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ per cui il campo vettoriale

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(a(x, y), \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

ammetta un potenziale.

Esercizio 6.10 : determinate tutte le funzioni $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che il campo di vettori in \mathbb{R}^2

$$\mathbf{f}(x, y) = (ya(x), a(x))$$

ammetta un potenziale. In tal caso determinatelo.

Esercizio 6.11 : sia A una matrice reale $n \times n$ e sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ il campo di vettori definito da

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Determinate le condizioni sulla matrice A affinché il campo \mathbf{f} ammetta un potenziale, ed in tal caso calcolatelo.

Esercizio 6.12 : dimostrate che il campo vettoriale

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x}{y - x^2}, -\frac{1}{2(y - x^2)} \right)$$

ammette un potenziale sul dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$. Calcolate poi $\int_{\gamma} \mathbf{f}$ dove γ è la curva avente come grafico il grafico della funzione $y = 3 + \sin x$ con $x \in [0, \pi/2]$, percorso nel verso delle x crescenti.

Esercizio 6.13 : dato il campo vettoriale in \mathbb{R}^2

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-2y}{4x^2 + 4y^2 - 4x + 1}, \frac{2x - 1}{4x^2 + 4y^2 - 4x + 1} \right),$$

calcolate, al variare di $r \neq 1/2$, l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \mathbf{f}$ dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio r , percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6.14 : calcolate $\int_{\gamma} (0, x)$ dove γ è una circonferenza di raggio r percorsa in verso antiorario. Deducetene che l'area del cerchio di raggio r è πr^2 .

Appendice al capitolo 6

Appendice 6.1 - Calcolo di aree e di volumi

Come applicazione del Teorema della divergenza 6.7 vedremo ora un modo di calcolare l'area di una regione piana circondata da una curva chiusa, una volta nota l'espressione parametrica di tale curva.

Sia dunque $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa iniettiva e regolare; supponiamo che il sostegno di ϕ sia il bordo di un aperto limitato A , e che ϕ percorra ∂A **in senso antiorario**.

Consideriamo ora un campo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 e tale che si abbia

$$\operatorname{div} f = 1 \quad \text{in tutto } \mathbb{R}^2.$$

Ad esempio, possiamo considerare

$$f(x, y) = (x, 0), \quad f(x, y) = (0, y), \quad f(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right). \quad (\text{A6.1})$$

Dal Teorema della divergenza 6.7 abbiamo

$$\operatorname{Area}(A) = \int_A 1 \, dx \, dy = \int_A \operatorname{div} f \, dx \, dy = \int_{\partial A} f \cdot \nu \, ds \quad (\text{A6.2})$$

dove abbiamo indicato con ν il versore normale esterno ad A . Avendo a disposizione la rappresentazione parametrica $\phi(t)$ di ∂A , il vettore tangente in un punto $\phi(t)$ sarà dato da $\phi'(t)$ e quindi (3.18) un vettore normale esterno sarà $(\phi'_2(t), -\phi'_1(t))$, visto

che ϕ gira in senso antiorario; infine, otteniamo che il versore normale esterno ν , che deve avere modulo unitario, è dato da

$$\nu(\phi(t)) = \frac{(\phi'_2(t), -\phi'_1(t))}{\|\phi'(t)\|}.$$

Allora possiamo scrivere l'integrale in (A6.2) come

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \nu \, ds &= \int_a^b \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot \nu(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(\phi(t)) \cdot (\phi'_2(t), -\phi'_1(t)) \, dt \\ &= \int_a^b \left(-f_2(\phi(t))\phi'_1(t) + f_1(\phi(t))\phi'_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

In altri termini, l'area della regione piana A non è altro che il lavoro, lungo la curva ϕ che parametrizza il suo bordo, del campo $\mathbf{g} = (-f_2, f_1)$, dove \mathbf{f} è un qualsiasi campo con divergenza 1. Siccome si ha

$$1 = \operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1$$

possiamo concludere che

$$\operatorname{Area}(A) = \int_{\phi} \mathbf{g} \quad \text{per qualunque } \mathbf{g} \text{ tale che } \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 1.$$

Scegliendo ad esempio \mathbf{f} come in (A6.1) si ha rispettivamente

$$\mathbf{g}(x, y) = (0, x), \quad \mathbf{g}(x, y) = (-y, 0), \quad \mathbf{g}(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right).$$

Esempio : consideriamo l'ellisse di semiassi a, b

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Un'espressione parametrica del bordo ∂A è data da

$$\phi(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Scegliendo $\mathbf{f}(x, y) = (x/2, y/2)$ e dunque $\mathbf{g}(x, y) = (-y/2, x/2)$ abbiamo

$$\operatorname{Area}(A) = \int_{\phi} \mathbf{g} = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t \, dt = ab\pi.$$

Esempio : consideriamo la curva deltoide (\Rightarrow appendice 2.2); essa ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

per cui, scegliendo $\mathbf{f}(x, y) = (x/2, y/2)$ e dunque $\mathbf{g}(x, y) = (-y/2, x/2)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(A) &= \int_{\phi} \mathbf{g} = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Esempio : consideriamo la curva cardioide (\Rightarrow appendice 2.2); essa ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos t(1 - \cos t) \\ y(t) = \sin t(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

per cui, scegliendo $\mathbf{f}(x, y) = (x/2, y/2)$ e dunque $\mathbf{g}(x, y) = (-y/2, x/2)$ abbiamo

$$\text{Area}(A) = \int_{\phi} \mathbf{g} = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \pi.$$

Esempio : consideriamo, invece della cardioide dell'esempio precedente, quella nella forma più generale (\Rightarrow appendice 2.2) data in forma polare da

$$r = q - \cos(k\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (\text{A6.3})$$

dove $q > 0$ e $k > 0$ sono due costanti fissate. Abbiamo già osservato nella Sezione 1.5 che la scrittura polare (A6.3) si intende valida anche nel caso $r < 0$, che si ha quando $q < 1$. In tal caso, ci chiediamo cosa rappresenta la formula dell'area che si ottiene da (4.22):

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta.$$

Nel caso della cardioide (A6.3) otteniamo con facili calcoli (fateli)

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(q - \cos(k\theta))^2}{2} d\theta = \pi q^2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(4k\pi)}{8k},$$

ma questo valore non rappresenta l'area della regione grigia A della figura di sinistra; esso rappresenta invece la *somma delle aree* delle regioni grigie delle due figure. Se vogliamo soltanto l'area della regione piccola B della figura di destra dobbiamo restringere l'intervallo della variabile angolare θ ; prendendo ad esempio $k = 1$ e $q < 1$ si trova che tale intervallo è $[-\alpha, \alpha]$ dove $\alpha = \arccos q$. Si ha quindi

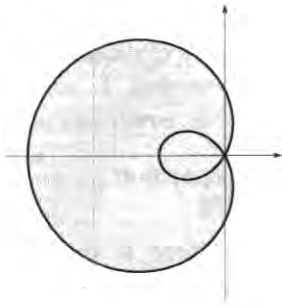


Fig. A6.1 : la zona A

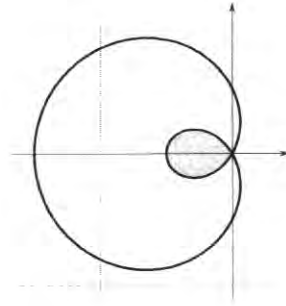


Fig. A6.2 : la zona B

$$\text{Area}(B) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(q - \cos \theta)^2}{2} d\theta = \alpha \left(\frac{1}{2} + q^2 \right) - \frac{3}{2} q \sin \alpha.$$

Ad esempio, se $q = 1/2$ come nelle figure si trova $\alpha = \pi/3$ e quindi

$$\text{Area}(B) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{8}.$$

Un discorso analogo a quello fatto per le regioni piane nella sezione precedente si può fare per il calcolo di volumi tridimensionali di aperti regolari. Sia dunque B un aperto regolare limitato di \mathbb{R}^3 : il suo bordo è una (2-)superficie, che per semplicità supponiamo parametrizzata con una sola carta locale $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme dei parametri. Se indichiamo con $(s, t) \in A$ i due parametri che descrivono la superficie S , le equazioni parametriche della superficie sono:

$$x = \phi_1(s, t), \quad y = \phi_2(s, t), \quad z = \phi_3(s, t).$$

Sia ora $\mathbf{f} : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo regolare tale che

$$\text{div } \mathbf{f} = 1 \text{ in } B.$$

Dal Teorema della divergenza 6.7 si ricava allora

$$\text{vol}(B) = \int_B \text{div } \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\partial B} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale esterno a $\partial B = S$. Scrivendo l'ultimo integrale in forma parametrica si ha

$$\int_{\partial B} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = \int_A \mathbf{f}(\phi(s, t)) \cdot \boldsymbol{\nu} \|\partial_s \phi \wedge \partial_t \phi\| ds dt.$$

A meno del segno, il versore normale esterno $\boldsymbol{\nu}$ è (3.19)

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\partial_s \phi \wedge \partial_t \phi}{\|\partial_s \phi \wedge \partial_t \phi\|}, \quad (\text{A6.4})$$

per cui si ha in definitiva

$$\text{vol}(B) = \pm \int_A \mathbf{f}(\phi(s, t)) \cdot (\partial_s \phi \wedge \partial_t \phi) \, ds \, dt,$$

dove il \pm è dovuto al fatto che non sappiamo se il vettore $\boldsymbol{\nu}$ di (A6.4) è esterno o interno. Per fortuna, trattandosi di un volume, basta prendere il valore assoluto del risultato finale, ma se avessimo dovuto calcolare un integrale generico? Bisogna stare attenti all'ordine con cui si fa il prodotto vettoriale dei due vettori tangenti $\partial_s \phi$ e $\partial_t \phi$; l'ordine giusto è quello per cui la terna di vettori $\partial_s \phi$, $\partial_t \phi$, $\boldsymbol{\nu}$ è una *terna destrorsa*, ovvero tale che sovrapponendo il primo vettore al pollice della mano destra e il secondo all'indice, il terzo risulta sovrapposto al medio. Nel nostro caso si ha

$$\text{vol}(B) = \left| \int_A \mathbf{f}(\phi(s, t)) \cdot (\partial_s \phi \wedge \partial_t \phi) \, ds \, dt \right| = \left| \int_A \mathbf{f}(\phi(s, t)) \cdot (\partial_t \phi \wedge \partial_s \phi) \, ds \, dt \right|. \quad (\text{A6.5})$$

Esempio : vogliamo calcolare il volume dell'ellissoide di semiasse a, b, c

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Parametrizziamo la superficie $S = \partial B$ mediante la colatitudine $\alpha \in [0, \pi]$ e la longitudine $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$x = a \sin \alpha \cos \theta, \quad y = b \sin \alpha \sin \theta, \quad z = c \cos \alpha$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \phi &= (a \cos \alpha \cos \theta, b \cos \alpha \sin \theta, -c \sin \alpha) \\ \partial_\theta \phi &= (-a \sin \alpha \sin \theta, b \sin \alpha \cos \theta, 0), \end{aligned}$$

per cui

$$\partial_\alpha \phi \wedge \partial_\theta \phi = (bc \sin^2 \alpha \cos \theta, ac \sin^2 \alpha \sin \theta, ab \sin \alpha \cos \alpha).$$

Se scegliamo ad esempio il campo

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 0, 0),$$

dalla formula (A6.5) si ricava

$$\text{vol}(B) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc \sin^3 \alpha \cos^2 \theta \, d\alpha \, d\theta = \frac{4\pi}{3} abc$$

che è il ben noto volume dell'ellissoide.

Appendice 6.2 - Forme differenziali

Abbiamo visto nel Capitolo 6 alcune operazioni che si possono fare con i campi vettoriali $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A insieme aperto di \mathbb{R}^n . Ad esempio § (2.24) per integrare un campo \mathbf{F} lungo una curva ϕ definita su un intervallo I dovevamo integrare su I il prodotto scalare

$$\mathbf{F} \cdot \phi' = \sum_{i=1}^n F_i(\phi(x)) \cdot \frac{d\phi_i}{dt}.$$

Allo scopo di fornire delle generalizzazioni utili per trattare l'integrazione di funzioni definite su superfici di dimensione qualunque, conviene vedere un campo vettoriale $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ come una scrittura del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{x}) dx_i, \quad \mathbf{x} \in A. \quad (\text{A6.6})$$

La notazione dx_i nella scrittura precedente è molto utile e può essere facilmente precisata. Ricordiamo § Sezione 3.3 che il differenziale di una funzione f è stato inizialmente definito come un vettore (il gradiente di f). Ogni vettore \mathbf{a} di \mathbb{R}^n può essere identificato con una applicazione lineare da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R} , quella che ad ogni vettore \mathbf{x} associa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$. Decidiamo di vedere come mondi distinti quello dei vettori e quello delle applicazioni lineari a loro associate. Allora il differenziale di f può essere inteso come *l'applicazione lineare df associata al gradiente ∇f* , così § (3.7)

$$df[\mathbf{h}] = (\nabla f) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f h_i. \quad (\text{A6.7})$$

Osserviamo che in particolare la funzione $f(\mathbf{x}) = x_i$ ha gradiente \mathbf{e}_i , quindi ha differenziale

$$dx_i[\mathbf{h}] = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h} = h_i :$$

ma allora possiamo proseguire da (A6.7) con

$$\dots = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx_i[\mathbf{h}] = \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx_i \right) [\mathbf{h}],$$

ossia

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx_i.$$

Gli oggetti ω del tipo in (A6.6) si chiamano **forme differenziali** e le funzioni F_i si chiamano **coefficienti della forma ω** . Ad esempio, se $n = 2$ le forme differenziali saranno del tipo

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

con a, b funzioni reali di due variabili, mentre se $n = 3$ saranno del tipo

$$a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz$$

con a, b, c funzioni reali di tre variabili. Per ogni $\mathbf{x} \in A$ l'oggetto $\omega(\mathbf{x})$ è dunque un'applicazione lineare che associa ad ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ il prodotto scalare $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$.

Esempio : come abbiamo visto, se prendiamo una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ con A insieme aperto di \mathbb{R}^n , il differenziale di f è, per ogni $\mathbf{x} \in A$, l'applicazione lineare che associa ad ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ la quantità

$$df(\mathbf{x})[\mathbf{h}] = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) h_i$$

ossia, nel linguaggio delle forme differenziali,

$$df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) dx_i$$

e df sarà la forma differenziale associata al campo vettoriale ∇f , avente come coefficienti le derivate parziali $\partial_i f$.

Possiamo dunque vedere i campi vettoriali in termini di forme differenziali e tradurre quanto visto nel Capitolo 6 nel linguaggio delle forme differenziali, quindi se

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) dx_i$$

diremo che la forma ω e il campo \mathbf{f} sono associati uno all'altro. Ecco un piccolo dizionario potenziali - forme:

- una forma differenziale ω su un aperto A di \mathbb{R}^n si dice **esatta** se esiste una funzione differenziabile $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = dg$; questo corrisponde a dire che il campo vettoriale \mathbf{f} associato alla forma ω ammette come potenziale la funzione g ;
- una forma differenziale ω su un aperto A di \mathbb{R}^n si dice **chiusa** se il campo vettoriale \mathbf{f} associato alla forma ω è tale che

$$\partial_i f_j(\mathbf{x}) = \partial_j f_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A;$$

questo corrisponde a dire che il campo vettoriale \mathbf{f} è irrotazionale (6.1).

Proviamo ora a generalizzare il concetto precedente di forma differenziale al caso di k -forme in n variabili; le forme differenziali viste sopra saranno allora corrispondenti al caso $k = 1$ per cui si potranno chiamare 1-forme. Per $k = 0$ una 0-forma in n variabili non è altro che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^n . Per $k \geq 1$ una k -forma in n variabili è una scrittura del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum f_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \mathbf{x} \in A \quad (\text{A6.8})$$

dove la somma si intende effettuata su tutte le k -uple (i_1, \dots, i_k) di indici con $1 \leq i_j \leq n$. Le funzioni f_{i_1, \dots, i_k} sono ancora dette *coefficienti* della forma ω ed i termini $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ verificano le proprietà seguenti:

- se ci sono (almeno) due indici uguali tra i_1, \dots, i_k si ha

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0 ;$$

ad esempio $dx_2 \wedge dx_7 \wedge dx_4 \wedge dx_2 = 0 ;$

- se scambiamo tra loro due indici, ottenendo la k -upla (j_1, \dots, j_k) dalla k -upla (i_1, \dots, i_k) , si ha

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = -dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} ;$$

ad esempio $dx_2 \wedge dx_7 \wedge dx_4 \wedge dx_3 = -dx_4 \wedge dx_7 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$

Osservazione : da quanto detto sopra è evidente che se $k > n$ in ogni k -upla (i_1, \dots, i_k) ci saranno sempre almeno due indici uguali, per cui se $k > n$ l'unica k -forma è la forma nulla.

Osservazione : per le proprietà precedenti dei termini $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ si vede che, se $k \leq n$, tali termini non nulli ed effettivamente diversi sono tanti quanti le scelte possibili di k elementi in un insieme di n elementi, dunque $\binom{n}{k}$.

Per vedere come opera una k -forma ω in n variabili basta quindi sapere come operano le k -forme elementari $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Iniziamo con il caso $k = 2$ scrivendo esplicitamente come opera $dx_i \wedge dx_j$ su due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$dx_i \wedge dx_j[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = u_i v_j - u_j v_i .$$

In altri termini, $dx_i \wedge dx_j[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ non è altro che il determinante della matrice 2×2 la cui prima riga è il vettore (u_i, u_j) e la cui seconda riga è il vettore (v_i, v_j) . In maniera simile, se $k = 3$ $dx_h \wedge dx_i \wedge dx_j$ opera sulla terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ di vettori di \mathbb{R}^n nel modo seguente: $dx_h \wedge dx_i \wedge dx_j[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ è il determinante della matrice 3×3 avente come prima riga il vettore (u_h, u_i, u_j) , come seconda riga il vettore (v_h, v_i, v_j) e come terza riga il vettore (w_h, w_i, w_j) . In maniera analoga si procede per gli altri valori di k .

Esempio : se $k = 2$ ed $n = 3$, tenuto conto delle proprietà scritte sopra, le 2-forme saranno tutte del tipo

$$\omega(x, y, z) = A(x, y, z) dx \wedge dy + B(x, y, z) dy \wedge dz + C(x, y, z) dx \wedge dz$$

dove le funzioni A, B, C sono date, in termini dei coefficienti f_{ij} della forma come scritta in (A6.8), da

$$A = f_{12} - f_{21} , \quad B = f_{23} - f_{32} , \quad C = f_{13} - f_{31} .$$

Anche per le k -forme si può dare una nozione di differenziale, nella maniera seguente.

Definizione : sia ω una k -forma differenziale, con coefficienti le funzioni f_{i_1, \dots, i_k} (che supponiamo sufficientemente regolari). Si definisce **differenziale esterno di ω** la $(k+1)$ -forma

$$d\omega = \sum_j \sum \partial_j f_{i_1, \dots, i_k} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

dove di nuovo la seconda sommatoria si intende effettuata su tutte le k -uple (i_1, \dots, i_k) di indici con $1 \leq i_j \leq n$.

Osservazione : se $k = 0$ si intende nella definizione precedente semplicemente

$$d\omega = \sum_j \partial_j f dx_j ;$$

in altri termini $d\omega$ è in questo caso la 1-forma associata al campo vettoriale ∇f . Inoltre, se $k \geq n$ si ha $d\omega = 0$, essendo $k+1 > n$.

Osservazione : se i coefficienti f_{i_1, \dots, i_k} di una k -forma sono di classe C^2 , dal Teorema di Schwarz 3.11 si ha che

$$\partial_{ij} f_{i_1, \dots, i_k} = \partial_{ji} f_{i_1, \dots, i_k} \quad \forall i, j = 1, \dots, n ;$$

dunque, dalle proprietà dei termini $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ si ricava subito che per ogni forma ω di classe C^2 si ha

$$d(d\omega) = 0 .$$

Osservazione : se $k = 1$ abbiamo che $d\omega$ è la 2-forma data da

$$d\omega = \sum_{i,j} \partial_j f_i dx_j \wedge dx_i .$$

In \mathbb{R}^3 la 2-forma $d\omega$ ha solo tre coefficienti, e si scrive

$$d\omega = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) dx_3 \wedge dx_1 .$$

I tre coefficienti di $d\omega$ possono essere visti come le componenti del campo vettoriale rotore del campo \mathbf{f} :

$$\text{rot } \mathbf{f} = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) ,$$

che abbiamo già visto nella Sezione 6.1. Se invece, in dimensione n qualsiasi, abbiamo $k = n-1$, la n -forma $d\omega$ ha un solo coefficiente del termine $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$; ad esempio se $n = 3$ abbiamo

$$d\omega = (\partial_1(f_{23} - f_{32}) + \partial_2(f_{31} - f_{13}) + \partial_3(f_{12} - f_{21})) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

In altri termini, se indichiamo con \mathbf{f} il campo vettoriale

$$\mathbf{f} = (f_{23} - f_{32}, f_{31} - f_{13}, f_{12} - f_{21}) ,$$

possiamo identificare la 3-forma $d\omega$ con la divergenza di \mathbf{f} (3.5) e Sezione 6.2:

$$\text{div } \mathbf{f} = (\partial_1(f_{23} - f_{32}) + \partial_2(f_{31} - f_{13}) + \partial_3(f_{12} - f_{21})) .$$

Un calcolo analogo si può fare per una dimensione n generica; ad esempio provate a scrivere il campo \mathbf{f} che si ottiene prendendo $n = 4$ e $k = 3$.

Vediamo ora come si può integrare una k -forma ω in \mathbb{R}^n su una *superficie orientata* S di dimensione k contenuta in \mathbb{R}^n §§ 3.9 e 6.3. Il caso più semplice è il caso $k = 0$ in cui ω non è altro che una funzione f a valori in \mathbb{R} e la superficie S , essendo di dimensione 0, si riduce ad un numero finito di punti di \mathbb{R}^n

$$S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}.$$

In tal caso l'orientazione è semplicemente il segno $\varepsilon_i = \pm$ per ogni $i = 1, \dots, N$ e l'integrale della forma ω su S è definito da

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i f(\mathbf{x}_i).$$

Nel caso $k = 1$ la forma ω è un campo vettoriale \mathbf{f} e la superficie S , di dimensione 1, non è altro che una curva orientata mediante il suo versore tangente $\boldsymbol{\tau}$. In tal caso l'integrale di ω su S è definito da

$$\int_S \omega = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) ds.$$

Nel caso in cui S sia data in forma parametrica da

$$S = \{\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [a, b]\},$$

l'integrale di ω su S diventa §§ (2.24)

$$\int_S \omega = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t)) \cdot \boldsymbol{\phi}'(t) dt.$$

Nel caso di k -forme con $k > 1$ l'espressione dell'integrale di ω su S è un po' più complicata. In tal caso ω si scrive come §§ (A6.8)

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum f_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \mathbf{x} \in A$$

mentre S è una superficie di dimensione k in \mathbb{R}^n . Si potrebbe definire anche in questo caso un'orientazione di S , cosa che ci permetterebbe di definire rigorosamente l'integrale $\int_S \omega$ in piena generalità. Ci limitiamo invece al caso in cui la superficie S sia data in forma parametrica da

$$S = \{\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t), t \in A\}$$

con A aperto di \mathbb{R}^k e $\boldsymbol{\phi}$ iniettiva. Si definisce allora

$$\int_S \omega = \int_A \left[\sum f_{i_1, \dots, i_k}(\boldsymbol{\phi}(t)) \det D_{i_1, \dots, i_k}(t) \right] dt \quad (\text{A6.9})$$

dove D_{i_1, \dots, i_k} indica la matrice $k \times k$

$$D_{i_1, \dots, i_k} = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_{i_1} & \cdots & \partial_k \phi_{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \phi_{i_k} & \cdots & \partial_k \phi_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare $k = n$ la n -forma ω è del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

con S aperto di \mathbb{R}^n , e la matrice $D_{1,\dots,n}$, che ha dimensione $n \times n$, non è altro che la matrice $\nabla \phi$. L'orientazione di S è data in tal caso dal segno del determinante della matrice $\nabla \phi$. Si riottiene allora la formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli (4.27)

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A \mathbf{f}(\phi(t)) \det \nabla \phi(t) dt.$$

Consideriamo il caso particolare $k = 2$ ed $n = 3$; sappiamo che in tal caso le 2-forme in \mathbb{R}^3 sono tutte del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) dy \wedge dz + f_2(\mathbf{x}) dz \wedge dx + f_3(\mathbf{x}) dx \wedge dy$$

e quindi, se la superficie S è parametrizzata dalla funzione $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante i parametri $(s, t) \in A$, l'integrale in (A6.9) diventa

$$\begin{aligned} \int_S \omega = \int_A [f_1(\phi(s, t)) \det D_{23}(s, t) \\ + f_2(\phi(s, t)) \det D_{31}(s, t) + f_3(\phi(s, t)) \det D_{12}(s, t)] ds dt. \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione del versore normale $\nu(\mathbf{x})$ alla superficie S e la definizione di integrale superficiale (4.39) otteniamo

$$\int_S \omega = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nu(\mathbf{x}) d\sigma, \quad (\text{A6.10})$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{f} il campo vettoriale (f_1, f_2, f_3) . Nel caso particolare in cui $\omega = d\eta$ dove η è una 1-forma data da

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

abbiamo visto che ω è la 2-forma

$$\omega(\mathbf{x}) = (\text{rot } \mathbf{f})_1 dx_2 \wedge dx_3 + (\text{rot } \mathbf{f})_2 dx_3 \wedge dx_1 + (\text{rot } \mathbf{f})_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Dall'uguaglianza (A6.10) otteniamo allora

$$\int_S \omega = \int_S d\eta = \int_S (\text{rot } \mathbf{f})(\mathbf{x}) \cdot \nu(\mathbf{x}) d\sigma = \int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \tau(\mathbf{x}) ds$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Stokes (6.3) e formula (6.8), e ∂S indica il bordo (orientato) della superficie S , che è una superficie 1-dimensionale, dunque una curva. Abbiamo visto che l'ultimo integrale si può scrivere come $\int_{\partial S} \eta$ e quindi, in definitiva, abbiamo ottenuto l'uguaglianza

$$\int_S d\eta = \int_{\partial S} \eta \quad (\text{A6.11})$$

che non è altro che la formula di Stokes (6.8) scritta nel linguaggio delle forme differenziali. Si potrebbe vedere che l'uguaglianza (A6.11) vale più in generale in \mathbb{R}^n con la dimensione n qualsiasi, S superficie compatta orientabile regolare di dimensione $k < n$ ed η una k -forma con coefficienti di classe almeno C^1 . La formula (A6.11) viene pertanto detta *formula di Stokes generalizzata*.

Capitolo 7

Successioni e serie di funzioni

Abbiamo incontrato nel corso di Analisi Matematica 1 le successioni di numeri reali e quelle di numeri complessi, poi nel Capitolo 1 quelle a valori in \mathbb{R}^n . In tutti i casi si tratta di applicazioni da \mathbb{N} (o una semiretta di \mathbb{N}) a valori in un altro spazio, via via \mathbb{R} , \mathbb{C} o \mathbb{R}^n . In questo capitolo studieremo successioni a valori in un insieme più vasto, precisamente un insieme i cui elementi sono a loro volta delle funzioni; vedremo che c'è una grande varietà di fenomeni nuovi rispetto ai casi studiati sinora. Una parte importante del capitolo sarà poi dedicata alle serie di funzioni.

7.1 - Successioni di funzioni e convergenza

Iniziamo con un esempio.

Esempio : studiamo la convergenza della successione

$$a_n = \arctan x^n$$

dove x è un fissato numero reale. Conosciamo bene la risposta, che è un po' articolata perché il limite di $\{a_n\}_n$ dipende dal valore del "parametro" x :

$$\begin{aligned} x > 1 &\implies a_n \rightarrow \pi/2 \\ x = 1 &\implies a_n \equiv \pi/4 \\ -1 < x < 1 &\implies a_n \rightarrow 0 \\ x \leq -1 &\implies a_n \text{ non ha limite.} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ricordiamo che una *successione a valori in un insieme* F , o anche *successione di elementi di* F , è una applicazione da \mathbb{N} (o una sua semiretta) a F . Quel che abbiamo in realtà fatto in questo esempio è stato considerare per ogni n la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan x^n, \quad (7.2)$$

cioè (chiamando per qualche riga F l'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R}) considerare la successione

$$n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in F,$$

fissare un valore \bar{x} e studiare il comportamento della successione di numeri reali

$$n \mapsto f_n(\bar{x})$$

dando una risposta per ciascun valore di \bar{x} .

Definizione : siano A, B due insiemi; con il simbolo $F(A; B)$ indichiamo l'**insieme di tutte le funzioni da A a B** . Una **successione di funzioni da A a B** è una successione a valori in $F(A; B)$.

Esempio : l'espressione $f_n(x) = \arctan x^n$ è una successione di funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} . Dato che sono tutte funzioni continue, anzi derivabili infinite volte, avremmo potuto dire che si tratta di una successione a valori in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ o in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Altri esempi analoghi sono le successioni

$$g_n(x) = 2 + nx, \quad h_n(x) = x/n. \quad (7.3)$$

Esempio : le successioni

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2x^2 + 1}, \quad g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2x^2 + 1}}, \quad h_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + 1} \quad (7.4)$$

sono composte da funzioni continue su \mathbb{R} ; invece i termini della successione

$$j_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{n^4x^4 - 1}} \quad (7.5)$$

non sono definiti su tutto \mathbb{R} , e precisamente il dominio di j_n è

$$D_n = \{x : n^4x^4 > 1\} =]-\infty, -\frac{1}{n}[\cup \frac{1}{n}, +\infty[.$$

Questi domini variano al variare di n , quindi è vero che ogni $j_n \in \mathcal{C}^0(D_n)$, ma se vogliamo trovare un singolo insieme su cui sono definite tutte le j_n osserviamo che

$$D_{n+1} \supset D_n \quad \forall n \implies D_n \supset D_1 \quad \forall n,$$

quindi tutte le j_n sono definite su D_1 . Però osserviamo che, ad esempio, tutte le funzioni j_n sono definite su D_4 per $n \geq 4$, e anzi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{n} tale che

$$j_n \text{ è definita su } D^\varepsilon =]-\infty, -\varepsilon[\cup [\varepsilon, +\infty[\quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Allora possiamo considerare la successione $\{j_n\}_n$ anche su D^ε , limitandoci agli indici $n \geq \bar{n}$.

Esempio : la successione

$$f_n(x, y) = \frac{n^3 x^2}{nx^4 + n^4 y^2} \quad (7.6)$$

è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Nel seguito ci occupiamo **esclusivamente di successioni di funzioni a valori reali (o complessi o in qualche spazio \mathbb{R}^m)**, quindi ometteremo l'indicazione dello spazio d'arrivo. Salvo indicazione esplicita, tutto quel che scriviamo vale per successioni a valori in \mathbb{R} , \mathbb{C} o \mathbb{R}^m , e l'unica modifica da fare sarebbe eventualmente scrivere "norma", con due sbarrette, al posto di "valore assoluto" (o modulo), con una sola sbarretta. Data una successione di funzioni, come abbiamo fatto nell'esempio (7.2) possiamo congelare la variabile (o le variabili, se sono più d'una) e considerare la successione dei valori che le funzioni elementi della successione assumono in quel punto.

Definizione : una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni è **convergente nel punto x** se definitivamente $x \in \text{dom } f_n$ e la successione

$$n \mapsto f_n(x)$$

è convergente. Se $E \subseteq A$ ed f è una funzione definita in E , si dice che **f_n converge puntualmente ad f in E** se

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E.$$

In tal caso si scrive

$$f_n \xrightarrow{\text{pt}} f \quad \text{in } E.$$

Consideriamo il primo esempio visto in (7.2): leggendo (7.1), possiamo dire che f_n converge puntualmente nell'insieme

$$E =]-1, +\infty[$$

alla funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 1 \\ \pi/4 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

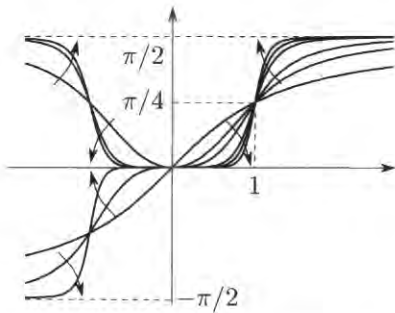


Fig. 7.1 : la successione $\arctan x^n$

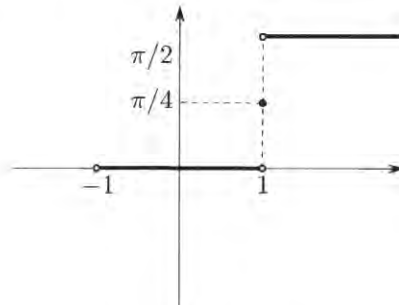


Fig. 7.2 : il limite f

Esempio : guardiamo ora (7.3); dato che, fissato x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

possiamo dire che g_n converge puntualmente solo in $\{0\}$, alla funzione che vale 2 (definita solo per $x = 0$, però). Invece abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi

$$h_n \xrightarrow{\text{pt}} 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

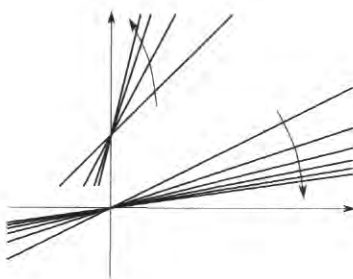


Fig. 7.3 : le successioni g_n e h_n di (7.3)

Esempio : consideriamo le tre successioni di (7.4); abbiamo che

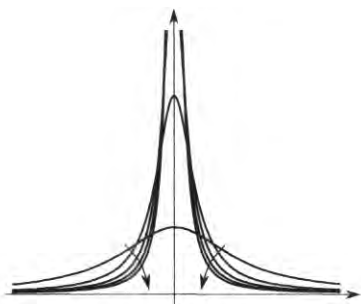
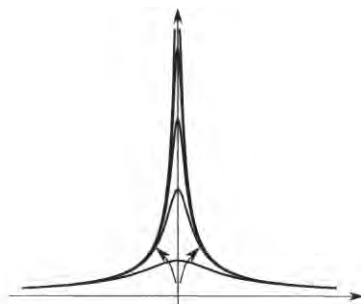
$$f_n(0) = n \rightarrow +\infty$$

mentre per ogni $x \neq 0$, essendo $n^2 x^2 \rightarrow +\infty$, al denominatore domina il termine $n^2 x^2$ e

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 x^2 + 1} = \frac{1}{n(x^2 + 1/n^2)} \rightarrow 0,$$

pertanto

$$f_n \xrightarrow{\text{pt}} 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fig. 7.4 : la successione f_n di (7.4)Fig. 7.5 : la successione g_n di (7.4)

Invece per $x \neq 0$

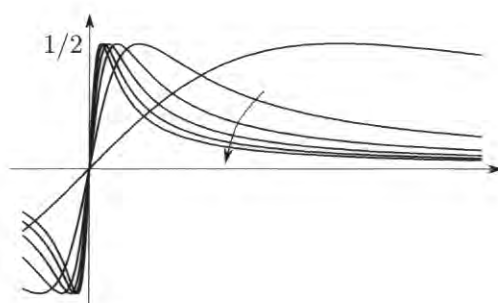
$$g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2 x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|},$$

quindi posto

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1/|x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

abbiamo

$$g_n \xrightarrow{\text{pt}} g \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Fig. 7.6 : la successione h_n di (7.4)

Analogamente (controllate per esercizio: anche qui $x = 0$ si tratta in modo diverso da $x \neq 0$, dato che al denominatore l'addendo che domina cambia a seconda del caso)

$$h_n \xrightarrow{\text{pt}} 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Invece, per la successione j_n di (7.5), abbiamo per ogni $x \neq 0$ che definitivamente $x \in \text{dom } j_n$, e che

$$j_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{n^4 x^4 - 1}} = \frac{x}{n \sqrt{x^4 - 1/n^4}} \rightarrow 0,$$

dunque

$$j_n \xrightarrow{\text{pt}} 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esempio : consideriamo la successione di (7.6); se $y \neq 0$ il termine che domina al denominatore è $n^4 y^2$, quindi

$$f_n(x, y) = \frac{n^3 x^2}{nx^4 + n^4 y^2} = \frac{x}{n(y^2 + x^4/n^3)} \rightarrow 0,$$

mentre per $y = 0$ (dunque necessariamente $x \neq 0$)

$$f_n(x, y) = \frac{n^3 x^2}{nx^4} = \frac{n^2}{x^2} \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$f_n(x, y) \xrightarrow{\text{pt}} 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}.$$

La convergenza puntuale, dunque, si riduce alla convergenza, punto per punto, della successione numerica dei valori. Anche se spesso facile da verificare, questa convergenza ha tuttavia diversi comportamenti scomodi.

Esempio : la successione $f_n(x) = \arctan(nx)$ è composta tutta da funzioni continue, ma converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

che è discontinua in $x = 0$; pertanto

$$\left[f_n \in C^0, \quad f_n \xrightarrow{\text{pt}} f \right] \quad \not\Rightarrow \quad f \in C^0.$$

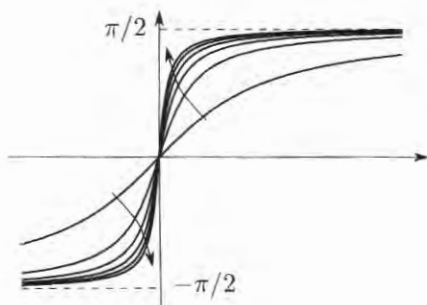


Fig. 7.7 : la successione $\arctan(nx)$

Esempio : la successione $f_n(x) = n^2|x|e^{-n|x|}$ tende puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$, tuttavia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} n^2 x e^{-nx} dx \underset{nx=t}{=} 2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 2 \quad (7.7)$$

mentre chiaramente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, perciò

$$f_n \xrightarrow{\text{pt}} f \quad \text{in } [\alpha, \beta] \quad \not\Rightarrow \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx .$$

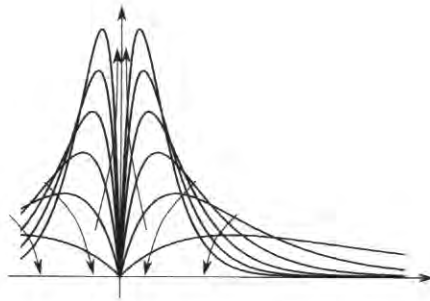


Fig. 7.8 : la successione $n^2|x|e^{-n|x|}$

Come si vede nelle figure, le successioni degli esempi precedenti si avvicinano punto per punto alla funzione limite, ma a seconda del punto x che consideriamo la successione $f_n(x)$ può convergere ad $f(x)$ con velocità diversa.

Esempio : se $f_n(x) = x/n$, che sappiamo tendere puntualmente a $f(x) \equiv 0$, e fissiamo un numero $\varepsilon > 0$, per ogni punto x “definitivamente” $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Esplicitiamo questa parola con delle scelte particolari: se $\varepsilon = 1/100$ e consideriamo il punto $x = 1$, abbiamo

$$|f_n(1) - f(1)| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > 1/\varepsilon = 100 ,$$

quindi per $x = 1$ dobbiamo aspettare $n = 100$ prima che f_n ed f distino meno di $1/100$. Ma se $x = 7$ abbiamo

$$|f_n(7) - f(7)| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > 7/\varepsilon = 700 ,$$

cioè dobbiamo aspettare fino a $n = 700$, e se $x = 1000$ dovremo aspettare fino a $n = 100000$. La vicinanza di $f_n(x)$ a $f(x)$, dunque, si verifica in tempi diversi a seconda del punto x .

Ora che è chiaro che il valore di n nascosto nella parola “definitivamente” può dipendere da x , scriviamo per esteso la definizione già vista di convergenza puntuale: abbiamo $f_n \xrightarrow{pt} f$ in E se

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) : \forall n \geq \bar{n}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (7.8)$$

Talvolta il “tempo di attesa” \bar{n} non dipende da x , ma è uniforme.

Definizione : una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni definite su un insieme E **converge uniformemente in E** a una funzione f se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (7.9)$$

In tal caso si scrive

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ in } E.$$

Osservazione : notiamo esplicitamente che se $E' \subset E$ e c'è convergenza uniforme su E , c'è convergenza uniforme anche su E' .

Osservazione : la convergenza uniforme ha una importante interpretazione geometrica. Se $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ in E , fissiamo ε e sia \bar{n} come in (7.9): se $n \geq \bar{n}$, per ogni $x \in E$ abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

ovvero (per funzioni a valori reali) il grafico di tutte le funzioni f_n a partire da $n = \bar{n}$ è compreso nella striscia di altezza 2ε intorno al grafico di f . Se la successione è a valori in \mathbb{C} o in \mathbb{R}^m , la striscia

$$\{(x, y) : |y - f(x)| < \varepsilon\}$$

è sostituita da una sorta di intorno tubolare del grafico, quello dei punti (x, z) o (x, y) la cui distanza da $(x, f(x))$ è inferiore ad ε .

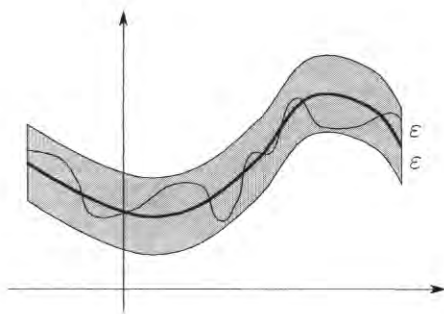


Fig. 7.9 : la striscia di altezza 2ε attorno al grafico di f

Esempio : la successione

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n^x - nx^3)}{n}$$

converge uniformemente su \mathbb{R} alla funzione nulla $f(x)$; infatti, trascurando completamente l'argomento del seno, abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| = |n^{-1} \operatorname{sen}(\dots)| \leq \frac{1}{n}$$

che è minore di ε non appena $n > \bar{n}(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ ove per essere precisi, dato che \bar{n} deve essere un numero naturale, occorrerebbe scrivere non $1/\varepsilon$ ma la parte intera di $1/\varepsilon$.

Esempio : la successione $f_n(x) = n^2|x|e^{-n|x|}$ di (7.7) converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$, ma non converge uniformemente, dato che

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \rightarrow +\infty,$$

e quindi il grafico di f_n non è affatto contenuto in una striscia attorno all'asse x , che è il grafico di f .

Osservazione : dato che il numero \bar{n} di (7.9) verifica anche (7.8), si ha

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{in } E \quad \implies \quad f_n \xrightarrow{\text{pt}} f \quad \text{in } E,$$

ma in generale non è vero il viceversa, come mostra l'esempio precedente.

La convergenza uniforme ha un'altra utile caratterizzazione.

Proposizione 7.1 : una successione $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una funzione f su E se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_E |f_n - f| \right) = 0. \quad (7.10)$$

Infatti

$$\sup_E |f_n - f| < \varepsilon \quad \implies \quad \forall x \in E, \quad |f_n - f| < \varepsilon$$

e

$$\forall x \in E, \quad |f_n - f| < \varepsilon \quad \implies \quad \sup_E |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

Definizione : la **norma uniforme in un insieme E** di una funzione limitata f è la quantità

$$\|f\|_E = \sup_E |f|. \quad (7.11)$$

Se l'insieme E è chiaro dal contesto si scrive semplicemente $\|f\|$. Se f non è limitata, cioè $\sup |f| = +\infty$, scriveremo $\|f\|_E = +\infty$.

Osservazione : alla luce di questa definizione e della proposizione precedente, si ha

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ in } E \iff \|f_n - f\|_E \rightarrow 0. \quad (7.12)$$

La convergenza uniforme, che è più difficile da ottenere rispetto alla convergenza puntuale, ha però indubbi vantaggi.

Teorema 7.2 : se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni definite su un insieme E , che converge uniformemente in E a una funzione f , e se le f_n sono continue in un punto $x_0 \in E$, allora anche f lo è. In particolare

$$\left[f_n \in C^0(E), \quad f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ in } E \right] \implies f \in C^0(E).$$

DIMOSTRAZIONE : fissiamo $\varepsilon > 0$; determiniamo \bar{n} come in (7.9) e consideriamo la funzione $f_{\bar{n}}$: questa è continua in x_0 , quindi esiste $\delta > 0$ tale che per $x \in E$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma usando la disuguaglianza triangolare

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

dato che il primo e il terzo addendo sono minori di ε per (7.9). ■

A questo punto è facile riconoscere che alcune delle successioni viste negli esempi relativi alla convergenza puntuale non potevano essere uniformemente convergenti, dato che si trattava di successioni di funzioni continue con limite discontinuo. È opportuno sottolineare che, anche se il limite puntuale è una funzione continua, questo da solo non basta a dire che la convergenza è uniforme: l'esempio

$$f_n(x) = x/n \xrightarrow{\text{pt}} 0$$

lo mostra. Tuttavia, guardando questo esempio, si nota che il grafico di f_n esce sì dalla striscia $\{(x, y) : -\varepsilon < y < \varepsilon\}$, ma lo fa sempre più lontano, dato che ne esce solo per $|x| \geq n\varepsilon$.

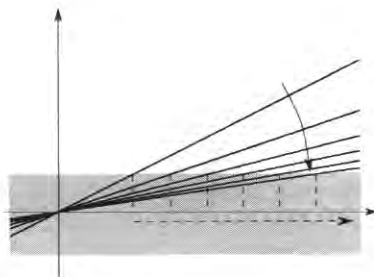


Fig. 7.10 : la funzione x/n esce dalla striscia solo per $|x| > n\varepsilon$

Se ci limitiamo a guardare cosa accade in $[-M, M]$, abbiamo convergenza uniforme in quell'insieme. Dato che questo comportamento non è raro, merita una definizione.

Definizione : una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni definite su un insieme E **converge uniformemente sui compatti di E** a una funzione f se per ogni compatto $K \subset E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_K = 0.$$

Possiamo ora dire che x/n converge a zero uniformemente sui compatti di \mathbb{R} .

Esempio : consideriamo la successione di funzioni

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k. \quad (7.13)$$

Sappiamo calcolare esattamente il valore della somma, dato che

$$s_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

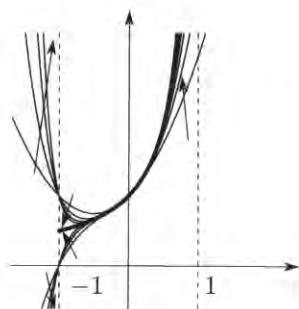


Fig. 7.11 : la successione s_n e (più spesso) il limite

e pertanto possiamo dire che

$$s_n(x) \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \rightarrow \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{non ha limite} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Posto allora

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

abbiamo visto che

$$s_n \xrightarrow{\text{pt}} s \quad \text{in }]-1, 1[.$$

Vediamo se la convergenza è uniforme: per $-1 < x < 1$

$$s(x) - s_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Allora

$$\|s_n - s\|_{]-1,1[} = \sup_{-1 < x < 1} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty \quad (7.14)$$

dato che la frazione, per ogni n fissato, tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 1$. Osserviamo anche (ci servirà poi) che $|x|^{n+1}/(1-x)$ tende a $1/2$ per $x \rightarrow -1$. Dunque (7.12) non c'è convergenza uniforme su $] -1, 1[$. Vediamo che c'è convergenza uniforme sui compatti di $] -1, 1[$: dato che un compatto K è chiuso, non può avere né -1 né 1 come punto aderente (altrimenti tali punti appartenerebbero a K — Proposizione 1.9), pertanto è tutto contenuto in qualche intervallo $[a, b]$ con $-1 < a \leq b < 1$. Allargando eventualmente l'intervallo possiamo prendere $a = -b$, quindi $K \subset [-b, b]$ per qualche $b < 1$. Se mostriamo che c'è convergenza uniforme sugli intervalli della forma $[-b, b]$ abbiamo provato che c'è convergenza uniforme su tutti i compatti. Ma

$$|x| \leq b \implies |s_n(x) - s(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-b} b^{n+1},$$

quindi

$$\|s_n - s\|_{[-b,b]} \leq \frac{1}{1-b} b^{n+1} \rightarrow 0$$

dato che $b < 1$.

Per completare il quadro, mostriamo che se un insieme E **non** è contenuto in qualche intervallo $[-b, b]$, allora non può esserci convergenza uniforme su E : infatti tali insiemi hanno come punto di accumulazione o $x = 1$ o $x = -1$ o entrambi, pertanto per quanto visto in (7.14)

$$\|s_n - s\|_E = +\infty \quad \text{oppure} \quad \|s_n - s\|_E = \frac{1}{2},$$

quindi in ogni caso $\|s_n - s\|_E \not\rightarrow 0$.

Osservazione: avremmo potuto dare una (utile) dimostrazione diversa che che ogni compatto $K \subset] -1, 1[$ è contenuto in qualche intervallo $[-b, b]$ con $b < 1$. La funzione $|x|$ è continua, quindi per il Teorema di Weierstraß 1.20 ha massimo su K . Tale massimo non può essere 1 perché K non contiene 1 né -1 , quindi il massimo è un numero $b < 1$. Ma allora $|x| \leq b$ in K , ovvero $K \subset [-b, b]$.

Osservazione: vediamo un altro modo ancora. L'insieme $C = \mathbb{R} \setminus] -1, 1[$ è chiuso, pertanto — Proposizione 1.22 la funzione

$$x \mapsto d(x, C)$$

è continua. Tale funzione ha allora minimo sul compatto K , per il Teorema di Weierstraß, e il minimo non può essere zero dato che ciò significherebbe che qualche punto di K appartiene a C . Allora il minimo è un numero positivo δ e il compatto K è tutto contenuto nell'insieme dei punti che distano da C almeno δ , che non è altro che $[-1 + \delta, 1 - \delta]$. Alla luce di questa osservazione, provate che ogni compatto contenuto nella palla aperta

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 10\}$$

è in realtà contenuto in qualche palla più piccola.

Vediamo un'altra proprietà della convergenza uniforme.

Teorema 7.3 : se

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{in } [a, b]$$

e le funzioni f_n sono continue allora

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

DIMOSTRAZIONE : di nuovo, fissiamo $\varepsilon > 0$; determiniamo \bar{n} come in (7.9) e consideriamo la funzione $f_{\bar{n}}$: scambiando i ruoli di f_n ed f rileggiamo (7.9) come

$$\forall x \in [a, b], \quad f_{\bar{n}}(x) - \varepsilon < f(x) < f_{\bar{n}}(x) + \varepsilon$$

e quindi

$$\int_a^b (f_{\bar{n}}(x) - \varepsilon) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b (f_{\bar{n}}(x) + \varepsilon) dx$$

ovvero

$$\left(\int_a^b f_{\bar{n}}(x) dx \right) - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \left(\int_a^b f_{\bar{n}}(x) dx \right) + \varepsilon(b-a)$$

o anche

$$\left| \left(\int_a^b f_{\bar{n}}(x) dx \right) - \left(\int_a^b f(x) dx \right) \right| < \varepsilon(b-a)$$

che dà la tesi. ■

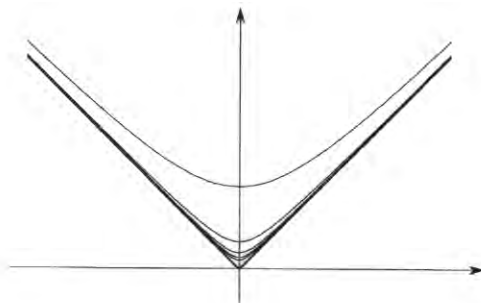
Dunque la convergenza uniforme conserva la continuità e conserva gli integrali. In generale la derivabilità non viene conservata, nel senso che una successione di funzioni derivabili può convergere uniformemente a una non derivabile, oppure a una derivabile, ma la cui derivata non ha nulla a che fare con le derivate degli elementi della successione.

Esempio : se

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1 + n^2 x^2}}{n}$$

abbiamo $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e proviamo che

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f(x) = |x|,$$

Fig. 7.12 : la successione f_n e (più spesso) il limite

che non è derivabile. Infatti dato che si tratta di funzioni pari possiamo limitarci a $x \geq 0$, e

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n} - x = \frac{\sqrt{1+n^2x^2} - nx}{n} = \frac{\sqrt{1+n^2x^2} - \sqrt{n^2x^2}}{n} \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{1+n^2x^2} + \sqrt{n^2x^2})} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

pertanto $\|f_n - f\| \leq 1/n \rightarrow 0$.

Esempio : la successione

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge uniformemente su \mathbb{R} alla funzione nulla, che ha derivata nulla, ma la successione delle derivate

$$f'_n(x) = \cos(nx)$$

non converge puntualmente su tutto \mathbb{R} .

Qualcosa si può dire anche sulle derivate (in realtà, piuttosto sulle primitive). Ricordiamo prima che, se pur conoscessimo la derivata di una funzione incognita f , non potremmo dire chi è f , dato che questa è individuata, tramite la sua derivata, solo a meno di costanti. Se però aggiungiamo la conoscenza del valore di f in un punto, allora f è completamente determinata. Trattando di primitive, il prossimo risultato ha senso soltanto per successioni di funzioni a valori in \mathbb{R} .

Proposizione 7.4 : se $x_0 \in [a, b]$ e $f_n \in C^1([a, b])$ è una successione a valori reali che verifica

$$f'_n \xrightarrow{\text{unif}} g \quad \text{in } [a, b], \quad f_n(x_0) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R},$$

allora posto per ogni $x \in [a, b]$

$$f(x) = \alpha + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

si ha

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{in } [a, b] .$$

DIMOSTRAZIONE : per (1.47) abbiamo

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt ,$$

per cui

$$f_n(x) - f(x) = (f_n(x_0) - \alpha) + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt$$

e usando la disuguaglianza triangolare, (1.46) e (7.11), se $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + (x - x_0) \|f'_n - g\| \\ &\leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b - a) \|f'_n - g\| . \end{aligned}$$

Se $x < x_0$ bisogna cambiare un paio di segni ma la disuguaglianza

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b - a) \|f'_n - g\|$$

rimane vera. Allora

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq |f_n(x_0) - \alpha| + (b - a) \|f'_n - g\|$$

pertanto (7.12)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

e quindi f_n converge ad f uniformemente. ■

Osservazione : se l'intervallo non è chiuso e limitato non possiamo pretendere la convergenza uniforme (ad esempio $f_n = x/n$ ha derivata $f'_n \equiv 1/n$ che tende uniformemente a zero su \mathbb{R} , ma sappiamo che f_n non converge uniformemente), ma si ha la convergenza uniforme sui compatti (e come ipotesi basta che le derivate convergano uniformemente sui compatti).

Esempio : consideriamo la funzione $-\log(1-x)$; la sua derivata è la funzione

$$g(x) = \frac{1}{1-x} ,$$

in cui ci siamo imbattuti nell'esempio (7.13). Consideriamo allora una primitiva di s_n definendo

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

e osserviamo che

$$f_n(0) \equiv 0 , \quad f'_n = s_n \xrightarrow{\text{unif}} g \quad \text{in } [-b, b] \quad \forall b < 1 .$$

Dato che $f(0) = 0$, per la Proposizione 7.4 abbiamo

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

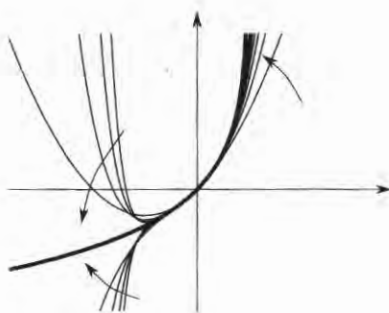


Fig. 7.13 : la successione f_n e (più spesso) il limite; la convergenza è piuttosto lenta

(che la serie converge per ogni $x \in]-1, 1[$ si vede applicando il criterio di convergenza assoluta e quello della radice), con convergenza uniforme sui compatti. Abbiamo quindi provato che

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Vale la pena di dare l'enunciato di due conseguenze del Teorema 7.3 e della Proposizione 7.4, che incontreremo anche nelle Sezioni 7.2 e 7.3.

Corollario 7.5 : se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni reali su un intervallo $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ allora

- 1) se $f_n \in \mathcal{C}^1$, $f_n \xrightarrow{\text{pt}} f$ e $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} g$ su $[a, b]$ allora $g = f'$ e la convergenza $f_n \rightarrow f$ è uniforme;
- 2) se $f_n \in \mathcal{C}^0$, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ e $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt$ allora F_n converge uniformemente alla primitiva di f che si annulla in x_0 .

I risultati valgono su un intervallo qualsiasi I , sostituendo ovunque la convergenza uniforme con quella uniforme sui compatti.

Il prossimo risultato, che generalizza il Teorema 7.2, si usa principalmente per determinare se vi può o meno essere convergenza uniforme su certi insiemi.

Teorema 7.6 : se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni definite su un insieme E , che converge uniformemente in E a una funzione f , e se x_0 è un punto di accumulazione di E per il quale esistono tutti i limiti

$$\ell_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

allora la successione $\{\ell_n\}_n$ ha limite per $n \rightarrow \infty$, la funzione f ha limite per $x \rightarrow x_0$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n.$$

La dimostrazione ricalca quella del Teorema 7.2, con alcune complicazioni tecniche (x_0 ed ℓ_n possono essere infiniti, inoltre occorre usare più o meno esplicitamente la nozione di successione di Cauchy).

Esempio : la successione $f_n(x) = x/n$ tende puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ su \mathbb{R} , ma non può convergere uniformemente su \mathbb{R} ; infatti $+\infty$ è un punto di accumulazione di \mathbb{R} , e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \rightarrow +\infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Corollario 7.7 : se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni definite su un insieme E , che converge puntualmente in E a una funzione f , e se x_0 è un punto di accumulazione di E in cui sia le f_n che f sono continue, ma $f_n(x_0) \not\rightarrow f(x_0)$, la convergenza non poteva essere uniforme su E .

Esempio : riprendiamo l'esempio (7.13); dato che le funzioni s_n sono continue sia in -1 che in 1 , ma non c'è convergenza puntuale né in 1 né in -1 , la convergenza non poteva essere uniforme in alcun sottoinsieme di $] -1, 1[$ che avesse -1 o 1 come punti di accumulazione. Questo lascia, come possibili insiemi di convergenza uniforme, solo gli insiemi che sono contenuti in qualche intervallo $[-b, b]$ con $b < 1$ (es. 7.1).

Concludiamo la sezione citando un risultato importante ma dalla dimostrazione un po' elaborata, per certi versi analogo al Teorema di Bolzano-Weierstraß 1.13. Premettiamo alcune definizioni, ricordando che una funzione f è continua in un punto x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(f, x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x, \quad [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

Definizione : una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni definite su un insieme E si dice **equilimitata su E** se le funzioni f_n sono limitate dalla stessa costante, cioè

$$\exists M : \forall n, \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq M .$$

Una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni definite su un insieme E si dice **puntualmente equicontinua in E** se le funzioni f_n sono continue in E e la scelta di δ può essere fatta indipendentemente da n , ovvero

$$\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in E, \forall n \quad [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon] .$$

Una successione $\{f_n\}_n$ di funzioni definite su un insieme E si dice **equicontinua in E** se le funzioni f_n sono uniformemente continue in E e la scelta di δ può essere fatta indipendentemente da n e da x_0 , ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in E, \forall n \in \mathbb{N} \quad [|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon] .$$

Teorema di Ascoli-Arzelà 7.8 : da ogni successione di funzioni equilimitate ed equicontinue su un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente in K a una funzione continua.

7.2 - Serie di funzioni

Ad ogni successione numerica $\{a_n\}_n$ possiamo associare una serie numerica definendo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

e studiando il limite di s_n : se esso esiste finito, diciamo uguale a ℓ , ossia se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) = \ell \in \mathbb{R} ,$$

diciamo che la *serie di termine generale* a_n converge a ℓ , o anche ha *somma* ℓ .

Lo stesso possiamo fare con le successioni di funzioni, ottenendo delle *serie di funzioni*. Ne abbiamo già incontrata una: la successione $\{s_n\}_n$ di (7.13) è la successione delle somme parziali associata alla successione di funzioni $f_n(x) = x^n$:

$$f_n(x) = x^n \implies s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale di una serie di funzioni non c'è molto da aggiungere: punto per punto, una serie di funzioni è una serie numerica, e si possono applicare tutti i criteri già incontrati nel corso di Analisi Matematica 1. Dobbiamo notare, però, che sono molto poche le serie di numeri reali delle quali sappiamo calcolare esattamente la somma: ciò significa che ci dobbiamo aspettare di poter dire magari che una serie di funzioni converge puntualmente a qualche funzione f , ma senza saper dire di che funzione si tratti.

Esempio : se

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(x^n - x)}{n^4},$$

per ogni punto x la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(x^n - x)}{n^4} \tag{7.15}$$

è a termini non negativi, maggiorata da $\sum_n (1/n^4)$ e pertanto converge; dunque detta $s(x)$ la somma della serie (7.15), che abbiamo appena dimostrato esistere, abbiamo

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(x^k - x)}{k^4} \xrightarrow{\text{pt}} s(x)$$

anche se non sappiamo (molto) altro sulla funzione s .

Questo pone un problema sulla convergenza uniforme: come facciamo a valutare $\sup |s_n - s|$ non conoscendo s ? Intanto diamo le definizioni precise.

Definizione : sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni definite su un insieme E ; diciamo che la *serie* $\sum_n f_n$ **converge puntualmente alla funzione** s **su** E se s è una funzione definita su E e la successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

converge puntualmente a s in E . Diciamo che la *serie converge uniformemente* se la convergenza di s_n a s è uniforme.

Osservazione : se $\{s_n\}_n$ converge puntualmente a s possiamo scrivere

$$s(x) - s_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) - \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x),$$

quindi

$$\|s - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\|.$$

In particolare (7.12)

$$s_n \xrightarrow{\text{unif}} s \text{ in } E \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\|_E = 0. \quad (7.16)$$

Questa osservazione ci offre una scappatoia: definiamo una nuova nozione di convergenza.

Definizione : sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni definite su un insieme E e limitate; diciamo che **la serie $\sum_n f_n$ converge totalmente in E** se la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_E$$

è convergente.

Ricordiamo che una serie di numeri reali converge se e solo se il resto tende a zero, ossia

$$\sum_n a_n = s \in \mathbb{R} \iff 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s - s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k :$$

allora in particolare

$$\sum_n \|f_n\|_E < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_E \right) = 0. \quad (7.17)$$

Proposizione 7.9 : se una serie di funzioni converge totalmente in E allora esiste una funzione f , definita su E e limitata, alla quale la serie converge uniformemente.

DIMOSTRAZIONE : consideriamo un punto $x \in E$; abbiamo

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_E,$$

quindi per il Criterio del confronto 1.52 la serie $\sum_n f_n(x)$ converge assolutamente, dunque converge. Allora si ha convergenza puntuale in E , e posto per ogni $x \in E$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

possiamo scrivere

$$s_n \xrightarrow{\text{pt}} s \quad \text{in } E .$$

Ora per ogni $x \in E$ abbiamo per ogni n, m con $m > n$

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m f_k(x)$$

e quindi

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)|$$

per la disuguaglianza triangolare, ma

$$|f_k(x)| \leq \|f_k\|_E \implies |s(x) - s_n(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m \|f_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| .$$

Dato che questo vale per ogni $x \in E$

$$\|s - s_n\|_E \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|$$

e allora (7.17)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|s - s_n\|_E = 0 ,$$

ossia la convergenza è uniforme. ■

Osservazione : una serie di funzioni può convergere uniformemente anche se non converge totalmente; ad esempio se $f_n(x) = (-1)^n/n$ la serie associata (che è una serie di funzioni costanti) converge puntualmente per il Criterio di Leibniz 1.53, quindi anche uniformemente (sono costanti, perciò nulla dipende da x), ma non totalmente dato che $\|f_n\| = 1/n$ e $\sum_n (1/n) = +\infty$ (es. 7.2).

Esempio : tornando alla serie (7.15) abbiamo

$$\left(\left\| \frac{\text{sen}^2(x^n - x)}{n^4} \right\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^4} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty \right) \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x^n - x)}{n^4} \quad \text{converge totalmente}$$

e quindi la convergenza di s_n alla (sconosciuta) funzione s è uniforme.

Esempio : sappiamo dal corso di Analisi Matematica 1 che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Ora possiamo dire che si tratta di una serie di funzioni che converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione e^x . Dato che non sono funzioni limitate, non possiamo parlare di convergenza totale su \mathbb{R} , ma per ogni $M > 0$

$$\sup_{[-M, M]} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{M^n}{n!}, \quad \sum_n \frac{M^n}{n!} \text{ converge}$$

e quindi c'è convergenza totale su $[-M, M]$ e in particolare c'è convergenza uniforme sui compatti di \mathbb{R} . Non ci può essere convergenza uniforme su insiemi non limitati superiormente o non limitati inferiormente, perché in ambedue i casi la differenza

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right|$$

è la differenza fra un esponenziale e un polinomio di grado n , quindi va all'infinito per $x \rightarrow \pm\infty$ (per motivi diversi nei due casi).

Esempio : il discorso appena fatto permette di costruire l'esponenziale complesso e^z ; la serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge totalmente nelle palle $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$, quindi possiamo chiamare e^z la sua somma. Con un po' di lavoro (che fra l'altro richiede strumenti non introdotti in questo corso) è possibile provare che questa funzione (definita come somma di una serie) verifica la proprietà fondamentale

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Il Corollario 7.5 ha come interessante conseguenza la possibilità di legare una serie e la serie delle derivate.

Teorema di derivazione per serie 7.10 : sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni reali di classe C^1 su un intervallo $[a, b]$, tale che

- 1) la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente a una funzione s ;
- 2) la serie $\sum_n f'_n$ converge uniformemente a una funzione σ .

Allora si ha $\sigma = s'$. Il risultato vale su un intervallo generico, sostituendo la convergenza uniforme con quella uniforme sui compatti.

Teorema di integrazione per serie 7.11 : sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni reali di classe C^0 su un intervallo $[a, b]$, e sia $x_0 \in [a, b]$. Se la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente a una funzione s , allora posto

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt, \quad S(x) = \int_{x_0}^x s(t) dt,$$

la serie $\sum_n F_n$ converge uniformemente a S . Il risultato vale su un intervallo generico, sostituendo la convergenza uniforme con quella uniforme sui compatti.

Esempio : sappiamo che

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

ma almeno per $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

e la serie converge uniformemente sui compatti di $] -1, 1[$ dato che per $0 < M < 1$

$$|x| \leq M \implies |(-1)^n x^{2n}| \leq (M^2)^n \implies \|(-1)^n x^{2n}\|_{[-M, M]} \leq (M^2)^n,$$

e la serie $\sum_n (M^2)^n$ converge, quindi la serie $\sum_n (-1)^n x^{2n}$ converge totalmente in $[-M, M]$. Allora posto per $-1 < x < 1$

$$F_n(x) = \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per il Teorema di integrazione per serie 7.11 abbiamo

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (7.18)$$

Osserviamo che quest'ultima serie non può convergere per $|x| > 1$, dato che il termine generale $(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$ non è infinitesimo. Strano, eppure sia l'arcotangente che la sua derivata $1/(1+x^2)$ sono definite su tutto \mathbb{R} , che ci sarebbe di male se le serie convergessero su tutto \mathbb{R} ? Ne riparleremo fra poco (7.21).

7.3 - Serie di potenze

Dedichiamo questa sezione a un caso, già protagonista di alcuni esempi, che è sia particolarmente importante, sia suscettibile di precisazioni rispetto al caso generale. Conviene mettersi direttamente nel caso complesso.

Definizione : una **serie di potenze** è una serie di funzioni i cui termini sono potenze (intere non negative) di z moltiplicate ciascuna per un coefficiente complesso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

La particolarità delle serie di potenze sta nel tipo di insiemi in cui esse convergono. Anche se la definizione precisa che diamo richiede il concetto di massimo limite, in molti casi non è necessario farvi ricorso, come spieghiamo nell'osservazione che segue la definizione. Ricordiamo che per una successione di numeri reali c_n

$$\max \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ell \in [-\infty, +\infty] \iff \begin{cases} \forall \lambda > \ell, \text{ definitivamente } c_n < \lambda \\ \forall \mu < \ell, \text{ frequentemente } c_n > \mu. \end{cases}$$

In altri termini, il massimo limite è il più grande dei punti limite della successione.

Definizione : il **raggio di convergenza** di una serie di potenze $\sum_n a_n z^n$ è

$$\varrho = \frac{1}{\max \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

dove il valore della frazione è da intendersi zero se il denominatore è $+\infty$ e $+\infty$ se il denominatore è zero. Se $0 < \varrho < +\infty$, la palla centrata nell'origine e di raggio ϱ si chiama **cerchio di convergenza della serie**.

Osservazione : se esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

il raggio di convergenza è semplicemente

$$\varrho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Teorema di Cauchy-Hadamard 7.12 : sia $\sum_n a_n z^n$ una serie di potenze e sia ϱ il suo raggio di convergenza. Allora

- 1) la serie converge puntualmente nei punti dell'interno del cerchio di convergenza, cioè nella palla aperta centrata nell'origine e di raggio ϱ ;
- 2) la serie non converge nei punti dell'esterno del cerchio di convergenza, cioè nei punti esterni alla palla chiusa di raggio ϱ ;
- 3) per ogni $0 < r < \varrho$ la serie converge totalmente nella palla chiusa di raggio r .

DIMOSTRAZIONE : per non complicare la dimostrazione, la facciamo solo nel caso in cui il massimo limite è un limite, e solo se è reale e diverso da zero, ovvero supponiamo

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell \in]0, +\infty[, \quad \varrho = 1/\ell.$$

Dimostriamo 3), che chiaramente implica 1): preso $r < \varrho$, scegliamo un punto intermedio $r < q < \varrho$. Per definizione di limite

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell = \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{q} \implies |a_n| < \frac{1}{q^n} \text{ definitivamente,}$$

ma preso un punto z della palla chiusa C_r di raggio r abbiamo $|z| \leq r$, quindi

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq \left(\frac{r}{q}\right)^n \text{ definitivamente,}$$

e la serie $\sum_n (r/q)^n$ converge perché è una serie geometrica di ragione minore di 1. Allora la serie $\sup_{C_r} |a_n z^n|$ converge.

Resta da provare 2), ma se $|z| = r > \varrho$ abbiamo definitivamente

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r} \implies |a_n| > \frac{1}{r^n} \implies |a_n z^n| > 1$$

e la serie $\sum_n a_n z^n$ non può convergere perché ha il termine generale che non è infinitesimo. ■

Osserviamo che il teorema non dice nulla riguardo ai punti del bordo della palla di raggio ϱ : in questi punti può esserci convergenza puntuale o no, o può esserci convergenza solo in alcuni. In ogni caso l'insieme di convergenza di una serie di potenze è una palla aperta (centrata nell'origine) più eventualmente tutto o parte del suo bordo (per fare i pignoli, il caso $\varrho = 0$ è a parte).

Esempio : le tre serie

$$\sum_n z^n, \quad \sum_n \frac{1}{n+1} z^n, \quad \sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)} z^n \quad (7.19)$$

hanno raggio di convergenza 1, perciò convergono sicuramente all'interno della palla unitaria, e non convergono se $|z| > 1$. Sul bordo, cioè sulla circonferenza unitaria, la prima non converge in alcun punto (il termine generale non è mai infinitesimo), l'ultima converge in tutti i punti (anzi converge totalmente nella palla unitaria chiusa, visto che

$$\frac{\|z^n\|}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

e $\sum_n 1/n^2$ converge), quella di mezzo converge certamente per $z = -1$ (per il Criterio di Leibniz 1.53) e non converge sicuramente per $z = 1$ (è una serie armonica). Dunque in generale il criterio di Cauchy-Hadamard non può dire nulla riguardo alla convergenza

sul bordo del cerchio di convergenza. Per la seconda serie in (7.19) resta da studiare la convergenza nei punti del bordo del cerchio unitario, cioè per tutti i numeri complessi z della forma $\cos \theta + i \sin \theta$. Per tali punti la serie diventa

$$\sum_n \left(\frac{\cos(n\theta)}{n+1} + i \frac{\sin(n\theta)}{n+1} \right) \quad (7.20)$$

e vedremo nella Sezione 7.4 che queste sono delle *serie di Fourier*; in particolare, si ha convergenza per ogni $\theta \neq 0$. Quindi, sul bordo $\{|z| = 1\}$ del cerchio di convergenza si ha convergenza puntuale per ogni $z \neq 1$.

Osservazione : non bisogna pensare che la tesi 3) dica che una serie di potenze converge uniformemente nell'interno del cerchio di convergenza; quello che dice è che sicuramente c'è convergenza uniforme sui compatti che stanno all'interno del cerchio di convergenza. Se ci fosse convergenza uniforme in tutta la palla aperta di raggio ρ , dato che le somme parziali della serie sono funzioni continue definite su tutto \mathbb{C} (sono polinomi) per il Teorema 7.6 ci dovrebbe essere convergenza anche sul bordo della palla, e come abbiamo appena verificato questo non sempre accade.

Esempio : dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

il raggio di convergenza della serie esponenziale $\sum_n z^n/n!$ è $+\infty$, il che significa che (come abbiamo visto) la serie converge puntualmente su tutto \mathbb{C} , e uniformemente su ogni palla. Invece il raggio di convergenza della serie $\sum_n n!z^n$ è zero, quindi questa converge solo per $z = 0$.

Esempio : dato che in campo complesso la funzione

$$\frac{1}{1+z^2} \quad (7.21)$$

è definita dove il denominatore è diverso da zero, cioè per $z \neq \pm i$, la serie

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n},$$

che è una serie di potenze che per $|z| < 1$ ha somma $1/(1+z^2)$, non può convergere in alcun punto al di fuori della palla unitaria, altrimenti $\pm i$ dovrebbero far parte dell'insieme di convergenza, il che è chiaramente impossibile (7.18).

Esempio : sappiamo che la funzione e^{-x^2} non ha primitive che possano essere espresse in termini di funzioni elementari. Però

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}.$$

Per scriverla come una serie di potenze poniamo

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ (-1)^n/n! & \text{se } k = 2n \end{cases}$$

così che

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

La successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ ha limite zero (i pari e i dispari vanno trattati separatamente o con maggiorazioni per unificarli), quindi il raggio di convergenza è $\varrho = +\infty$. Allora posto per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F_k(x) = \int_0^x a_k t^k dt = \frac{a_k}{k+1} x^{k+1},$$

di modo che $F_k \equiv 0$ per k dispari, mentre se $k = 2n$

$$g_n(x) = F_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1},$$

abbiamo per il Teorema di integrazione per serie 7.11

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1} :$$

questa formula (che contiene una serie, ossia un limite, e quindi non è scritta solo in termini di funzioni elementari) permette di calcolare con approssimazione arbitraria il valore delle primitive di e^{-x^2} in qualunque punto.

La prossima definizione è motivata dall'osservazione che per $n \geq 1$

$$D(a_n x^n) = (n a_n) x^{n-1}$$

ovvero per $n \geq 0$

$$D(a_{n+1} x^{n+1}) = (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Definizione : a ogni serie di potenze $\sum_n a_n z^n$ associamo la **serie derivata**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Osservazione : le tre serie dell'esempio (7.19) sono una la serie derivata dell'altra. Che abbiano lo stesso cerchio di convergenza non è un caso.

Proposizione 7.13 : i raggi di convergenza di una serie e della sua serie derivata sono uguali.

DIMOSTRAZIONE : basta ricordare che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ e osservare che se $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$ allora

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = [(n+1)|a_{n+1}|]^{1/n} = \left[{}^{n+1}\sqrt{n+1} \cdot {}^{n+1}\sqrt{|a_{n+1}|} \right]^{1+1/n} \rightarrow \ell,$$

visto che ℓ^1 non è affatto una forma indeterminata. ■

La proposizione precedente ha una conseguenza inaspettata.

Proposizione 7.14 : *se una serie di potenze ha raggio di convergenza $\varrho > 0$, per $|x| < \varrho$ la funzione somma della serie è derivabile, e ha come derivata la somma della serie derivata. In particolare è derivabile infinite volte.*

DIMOSTRAZIONE : se

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

restringendole all'asse reale otteniamo le funzioni (che possono avere valori complessi per via dei coefficienti a_k , ma dipendono da una variabile reale)

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Scegliamo $x_0 \in]-\varrho, \varrho[$ e proviamo che f è derivabile in x_0 . Fissato r con $|x| < r < \varrho$, sappiamo che la successione $\{s_n\}_n$ converge uniformemente in $\{z : |z| \leq r\}$, dato che la serie converge totalmente, perciò f_n converge uniformemente a f in $[-r, r]$. D'altra parte se poniamo

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}, \quad \sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

e

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

il raggio di convergenza di $\{\sigma_n\}_n$ è sempre ϱ , quindi abbiamo

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{in } [-r, r], \quad g_n \xrightarrow{\text{unif}} g \quad \text{in } [-r, r]$$

ma $g_n = f'_n$, quindi per il Corollario 7.5 la funzione f è derivabile in $[-r, r]$ (e quindi in particolare in x_0) con derivata g . Ma anche $g = f'$ è la somma di una serie di potenze con lo stesso raggio ϱ , quindi possiamo riapplicare quanto appena mostrato per ottenere che anche f' è a sua volta derivabile, e così via (naturalmente ci vorrebbe l'induzione) fino a ottenere che f è di classe $C^\infty(]-\varrho, \varrho[)$. ■

Abbiamo dovuto fare un po' di lavoro per passare da funzioni definite su \mathbb{C} a funzioni definite su \mathbb{R} , per le quali sappiamo cosa sia la derivata. In realtà avremmo potuto introdurre la derivata in senso complesso e dire semplicemente che $s(z)$ è derivabile in senso complesso all'interno del cerchio di convergenza, con derivata la somma $\sigma(z)$ della serie derivata. Però la derivata in senso complesso, che apparentemente è definita come quella reale,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se questo limite esiste, ha proprietà assai diverse da quella abituale (tanto per dirne una, se una funzione è derivabile una volta in senso complesso allora è derivabile infinite volte...) e questo studio uscirebbe largamente dagli scopi di questo volume.

Vediamo un'altra conseguenza della Proposizione 7.14.

Proposizione 7.15 : se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (7.22)$$

e la serie $\sum_n a_n z^n$ ha raggio di convergenza positivo, i coefficienti a_n sono quelli dello sviluppo di Taylor di f centrato in $x_0 = 0$, ossia

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

DIMOSTRAZIONE : sappiamo che f è di classe C^∞ , e da (7.22) segue $f(0) = a_0$. D'altra parte per la Proposizione 7.14 abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = 1 \cdot a_1 \implies a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \end{aligned}$$

e così via (al solito, dovremmo usare il principio di induzione). ■

Definizione : se f è derivabile infinite volte per $x = 0$, posto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

se la serie $\sum_n a_n z^n$ ha raggio di convergenza positivo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si chiama **serie di Taylor di f centrata in $x = 0$** .

Osservazione : non sempre la serie di Taylor di f coincide con f ; ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-1/|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte ed ha tutte le derivate nulle in $x = 0$, quindi la sua serie di Taylor è la serie nulla, che ha per somma la funzione zero (evidentemente diversa da f).

Definizione : una funzione si dice **analitica in un intorno di $x = 0$** se è di classe C^∞ e, in un intorno di zero, coincide con la somma della sua serie di Taylor.

Per le funzioni analitiche, la serie di Taylor è un modo per approssimare la funzione con polinomi, ottenendo un'approssimazione via via migliore man mano che il grado aumenta. Vedremo nella prossima sezione un altro modo per approssimare le funzioni periodiche.

Chiudiamo la sezione con un risultato dalla dimostrazione un po' delicata, che omettiamo (es. 7.3).

Criterio di Abel 7.16 : se una serie di potenze ha raggio di convergenza $\rho \in]0, +\infty[$ e converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| = \rho$, allora converge uniformemente sul segmento che congiunge l'origine a z_0 .

7.4 - Serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di Taylor non è l'unico modo di approssimare una data funzione $f(x)$ mediante funzioni più semplici; inoltre, le serie di Taylor forniscono ottime approssimazioni nelle vicinanze del centro x_0 dello sviluppo, ma tali approssimazioni si deteriorano all'aumentare della distanza di x da x_0 .

Vedremo ora che un altro modo di approssimare una data funzione $f(x)$ consiste nello scegliere come funzioni approssimanti delle somme trigonometriche del tipo

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] . \end{aligned} \tag{7.23}$$

Siccome le funzioni approssimanti $f_n(x)$ sono tutte periodiche di periodo 2π , supporremo che anche la funzione iniziale $f(x)$ sia periodica di periodo 2π , o equivalentemente

supporremo che la funzione $f(x)$ sia definita solo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, con in più la condizione

$$f(-\pi) = f(\pi) . \quad (7.24)$$

Infatti, se abbiamo una funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ verificante la condizione (7.24), possiamo costruire una funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π definita da

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi) \text{ se } x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi] \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} .$$

Chiameremo \tilde{f} la funzione ottenuta da f mediante estensione per periodicità.

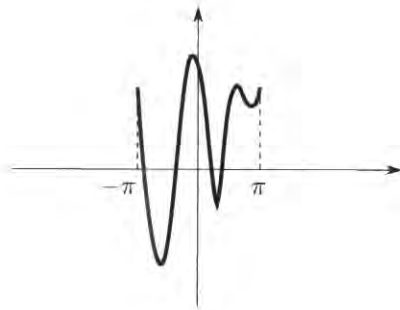


Fig. 7.14 : una funzione verificante (7.24)

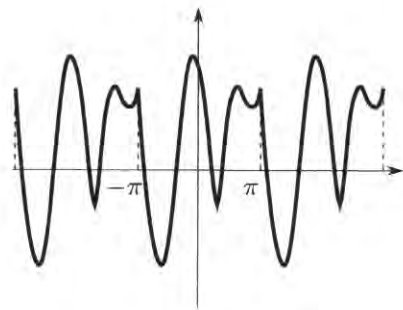


Fig. 7.15 : la sua estensione periodica

Osservazione : in questa sezione, per comodità, prenderemo in considerazione sempre l'intervallo $[-\pi, \pi]$; se si vuole usare un intervallo $[a, b]$ diverso è sufficiente applicare a tutte le funzioni in gioco il cambiamento di variabile \mathfrak{A} (2.4)

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{\pi} x + a + b \right) , \quad x = \frac{\pi}{b-a} (2y - a - b) .$$

Ad esempio, per funzioni f definite sull'intervallo $[0, 1]$ le somme trigonometriche f_n in (7.23) diventano

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n [a_k \cos(k\pi(2x-1)) + b_k \sin(k\pi(2x-1))] .$$

Se ci aspettiamo che le funzioni f_n in (7.23) approssimino la funzione f in maniera ragionevole (vedremo tra breve cosa si intende con questo), possiamo subito ricavare i coefficienti a_k e b_k in maniera esplicita. Se $k = 0$, integrando entrambi i membri di (7.23) su $[-\pi, \pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) dx = 2\pi a_0 . \quad (7.25)$$

Se invece $k > 0$, moltiplicando entrambi i membri di (7.23) per $\cos(kx)$ ed integrando su $[-\pi, \pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \cos(kx) dx = \sum_{j=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} [a_j \cos(jx) \cos(kx) + b_j \sin(jx) \cos(kx)] dx. \quad (7.26)$$

Con facili calcoli (svolgeteli in dettaglio per esercizio) si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ \pi & \text{se } j = k, \end{cases}$$

mentre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \cos(kx) dx = 0 \quad \forall j, k.$$

In definitiva, da (7.26) si ottiene, per $k > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ \pi a_k & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Se ci aspettiamo che per $n \rightarrow +\infty$ gli integrali relativi ad $f_n(x)$ convergano a quelli relativi ad $f(x)$ otteniamo per i coefficienti a_k le espressioni

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{per } k > 0. \quad (7.27)$$

In maniera del tutto analoga, moltiplicando questa volta per $\sin(kx)$ in (7.23) e poi integrando su $[-\pi, \pi]$, si ottengono le espressioni dei coefficienti b_k

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{per } k > 0. \quad (7.28)$$

Lo spazio naturale in cui ambientare la teoria delle serie di Fourier è quello delle funzioni periodiche su $[-\pi, \pi]$, integrabili in senso improprio, e tali che f^2 risulti anch'essa integrabile (in senso improprio).

Definizione : indicheremo con $L^2[-\pi, \pi]$ la classe delle funzioni $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ verificanti la condizione di periodicità (7.24), integrabili in senso improprio su $[-\pi, \pi]$ e tali che

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx < +\infty.$$

La quantità

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (7.29)$$

verrà detta **norma L^2** della funzione f .

Osservazione : è facile verificare (fatelo per esercizio) che lo spazio $L^2[-\pi, \pi]$ definito sopra è uno spazio vettoriale; cioè che se $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ e $t \in \mathbb{R}$ allora si ha

$$f + g \in L^2[-\pi, \pi], \quad tf \in L^2[-\pi, \pi].$$

A stretto rigore però la quantità $\|f\|_{L^2}$ non è proprio una norma, in quanto può essere nulla anche se f non è la funzione nulla; ad esempio, se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.30)$$

si ha $\|f\|_{L^2} = 0$. Senza entrare troppo nei dettagli, che ci porterebbero lontano dagli scopi di questo corso, diciamo che si potrebbe superare questo ostacolo considerando equivalenti due funzioni f, g che hanno $\|f - g\|_{L^2} = 0$; quindi, ad esempio, la funzione f in (7.30) risulterebbe equivalente alla funzione identicamente nulla. Questa precisazione risulta inutile nel caso di funzioni continue; infatti non è difficile verificare (fatelo per esercizio) che f, g sono due funzioni continue, allora

$$\|f - g\|_{L^2} = 0 \implies f(x) = g(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Nel seguito non sempre le funzioni considerate saranno continue, quindi verrà sottintesa l'equivalenza di cui sopra.

Definizione : siano $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ due funzioni assegnate. Diremo che f e g sono tra loro **ortogonali** se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = 0.$$

Osservazione : la condizione $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ assicura che l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ sia convergente in senso improprio; infatti in tal caso la funzione fg risulta assolutamente integrabile, in quanto

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{(f(x))^2 + (g(x))^2}{2}.$$

Inoltre il termine "ortogonale" non è usato a sproposito, infatti si verifica subito che nello spazio $L^2[-\pi, \pi]$ l'applicazione

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

è un prodotto scalare, \square Proposizione 1.2.

Utilizzando la terminologia della definizione precedente possiamo dire che le funzioni

$$\sin(ix), \quad \sin(hx), \quad \cos(jx), \quad \cos(kx) \quad (7.31)$$

sono tutte tra loro ortogonali, se i, j, h, k sono numeri interi, con $i \neq h$ e $j \neq k$.

Definizione : data una funzione $f \in L^2[-\pi, \pi]$ verificante la condizione di periodicità (7.24), i coefficienti a_k, b_k dati dalle formule (7.27), (7.28) si dicono **coefficienti di Fourier** della funzione f e la somma parziale in (7.23) si dice **somma di Fourier** della funzione f . Infine la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

si dice **serie di Fourier** della funzione f .

Resta da analizzare la maniera in cui le funzioni f_n in (7.23) tendono alla funzione f . Riassumiamo qui di seguito le varie convergenze che si possono ottenere sulle serie di Fourier; lo studente che vuole approfondire le questioni più fini sulle serie di Fourier e le relative convergenze potrà consultare uno dei tanti testi disponibili in letteratura sull'argomento.

Definizione : se $\{f_n\}_n$ è una successione in $L^2[-\pi, \pi]$ ed $f \in L^2[-\pi, \pi]$ diremo che $\{f_n\}_n$ converge ad f in norma L^2 se

$$\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Osservazione : di nuovo, a stretto rigore, la convergenza in norma $L^2[-\pi, \pi]$ definita sopra non è una convergenza vera e propria, in quanto il limite di una successione è identificato soltanto a meno di funzioni equivalenti. Nel resto del capitolo non solleveremo più la questione dell'equivalenza L^2 tra funzioni.

Un primo risultato di convergenza riguarda la convergenza in norma L^2 .

Teorema 7.17 : sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ una funzione assegnata. Allora la serie di Fourier di f converge ad f in norma L^2 , cioè

$$\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

dove f_n sono le somme di Fourier definite in (7.23).

Osservazione : dalle formule (7.27) e (7.28) che definiscono i coefficienti di Fourier ricaviamo subito che se f è una funzione dispari, cioè

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in]-\pi, \pi[,$$

allora lo sviluppo di Fourier contiene solo i termini che sono funzioni dispari, che equivale a dire che si ha $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$. Analogamente, se la funzione f è pari, cioè

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in]-\pi, \pi[,$$

allora lo sviluppo di Fourier contiene solo i termini che sono funzioni pari; che equivale a dire che si ha $b_k = 0$ per ogni $k \geq 0$.

Per la convergenza puntuale la situazione è più delicata e richiede ipotesi più forti.

Teorema 7.18 : sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ una funzione assegnata e supponiamo che f sia derivabile in un punto x_0 , allora la serie di Fourier converge a f nel punto x_0 . Più in generale, se f verifica la **condizione del Dini**

$$\exists \delta > 0 \exists y_0 \in \mathbb{R} : \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + t) - y_0}{t} \right| dt < +\infty ,$$

allora la serie di Fourier f_n converge nel punto x_0 al valore y_0 .

Il teorema precedente può essere generalizzato in modo da includere funzioni f discontinue in un punto x_0 . Più precisamente vale il risultato seguente.

Teorema 7.19 : sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ una funzione assegnata e supponiamo che in un punto x_0

(a) esistano finiti i limiti destro $f(x_0^+)$ e sinistro $f(x_0^-)$,

(b) esistano finiti i limiti della derivata prima f' sia a destra che a sinistra di x_0 .

Allora la serie di Fourier converge nel punto x_0 al valore

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Più in generale, se f verifica la **condizione generalizzata del Dini**

$$\exists \delta > 0 \exists A, B \in \mathbb{R} : \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - A|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - t) - B|}{t} dt < +\infty ,$$

allora la serie di Fourier di f converge nel punto x_0 al valore $(A + B)/2$.

Osservazione : va sottolineato che in generale la sola continuità di una funzione 2π -periodica f non è sufficiente a garantire che lo sviluppo in serie di Fourier f_n converga ad f puntualmente. Come illustrato nei teoremi precedenti, per ottenere la convergenza puntuale è necessario aggiungere qualche ipotesi ulteriore, sulla derivata prima di f o più in generale del tipo delle ipotesi del Dini.

Per ottenere la convergenza uniforme delle serie di Fourier dovremo rinforzare ulteriormente le ipotesi sulla funzione f .

Definizione : diremo che una funzione f è **regolare a tratti** se esiste un numero finito di punti x_1, \dots, x_N tali che

(i) f è derivabile per $x \neq x_j$,

(ii) esistono finiti i limiti di f' per $x \rightarrow x_j^+$ e per $x \rightarrow x_j^-$.

Teorema 7.20 : sia $f \in L^2[-\pi, \pi]$ una funzione assegnata e supponiamo che f sia regolare a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ su cui f è continua.

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{se } x \in]-\pi, 0[; \end{cases}$$

poniamo poi $f(0) = f(-\pi) = f(\pi) = 0$ di modo che la funzione f risulti definita su $[-\pi, \pi]$ e periodica. La funzione f , che viene anche detta *onda quadra*, è dispari, per cui il suo sviluppo di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) .$$

Dal Teorema 7.20 ricaviamo che la serie di Fourier converge ad f uniformemente su tutti gli intervalli $[a, b]$ con $0 < a < b < \pi$ o con $-\pi < a < b < 0$. I coefficienti di Fourier b_n si ottengono facilmente:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \left[-\frac{2}{n\pi} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) , \end{aligned}$$

da cui si ricava l'uguaglianza

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \operatorname{sen}(nx) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi} \operatorname{sen}((2h+1)x) \quad \forall x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Per $x = \pi/2$, tenuto conto che

$$\operatorname{sen}(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

si ottiene

$$1 = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) (-1)^{(n-1)/2}$$

e quindi, scrivendo ogni numero dispari n nella forma $2k+1$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

Prendendo invece $x = 1$ in (7.32) si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)}{2k+1} .$$

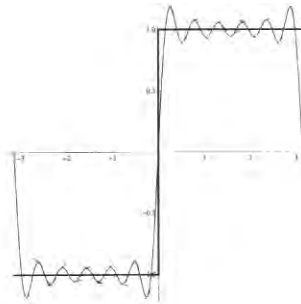


Fig. 7.16 : i grafici della funzione $x/|x|$ e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 11$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = x \quad \forall x \in]-\pi, \pi[$$

ponendo poi $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, di modo che la funzione f risulti definita su $[-\pi, \pi]$ e periodica. La funzione f è dispari, per cui il suo sviluppo di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) .$$

Dal Teorema 7.20 ricaviamo che la serie di Fourier converge ad f uniformemente su tutti gli intervalli $[a, b]$ con $-\pi < a < b < \pi$. I coefficienti di Fourier b_n si ottengono facilmente:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = -2 \frac{(-1)^n}{n} , \end{aligned}$$

da cui si ricava l'uguaglianza

$$x = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx) \quad \forall x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[.$$

Mettendo questo sviluppo insieme a quello della funzione $x/|x|$ dell'esempio precedente, si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{1}{2} \left(\pi \frac{x}{|x|} - x \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \quad \forall x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[, \quad (7.33)$$

da cui si ha

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \quad \forall x \in]0, \pi[,$$

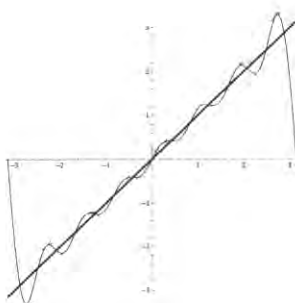


Fig. 7.17 : i grafici della funzione x e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 7$

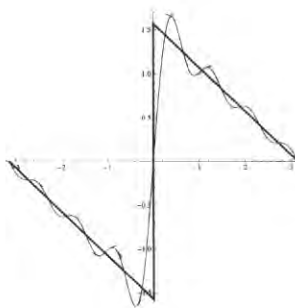


Fig. 7.18 : i grafici della funzione in (7.33) e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 7$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = |x|$$

che, se ristretta a $[-\pi, \pi]$, verifica (7.24), e quindi la possiamo pensare estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} . La funzione f è pari, per cui il suo sviluppo di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) .$$

Dal Teorema 7.20 ricaviamo che la serie di Fourier converge ad f uniformemente su tutto $[-\pi, \pi]$. I coefficienti di Fourier a_n si ottengono facilmente (fate i calcoli in dettaglio):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2} ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) .$$

Osservando che

$$((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

otteniamo lo sviluppo di Fourier

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ dispari}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Per $x = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (7.34)$$

Se ora poniamo

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

abbiamo da (7.34)

$$S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{S_2}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

da cui si ricava

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

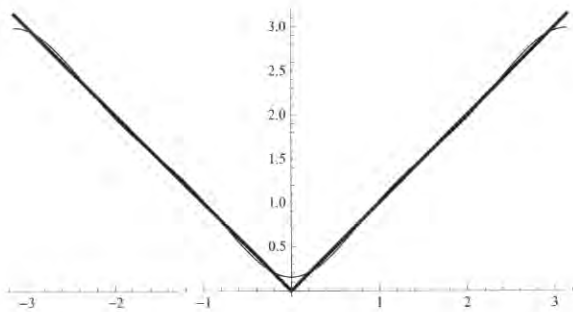


Fig. 7.19 : i grafici della funzione $|x|$ e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 3$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2$$

che, se ristretta a $[-\pi, \pi]$, verifica (7.24), e quindi la possiamo pensare estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} . La funzione f è pari, per cui il suo sviluppo di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Dal Teorema 7.20 ricaviamo che la serie di Fourier converge ad f uniformemente su tutto $[-\pi, \pi]$. I coefficienti di Fourier a_n si ottengono facilmente (fate i calcoli in dettaglio):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Otteniamo quindi lo sviluppo di Fourier

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Per $x = \pi$ si ha

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

da cui si ricava nuovamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

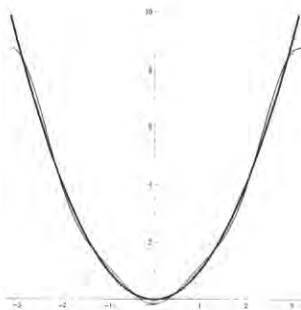


Fig. 7.20 : i grafici della funzione x^2 e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 3$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = x^4$$

che, se ristretta a $[-\pi, \pi]$, verifica (7.24), e quindi la possiamo pensare estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} . La funzione f è pari, per cui il suo sviluppo di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Dal Teorema 7.20 ricaviamo che la serie di Fourier converge ad f uniformemente su tutto $[-\pi, \pi]$. I coefficienti di Fourier a_n si ottengono facilmente (di nuovo, vi consigliamo di svolgere i calcoli in dettaglio):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = 8(-1)^n \left(\frac{\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right).$$

Otteniamo quindi lo sviluppo di Fourier

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right) \cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Per $x = \pi$ si ha

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right) = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

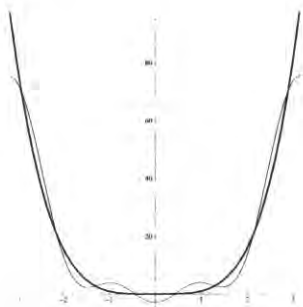


Fig. 7.21 : i grafici della funzione x^4 e della somma di Fourier $f_n(x)$ con $n = 3$

Dagli esempi precedenti risulta chiaro che la velocità di convergenza dello sviluppo di Fourier f_n verso f (e quindi l'efficacia di un tale sviluppo nell'approssimazione di una data funzione) varia notevolmente a seconda della funzione f considerata. Dall'espressione dello sviluppo di Fourier f_n in (7.23) e dall'ortogonalità delle funzioni in (7.31) si ottiene facilmente l'uguaglianza

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (7.35)$$

valida per ogni funzione f avente

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx < +\infty.$$

Definizione : diremo che una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali è **di quadrato sommabile** se

$$\sum_n a_n^2 < +\infty.$$

Osservazione : dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica ricaviamo che una successione di quadrato sommabile verifica $a_n^2 \rightarrow 0$ e quindi è necessariamente infinitesima. In particolare, le successioni a_n e b_n in (7.35) sono infinitesime, di quadrato sommabile, e si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_n(x))^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Se ora la funzione f che consideriamo, oltre ad avere il quadrato integrabile è anche derivabile, con derivata di quadrato integrabile, possiamo sviluppare $f'(x)$ ottenendo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)].$$

In tal caso, non solo i coefficienti di Fourier a_n e b_n sono infinitesimi e di quadrato sommabile, ma anche na_n ed nb_n risultano infinitesimi e di quadrato sommabile. In maniera analoga, se la funzione f risulta derivabile m volte, con derivata $f^{(m)}$ di quadrato integrabile, allora i coefficienti di Fourier a_n e b_n risulteranno tali che $n^m a_n$ ed $n^m b_n$ sono infinitesimi e di quadrato sommabile (§ es. 7.4).

Abbiamo detto che la serie di Taylor costituisce un modo per approssimare funzioni nelle vicinanze di un punto assegnato, e che la serie di Fourier è particolarmente adatta ad approssimare funzioni periodiche. Facciamo osservare che se una serie converge uniformemente, le sue somme parziali approssimano bene la funzione somma f , nel senso che distano uniformemente meno di ε dal f per n abbastanza grande. Dunque per molti scopi possiamo sostituire f con una somma parziale: ma in tal caso ci basta conoscere **un numero finito di coefficienti**, che sono numeri reali, e non **tutta** la funzione f , che potrebbe avere una espressione estremamente complicata. Così se dobbiamo trasmettere a qualcuno una funzione, e ci accontentiamo di una certa approssimazione, possiamo trasmettere non una funzione, ma un numero finito di coefficienti. Questo ha applicazioni importantissime: ad esempio, anziché un segnale musicale (che in formato AIFF occupa molto spazio di memoria o di trasmissione) possiamo registrare in memoria, o trasmettere, una parte di serie di Fourier (il che è alla base di compressioni come quella MP3, che occupa solo una frazione dello spazio di un file AIFF), a prezzo di una certa approssimazione (ovvero diminuzione della qualità sonora) che in certe situazioni (ascolto con cuffiette di moderata qualità) è accettabile.

Esercizi relativi al capitolo 7

Esercizio 7.1 : studiate la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

- a) $f_n(x) = -1 + \frac{x}{n}$;
- b) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$;
- c) $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$;
- d) $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$;
- e) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$;
- f) $f_n(x) = \frac{n}{(1 + nx)^2}$;
- g) $f_n(x) = \left(\frac{n}{1 + n^2 x^2} \right)^n$;
- h) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$;
- i) $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}}$;
- j) $f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$;
- k) $f_n(x) = \left(1 + \cos \frac{x}{n} \right)^n$;
- l) $f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x \right)^n$ su $[0, \pi]$;
- m) $f_n(x) = \frac{x^n + (n+1) \log x}{x^{n+1}}$;
- n) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \geq \frac{1}{n} \\ n^2 x^2 & \text{per } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$ su $[-1, 1]$;
- o) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ \sin(nx) & \text{per } 0 < x < \pi/n \\ 1 & \text{per } \pi/n \leq x \leq 2\pi ; \end{cases}$
- p) $f_n(x) = \arctan(x^n)$.

Esercizio 7.2 : studiate la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$;
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}}$;
- e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$;
- f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^3 e^{-nx}$;
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$;
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}$.

Esercizio 7.3 : studiate la convergenza assoluta delle seguenti serie di potenze di variabile complessa:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3n-1}{2n}\right)^{n-1}}{\left(\frac{4}{n} + \frac{3}{n}i\right)} z^n$;
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n!} z^n$;
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$.
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{3n + \log n}$.

Esercizio 7.4 : sviluppate in serie di Fourier le funzioni seguenti, definite sull'intervallo $] -\pi, \pi[$ e prolungate per periodicità a tutto \mathbb{R} :

- a) $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ \beta & \text{se } x \in]0, \pi[\end{cases}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- b) $f(x) = e^x$;
- c) $f(x) = (\cos x)^+$;
- d) $f(x) = (\sin x)^+$;
- e) $f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x$;

f) $f(x) = |\sin x|$;

g) $f(x) = \max\{1, 1+x\}$.

Esercizio 7.5 : determinate lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos(x/2) \quad x \in [0, 2\pi[$$

prolungata per periodicità (di periodo 2π) a tutto \mathbb{R} . Utilizzate lo sviluppo precedente per calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2} .$$

Appendice al capitolo 7

Appendice 7.1 - Serie ed equazioni differenziali

Le serie di funzioni possono essere usate per “risolvere” alcune equazioni differenziali. Ad esempio, risolviamo il (ben noto) problema di Cauchy

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1; \quad (\text{A7.1})$$

cerchiamo una soluzione che sia una funzione analitica, ovvero della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{A7.2})$$

con serie che ha raggio di convergenza positivo. Naturalmente, nessuno ci garantisce che una soluzione del genere esista: il Teorema di esistenza di Peano 5.2 permette di affermare che una soluzione c'è, ma non che questa debba per forza essere analitica in un intorno di zero (per amor del vero, esiste un teorema più complicato che dice proprio questo). Dunque stiamo facendo un tentativo, che potrebbe non andare a buon fine.

Se y verifica (A7.1) e (A7.2), deve essere anzitutto

$$1 = y(0) = a_0,$$

e inoltre grazie alla Proposizione 7.14 abbiamo all'interno del cerchio di convergenza

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n :$$

allora deve essere

$$0 = y'(x) - y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_n]x^n \quad \forall x$$

in tutto il cerchio di convergenza. Ma una serie di potenze con raggio di convergenza positivo è la funzione nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli (potete provarlo per esercizio) perciò

$$(n+1)a_{n+1} = a_n$$

e quindi la successione a_n verifica la definizione per induzione

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n \end{cases} \quad (\text{A7.3})$$

Sappiamo che queste due righe definiscono una e una sola successione, e dato che $a_n = 1/n!$ le verifica questa è la sola successione per la quale valgono le (A7.3), dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n :$$

sappiamo che questa serie ha raggio di convergenza positivo e che la sua somma è e^x , dunque abbiamo risolto il problema di Cauchy (A7.1).

Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione differenziale

$$x^2 y'' - 7xy' + 3y = e^x ,$$

che non è in forma normale e può essere messa in tale forma solo per $x \neq 0$. Procediamo come prima:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

dunque

$$x^2 y'' - 7xy' + 3y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 7 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

che, separando i termini con potenze zero e uno e raccogliendo gli altri, diviene

$$\dots = 3a_0 + (-7a_1 + 3a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) - 7n + 3] a_n x^n = 3a_0 - 4a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 8n + 3) a_n x^n .$$

Se vogliamo che y risolva l'equazione proposta, dato che $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, deve essere

$$3a_0 = 1 , \quad -4a_1 = 1 , \quad (n^2 - 8n + 3)a_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 2$$

e fortunatamente otteniamo

$$a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{1}{(n^2 - 8n + 3)n!} \quad \forall n \geq 2.$$

Perché fortunatamente? Ricordiamo che non essendo l'equazione in forma normale in $x = 0$, a priori non c'era motivo per ottenerne una soluzione analitica (e quindi in particolare *definita*) in un intorno di zero; inoltre abbiamo diviso per $n^2 - 8n + 3$: cosa sarebbe successo per $n = 4$ se il coefficiente di y fosse stato 16 e non 3? E in ogni caso, abbiamo ottenuto come "soluzione" l'espressione

$$y(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 8n + 3)n!} x^n.$$

La serie converge uniformemente e ha raggio di convergenza infinito, ma... bella espressione: quanto vale questa funzione in qualsiasi punto diverso da zero? Non è espressa in termini di funzioni elementari! Possiamo però, grazie alla convergenza uniforme, tracciare il grafico non di y , ma di qualcosa che gli somiglia: ad esempio della sua approssimante con soli 4, 5 o 6 termini, come

$$y_5(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{72}x^3 - \frac{1}{312}x^4.$$

Quanto differisce y_5 da y nell'intervallo $[-1, 1]$? Osserviamo che $n^2 - 8n + 3$ non vale mai zero (n è un numero naturale!), quindi (essendo un numero intero) in valore assoluto è sempre maggiore o uguale a 1, pertanto per $n \geq 5$ (ma basta $n \geq 2$)

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!}$$

e quindi (dimostrate al volo che $(n+m)!$ è (molto) più grande di $n!m!$)

$$|y(x) - y_5(x)| \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+5)!} \leq \frac{1}{5!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{e}{120} \leq \frac{1}{40}.$$

La stima precedente è piuttosto grossolana; con un po' più di attenzione la quantità $|y(x) - y_5(x)|$ si può stimare meglio: ad esempio, osservando che

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{5!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+6)!} \leq \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{120} \left(1 + \frac{e}{6}\right),$$

si ottiene

$$|y(x) - y_5(x)| \leq 1.211 \cdot 10^{-2};$$

usando invece

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} = e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = e - \frac{65}{24},$$

si ottiene

$$|y(x) - y_5(x)| \leq 0.995 \cdot 10^{-2}.$$

Per completare le ragioni per cui abbiamo messo fra virgolette la parola "risolvere" osserviamo che nel primo esempio siamo riusciti a determinare esplicitamente l'unica successione che verifica (A7.3), ma in generale questo è assai difficile.

Appendice 7.2 - Serie di Fourier ed equazioni differenziali

Diamo un cenno ad una importante applicazione delle serie di Fourier; proviamo a risolvere il problema di Cauchy (anche questo facilmente risolvibile con i metodi già visti)

$$y''(t) + 4y(t) = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Cerchiamo una soluzione che sia sviluppabile in serie di Fourier, ovvero

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

(senza addentrarci nelle ipotesi che garantiranno la convergenza della serie). Abbiamo

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)], \quad y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-n^2 a_n \cos(nt) - n^2 b_n \sin(nt)]$$

e quindi

$$y''(t) + 4y(t) = 4a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(4 - n^2)a_n \cos(nt) + (4 - n^2)b_n \sin(nt)].$$

Se vogliamo che questa somma sia uguale a $\sin t$, la cui serie di Fourier ha un solo termine non nullo, occorre che

$$4a_0 = 0, \quad (4 - n^2)a_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad (4 - 1)b_1 = 1, \quad (4 - n^2)b_n = 0 \quad \forall n \geq 2.$$

In particolare, dato che $4 - n^2$ non si annulla salvo che per $n = 2$,

$$a_0 = a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0, \quad b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0, \quad 3b_1 = 1$$

mentre a_2 e b_2 possono assumere qualunque valore. Dunque la soluzione dell'equazione differenziale avrà la forma

$$y(t) = a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t$$

con a_2 e b_2 qualsiasi. Inserendo i dati iniziali ricaviamo

$$a_2 = 1, \quad 2b_2 + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow b_2 = -\frac{2}{3}$$

e infine

$$y(t) = \cos(2t) - \frac{2}{3} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t.$$

Appendice 7.3 - Serie di Fourier ed equazioni differenziali alle derivate parziali

Se abbiamo una funzione di due variabili $f(t, x)$ possiamo considerarla, per ogni x fissato, come funzione della sola variabile t , e (sotto le ipotesi che lo permettono) determinarne la serie di Fourier. Questa avrà dei coefficienti che cambieranno a seconda del punto x fissato, e dunque saranno funzioni di x . Sotto ipotesi che garantissero la convergenza potremmo allora scrivere

$$f(x, t) = a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(x) \cos(nt) + b_n(x) \sin(nt)] .$$

Proviamo a risolvere, senza assolutamente entrare nel dettaglio e specialmente senza andare a cercare le ipotesi sotto cui le serie che scriviamo convergono, l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} . \quad (\text{A7.4})$$

Operando formalmente abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n(x) \cos(nt) - na_n(x) \sin(nt)] , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= a_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n''(x) \cos(nt) + b_n''(x) \sin(nt)] \end{aligned}$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a x . Allora l'equazione differenziale si riscrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nb_n(x) \cos(nt) - na_n(x) \sin(nt)] = a_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n''(x) \cos(nt) + b_n''(x) \sin(nt)]$$

da cui

$$a_0''(x) = 0 \quad (\text{A7.5})$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n'' = nb_n , \quad b_n'' = -na_n . \quad (\text{A7.6})$$

Abbiamo quindi trasformato l'equazione alle derivate parziali (su cui non abbiamo metodi risolutivi) in (infinite) equazioni ordinarie! Da (A7.5) abbiamo

$$a_0(x) = c_1 + c_2 x$$

mentre per ogni $n \geq 1$ le due equazioni (A7.6) si traducono nel sistema

$$b_n = a_n''/n , \quad a_n^{(4)}/n = -na_n \iff a_n^{(4)} + n^2 a_n = 0 .$$

L'equazione caratteristica $z^4 + n^2 = 0$ ha quattro soluzioni,

$$z = \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

cui corrispondono le soluzioni fondamentali

$$\begin{aligned} e^{x\sqrt{2n}/2} \operatorname{sen}(x\sqrt{2n}/2), & \quad e^{x\sqrt{2n}/2} \cos(x\sqrt{2n}/2), \\ e^{-x\sqrt{2n}/2} \operatorname{sen}(x\sqrt{2n}/2), & \quad e^{-x\sqrt{2n}/2} \cos(x\sqrt{2n}/2). \end{aligned}$$

La funzione a_n è una combinazione lineare di queste quattro, mentre b_n si ricava da a_n grazie all'uguaglianza $b_n = a_n''/n$.

L'equazione alle derivate parziali (A7.4) è nota come *equazione del calore* e descrive la diffusione del calore in un mezzo conduttore; in particolare la soluzione $f(x, t)$ che verifica la condizione iniziale $f(x, 0) = g(x)$ rappresenta la temperatura nel punto x al tempo t di un filo conduttore che al tempo $t = 0$ ha distribuzione di temperatura $g(x)$.

Appendice 7.4 - La funzione di Weierstrass

Mediante le serie di Fourier si possono costruire diverse funzioni con comportamenti piuttosto anomali. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(2^n x)$$

è detta *funzione di Weierstraß* ed ha le proprietà seguenti:

- (a) è periodica di periodo 2π ;
- (b) è continua su tutto \mathbb{R} ;
- (c) non è derivabile in alcun punto di \mathbb{R} .

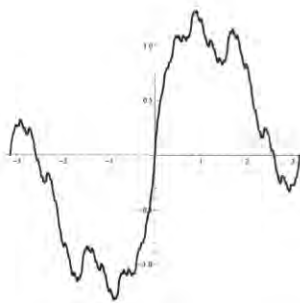
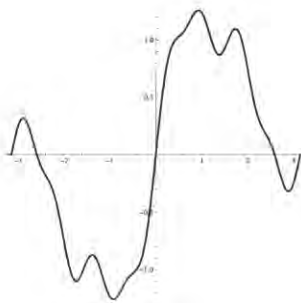


Fig. A7.1 : l'approssimazione di f per $n = 3$ Fig. A7.2 : l'approssimazione di f per $n = 7$

Osserviamo che la serie che definisce f è una serie di Fourier del tipo (7.23) con $a_n = 0$ per ogni n e

$$b_k = \begin{cases} 1/k & \text{se } k \text{ è una potenza di } 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La periodicità di f è ovvia, in quanto ogni termine della serie è periodico di periodo 2π . Inoltre, la serie in questione converge totalmente su tutto \mathbb{R} ; infatti si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|2^{-n} \sin(2^n x)\|_{\mathbb{R}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

Dunque, la continuità di f segue dalla Proposizione 7.9 e dal Teorema 7.2. La dimostrazione della proprietà (c) è invece più delicata e non rientra fra gli scopi di questo libro.

Lista dei simboli

Raccogliamo in questa lista i simboli matematici usati in questo volume.

Insiemi e vettori

- $\|X\|$ norma di un vettore: 2
 $X \cdot Y$ prodotto scalare: 3
 $V \wedge W$ prodotto vettore: 7
 $\overset{\circ}{E}$ interno di un insieme: 33
 \overline{E} chiusura di un insieme: 33
 ∂E bordo o frontiera di un insieme: 33
 $d(P, E)$ distanza da un insieme: 46

Curve

- $V_\phi(t_0)$ vettore velocità: 89
 $v_\phi(t_0)$ velocità scalare: 89
 $\tau_\phi(t_0)$ versore tangente: 90
 $A_\phi(t_0)$ vettore accelerazione: 96
 $\kappa(t)$ vettore curvatura: 99
 $k(t)$ curvatura scalare: 99
 $\rho(t)$ raggio di curvatura: 99
 $\ell(t_0, t_1, \dots, t_k)$ lunghezza di una poligonale: 103
 $\ell(\phi)$ lunghezza di una curva: 104
 $\int_\phi f ds$ integrale di una funzione su una curva: 117
 B_ϕ baricentro di una curva: 119
 $\phi_1 + \phi_2$ concatenazione o somma di curve: 122
 $\int_\phi F$ lavoro di un campo lungo una curva: 125

$\ell(E)$ lunghezza di un insieme: 127

$\int_E f \, ds$ integrale di una funzione su un insieme: 127

Funzioni

$\lim_{\|X\| \rightarrow +\infty} f(X)$ limite all'infinito: 51

$\lim_{X \rightarrow P} f(X)$ limite: 50

C^1 funzioni con derivata continua: 74

C_{tr}^1 funzioni C^1 a tratti: 74

$\|f\|_E$ norma uniforme: 415

L^2 funzioni a quadrato sommabile: 438

$\|f\|_{L^2}$ norma in L^2 : 438

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$ derivata parziale: 148

$\partial_{x_k} f$ derivata parziale: 148

$D_k f$ derivata parziale: 148

∇f gradiente: 148

∂f gradiente: 148

∇f matrice jacobiana: 149

$\operatorname{div} f$ divergenza: 150

$\operatorname{rot} f$ rotore: 376

$D_v f$ derivata direzionale: 152

$\partial_v f$ derivata direzionale: 152

$\frac{\partial f}{\partial v}$ derivata direzionale: 152

$f_n \xrightarrow{\text{pt}} f$ convergenza puntuale: 409

$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ convergenza uniforme: 414

Integrali

$\operatorname{epi} f$ epigrafico di una funzione: 176

$\iint_E f(x, y) \, dx \, dy$ integrale: 219, 220, 224

f^+ , f^- parti positiva e negativa: 219

$\operatorname{Area}(A)$ area o superficie: 223, 230, 264

$\Pi_x(E)$ proiezione di un insieme: 244

$S_{x_0}(E)$ sezione di un insieme: 244

$\int_\phi f \, d\sigma_k$ integrale di k -superficie: 264, 275

$\int_{\phi(A)} f \, d\sigma_k$ integrale su una k -superficie: 264, 275

$\operatorname{Area}_k(\phi(A))$ superficie k -dimensionale: 275

$\nu(x_0)$ normale esterna: 388

Indice analitico

Abbiamo cercato di rendere questo indice il più facile possibile da utilizzare, includendo moltissime voci e spesso citando quelle composte sotto tutte le componenti (ad esempio, "criterio di Abel" compare sia sotto la voce "criterio" che sotto la voce "Abel"). Quando, nella lettura del testo, incontrate una struttura matematica di cui non ricordate esattamente definizione e proprietà, vi consigliamo di cercarla immediatamente, aiutandovi sia con l'indice analitico che con l'indice del libro.

- Abel, criterio di: 436
- accelerazione, vettore: 96
- Accumulazione, punto di: 35
- aderente, punto: 33
- analitica
 - funzione: 436
 - angoloso, punto: 94
- aperto
 - insieme: 31
 - regolare: 387
- approssimabile, insieme: 255
- archi, insieme connesso per: 379
- Archimede, spirale di: 135
- arco, parametro di: 107
- area: 223,264
- aritmetica, media: 205
- armonica, media: 205
- Ascoli-Arzelà, teorema di: 424
- assi
 - rotazione degli: 26
 - traslazione degli: 23
- astroide: 136
- baricentro: 68,119
- base canonica di \mathbb{R}^n : 2
- Bernoulli, lemniscata di: 141
- Bolzano-Weierstraß, Teorema di: 38
- bordo
 - di un insieme: 33
 - punto di: 33
- cambiamento di variabile, teorema di: 234
- campo
 - centrale: 377
 - continuo: 375
 - flusso di un: 388
 - irrotazionale: 376
 - lavoro lungo una curva: 125,378
- canonica, base di \mathbb{R}^n : 2
- caratterizzazione sequenziale dei compatti: 39
- cardioide: 137
- carta locale: 180
- catenaria: 110,363
- Cauchy
 - Hadamard, teorema di: 430
 - Lipschitz, teorema di: 304
 - problema di: 286
- centrale, campo: 377
- cerchio di convergenza: 430
- chiocciola di Pascal: 142
- chiusa, forma differenziale: 402
- chiuso, insieme: 32
- chiusura di un insieme: 33
- cicloide: 138
- cilindrica, elica: 84
- cilindriche, coordinate polari: 29
- cilindro
 - generato: 17

- superficie del: 17
- circolare, paraboloide: 13
- circondare un insieme: 385
- cissoide di Diocle: 138
- clotoide: 134
- coefficienti
 - di Fourier: 440
 - di una forma differenziale: 401
- combinazione
 - convessa: 68
 - lineare: 6
- compatti, convergenza uniforme sui: 417
- compatto
 - caratterizzazione sequenziale: 39
 - insieme: 36
- componente connessa: 37
- componenti di un vettore: 1
- concatenazione di curve: 122
- condizione
 - del Dini: 441
 - del Dini generalizzata: 441
- connessa, componente: 37
- connesso, insieme: 37
 - per archi, insieme: 379
- cono
 - generato: 19
 - superficie del: 18
- continua
 - funzione: 41
 - uniformemente, funzione: 45
- continuo, campo: 375
- convergenza
 - cerchio di: 430
 - L^2 : 440
 - puntuale: 409,425
 - raggio di: 430
 - totale: 426
 - uniforme: 414,425
 - uniforme sui compatti: 417
- convessa
 - combinazione: 68
 - funzione: 177
- convesso
 - insieme: 37
 - involucro: 68
- coordinate
 - polari nel piano: 27
 - polari cilindriche: 29
 - polari sferiche: 28
 - rotazione delle: 26
 - traslazione delle: 23
- costanti, metodo di variazione delle: 326
- criterio
 - di Abel: 436
 - di Sylvester: 172
- curva: 76
 - baricentro di una: 119
 - cartesiana, lunghezza di una: 109
 - che circonda un insieme: 385
 - di Lissajous: 140
 - di livello: 12
 - generalmente iniettiva: 127
 - integrale di f su una: 117
 - kappa: 139
 - lavoro di un campo lungo una: 125,378
 - liscia: 179
 - lunghezza di una: 104,105,109
 - parametrizzazione di una: 78
 - regolare: 93
 - riparametrizzazione di una: 81
 - sostegno di una: 76
 - vettore tangente: 90
 - vettore velocità: 89
- curvatura
 - raggio di: 99
 - scalare: 99,108
 - vettore: 99
- curve, concatenazione o somma di: 122
- dato iniziale: 286
- deltoide: 140
- derivata
 - direzionale: 152
 - parziale: 147
 - serie: 433
 - vettore: 74
- derivazione per serie, teorema di: 428
- differenza
 - di insiemi: 229
 - simmetrica: 229
- differenziabile, funzione: 153
- differenziale: 153,401
 - equazione: 281
 - esterno di una forma: 404
 - forma: 401
 - soluzione di una equazione o sistema: 281
 - totale, teorema del: 158
- differenziali, sistema di equazioni: 281
- Dini
 - condizione del: 441
 - generalizzata, condizione del: 441
 - teorema del: 188,192
- Diocle, cissoide di: 138
- direzionale, derivata: 152
- Dirichlet
 - funzione di: 218
 - problema di: 332
- distanza da un iperpiano: 7
- disuguaglianza
 - di Schwarz: 3
 - di Young: 205
- disuguglianze triangolari: 3
- divergenza: 150
 - teorema della: 389
- dominio naturale di f : 21
- elemento di superficie: 264
- elica cilindrica: 84
- elicoide: 183
- ellissoide: 22
- ellittico
 - iperboloide: 22
 - paraboloide: 14
- epigrafico: 176
- equazione
 - a variabili separabili: 317

- di un iperpiano: 5
- di un piano in \mathbb{R}^2 : 4
- differenziale: 281
- differenziale, soluzione di una: 281
- parametrica del piano: 7
- parametrica della retta: 6
- equazioni differenziali, sistema di: 281
- equicontinua
 - puntualmente, successione: 424
 - successione: 424
- equilimitata, successione: 424
- esatta, forma differenziale: 402
- esistenza
 - globale, teorema di: 297,315
 - teorema di Peano: 289,370
- estensione di una soluzione: 295
- esterna, normale: 388
- esterno
 - differenziale di una forma: 404
 - punto: 33
 - versore normale: 388
 - vettore normale: 388

falde

- iperboloide a due: 21
- iperboloide a una: 22
- Fermat, teorema di: 167
- fili, integrazione per: 247
- flusso di un campo: 388

forma

- differenziale: 401
- differenziale chiusa: 402
- differenziale esatta: 402
- differenziale esterno di una: 404
- normale: 281
- quadratica: 44

formula

- di Gauß-Green: 390
- di spezzamento: 229
- di Taylor: 166

Fourier

- coefficienti di: 440
- serie di: 440
- somma di: 440

frontiera

- di un insieme: 33
- punto di: 33

funzione

- analitica: 436
- C^1 : 74
- C^1 a tratti: 74
- continua: 41
- convessa: 177
- di Dirichlet: 218
- di Weierstraß: 457
- differenziabile: 153
- dominio naturale: 21
- integrabile: 219,220,223,224
- integrale su una curva: 117
- integrale su un insieme: 127
- limite di: 50
- lipschitziana: 46,304
- regolare a tratti: 441

- localmente lipschitziana: 304
- uniformemente continua: 45
- funzioni
 - implicite, teorema delle: 188,192
 - successione di: 408

- Gauß-Green, formula di: 390
- generalizzata, condizione del Dini: 441
- generalizzato, integrale: 255,263
- generalmente iniettiva, curva: 127
- generato
 - cilindro: 17
 - cono: 19
- generatrice: 17
- geometrica, media: 205
- Gerono, lemniscata di: 141
- globale, teorema di esistenza: 297,315
- gradiente: 148
- Green, formula di Gauß-: 390

Hadamard, teorema di Cauchy-: 430

Heine-Cantor, Teorema di: 45

hessiana, matrice: 164

implicite, teorema delle funzioni: 188,192

incollamento, teorema di: 291

indipendenti linearmente, vettori: 6

iniettiva, curva generalmente: 127

iniziale, dato: 286

insieme

- aperto: 31
- approssimabile: 255
- bordo di: 33
- chiuso: 32
- chiusura di: 33
- compatto: 36
- connesso: 37
- connesso per archi: 379
- convesso: 37
- frontiera di: 33
- integrale di f su: 127
- interno di: 33
- limitato: 36
- lunghezza di: 127
- misurabile: 224
- normale: 225,226
- proiezione su alcune variabili: 244
- sconnesso: 37
- sezione di un: 244
- successione che invade un: 255
- trascurabile: 229

insiemi

- differenza di: 229
- differenza simmetrica: 229
- integrabile, funzione: 219,220,223,224
- integrale

- generalizzato: 255,263
- su un insieme: 127
- su un rettangolo: 219
- su una curva: 117
- su una superficie: 264
- superficiale: 264,275

integrali, teorema di riduzione degli: 221,243,247

integrazione

- per fili o strati: 247
- per serie, teorema di: 429
- interno
 - di un insieme: 33
 - punto: 33
- intervallo massimale: 295
- intorno di un punto: 30
- invade un insieme, successione che: 255
- involucro convesso: 68
- iperbolico, paraboloide: 15
- iperboloide
 - a due falde: 21
 - a una falda: 22
 - ellittico: 22
- iperpiano
 - equazione di un: 5
 - distanza da un: 7
- irrotazionale, campo: 376
- isolato, punto: 36
- jacobiana, matrice: 149
- kappa, curva: 139
- Lagrange, moltiplicatori di: 197
- laplaciano: 213
- lavoro di un campo lungo una curva: 125,378
- lemniscata
 - di Bernoulli: 141
 - di Geronio: 141
- limitato, insieme: 36
- limite di funzione: 50
- lineare, combinazione: 6
 - linearmente indipendenti, vettori: 6
- lipschitziana
 - funzione: 46,304
 - localmente, funzione: 304
- liscia
 - curva: 179
 - superficie: 180
- Lissajous, curva di: 140
- livello, curva di: 12
- locale
 - carta: 180
 - punto di massimo o minimo: 167
- localmente lipschitziana, funzione: 304
- logaritmica, spirale: 135
- lunghezza
 - di una curva: 104,105,109
 - di un insieme: 127
- massimale, intervallo: 295
- massimo o minimo locale, punto di: 167
- matrice
 - hessiana: 164
 - jacobiana: 149
- media aritmetica, armonica, geometrica: 205
- metacentrico, punto: 274
- metodo di variazione delle costanti: 326
- misurabile, insieme: 224
- Möbius, nastro di: 391
- moltiplicatori di Lagrange: 197
- nastro di Möbius: 391
- naturale, dominio di f : 21
- negativa, parte: 219
- Neumann, problema di: 332
- norma
 - di un vettore: 2
 - L^2 : 438
 - uniforme: 415
- normale
 - esterna: 388
 - forma: 281
 - insieme: 225,226
 - esterno, versore: 388
 - esterno, vettore: 388
- normali, vettori: 181
- ortogonali
 - funzioni: 439
 - vettori: 4
- palla in \mathbb{R}^n : 30
- paraboloide
 - circolare: 13
 - di rotazione: 13
 - di trascinamento: 20
 - di traslazione: 20
 - ellittico: 14
 - iperbolico: 15
- parallelogramma generato: 9
- parametrica
 - equazione del piano: 7
 - equazione della retta: 6
 - superficie regolare: 180
- parametrizzazione di una curva: 78
- parametro d'arco: 107
- parte positiva e negativa: 219
- parziale, derivata: 147
- Pascal, chiocciola di: 142
- Peano, teorema di esistenza di: 289,370
- piano
 - equazione in \mathbb{R}^2 : 4
 - equazione parametrica: 7
- plurirettangolo: 223
- polari
 - coordinate nel piano: 27
 - coordinate cilindriche: 29
 - coordinate sferiche: 28
- poligonale: 102
 - lunghezza di una: 103
- positiva, parte: 219
- potenze, serie di: 430
- potenziale: 376
- problema
 - di Cauchy: 286
 - di Dirichlet, Neumann, Robin: 332
- prodotto
 - scalare in \mathbb{R}^n : 3
 - vettoriale in \mathbb{R}^3 : 7
- proiezione di un insieme: 244
- propria, estensione: 295
- punto
 - aderente: 33
 - angoloso: 94

- di accumulazione: 35
- di bordo: 33
- di frontiera: 33
- di massimo o minimo locale: 167
- di sella: 169
- esterno: 33
- interno: 33
- isolato: 36
- metacentrico: 274
- stazionario: 168
- puntuale, convergenza: 409,425
- puntualmente equicontinua, successione: 424
- quadratica, forma: 44
- quadrato sommabile, successione a: 448
- raggio
 - di convergenza: 430
 - di curvatura: 99
- regolare
 - a tratti, funzione: 441
 - aperto: 387
 - curva: 93
 - superficie parametrica: 180
- retta
 - equazione parametrica: 6
 - tangente: 91
- riduzione degli integrali, teorema: 221,243,247
- riparametrizzazione di una curva: 81
- Robin, problema di: 332
- rotazione
 - degli assi: 26
 - delle coordinate: 26
 - paraboloide di: 13
 - volume dei solidi di: 248
- rotore: 376
- scalare
 - curvatura: 99
 - prodotto in \mathbb{R}^n : 3
 - velocità: 89
- Schwarz
 - disuguaglianza di: 3
 - teorema di: 164
- sconnesso, insieme: 37
- sella: 15
 - punto di: 169
- separabili, variabili: 317
- sequenziale, caratterizzazione dei compatti: 39
- serie
 - convergenza puntuale: 425
 - convergenza totale: 426
 - convergenza uniforme: 425
 - derivata: 433
 - derivazione per: 428
 - di Fourier: 440
 - di potenze: 430
 - di Taylor: 435
 - integrazione per: 429
- sezione di un insieme: 244
- sferica, superficie: 16
- sferiche, coordinate polari: 28
- sistema di equazioni differenziali: 281
 - soluzione di: 281
- solidi di rotazione, volume dei: 248
- soluzione di equazione differenziale o sistema: 281
 - estensione di una: 295
- somma
 - di curve: 122
 - di Fourier: 440
- sommabile, successione a quadrato: 448
- sostegno di una curva: 76
- spazio tangente: 181
- spezzamento, formula di: 229
- spirale
 - di Archimede: 135
 - logaritmica: 135
- stazionario, punto: 168
- Stokes, teorema di: 392
- strati, integrazione per: 247
- successione
 - a quadrato sommabile: 448
 - che invade un insieme: 255
 - di funzioni: 408
 - equicontinua: 424
 - equilimitata: 424
 - puntualmente equicontinua: 424
- superficiale, integrale: 264,275
- superficie
 - del cilindro: 17
 - del cono: 18
 - elemento di: 264
 - integrale su una: 264
 - liscia: 180
 - parametrica regolare: 180
 - sferica: 16
- Sylvester, criterio di: 172
- tangente
 - retta: 91
 - spazio: 181
 - versore: 90
 - vettore: 90,181
- Taylor
 - formula di: 166
 - serie di: 435
- Teorema
 - del differenziale totale: 158
 - del Dini: 188,192
 - della divergenza: 389
 - delle funzioni implicite: 188,192
 - di Ascoli-Arzelà: 424
 - di Bolzano-Weierstraß: 38
 - di cambiamento di variabile: 234
 - di Cauchy-Hadamard: 430
 - di Cauchy-Lipschitz: 304
 - di derivazione per serie: 428
 - di esistenza di Peano: 289,370
 - di esistenza globale: 297,315
 - di Fermat: 167
 - di Heine-Cantor: 45
 - di incollamento: 291
 - di integrazione per serie: 429
 - di riduzione degli integrali: 221,243,247
 - di Schwarz: 164
 - di Stokes: 392
 - di unicità: 304

- di Weierstraß: 43
- toro: 185
- totale
 - convergenza: 426
 - teorema del differenziale: 158
- trascinamento, paraboloide di: 20
- traslazione
 - degli assi: 23
 - di coordinate: 23
 - paraboloide di: 20
- trascurabile, insieme: 229
- tratti, funzione regolare a: 441
- triangolari, disuguaglianze: 3
- unicità, teorema di Cauchy-Lipschitz: 304
- uniforme
 - convergenza: 414, 425
 - sui compatti, convergenza: 417
 - norma: 415
- uniformemente continua, funzione: 45
- variabile, teorema di cambiamento di: 234
- variabili separabili, equazioni a: 317
- variazione delle costanti, metodo di: 326
- varietà: 180
- velocità
 - scalare: 89
 - vettore: 89
- versore
 - normale esterno: 388
 - tangente: 90, 181
- vettore
 - accelerazione: 96
 - curvatura: 99
 - derivata: 74
 - norma di un: 2
 - normale esterno: 388
 - tangente a una curva: 90
 - velocità: 89
- vettori: 1
 - combinazione lineare di: 6
 - linearmente indipendenti: 6
 - normali: 181
 - ortogonali: 4
- vettoriale, prodotto: 7
- volume dei solidi di rotazione: 248
- Weierstraß
 - funzione di: 457
 - teorema di: 43
- Young, disuguaglianza di: 205

